Spiele als Hilfsmittel zu Strukturuntersuchungen bei Graphen und Hypergraphen

Diplomarbeit
im Studiengang Mathematik
angefertigt am Institut für Mathematische Logik
der Universität Freiburg
von
Isolde Adler

Betreuer: Prof. Dr. J. Flum

12. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Auf einem Graphen lässt sich ein Zwei-Personen-Spiel definieren, das *Räuber-und-Polizisten-Spiel*. Person I spielt k Polizisten, Person II spielt den Räuber. Die Polizisten und der Räuber ziehen auf den Punkten des Graphen. Die Polizisten versuchen, den Räuber zu fangen. In jedem Zug können die Polizisten in Hubschraubern zu neuen Punkten fliegen. Der Räuber muss versuchen zu entkommen, darf sich aber nur entlang von Wegen des Graphen bewegen. Der Räuber ist gefangen, wenn die Polizisten auf dem Punkt landen, auf dem er steht.
Zu einem endlichen Graphen $\mathcal{G}$ gibt es ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$, so dass k Polizisten eine Gewinnstrategie haben. Dieses k ist eine wichtige strukturelle Invariante von $\mathcal{G}$.
Die *Baumweite* eines Graphen $\mathcal{G}$ ist auch eine Invariante des Graphen, und zwar die kleinste natürliche Zahl k, so dass $\mathcal{G}$ „in eine Baumstruktur zerlegt" werden kann mit maximal k Punkten aus $\mathcal{G}$ an jedem Baumpunkt. Eine solche Baumstruktur heißt *Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ (der Weite k)*. *Baumzerlegungen* und *Baumweite*[1] sind schon ausführlich untersucht worden, denn Bäume sind Graphen mit sehr schönen Eigenschaften. Einige dieser schönen Eigenschaften lassen sich auf Graphen mit „baumähnlicher" Struktur, also auf Graphen mit kleiner Baumweite, übertragen.[2] Es zeigt sich zudem, dass viele Probleme, die NP-vollständig auf der Klasse aller Graphen sind, polynomiell oder sogar linear werden, wenn sie auf die Klasse der Graphen mit beschränkter Baumweite eingeschränkt werden.[3]

Seymour und Thomas haben die Baumweite graphentheoretisch untersucht. In [STh93] haben sie hierzu das Räuber-und-Polizisten-Spiel[4] auf Graphen eingeführt und einen Satz bewiesen. Der Satz impliziert:

Korollar 1 (Seymour und Thomas) *Sei $\mathcal{G}$ ein endlicher Graph. Es gibt genau dann eine monotone Gewinnstrategie für k Polizisten auf dem Graphen G, wenn die Baumweite von $G \leq k-1$ ist.*

Eine *monotone* Gewinnstrategie ist eine Variante der Gewinnstrategie, bei der die Polizisten dafür sorgen müssen, dass der Raum, in dem sich der Räuber aufhalten kann, nach jedem Zug kleiner wird. Jede monotone Gewinnstrategie ist insbesondere eine Gewinnstrategie.

---

[1] Diese Konzepte wurden (unter anderen Namen) von R. Halin in [Hal76] erstmals eingeführt. Robertson und Seymour haben, offenbar in Unkenntnis dieser Veröffentlichung, die beiden Konzepte in [RS86] wieder eingeführt.

[2] siehe dazu etwa [Die97], S.253 ff.

[3] Für einen Überblick über Baumweite und die Anwendungen siehe [Bod98] und [Bod93], Abschnitt 4. Einige effiziente Methoden zur Auswertung von Anfragen (in der Logik erster Stufe oder monadischer zweiter Stufe) an Datenbanken beruhen auf Baumzerlegungen. Siehe dazu [FFG00].

[4] dort: *cops and robber game*.

Korollar 1 zeigt, dass das monotone Räuber-und-Polizisten-Spiel auf einem Graphen $\mathcal{G}$ gerade die Baumweite von $\mathcal{G}$ beschreibt.

Korollar 2 (Seymour und Thomas) *Sei $\mathcal{G}$ ein endlicher Graph. Wenn es eine Gewinnstrategie für k Polizisten auf dem Graphen G gibt, dann gibt es sogar eine monotone Gewinnstrategie für k Polizisten.*

Die Korollare 1 und 2 zeigen, dass sowohl das Räuber-und-Polizisten-Spiel also auch das monotone Räuber-und-Polizisten-Spiel die Baumweite beschreiben.

Für *Hypergraphen* haben Gottlob, Leone und Scarcello in [GLS99a] analoge Konzepte eingeführt: Die *Hyperbaumzerlegung* und die *Hyperbaumweite eines Hypergraphen.*[5]
Ein *Hypergraph* ist ein verallgemeinerter Graph: Die Kanten eines (schleifenfreien) Graphen verbinden (oder *enthalten*) immer genau zwei Punkte. Die Kanten eines Hypergraphen dagegen (also die *Hyperkanten*) sind *Teilmengen* der Punkte des Hypergraphen.[6] Insbesondere kann also jeder (ungerichtete) Graph als ein Hypergraph aufgefasst werden. In Analogie zum Räuber-und-Polizisten-Spiel auf Graphen haben Gottlob, Leone und Scarcello das *Räuber-und-Gendarmen-Spiel*[7] auf Hypergraphen eingeführt.[8] Auch hier lässt sich eine monotone Variante des Spiels definieren. In [GLS01a] haben sie gezeigt:

Satz 3 (Gottlob, Leone und Scarcello) *Sei $\mathcal{H}$ ein endlicher Hypergraph. Es gibt genau dann eine monotone Gewinnstrategie für k Gendarmen auf dem Hypergraphen $\mathcal{H}$, wenn die Hyperbaumweite von $\mathcal{H} \leq k$ ist.*

Die *Hyperbaumweite* eines Hypergraphen ist – ähnlich wie die Baumweite – eine Strukturelle Invariante eines Hypergraphen.[9]
Der Satz von Gottlob, Leone und Scarcello zeigt, dass – in Analogie zu Korollar 1 – die Hyperbaumweite durch das monotone Räuber-und-Gendarmen-Spiel beschrieben wird. Weiterhin haben sie die Frage gestellt, ob sich Korollar 2 auch auf Hypergraphen übertragen lässt:

[5] dort: *hypertree decomposition* und *hypertree width*

[6] Zu Herkunft der Begriffsbildung: Die Struktur vieler Probleme aus den Bereichen der künstlichen Intelligenz und der Datenbanktheorie lässt sich durch Hypergraphen beschreiben. Typische Probleme sind etwa das *Boolean Conjunctive Query Problem*, das *Homomorphism Problem* und das *Constraint Satisfaction Problem.* Siehe dazu auch [GLS99b] und [KV00]. Für einen Überblick siehe [GLS01b].

[7] dort: *robber and marshals game*

[8] Da jeder Graph auch als Hypergraph aufgefasst werden kann, kann das Räuber-und-Gendarmen-Spiel auch auf Graphen gespielt werden. Das Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf einem Graphen $\mathcal{G}$ stimmt aber nicht mit dem Räuber-und-Polizisten-Spiel auf $\mathcal{G}$ überein.
Auch die Konzepte Baumzerlegung und Hyperbaumzerlegung sind wesentlich verschieden, ebenso wie die Konzepte Baumweite und Hyperbaumweite.

