1. Die Brauergruppe eines Körpers

Die Theorie der Brauergruppen von Körpern ist ein Teil der nicht-kommutativen Algebrentheorie und wurde im Anschluss an den grundlegenden *Struktursatz von Wedderburn* für einfache K-Algebren aus dem Jahr 1907 entwickelt. Nach dem Struktursatz ist jede endlich dimensionale, einfache K-Algebra A zu einer Matrixalgebra $M_n(D)$ über einem Schiefkörper D isomorph. Dabei ist n eindeutig und D bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Insbesondere folgt die Isomporphie der Zentren von A und D. Nach dem *Struktursatz von Wedderburn* besteht das Studium endlich dimensionaler einfacher, zentraler K-Algebren im Wesentlichen aus dem Studium endlich dimensionaler, zentraler Schiefkörper über K und so stellt sich ganz natürlich die Frage nach einer Klassifikation solcher Schiefkörper. Der Satz von Wedderburn legt dann nahe, zwei endlich dimensionale, einfache, zentrale K-Algebren ähnlich zu nennen, wenn sie zu Matrixalgebren über dem selben endlich dimensionalen, zentralen Schiefkörper isomorph sind. Wie der Mathematiker *Richard Brauer* im Jahr 1929 zeigen konnte, lässt sich die Menge $Br(K)$ aller Ähnlichkeitsklassen endlich dimensionaler, einfacher, zentraler K-Algebren mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen. Jede dieser Ähnlichkeitsklassen enthält (bis auf Isomorphie) genau einen endlich dimensionalen zentralen Schiefkörper über K. Das bestimmen der Brauergruppe eines Körpers ist ein im Allgemeinen sehr schwieriges Unterfangen und es gibt viele Körper, deren Brauergruppe bis heute nicht bekannt ist.

Vereinbarung:
- Mit einem Ring wird im Folgenden stets ein assoziativer Ring mit 1 mit $1 \neq 0$ verstanden.
- Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ gelte immer $\varphi(1_A) = 1_B$.

Definition 1.1: Sei A ein Ring und sei K ein Körper.
1. $Z(A) := \{a \in A | ab = ba \text{ für alle } b \in A\}$ heißt das *Zentrum* von A.
2. A heißt genau dann K-*Algebra*, wenn A ein K-Vektorraum ist (wobei die Vektorraumaddition die des Ringes A ist) und

$$\lambda(a\,b) = (\lambda\,a)b = a(\lambda\,b) \tag{1}$$

für alle $\lambda \in K$ und alle $a, b \in A$ erfüllt ist. Unter der (K-) Dimension $dim_K(A)$ einer K-Algebra A verstehen wir die (K-) Dimension des K-Vektorraums A.
3. Eine K-Algebra A heißt *Schiefkörper* oder *Divisionsalgebra* über K, wenn jedes $0 \neq a \in A$ invertierbar in A ist.

Beispiele:
1. Sei $0 < n \in N$. Der Ring $M_n(K)$ der $(n \times n)$-Matrizen über K ist eine K-Algebra mit K-Basis $e_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$, wobei $e_{i,j}$ die Matrix ist, in der Eins an der (i, j)-ten Stelle und Null an allen anderen Stellen steht. Es ist $dim_K(M_n(K)) = n^2$. Für $n \geq 2$ ist $M_n(K)$ nicht kommutativ und kein Schiefkörper. Wie wir noch sehen werden, ist $Z(M_n(K)) \simeq K$ für alle $0 < n \in N$.
2. Der Körper $\mathcal{C}$ der komplexen Zahlen ist ein kommutativer Schiefkörper über $\mathcal{R}$.

3. Die Geschichte der Schiefkörper beginnt mit der Entdeckung der *Quarternionen* durch *W.R. Hamilton (1805-1865)*. Diese Entdeckung aus dem Jahr 1843, ist ein Beispiel für einen nicht-kommutativen Schiefkörpers über $\mathcal{R}$.

Es bezeichne $\overline{z}$ die zu $z \in \mathcal{C}$ konjugiert komplexe Zahl und es sei

$$\mathcal{H} := \{\begin{pmatrix} z & u \\ -\overline{u} & \overline{z} \end{pmatrix} | z, u \in \mathcal{C}\} \subset M_2(\mathcal{C}).$$

$\mathcal{H}$ ist ein Teilring von $M_2(\mathcal{C})$ sowie eine $\mathcal{R}$-Algebra mit $dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}) = 4$ und Basis

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \gamma := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $i \in \mathcal{C}$ mit $i^2 = -1$ ist. $\mathcal{H}$ ist nicht-kommutativ, denn es ist $\alpha\,\beta = -\gamma$ und $\beta\,\alpha = \gamma$. Ferner ist $h^{-1} := det(h)^{-1}\begin{pmatrix} \overline{z} & -u \\ \overline{u} & z \end{pmatrix}$ für alle $0 \neq h \in \mathcal{H}$ ein Element von $\mathcal{H}$ und $h\,h^{-1} = 1$. $\mathcal{H}$ ist somit ein Schiefkörper über $\mathcal{R}$. $\mathcal{H}$ ist bis auf Isomorphie der einzige nicht-kommutative, endlich dimensionale Schiefkörper über $\mathcal{R}$. Man nennt $\mathcal{H}$ den *Hamilton'schen Quaternionenschiefkörper*.

Definition 1.2: Sei A ein Ring.
1. $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq A$ heißt *Rechtsideal* (bzw. *Linksideal*) in A, wenn gilt:
i) Für alle $x, y \in \mathcal{A}$ ist $x + y \in \mathcal{A}$,
ii) Für alle $a \in A$ und alle $x \in \mathcal{A}$ ist $x\,a \in \mathcal{A}$ (bzw. $a\,x \in \mathcal{A}$).
$\mathcal{A}$ heißt *zweiseitiges Ideal*, wenn $\mathcal{A}$ sowohl Rechtsideal als auch Linksideal ist.

2. (0) bezeichne das nur aus der Null bestehende Ideal in A. Ein Rechtsideal (bzw. Linksideal) $\mathcal{A} \neq (0)$ in A heißt minimales Rechtsideal (bzw. minimales Linksideal), wenn für jedes in $\mathcal{A}$ enthaltene Rechtsideal (bzw. Linksideal) $\mathcal{A}'$ folgt, dass entweder $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}' = (0)$ ist.

Bemerkung: In jeder endlich dimensionalen K-Algebra gibt es minimale Rechts- bzw. Linksideale.

Beispiel: Sei A ein Ring. Für jedes $x \in A$ ist dann $Ax := \{ax | a \in A\}$ ein Linksideal in A und entsprechend xA ein Rechtsideal in A und die Menge AxA aller endlichen Summen der $\sum_i a_i\,x\,b_i$ mit $a_i, b_i \in A$ ein zweiseitiges Ideal in A.

Definition 1.3: Sei A ein Ring.
1. Eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe M, zusammen mit einer Abbildung (Multiplikation) $M \times A \longrightarrow M$, $(m, a) \longmapsto ma$ heißt ein A-*Rechtsmodul*, wenn für alle $a, b \in A$ und alle $m, m' \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:
a) $m\,(a + b) = m\,a + m\,b$,
b) $(m + m')\,a = m\,a + m'\,a$,
c) $(m\,a)\,b = m\,(ab)$,
d) $m\,1 = m$.
Ersetzt man Bedingung c) durch die Bedingung c') $(m\,a)\,b = m\,(ba)$, so heißt M ein A-*Linksmodul*. Man notiert dann die Multiplikation $M \times A \longrightarrow M$ auch als eine

Multiplikation von links, also $(m, a) \longmapsto am$ für alle $a \in A, m \in M$. Bedingung c') schreibt sich dann folgendermaßen: $b\,(a\,m) = (ba)\,m$.

2. Sei M ein A-Rechtsmodul (bzw. A-Linksmodul). $U \subset M$ heißt ein *Teilmodul* des A-Rechtsmoduls (bzw. A-Linksmodul) M, wenn für alle $u, u' \in U$ auch $u + u' \in U$ ist und für alle $a \in A$ und $u \in U$ auch $u\,a \in U$ (bzw. $a\,u \in U$) ist.

Bemerkung: 1. Ist A ein kommutativer Ring, so ist jeder A-Rechtsmodul auch ein A-Linksmodul und umgekehrt. Man spricht dann einfach von A-Moduln. Ist A ein Körper, so ist ein A-Modul M ein A-Vektorraum.
2. Sei A eine K-Algebra. Die Menge $End_A(M)$ ist vermöge

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m),\ (f\,g)(m) := f(m)\,g(m) \text{ und } (k\,f)(m) := k\,f(m)$$

in natürlicher Weise eine K-Algebra.