[9] Zwar lässt sich die *Baumweite* auch für Hypergraphen definieren, es stellt sich aber heraus, dass die *Hyperbaumweite* der bessere Begriff für Hypergraphen ist. Siehe dazu [GLS99a].

Frage 1: Sind das Räuber-und-Gendarmen-Spiel und das monotone Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf Hypergraphen äquivalent?

Die Antwort ist: Nein.
In Abschnitt 1.4 wird ein Hypergraph $\mathcal{H}^1$ vorgestellt, der eine Gewinnstrategie mit drei Gendarmen besitzt, für eine monotone Gewinnstrategie sind dagegen vier Gendarmen nötig. Wir sagen: $\mathcal{H}^1$ hat *Monotoniekosten* $\geq$ *1*.
Durch Verfeinerung der Konstruktion von $\mathcal{H}^1$ gelingt es uns in Abschnitt 1.5.2 für jedes n einen Hypergraphen $\mathcal{H}^n$ mit Monotoniekosten n zu konstruieren. Andererseits werden wir zeigen, dass eine Reihe von Hypergraphen Monotoniekosten 0 haben[10]. Eine strukturelle Charakterisierung der Hypergraphen mit Monotoniekosten 0 gelingt uns nicht.
Gottlob, Leone und Scarcello stellen in [GLS01a] die Frage:

Frage 2: Kann das Konzept der Hyperbaumzerlegung verallgemeinert werden?

Sie selber schlagen vor, durch Fallenlassen einer Bedingung in der Definition von *Hyperbaumzerlegung* eine *verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung* zu definieren. In Abschnitt 2.5 gehen wir kurz auf die verallgemeinerten Hyperbaumzerlegungen ein. In Abschnitt 2.3 wird eine weitere mögliche Verallgemeinerung von Hyperbaumzerlegungen vorgeschlagen.

Aufbau der Arbeit

Kapitel 1 und damit der größte Teil der Arbeit befasst sich mit der Untersuchung des monotonen und des nichtmonotonen Räuber-und-Gendarmen-Spiels:

Abschnitt 1.1 enthält die Notationen und die grundlegenden Definitionen.

In Abschnitt 1.2 werden das monotone und das nichtmonotone Räuber-und-Polizisten-Spiel definiert. Diese Spiele haben Seymour und Thomas in [STh93] zunächst für Graphen definiert. Sie sind aber auch auf Hypergraphen übertragbar.

Speziell für Hypergraphen haben Gottlob, Leone und Scarcello in [GLS01a] das monotone und das nichtmonotone Räuber-und-Gendarmen-Spiel definiert. Diese Spiele unterscheiden sich geringfügig aber entscheidend von den Räuber-und-Polizisten-Spielen. In Abschnitt 1.3 werden diese Spiele vorgestellt und anhand einiger Beispiele, die auch später noch Verwendung finden werden, erklärt.

In Abschnitt 1.4 wird der Hypergraph $\mathcal{H}^1$ konstruiert, auf dem drei Gendarmen zwar eine Gewinnstrategie haben, aber keine monotone. Dies beantwortet Frage 1.

In Abschnitt 1.5 wird zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Hypergraph mit Monotoniekosten n konstruiert.

Für diese Konstruktion werden in Teil 1.5.1 zunächst das Schalterspiel und das monotone Schalterspiel auf Hypergraphen mit spezieller Zusatzstruktur, auf

[10]siehe etwa Lemma 48 oder Bemerkung 52

den *Schaltergraphen*, definiert. Die Existenz eines Schaltergraphen mit Monotoniekosten n ist leichter zu zeigen, als die Existenz eines Hypergraphen mit Monotoniekosten n.

In Abschnitt 1.5.2 zeigt dann der Übertragungssatz, dass zu jedem Schaltergraph mit Monotoniekosten n ein Hypergraph mit Monotoniekosten n existiert. Anschließend wird ein Schaltergraph mit Monotoniekosten n konstruiert.

Wie sehen Hypergraphen mit Monotoniekosten ≥ 1 aus? Eine nahe liegende Vermutung wäre, dass die beiden Varianten des Räuber-und-Gendarmen-Spiels eventuell auf solchen Hypergraphen äquivalent sind, deren Hyperkanten alle die Mächtigkeit 2 haben, also auf Hypergraphen, die eigentlich Graphen sind. In Abschnitt 1.6 wird gezeigt, dass dies nicht der Fall ist.

In Abschnitt 1.6.1 wird dazu ein Gegenbeispiel konstruiert: Ein Graph, auf dem es eine Gewinnstrategie mit vier Gendarmen gibt, auf dem für eine monotone Gewinnstrategie aber fünf Gendarmen benötigt werden. Der Beweis dazu wird begonnen, aber erst im darauf folgenden Abschnitt beendet.

In Abschnitt 1.6.2 wird ausschließlich gezeigt, dass 4 tatsächlich die untere Schranke für eine monotone Gewinnstrategie auf diesem Graphen ist.

Einem Hypergraphen $\mathcal{H}$ können wir die folgenden Invarianten zuordnen: Das kleinste k, so dass k Polizisten eine Gewinnstrategie haben, das kleinste l, so dass l Gendarmen eine Gewinnstrategie haben und das kleinste l', so dass l' Gendarmen eine monotone Gewinnstrategie haben. In Abschnitt 1.7 werden wir einige Korrelationen zwischen diesen Spielinvarianten herstellen.

In Kapitel 2 werden wir schließlich noch einen gemeinsamen Beweis für Korollar 1 und Satz 3 vorstellen und somit die Brücke von den Spielen zu den graphentheoretischen bzw. hypergraphentheoretischen Invarianten schlagen:

In Abschnitt 2.1 werden *Baumzerlegungen* eingeführt und in Abschnitt 2.2 *Hyperbaumzerlegungen*.

In Abschnitt 2.3 definieren wir eine gemeinsame Verallgemeinerung der Baumzerlegungen und der Hyperbaumzerlegungen: Die *$\mathcal{H}$-Baumzerlegungen von $\mathcal{G}$*. Analog definieren wir eine gemeinsame Verallgemeinerung der Räuber-und-Polizisten-Spiele und der Räuber-und-Gendarmen-Spiele: die *$\mathcal{H}$-Polizisten-Spiele von $\mathcal{G}$*.

In Abschnitt 2.4 zeigen wir: Im $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$ gibt es eine monotone Gewinnstrategie für k Polizisten genau dann, wenn es eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ der Weite k gibt. Korollar 1 und Satz 3 folgen dann unmittelbar.

In Abschnitt 2.5 gehen wir kurz auf die *verallgemeinerte Hyperbaumweite* ein und zeigen anhand der Gegenbeispiele aus Kapitel 1, dass die verallgemeinerte Hyperbaumweite nicht durch eine der genannten spieltheoretischen oder hypergraphentheoretischen Invarianten beschrieben wird. Es stellt sich heraus, dass die verallgemeinerte Hyperbaumweite eines Hypergraphen $\mathcal{H}$ gerade die Hyperbaumweite des von $\mathcal{H}$ erzeugten *simplizialen* Hypergraphen ist.

Abschnitt 2.6 gibt anhand von Abschätzungen einen zusammenfassenden Überblick über die Korrelationen zwischen den besprochenen Invarianten.

Dank

Mein Dank gilt

Herrn Professor Jörg Flum für die sehr gute, gezielte Betreuung und für die Kunst, die richtigen Fragen zu stellen.

für die Geduld bei Auskünften zu meinen Fragen:
Karin Halupczok
Immanuel Herrmann
Bernhard Link
Hans Scheuermann
Andreas Schön
Bernhard Seckinger
Stephan Wehrheim

all den Menschen in Griechenland und Deutschland, die mich auf meinem Weg hierher unterstützt haben.

Kapitel 1

Spiele

1.1 Notationen und grundlegende Definitionen

Bevor wir uns in Abschnitt 1.3 den Spielen zuwenden, werden die für Graphen und Hypergraphen notwendigen Sprechweisen eingeführt.

1.1.1 Graphen

Definition 4 *Sei X eine Menge. $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet die Potenzmenge von X. $\mathcal{P}_{=k}(X)$ ist die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X, $\mathcal{P}_{\leq k}(X)$ die Menge aller höchstens k-elementigen Teilmengen von X.*

Definition 5 *a) Ein* (ungerichteter) Graph *ist eine Struktur $\mathcal{G} = (P, K)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge P von* Punkten *und einer zweistelligen Relation K auf P, für die gilt:*

1. Für alle $p \in P$: $(p, p) \notin K$ (K ist irreflexiv)

2. Für alle $p, q \in P$: Wenn $(p, q) \in K$, dann $(q, p) \in K$ (K ist symmetrisch)
Die Elemente von K heißen Kanten.

b) Wenn K nur 1. erfüllt, dann heißt $\mathcal{G}$ ein gerichteter Graph.

Definition 6 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph, $P' \subseteq P$.*
Der Graph $\mathcal{G}' = (P', K')$ mit $K' = K \cap (P' \times P')$ heißt der von P' (in $\mathcal{G}$) erzeugte Subgraph. *In Zeichen: $\mathcal{G}' = \langle P' \rangle^{\mathcal{G}}$, wobei wir auch $\mathcal{G}' = \langle P' \rangle$ schreiben werden, wenn $\mathcal{G}$ dem Kontext zu entnehmen ist.*

Definition 7 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph, $n \in \mathbb{N}$.*
a) Seien $p, q \in P$. p heißt Nachbar *von q, wenn $(p, q) \in K$. p und q heißen dann* benachbart.
b) Ein Weg *in $\mathcal{G}$ ist eine Folge $W = (p_1, p_2, \dots)$ von Punkten in P, wobei p_i Nachbar von p_{i+1} ist für $i = 1, 2, \dots$ und $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.*

Ist die Folge endlich, also $|W| = n$, *so sprechen wir von einem* (endlichen) Weg (der Länge $n-1$ von p_1 nach p_n). *Andernfalls sprechen wir von einem* unendlichen Weg.
c) Seien $p, q \in P$, *und es gebe einen endlichen Weg von* p *nach* q. *Der* Abstand von p und q *ist die Länge des kürzesten Weges von* p *nach* q.
d) Sei $n > 3$. *Ein* Kreis *ist eine Folge* $(p_1, \ldots, p_n)$ *benachbarter Punkte in* P *mit* $p_1 = p_n$, *wobei* $(p_2, \ldots, p_{n-1})$ *ein Weg ist.*
e) $\mathcal{G}$ *heißt* kreisfrei, *wenn in* $\mathcal{G}$ *keine Kreise vorkommen.*
f) Eine Teilmenge $P' \subseteq P$ *heißt* zusammenhängend, *wenn es zu je zwei Punkten* p *und* q *aus* P' *einen Weg von* p *nach* q *gibt, der ganz in* P' *liegt.*
g) $\mathcal{G}$ *heißt* zusammenhängend, *wenn* P *zusammenhängend ist.*
h) Eine Zusammenhangskomponente *von* $\mathcal{G}$ *ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge* $P' \subseteq P$.

Definition 8 *Sei* $\mathcal{G} = (P, K)$ *ein Graph. Eine* Clique in $\mathcal{G}$ *ist eine Teilmenge* $P' \subseteq P$ *mit der Eigenschaft, dass je zwei Punkte* $p, q \in P'$ *durch eine Kante in* K *verbunden sind:* $\mathcal{P}_{=2}(P') \subseteq K$.

Definition 9 *Sei* $\mathcal{G} = (P, K)$ *ein gerichteter Graph.*
a) Der zu $\mathcal{G}$ gehörige (ungerichtete) Graph *ist der Graph* $\mathcal{G}' = (P', K')$, *mit* $P' := P$ *und* $K' := K \cup \{(q, p) \mid (p, q) \in K\}$.
b) Seien $p, q \in P$. p *heißt* Nachbar *von* q, *wenn* p *Nachbar von* q *in dem zugehörigen Graphen ist.*
c) Die Begriffe (ungerichteter) Weg, Abstand, Kreis, kreisfrei, zusammenhängend *und* Zusammenhangskomponente *sind die des zugehörigen Graphen.*
d) Ein gerichteter Weg *in* $\mathcal{G}$ *ist eine Folge* $W = (p_1, p_2, \ldots)$ *aus* P, *wobei* $(p_i, p_{i+1}) \in K$ *ist für* $i = 1, 2, \ldots$.
Ist die Folge endlich, also $W = (p_1, \ldots, p_n)$, *so sprechen wir von einem* (endlichen) gerichteten Weg (der Länge $n-1$ von p_1 nach p_n).
Andernfalls sprechen wir auch von einem unendlichen gerichteten Weg.

Definition 10 *Sei* $\mathcal{G} = (P, K)$ *ein gerichteter Graph, seien* $p, q \in P$.
a) p *ist* Vorgänger *von* q, *wenn* $(p, q) \in K$. *Dann ist* q Nachfolger *von* p.
b) p *habe endlich viele Vorgänger und endlich viele Nachfolger. Der* Eingangsgrad *des Punktes* p *ist die Anzahl seiner Vorgänger. Der* Ausgangsgrad *ist die Anzahl seiner Nachfolger.*
c) Ein Punkt p *heißt* Wurzel von $\mathcal{G}$, *wenn sein Eingangsgrad* 0 *ist.*
d) Ein Punkt p *heißt* Blatt von $\mathcal{G}$, *wenn sein Ausgangsgrad* 0 *ist.*
e) Für einen Punkt p *mit Eingangsgrad* 1 *bezeichnet* $\mathrm{vorg}(p)$ *den eindeutig bestimmten Vorgänger von* p.

Definition 11 *Ein* Baum *ist ein kreisfreier, zusammenhängender, gerichteter Graph* $\mathcal{G} = (P, K)$, *für den gilt:*

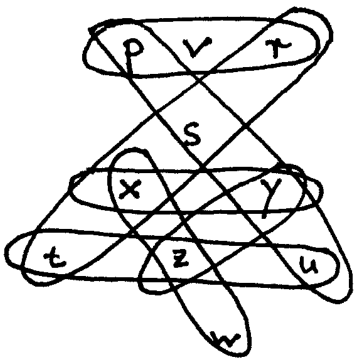

Abbildung 1.1: Ein Hypergraph. Das Beispiel ist aus [GLS01a] entnommen.