Beispiel:
1. Jede abelsche Gruppe ist in natürlicher Weise ein Z-Modul.

2. Sei A ein Ring. Jedes Rechtsideal (bzw. Linksideal) in A ist ein A-Rechtsmodul (bzw. A-Linksmodul) in A.

Lemma 1.4 *(Lemma von Schur)*: Sei A eine K-Algebra und $\mathcal{A}$ ein minimales Rechtsideal in A, dann ist $D := End_A(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper über K.

Definition 1.5: Eine K-Algebra A heißt *einfach*, wenn A außer (0) und A keine weiteren zweiseitigen Ideale enthält.

Als ein wichtiges Beispiel zeigen wir:

Lemma 1.6: Für jeden Schiefkörper D über K ist die K-Algebra $M_n(D)$ für alle $n \geq 1$ einfach.

Lemma 1.7: Das Zentrum $Z(A)$ einer einfachen K-Algebra A ist ein Körper.

Satz 1.8 *(Struktursatz von Wedderburn):*
Eine endlich dimensionale K-Algebra A ist genau dann einfach, wenn A zu einer Matrixalgebra $M_n(D)$ über einem endlich dimensionalen Schiefkörper D über K isomorph ist. Dabei ist n eindeutig und D bis auf K-Algebraisomorphie eindeutig durch die Isomorphiebeziehung

$$A \simeq M_n(D) \tag{2}$$

bestimmt.

Korollar 1.9: Sei A eine endlich dimensionale, einfache K-Algebra. Ist dann D ein Schiefkörper, so dass $A \simeq M_n(D)$ für ein $n \in N$ ist, so hat man folgende K-Algebraisomorphie:

$$Z(A) \simeq Z(D).$$

Insbesondere ist genau dann K das Zentrum von A, wenn K das Zentrum von D ist.

Definition 1.10:
1. Eine K-Algebra A heißt *zentral*, wenn K (bis auf Isomorphie) das Zentrum von A ist.
2. *Azumaya-Algebra* über K heißt jede endlich dimensionale, zentrale, einfache K-Algebra.

Beispiel: 1. Der Quaternionenschiefkörper $\mathcal{H}$ (vgl. Beispiel 3 zu Definition 3.1.1) ist eine 4-dimensionale Azumaya-Algebra über dem Körper $\mathcal{R}$ der rellen Zahlen.
2. Ist A eine K-Algebra, so liegt K stets im Zentrum $Z(A)$ von A. Da nach Lemma 1.7 das Zentrum $Z(A)$ einer K-Algebra A ein Körper ist, ist A in natürlicher Weise auch eine $Z(A)$-Algebra und als solche zentral.

Korollar 1.11: *Eine K-Algebra A ist genau dann eine Azumaya-Algebra über K, wenn es einen endlich dimensionalen, zentralen Schiefkörper D über K mit $A \simeq M_n(D)$ für ein $n \in N$ gibt.*

Definition 1.12: Zwei Azumaya-Algebren A und B über K heißen *ähnlich*, wenn es einen endlich dimensionalen, zentralen Schiefkörper D über K und $1 \leq r, s \in N$ mit

$$A \simeq M_r(D) \text{ und } B \simeq M_s(D)$$

gibt. Sind A und B ähnlich, so schreiben wir dafür $A \sim B$.

Bemerkung:
1. $\sim$ hat die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $[A]$ einer Azumaya-Algebra A über K nennen wir im Folgenden dann die Ähnlichkeitsklasse von A.
2. Jede Ähnlichkeitsklasse enthält bis auf Isomorphie genau einen endlich dimensionalen, zentralen Schiefkörper über K.

Definition 1.13: Sei K ein Körper. Die Menge aller Ähnlichkeitsklassen

$$[A] := \{B | B \text{ ist Azumaya-Algebra über } K,\ B \sim A\}$$

von Azumaya-Algebren A über K bezeichenen wir mit $Br(K)$. Es ist also

$$Br(K) := \{[A] | \text{ A ist Azumaya-Algebra über } K\}.$$

$Br(K)$ heißt die *Brauergruppe von K.*

Satz 1.14: *Die Menge $Br(K)$ aller Ähnlichkeitsklassen von Azumaya-Algebren über K wird durch die Multiplikation*

$$[A] \cdot [B] := [A \otimes_K B] \tag{3}$$

mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen.