1. Es gibt genau eine Wurzel w in P.
2. Alle Punkte p aus P, $p \neq w$, haben Eingangsgrad 1.

Wir werden die Menge der Punkte eines Baumes meistens mit A, die Menge der Kanten eines Baumes meistens mit B bezeichnen. w verwenden wir für die Wurzel.

Definition 12 *Sei $\mathcal{T} = (A, B)$ ein Baum.*
a) Sei $w \in A$ die Wurzel von $\mathcal{T}$. Ein gerichteter Weg $W = (w, p_1, p_2, \dots)$ heißt Ast *von $\mathcal{T}$, falls er unendlich ist, oder falls $W = (w, p_1, \dots, p_n)$ und p_n hat Ausgangsgrad* 0.
b) Ein Subgraph $\mathcal{T}'$ von $\mathcal{T}$, der ein Baum ist, heißt Subbaum *von $\mathcal{T}$.*
c) Sei $a \in A$. Dann bezeichnet $\mathcal{T}_a$ den maximalen Subbaum *$\mathcal{T}_a = (A_a, B_a)$ von $\mathcal{T}$, dessen Wurzel a ist. D. h.:*
$\mathcal{T}_a = \langle A_a \rangle$, wobei $A_a := \{a\} \cup \{c \in A \mid$es gibt einen gerichteten Weg von a nach $c\}$.

Konvention: Wenn nicht anders gefordert, sind Graphen im Folgenden immer endlich.

1.1.2 Hypergraphen

Definition 13 *Ein* Hypergraph *ist ein Paar $\mathcal{H} = (P, K)$, bestehend aus einer nichtleeren, endlichen Menge P von* Punkten *und einer Menge von* Hyperkanten *$K \subseteq \mathcal{P}(P)$.*

Für ein Beispiel siehe Abbildung 1.1.

Bemerkung 14 *Jeder Graph kann als ein Hypergraph aufgefasst werden, dessen Hyperkanten genau zwei Elemente enthalten.*

Wir werden häufig Graphen als Hypergraphen auffassen.

Definition 15 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph, $\mathcal{H} = (P, K)$. Sei außerdem $P' \subseteq P$.*
a) Der Hypergraph $\mathcal{H}' = (P', K')$ mit $K' = \{h \cap P' \mid h \in K\}$ heißt der von P' (in $\mathcal{H}$) erzeugte Subhypergraph. *In Zeichen: $\mathcal{H}' = \langle P' \rangle^{\mathcal{H}}$, wobei wir auch $\mathcal{H}' = \langle P' \rangle$ schreiben werden, wenn $\mathcal{H}$ aus dem Kontext hervorgeht.*
b) $\mathcal{H} \setminus P' := \langle P \setminus P' \rangle$.

Sei $p \in P$. Die Hyperkanten von $\mathcal{H} \setminus \{p\}$ entstehen also aus den alten, indem aus jeder alten Hyperkante ggf. der Punkt p herausgenommen wird. Beachte, dass in einem Subhypergraphen $\mathcal{H} \setminus P'$ Kanten vorkommen können, die in $\mathcal{H}$ nicht vorkommen.

Definition 16 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph, $\mathcal{H} = (P, K)$.*
a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Weg (von p_1 nach p_n) *in $\mathcal{H}$ ist eine Folge von Punkten $(p_1, \ldots, p_n)$, wobei je zwei aufeinander folgende Punkte in einer Hyperkante aus K liegen.*
b) Die Definitionen von zusammenhängend *und* Zusammenhangskomponente *werden wörtlich von Definition 7 übertragen.*

1.2 Räuber und Polizisten

Vor der Definition der Spiele sei zunächst eine informelle Beschreibung gegeben: Sei $k \geq 1$ und $\mathcal{G}$ ein Graph. Im *Räuber-und-Polizisten-Spiel* spielt ein Räuber gegen k Polizisten, die alle auf dem Graphen $\mathcal{G}$ leben. Zu Beginn des Spiels wählen die Polizisten k Punkte von $\mathcal{G}$ als ihre Anfangspositionen aus. Dann wählt der Räuber einen Punkt von $\mathcal{G}$ als seine Anfangsposition aus. Die Polizisten fliegen in Hubschraubern immer von Punkt zu Punkt, während der Räuber entlang von Wegen beliebig weit davonlaufen kann, wobei er darauf achten muss, von den Polizisten nicht gefangen zu werden.
Eine *Runde* des Spiels sieht wie folgt aus: Die Polizisten haben etwa die Punkte g_1, ..., g_k belegt und der Räuber steht auf dem Punkt r. Dann besteigen einige der Polizisten, etwa die auf g_l, ..., g_k stehenden, Hubschrauber und fliegen zu neuen Punkten g_l', ..., g_k'. Der Räuber hört natürlich den Polizeifunk ab und weiß somit, wo die Polizisten landen werden. Er kann nun – noch vor der Landung der Polizisten – blitzschnell zu einem neuen Punkt r' laufen, aber nur entlang eines Weges in $\mathcal{G}$. Der Räuber kann nicht fliegen. Also kann er nur zu solchen Punkten r' gelangen, die durch Wege mit r verbunden sind. Da er von den Polizisten nicht gesehen werden darf, kann er nicht durch solche Punkte laufen, die sowohl *vor* als auch *nach* dem Flug der Polizisten von diesen belegt waren (bzw. sind). Das bedeutet, dass der Räuber beliebig weit innerhalb seiner Zusammenhangskomponente laufen kann, wobei er nicht die Straßen betreten darf, die im Schnitt $\{g_1, \ldots, g_k\} \cap \{g_1, \ldots, g_{l-1}, g_l', \ldots, g_k'\}$ liegen.

Jetzt landen die Hubschrauber. Die Polizisten stehen also auf g_1, ..., g_{l-1}, g'_l, ..., g'_k und der Räuber auf r'. Falls $r' \notin \{g_1, \dots, g_{l-1}, g'_l, \dots, g'_k\}$, wird eine weitere Runde gespielt.

Die Polizisten gewinnen das Spiel, wenn sie nach endlich vielen Runden den Räuber fangen, d. h. wenn eine Position mit Polizisten auf g_1, ..., g_k erreicht wird, bei der $r \in \{g_1, \dots, g_k\}$ ist.

Das *monotone Räuber-und-Polizisten-Spiel* ist eine Variante des eben beschriebenen Spiels, bei der die Polizisten darauf achten müssen, dass nach jedem Zug das Gebiet, in dem sich der Räuber noch aufhalten kann, echt kleiner wird.

Hier sind formale Definitionen der Spiele:

Definition 17 *Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$. Das* Räuber-und-Polizisten-Spiel $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$ *wird von zwei Personen, I und II, gespielt (Person I spielt die Polizisten und Person II den Räuber). Eine* Position *des Spiels* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$ *ist ein Paar (X, r), wobei $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$, $r \in P$.*

Zu Beginn des Spiels wählt I ein $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$. II antwortet durch Wahl eines $r \in P$.

In jeder Runde des Spiels, etwa in Position (X, r), wählt I ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$. II antwortet durch Wahl eines $r' \in P$, für das es einen Weg in $\mathcal{G}$ von r nach r' gibt, der $X \cap X'$ nicht schneidet.

Das Spiel endet, wenn eine Position (X, r) mit $r \in X$ erreicht wird. Diese Position heißt Fangposition. *In diesem Fall gewinnt I. Tritt dieser Fall nie ein, so gewinnt II.*

Vor der Definition des monotonen Spiels werden noch Sprechweisen eingeführt.

Definition 18 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph (oder insbesondere ein Graph) und sei $P' \subseteq P$. Eine Zusammenhangskomponente $R \subseteq P$ in $\mathcal{H} \setminus P'$ heißt* Fluchtraum bezüglich *P'.*

Beachte: Im Falle eines Graphen $\mathcal{G}$ ist es für diese Definition unerheblich, ob $\mathcal{G} \setminus P'$ als Graph oder als Hypergraph berechnet wird.

Sei ab jetzt $\mathcal{G} = (P, K)$ immer ein Graph.

Bemerkung 19 *Seien (X_1, p_1), (X_1, q_1) Spielpositionen, $p_1, \in R$, $q_1, \in R$ und R Fluchtraum bezüglich X_1. Die Polizisten wählen nun etwa die neue Position X_2. Dann gilt:*
II kann jede Position (X_2, p_2), die sie von (X_1, p_1) aus erreichen kann, auch von (X_1, q_1) aus erreichen (und umgekehrt).

Beweis. Es gibt einen Weg von q_1 nach p_1, der X_1 nicht schneidet und es gibt einen Weg von p_1 nach p_2, der $X_1 \cap X_2$ nicht schneidet. Also gibt es einen Weg von q_1 nach p_1, der $X_1 \cap X_2$ nicht schneidet. $\square$

Es spielt also für den weiteren Verlauf des Spiels keine Rolle, an welcher Stelle im Fluchtraum sich der Räuber aufhält.

Konvention: Spielpositionen werden im Folgenden auch mit (X, R) statt mit (X, r) bezeichnet.

Definition 20 *Sei (X, R) eine Spielposition. I macht einen* monotonen Zug*, wenn sie ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$ so wählt, dass der Fluchtraum R' des Räubers bei jedem möglichen Zug von II eine echte Teilmenge des vorherigen Fluchtraumes R ist: $R' \subsetneq R$.*

Definition 21 *Das* monotone Räuber-und-Polizisten-Spiel, mon-Pol$(\mathcal{G}, k)$*, verläuft wie* Pol$(\mathcal{G}, k)$*, wobei I nur monotone Züge machen darf. Wenn es eine Runde gibt, in der dies nicht möglich ist, so gewinnt II.*

Der Handlungsspielraum der Polizisten im monotonen Spiel ist also gegenüber dem im nichtmonotonen Spiel eingeschränkt. Dennoch sind die Spiele äquivalent: Wie schon in Korollar 2 in der Einleitung erwähnt, haben Seymour und Thomas bewiesen: Wenn es auf einem Graphen eine Gewinnstrategie für k Polizisten gibt, dann gibt es auch eine monotone Gewinnstrategie für k Polizisten.

Wie sieht nun eine Spielstrategie aus? Um den Handlungsspielraum der Polizisten genauer zu erfassen, werden wir weiter unten eine *Spielstrategie für die Polizisten* definieren. Intuitiv ist klar, dass diese für jede möglicherweise (je nach Verhalten des Räubers) vorkommende Position $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$ der Polizisten und jeden möglichen Fluchtraum R bezüglich X eine neue Position $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$ für die Polizisten liefern muss. Es ist also zweckmäßig, sich eine Strategie als Baum vorzustellen, an dessen Punkten die Positionen der Polizisten stehen. Ist X so eine Position, so hat X für jeden möglichen Fluchtraum R des Räubers bezüglich X genau einen Nachfolger X'.

Definition 22 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph (bzw. ein Hypergraph).*
Für $X, X_{vorg}, R_{vorg} \subseteq P$ sei
$\mathcal{R}(X, X_{vorg}, R_{vorg}) := \{R \subseteq P \mid R$ *ist Zusammenhangskomponente von* $\mathcal{G} \setminus X$ *derart, dass es einen Weg von* R_{vorg} *nach* R *in* $\mathcal{G} \setminus (X_{vorg} \cap X)$ *gibt*$\}$.

Definition 23 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph. Die Polizisten ziehen in Pol$(\mathcal{G}, k)$ nach $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$.*
a) Die Menge der möglichen Fluchträume bezüglich X *sei die Menge* $\mathcal{R}(X, X_{vorg}, R_{vorg})$*, wenn (X_{vorg}, R_{vorg}) die vorhergehende Spielposition ist, bzw.* $\mathcal{R}(X, \emptyset, P)$ *im Falle des ersten Spielzuges.*

b) Ein Element R aus der Menge der möglichen Fluchträume bzgl. X heißt möglicher Fluchtraum bezüglich X.

Die Menge der *möglichen* Fluchträume bzgl. X ist demnach eine Teilmenge der Menge der Fluchträume bezüglich X. Sie enthält genau diejenigen Fluchträume bezüglich X, die der Räuber von seinem Standpunkt im Spiel aus tatsächlich erreichen kann.
Im Falle des ersten Spielzuges gilt $\mathcal{R}(X, \emptyset, P) = \{R \mid R$ ist Fluchtraum bezüglich $X\}$.

Definition 24 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph.*
1. Eine Strategie im Spiel $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$ für die Polizisten *ist ein Tripel $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$, so dass gilt:*

- *$\mathcal{T} = (A, B)$ ist ein nicht notwendigerweise endlicher Baum.*
- *$\sigma : A \to \mathcal{P}_{\leq k}(P)$.*
- *$\rho : A \to \mathcal{P}(P)$.*
- *$\rho(w) = P$ und $\rho(b) \in \mathcal{R}(\sigma(a), \sigma_{vorg}(a), \rho(a))$, falls $b \neq w$ und $a = vorg(b)$.*
- *Für jedes $a \in A$ und jedes $R \in \mathcal{R}(\sigma(a), \sigma_{vorg}(a), \rho(a))$ existiert genau ein Nachfolger $b \in A$ mit $\rho(b) = R$.*

Hierbei haben wir die Abkürzung

$$\sigma_{vorg}(a) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a = w, \\ \sigma(vorg(a)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

verwendet.

2. $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ ist eine monotone Strategie, *wenn für alle $a \in A \setminus \{w\}$, w Wurzel von $\mathcal{T}$ gilt: $\rho(a) \subsetneq \rho(vorg(a))$.*

Beachte: 1. Ist w die Wurzel von $\mathcal{T}$, so hängen die möglichen Fluchträume bzgl. $\sigma(w)$ nach Definition 23 a) nur von $\sigma(w)$ ab. Jeder Fluchtraum bzgl. $\sigma(w)$ ist also ein möglicher Fluchtraum.
2. Sei $\sigma(a)$ eine Position der Polizisten. Ist die Menge $\mathcal{R}$ der möglichen Fluchträume bezüglich $\sigma(a)$ leer (ist also $(\sigma(a), R)$ eine Fangposition), dann ist a ein Blatt.