Satz 1.15: *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist die Brauergruppe von K trivial, d.h. es ist $Br(K) = 1$.*

2. Zerfällungskörper einer Azumaya- Algebra

Ist K ein Körper, $L|K$ eine Körpererweiterung von K und A eine Azumaya-Algebra über K, so ist $A_L := A \otimes_K L$ eine Azumaya-Algebra über L. Man fragt nun nach solchen L, für die $[A_L] = [L] = 1$ in $Br(L)$ gilt. L heißt dann ein Zerfällungskörper von A. Die Zerfällungskörper sind ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Brauergruppen. Zu jeder Azumaya-Algebra A über K gibt es Zerfällungskörper von A (z.B. ist der algebraische Abschluss von K ein Zerfällungskörper von A. Es stellt sich dann die Frage, ob es zu A auch stets Zerfällungskörper von endlichem Grad über K gibt. Diese Frage lässt sich mithilfe des *Zentralisatorsatzes*, der aus dem *Satz von Skolem-Noether* folgt, positiv beantworten. Insbesondere sind die maximalen kommutativen Teilalgebren von A Zerfällungskörper von A. Weiter kann man zeigen, dass es zu jeder Azumaya-Algebra über K sogar einen über K endlich dimensionalen galoisschen Zerfällungskörper gibt. Aus diesen Resultaten folgt dann, dass

$$Br(K) = \bigcup_{L|K \; endl. \; gal.} Br(L|K)$$

gilt, wobei $Br(L|K)$ den Kern der folgenden Abbildung bezeichnet.

Lemma 2.1: Sei $L|K$ eine Körpererweiterung von K. Dann ist

$$r_{L|K} : Br(K) \longrightarrow Br(L), \; [A] \longmapsto [A \otimes_K L]$$

ein Gruppenhomomorphismus und für jeden Zwischenkörper E von $L|K$ gilt

$$r_{L|K} = r_{L|E} \circ r_{E|K}.$$

Definition 2.2: Sei K ein Körper und $L|K$ eine beliebige Körpererweiterung von K.
1. Der Homomorphismus $r_{L|K} : Br(K) \longrightarrow Br(L)$ aus Lemma 3.4.1 heißt die *Restriktion* bzgl. $L|K$.
2. $Br(L|K) := Kern\,(r_{L|K})$ heißt die *relative Brauergruppe* von K bzgl. L.
3. Sei A eine Azumaya-Algebra über K. L heißt *Zerfällungskörper* von A, wenn $[A] \in Br(L|K)$ ist. Ist L ein Zerfällungskörper von A, so sagt man auch A zerfällt über L.

Bemerkung:
1. Sei $A \sim B$ mit Azumaya-Algebren A, B über K. Dann ist $[A] = [B]$ und somit jeder Zerfällungskörper von A auch ein Zerfällungskörper von B.
2. Nach Definition gilt

$$Br(L|K) = \{[A] \in Br(K) | A \otimes_K L \sim L\}.$$

3. Offensichtlich ist L genau dann Zerfällungskörper einer Azumaya-Algebra A, wenn man eine (L-Algebra-) Isomorphie

$$A \otimes_K L \simeq M_n(L) \tag{4}$$

mit $n^2 = dim_K(A)$ hat.

Satz 2.3 *(Satz von Skolem-Noether)*:
Sei A eine Azumaya-Algebra über K und sei B eine endlich dimensionale, einfache K-Algebra. Dann gibt es zu beliebigen K-Algebrahomomorphismen $f, g : B \longrightarrow A$ eine Einheit $u \in A$ mit

$$g(b) = u\, f(b)\, u^{-1} \text{ für alle } b \in B.$$

Korollar 2.4 *(Zentralisatorsatz)*:
Sei A eine Azumaya-Algebra über K und B eine einfache Teilalgebra von A mit $dim_K(B) = n$, dann gelten:
1. Man hat eine K-Algebraisomorphie

$$Z_A(B) \otimes_K M_n(K) \simeq A \otimes_K B^O.$$

2. $Z_A(B)$ ist eine einfache K-Algebra und es ist $Z(Z_A(B)) = Z(B)$.
3. Es ist $Z_A(Z_A(B)) = B$.
4. Ist B eine Azumaya-Algebra über K, so ist auch $Z_A(B)$ eine Azumaya-Algebra über K und man hat eine K-Algebraisomorphie

$$Z_A(B) \otimes_K B \simeq A.$$

Definition 2.5: Sei A eine K-Algebra und B eine K-Teilalgebra von A.
1. B heißt *maximale kommutative Teilalgebra* von A, wenn $Z_A(B) = B$ gilt.
2. Ein Teilkörper L von A heißt *maximaler Teilkörper* von A, wenn $L = L'$ für jeden Teilkörper L' von A mit $L \subset L'$ gilt.

Beispiel: Es ist $B := \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(K) \,|\, a, b \in K\}$ eine maximale kommutative Teilalgebra von $M_2(K)$.

Satz 2.6:
1. Sei A eine Azumaya-Algebra über K und L ein Teilkörper von A mit $K \subset L \subset A$ und $n := dim_K(L)$. Dann ist $Z_A(L)$ eine Azumaya-Algebra über L und es gilt

$$A \otimes_K L \simeq Z_A(L) \otimes_L M_n(L).$$

Ist insbesondere $Z_A(L) = L$, ist der Körper L also eine maximale kommutative Teilalgebra von A, dann ist

$$A \otimes_K L \simeq M_n(L) \text{ und } dim_K(A) = (dim_K(L))^2 = n^2.$$

2. Sei D ein endlich dimensionaler, zentraler Schiefkörper über K. Für jeden maximalen Teilkörper L von D gilt dann

$$D \otimes_K L \simeq M_n(L) \text{ mit } n^2 = (dim_K(L))^2 = dim_K(D).$$

Eine Konsequenz von Satz 2.6 ist somit:

Satz 2.7: *Jede Azumaya-Algebra A über K besitzt einen über K endlich dimensionalen Zerfällungskörper L.*

Lemma 2.8: Sei D ein endlich dimensionaler und zentraler Schiefkörper über K mit $D \neq K$. Dann gibt es einen Teilkörper $L \underset{\neq}{\supset} K$ von D, so dass die Körpererweiterung $L|K$ separabel ist.

Satz 2.9: *Sei D ein endlich dimensionaler, zentraler Schiefkörper über K. Dann gibt es einen über K separablen maximalen Teilkörper von D. Jede Azumaya-Algebra A über K besitzt demnach einen Zerfällungskörper L, für den $L|K$ separabel mit $dim_L(K) = \sqrt{dim_K(D)}$ (mit eine zu A ähnlichen Schiefkörper D) ist.*

Korollar 2.10: Jede Azumaya-Algebra A über K besitzt einen Zerfällungskörper L, für den $L|K$ galoissch von endlichem Grad ist.

Korollar 2.11: Sei K ein Körper und C ein algebraischer Abschluss von K. Dann ist

$$Br(K) = \bigcup_{L|K\ endl.\ gal.} Br(L|K),$$

wobei $L|K$ alle in C enthaltenen galoisschen Körpererweiterungen endlichen Grades durchläuft.

3. Kohomologische Beschreibung der Brauergruppe

Definition 3.0: Sei G eine Gruppe und M eine abelsche Gruppe.
a) M heißt ein *G-Modul*, wenn es eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ (\sigma, m) & \longmapsto & \sigma(m) \end{array}$$

gibt mit:
1. $\sigma(\tau(m)) = (\sigma\tau)(m)$,
2. $\sigma(m\,m') = \sigma(m)\sigma(m')$,
3. $1_G(m) = m$,
für alle $\sigma, \tau \in G$, $m, m' \in M$.

b) Seien M und P zwei G-Moduln. *G-Modulhomomorphismus* heißt jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : M \longrightarrow P$, für den $\varphi(\sigma(m)) = \sigma(\varphi(m))$ für alle $\sigma \in G$, $m \in M$ gilt.

c) Sei M ein G-Modul. *2-Kozyklus* oder *Faktorensystem* des G-Moduls M heißt jede Abbildung $f : G \times G \longrightarrow M$ für die

$$f(\sigma, \tau) f(\sigma\tau, \rho) = \sigma(f(\tau, \rho)) f(\sigma, \tau\rho)$$

für alle $\sigma, \tau, \rho \in G$ gilt. Ist $h : G \longrightarrow M$ eine Abbildung, so ist

$$f_h : G \times G \longrightarrow M, f_h(\sigma, \tau) := h(\sigma)\, \sigma(h(\tau))\, h(\sigma\tau)^{-1} \tag{5}$$