Definition 25 *a) $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ ist eine* Gewinnstrategie für $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$, *wenn T endlich ist.*
b) $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ ist eine Gewinnstrategie für mon-$\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$, *wenn sie zusätzlich monoton ist.*

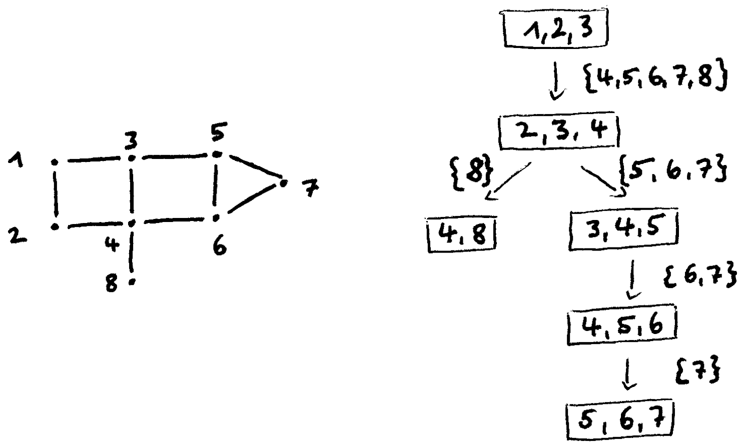

Abbildung 1.2: Ein Graph mit einer zugehörigen monotonen Gewinnstrategie.

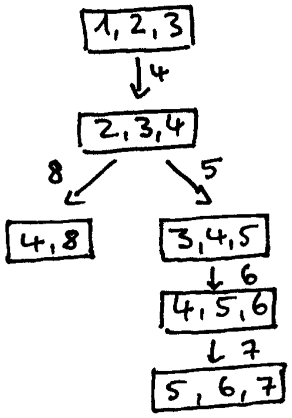

Abbildung 1.3: Die Fluchträume in der monotonen Gewinnstrategie aus Abbildung 1.2, Seite 15, werden jetzt nur noch durch eines ihrer Elemente gekennzeichnet.

Abbildung 1.2 zeigt einen Graphen mit einer zugehörigen monotonen Gewinnstrategie. Um deutlich zu machen, dass eine Strategie zu jedem möglichen Fluchtraum des Räubers eine Position der Polizisten liefert, schreiben wir einen Fluchtraum $\rho(a)$ an die Kante $(\text{vorg}(a), a)$ in $\mathcal{T}$. An einem Punkt a steht dann die Position $\chi(a)$ der Polizisten. $\rho(w) = P$ wird nicht mit eingezeichnet.

Nach Bemerkung 19 ist ein Fluchtraum $\rho(a)$, für $a \in A$, eindeutig durch ein beliebiges seiner Elemente bestimmt. Der Einfachheit halber wird ein Label $\rho(a)$ deshalb in Zukunft durch eines seiner Elemente gekennzeichnet (siehe Abbildung 1.3).

Wenn $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ einen unendlichen Ast enthält, dann ist $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ also keine Gewinnstrategie. Für den Beweis, dass eine Strategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ keine Gewinnstrategie ist, werden wir oft zeigen, dass der Räuber – unabhängig von den Zügen der Poli-

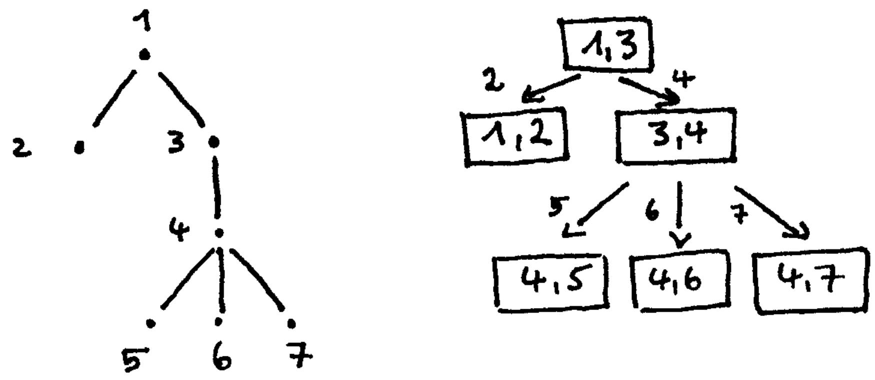

Abbildung 1.4: Eine Baum mit einer Gewinnstrategie für 2 Polizisten.

zisten – immer entkommen kann. Es ist leicht zu sehen, dass dies formal bedeutet, dass $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ einen unendlichen Ast enthält.

Definition 26 *Sei $\mathcal{G}$ ein Graph.*
1. Die Polizistenweite von $\mathcal{G}$ *ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{pw}(\mathcal{G}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *Person I hat eine Gewinnstrategie in* $Pol(\mathcal{G}, k)\}$.
2. Die monotone Polizistenweite von $\mathcal{G}$ *ist die natürliche Zahl*
$\text{mon-pw}(\mathcal{G}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *Person I hat eine Gewinnstrategie in* $\text{mon-Pol}(\mathcal{G}, k)\}$.

Bemerkung 27 *Seien $l, k \in \mathbb{N}$, $l < k$. Wenn die Polizisten keine Strategie in* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$ *haben, dann haben sie auch keine Strategie in* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, l)$.

Beispiel 28 *Jeder endliche Baum $\mathcal{G} = (P, K)$ mit $K \neq \emptyset$ hat Polizistenweite* 2.

Siehe dazu auch Abbildung 1.4.

Beweis. Eine monotone Gewinnstrategie für zwei Polizisten ist: Person I setzt im ersten Zug den Polizisten 1 auf einen beliebigen Punkt p. Im zweiten Zug setzt sie den Polizisten 2 auf den Nachbarn p' von p im Fluchtraum des Räubers. Ist der Räuber noch nicht gefangen, so setzt sie im dritten Zug den Polizisten 1 auf den Nachbarn von p' im Fluchtraum des Räubers etc. Nach dem ersten Zug setzt I also in jedem Zug den Polizisten, der nicht auf einem an den Fluchtraum des Räubers angrenzenden Punkt steht, auf denjenigen Nachbarpunkt des anderen Polizisten, der im Fluchtraum des Räubers liegt.
Einem Polizisten dagegen kann der Räuber immer entkommen, indem er von den beiden Punkten einer beliebigen Kante k immer den freien Punkt belegt. □

Beispiel 29 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ eine Clique, $|P| = n$. Dann gilt:* $\mathrm{gw}(\mathcal{G}) = n$.