ein 2-Kozyklus. Ein solcher heißt ein *zerfallender* 2-Kozyklus oder *2-Korand* von G in M. Die 2-Kozyklen von G in M bilden (unter Multiplikation der Funktionswerte in M) eine Gruppe, die mit $Z^2(G, M)$ bezeichnet sei. Die 2-Koränder von G in M bilden einen Normalteiler von $Z^2(G, M)$, der mit $B^2(G, M)$ bezeichnet sei. Die Quotientengruppe

$$H^2(G,M) := Z^2(G,M)\big/_{B^2(G,M)}$$

heißt die *zweite Kohomologiegruppe von G mit Koeffizienten in M.*

Satz 3.1: *Sei A eine Azumaya-Algebra über K und $L|K$ eine Galoiserweiterung endlichen Grades. Sei $G := Gal(L|K)$ die Galoisgruppe von $L|K$. Ist L ein Teilkörper von A und gilt $dim_K(L) = dim_L(A)$, dann gibt es einen 2-Kozyklus $f : G \times G \longrightarrow L^\times$ und zu jedem $\sigma \in G$ eine Einheit $u_\sigma \in A$ so, dass*

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G} L\, u_\sigma \tag{6}$$

ist und folgende Gleichungen erfüllt sind:

1. $u_\sigma x = \sigma(x)\, u_\sigma$ für alle $x \in L, \sigma \in G$,

2. $u_\sigma u_\tau = f(\sigma,\tau)\, u_{\sigma\tau}$ für alle $\sigma,\tau \in G$.

Satz 3.2: *Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung endlichen Grades und $n = dim_K(L)$. Sei G die Galoisgruppe von $L|K$ und $f : G \times G \longrightarrow L^\times$ ein 2-Kozyklus. Dann gilt:*

a) Der n-dimensionale L-Vektorraum $(L|K,G,f) := \bigoplus_{\sigma \in G} L\, u_\sigma$ mit L-Basis $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ ist mit der durch

1. $u_\sigma\, x = \sigma(x)\, u_\sigma$,
2. $u_\sigma u_\tau = f(\sigma,\tau) u_{\sigma\tau}$,
3. $(\sum_{\sigma \in G} x_\sigma u_\sigma)(\sum_{\tau \in G} y_\tau u_\tau) = \sum_{\sigma,\tau \in G} x_\sigma \sigma(y_\tau) f(\sigma,\tau) u_{\sigma\tau}$

für alle $x_\sigma, y_\tau \in L$, $\sigma,\tau \in G$ definierten Multiplikation in $(L|K,G,f)$ eine Azumaya-Algebra über K mit $dim_L((L|K,G,f)) = (dim_K(L))$ und $1_{(L|K,G,f)} = f(1,1)^{-1} u_{1_G}$.

b) L ist (bis auf kanonische Isomorphie) ein Teilkörper von $(L|K,G,f)$ und es ist $Z_{(L|K,G,f)}(L) = L$, d.h. L ist eine maximale kommutative Teilalgebra von $(L|K,G,f)$ und somit insbesondere ein Zerfällungskörper von $(L|K,G,f)$.

Definition 3.3: Sei $L|K$ eine galoissche Körpererweiterung endlichen Grades und sei G die Galoisgruppe von $L|K$. Sei weiter $f : G \times G \longrightarrow L^\times$ ein 2-Kozyklus von G in $L^\times$. Eine K-Algebra $(L|K,G,f)$ wie in Satz 2 heißt ein *verschränktes Produkt von L und G bezüglich f.*

Bemerkung: Nach Satz 1 und Satz 2 sind für eine Azumaya-Algebra A über K die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es gilt $A \simeq (L|K,G,f)$ für einen 2-Kozyklus f.

2. A enthält einen über K galoisschen Körper L mit $dim_L(A) = dim_K(L)$.

Satz 3.4: *Jede Azumaya-Algebra A über K ist ähnlich einem verschränkten Produkt, d.h. es gibt eine Galoiserweiterung $L|K$ endlichen Grades und ein 2-Kozyklus f von G in $L^\times$ derart, dass $A \sim (L|K, G, f)$ ist, wobei G die Galoisgruppe von $L|K$ bezeichnet.*

Lemma 3.5: Sei $L|K$ Galoiserweiterung endlichen Grades und sei G die Galoisgruppe von $L|K$.