Beweis. n Polizisten haben eine Gewinnstrategie: sie belegen einfach alle Punkte. $n - 1$ Polizisten haben keine Gewinnstrategie: In jedem Zug der Gendarmen gibt es immer einen unbelegten Punkt. Der Räuber kann entkommen, indem er in jedem Zug auf den unbelegten Punkt zieht. Das ist immer möglich, da $\mathcal{G}$ eine Clique ist. □

Definition 30 *Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine Gewinnstrategie, $\mathcal{T} = (A, B)$ und w die Wurzel von $\mathcal{T}$. $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ heißt* schwach monoton*, wenn für alle $a \in A \setminus \{w\}$ gilt: $\rho(a) \subseteq \rho(vorg(a))$.*

Offensichtlich ist jede monotone Gewinnstrategie auch schwach monoton. Das folgende Lemma zeigt, dass es zu jeder schwach monotonen Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auch eine monotone Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ gibt:

Lemma 31 *Zu jeder schwach monotonen Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auf $\mathcal{G}$ gibt es eine monotone Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auf $\mathcal{G}$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine schwach monotone Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auf $\mathcal{G}$, $\mathcal{T} = (A, B)$. Ein Punkt $a \in A$ heiße *Stagnationspunkt*, wenn $\rho(a) = \rho(\mathrm{vorg}(a))$. Sei nun $a \in A$ ein Stagnationspunkt: Entferne den Punkt a aus A und die Kante $(\mathrm{vorg}(a), a)$ aus B. Ersetze für jeden Nachfolger b von a die Kante (a, b) durch die Kante $(\mathrm{vorg}(a), b)$.
Wiederhole dieses Verfahren so lange, bis es keine Stagnationspunkte mehr gibt. Da $\mathcal{G}$ endlich ist, entsteht auf diese Weise eine monotone Gewinnstrategie der Weite $\leq k$. □

Um die Existenz einer monotonen Strategie zu zeigen, reicht es also zu zeigen, dass es eine schwach monotone Gewinnstrategie gibt. Davon werden wir häufig Gebrauch machen.

Bemerkung 32 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph. Dann gilt:*
a) Die Baumweite von $\mathcal{G}$ stimmt mit dem Maximum der Baumweiten der Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ überein.
b) Die Polizistenweite von $\mathcal{G}$ stimmt mit dem Maximum der Polizistenweiten der Zusammenhangskomponenten überein.

Beweis. Zu a: Sind Baumzerlegungen der Zusammenhangskomponenten gegeben, so erhalten wir aus der disjunkten Vereinigung dieser Baumzerlegungen eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$, indem wir noch Kanten einfügen, um einen (zusammenhängenden) Baum zu erhalten.
Zu b: Der Räuber kann die Zusammenhangskomponente, die er im ersten Zug gewählt hat, während des gesamten Spiels nicht mehr verlassen, da er nur entlang von Wegen ziehen darf. □

Konvention: Im Folgenden betrachten wir immer zusammenhängende Graphen, ohne dies explizit zu erwähnen.

Wir können das Räuber-und-Polizisten-Spiel auch für Hypergraphen definieren:

Definition 33 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $k \in \mathbb{N}$. Die Definition von* $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}, k)$ *lautet wie die Definition 17 von* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$ *für Graphen $\mathcal{G}$, wobei nur das Wort* Graph *durch* Hypergraph *ersetzt wird.*

Definition 34 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. Der* zu $\mathcal{H}$ gehörige Gaifman-Graph *ist der Graph $\mathcal{G}^{\mathcal{H}} = (P, K')$, so dass für $p, q \in P$ gilt:*

$$\{p, q\} \in K' :\Leftrightarrow \{p, q\} \subseteq h \text{ für ein } h \in K.$$

Der Graph $\mathcal{G}^{\mathcal{H}} = (P', K')$ entsteht also aus $\mathcal{H}$, indem alle Punkte, die in einer gemeinsamen Hyperkante liegen, in eine Clique zusammengefasst werden.

Bemerkung 35 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{pw}(\mathcal{H}) = \mathrm{pw}(\mathcal{G}^{\mathcal{H}}).$$

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.
Das Räuber-und-Polizisten-Spiel auf dem Hypergraphen $\mathcal{H}$ ist also das Räuber-und-Polizisten-Spiel auf dem zu $\mathcal{H}$ gehörigen Gaifman-Graphen $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$.

1.3 Räuber und Gendarmen

Das Räuber-und-Gendarmen-Spiel verläuft wie das Räuber-und-Polizisten-Spiel, mit dem einzigen Unterschied, dass die Gendarmen Hyperkanten statt Punkte belegen. Es reicht, in der Definition 17 $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(P)$ durch $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$ und X durch $\bigcup X$ zu ersetzen, um die Definition des Räuber-und-Gendarmen-Spiels zu erhalten. Während des Fluges der Polizisten kann der Räuber demnach entlang jedem Weg fliehen, der die sowohl vor als auch nach dem Flug der Polizisten belegten Punkte nicht schneidet.

Um Unklarheiten zu vermeiden, sind hier doch noch die formalen Definitionen der Spiele:

Definition 36 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $k \in \mathbb{N}$. Das* Räuber-und-Gendarmen-Spiel $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ *wird von zwei Personen, I und II, gespielt (Person I spielt die Gendarmen und Person II den Räuber). Eine* Position *des Spiels* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ *ist ein Paar (X, r), wobei $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$, $r \in P$.*

Zu Beginn des Spiels wählt I ein $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$. II antwortet durch Wahl eines $r \in P$.

In jeder Runde des Spiels, etwa in Position (X, r), wählt I erneut ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$. II antwortet durch Wahl eines $r' \in P$, für das es einen Weg in $\mathcal{H}$ von r nach r' gibt, der $\bigcup X \cap \bigcup X'$ nicht schneidet.

Das Spiel endet, wenn eine Position (X, r) mit $r \in \bigcup X$ erreicht wird. Diese Position heißt Fangposition. *In diesem Fall gewinnt I. Tritt dieser Fall nie ein, so gewinnt II.*

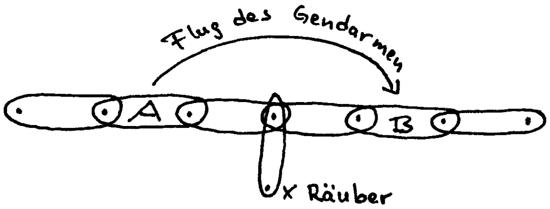

Abbildung 1.5: Während die Gendarmen von A nach B fliegen, kann der Räuber hier zu jedem beliebigen Punkt gelangen.

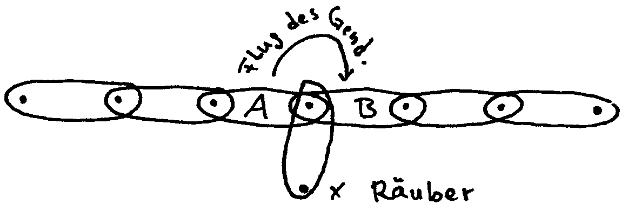

Abbildung 1.6: Während die Gendarmen von A nach B fliegen, kann der Räuber sich hier nicht bewegen.

Die Abbildungen 1.5 und 1.6 zeigen zwei Beispiele für Spielzüge.

Bemerkung 37 *Sei R ein Fluchtraum. Für $p_1, p_2 \in R$ gilt: Jede Position, die der Räuber von p_1 aus erreichen kann, kann er auch von p_2 aus erreichen und umgekehrt.*

Beweis. Der Beweis verläuft genau so wie der von Bemerkung 19. □

Wie im Räuber-und-Polizisten-Spiel gilt also auch hier, dass es für den Verlauf des Spiels keine Rolle spielt, wo genau in R sich der Räuber aufhält. Deshalb werden Spielpositionen ab hier auch mit (X, R) statt mit (X, r) bezeichnet.