a) Seien $f, g : G \times G \longrightarrow L^\times$ 2-Kozyklen. Genau dann hat man eine K-Algebraisomorphie

$$(L|K, G, f) \simeq (L|K, G, g),$$

wenn eine Abbildung $\lambda : G \longrightarrow L^\times$ mit

$$f(\sigma, \tau) = \lambda(\sigma)\,\lambda(\sigma\tau)^{-1}\sigma(\lambda(\tau))\,g(\sigma, \tau)$$

für alle $\sigma, \tau \in G$ existiert, wenn also fg^{-1} ein 2-Korand ist.

b) Seien f_1 und f_2 normierte 2-Kozyklen von G in $L^\times$, d.h. es gilt $f_i(\sigma, 1) = f_i(1, \sigma) = 1$ für alle $\sigma \in G$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$(L|K, G, f_1) \otimes_K (L|K, G, f_2) \sim (L|K, G, f_1 f_2),$$

wobei $f_1 f_2(\sigma, \tau) := f_1(\sigma, \tau)\, f_2(\sigma, \tau)$ ist.

Satz 3.6: *Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung endlichen Grades und sei G die Galoisgruppe von $L|K$. Dann ist*

$$\alpha : H^2(G, L^\times) \longrightarrow Br(L|K),\ [f] \longmapsto [(L|K, G, f)]$$

ein Gruppenisomorphismus.

4. Zyklische Algebren

Definition 4.1: Ein verschränktes Produkt $(L|K, G, f)$ von L in G bzgl. eines 2-Kozyklus f heißt *zyklische Algebra* oder zyklisch verschränktes Produkt, wenn $L|K$ eine zyklische Körpererweiterung ist.

Bemerkung: Nach Satz 1 und Satz 2 sind für eine Azumaya-Algebra A über K die folgenden Aussagen äquivalent:
1. $A \simeq (L|K, G, f)$ mit einer zyklischen Körpererweiterung $L|K$ und einen 2-Kozyklus f.
2. A enthält einen über K galoisschen Körper L endlichen Grades mit zyklischer Galoisgruppe und es gilt $dim_L(A) = dim_K(L)$.

Beispiel: Der Hamilton'sche Quaternionenschiefkörper $\mathcal{H}$ ist eine zyklische Algebra.

Man hat folgende Spezialfall von Satz 3.1 und 3.2:

Satz 4.2: Sei $L|K$ eine zyklische Erweiterung und $n = dim_K(L)$. Sei σ ein erzeugendes Element der Galoisgruppe G von $L|K$. Dann gilt:
a) Für jedes $a \in K^\times$ ist $f_{\sigma,a} : G \times G \longrightarrow L^\times$ mit

$$f_{\sigma,a}(\sigma^i, \sigma^j) := \begin{cases} 1 & \text{für } i+j < n \\ a & \text{für } i+j \geq n \end{cases}$$

ein 2-Kozyklus von G in $L^\times$ und es gilt

$$(L|K, \sigma, a) := (L|K, G, f_{\sigma,a}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} Lu^i \tag{7}$$

mit einer Einheit $u \in (L|K, G, f_{\sigma,a})$, für die $a := u^n \in K^\times$ und $u\,x = \sigma(x)u$ gilt.

b) Zu jeder zyklischen Algebra $(L|K, G, f)$ gibt es ein $a \in K^\times$, so dass man eine K-Algebraisomorphie

$$(L|K, G, f) \simeq (L|K, \sigma, a)$$

hat.

Satz 4.3: *Sei $L|K$ eine zyklische Körpererweiterung und σ ein erzeugendes Element der Galoisgruppe G von $L|K$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \beta : K^\times/_{N_{L|K}(L^\times)} & \longrightarrow & Br(L|K) \\ a\,N_{L|K}(L^\times) & \longmapsto & [(L|K, \sigma, a)] \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Satz 4.4:
Für die Brauergruppe des Körpers $\mathcal{R}$ der reellen Zahlen gilt:

$$Br(\mathcal{R}) = \{[\mathcal{R}], [\mathcal{H}]\} \simeq Z/_{2Z},$$

wobei $\mathcal{H}$ den Hamilton'schen Quaternionenschiefkörper bezeichnet.

Korollar 4.5: *(Satz von Frobenius (1878)): Ist D ein endlich dimensionaler, zentraler, nicht-kommutativer Schiefkörper über dem Körper $\mathcal{R}$ der reellen Zahlen, so hat man eine $\mathcal{R}$-Algebraisomorphie $D \simeq \mathcal{H}$.*