Definition 38 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, (X, R) eine Spielposition. I macht einen* monotonen Zug*, wenn sie ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$ so wählt, dass bei jeder Wahl eines $r \in P$ von II der neue Fluchtraum R' des Räubers eine echte Teilmenge des vorherigen Fluchtraumes R ist: $R' \subsetneq R$.*

Definition 39 *Das* monotone Räuber-und-Gendarmen-Spiel mon-RG$(\mathcal{H}, k)$ *verläuft wie* RG$(\mathcal{H}, k)$*, wobei I nur monotone Züge machen darf. Wenn es eine Runde gibt, in der dies nicht möglich ist, so gewinnt II.*

Unser erstes Ziel ist es, die Nichtäquivalenz von monotonem und nichtmonotonem Spiel zu zeigen. Dies wird in Abschnitt 1.4 geschehen.

Bemerkung 40 *Ist der Hypergraph $\mathcal{H}$ nicht zusammenhängend, so kann der Räuber die Zusammenhangskomponente, die er in seinem ersten Zug gewählt hat,* *nicht mehr verlassen. Der Räuber kann also auf $\mathcal{H}$ genau dann gefangen werden, wenn er auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{H}$ gefangen werden kann.*

Der einzige nicht leere zusammenhängende Hypergraph ohne Hyperkanten ist $(\{p\}, \emptyset)$. Hier kann der Räuber offensichtlich nicht gefangen werden.[1] Diesen Fall schließen wir in Zukunft aus.

Konvention: Im Folgenden betrachten wir immer zusammenhängende Hypergraphen $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \neq (\{p\}, \emptyset)$, ohne dies explizit zu erwähnen.

In Analogie zu Definition 23 legen wir fest:

Definition 41 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. Die Gendarmen ziehen in dem Spiel* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ *nach $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(K)$.*
a) Die Menge der möglichen Fluchträume bezüglich $\bigcup X$ *ist die Menge* $\{R \mid R$ *ist Fluchtraum bezüglich* $\bigcup X\}$*, falls dies der erste Spielzug ist, bzw.* $\mathcal{R}(\bigcup X, \bigcup X_{vorg}, R_{vorg})$*, wenn* (X_{vorg}, R_{vorg}) *die vorhergehende Spielposition ist.*

b) Ein Element R aus der Menge der möglichen Fluchträume bzgl. $\bigcup X$ heißt möglicher Fluchtraum bezüglich $\bigcup X$.

Nun wird eine *Strategie der Gendarmen* definiert. Die Definition lautet wie die für das Räuber-und-Polizisten-Spiel (vgl. Definition 24) mit dem Unterschied, dass an Stelle von $\sigma : A \to \mathcal{P}_{\leq k}(P)$ gilt: $\sigma : A \to \mathcal{P}_{\leq k}(K)$ und dass Fluchträume bzgl. $\bigcup \sigma(a)$ statt bzgl. $\sigma(a)$ zu betrachten sind.

Definition 42 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph.*
1. Eine Strategie im Spiel $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ für die Gendarmen *ist ein Tripel $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$, so dass gilt:*

- *$\mathcal{T} = (A, B)$ ist ein nicht notwendigerweise endlicher Baum.*
- *$\sigma : A \to \mathcal{P}_{\leq k}(K)$.*
- *$\rho : A \to \mathcal{P}(P)$.*
- *$\rho(w) = P$ und $\rho(b) \in \mathcal{R}(\bigcup \sigma(a), \bigcup \sigma_{vorg}(a), \rho(a))$, falls $b \neq w$ und $a = vorg(b)$.*
- *Für jedes $a \in A$ und jedes $R \in \mathcal{R}(\bigcup \sigma(a), \bigcup \sigma_{vorg}(a), \rho(a))$ existiert genau ein Nachfolger $b \in A$ mit $\rho(b) = R$.*

2. $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ ist eine monotone Strategie*, wenn für alle $a \in A \setminus \{w\}$, w Wurzel von $\mathcal{T}$ gilt: $\rho(a) \subsetneq \rho(vorg(a))$.*

[1] im Unterschied zu den Räuber-und-Polizisten-Spielen.

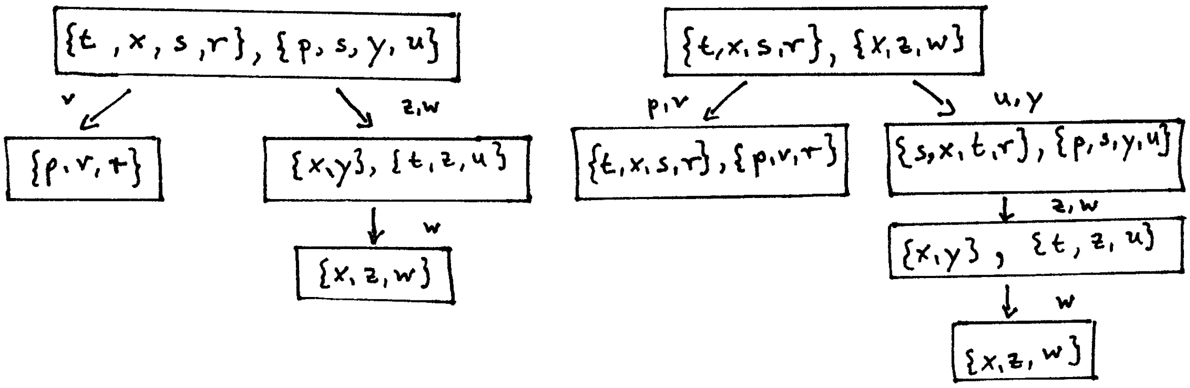

Abbildung 1.7: eine monotone und eine nichtmonotone Gewinnstrategie für den Hypergraphen aus Abbildung 1.1, Seite 10.

Auch hier sehen wir: 1. Ist w die Wurzel von $\mathcal{T}$, so hängen die möglichen Fluchträume bezüglich $\bigcup \sigma(w)$ nur von $\sigma(w)$ ab. Jeder Fluchtraum bzgl. $\bigcup \sigma(w)$ ist also ein möglicher Fluchtraum.
2. Sei $\sigma(a)$ eine Position der Gendarmen. Ist die Menge $\mathcal{R}(\bigcup \sigma(a), \bigcup \sigma_{\text{vorg}}(a), \rho(a))$ der möglichen Fluchträume bezüglich $\bigcup \sigma(a)$ leer (ist also $(\sigma(a), R)$ eine Fangposition), dann ist a ein Blatt.

Definition 43 *1.* $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ *ist eine* Gewinnstrategie für $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$*, wenn* $\mathcal{T}$ *endlich ist.*
2. $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ *ist eine* Gewinnstrategie für mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$*, wenn sie zusätzlich monoton ist.*

Abbildung 1.7 zeigt zwei Beispiele. Wir kennzeichnen jede Kante $(a, \mathrm{vorg}(a))$ wieder durch einen Repräsentanten aus $\rho(a)$ und verzichten auf das Einzeichnen von $\rho(w)$.

Definition 44 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein Hypergraph.*
a) Die Gendarmenweite des Hypergraphen $\mathcal{H}$ *ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *Person I hat eine Gewinnstrategie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)\}$.
b) Die monotone Gendarmenweite des Hypergraphen $\mathcal{H}$ *ist die natürliche Zahl*
$\text{mon-gw}(\mathcal{H}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *Person I hat eine Gewinnstrategie in* mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)\}$.

Sei $l < k$. Wenn die Gendarmen keine Gewinnstrategie in $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ haben, dann haben sie natürlich auch keine Gewinnstrategie in $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, l)$.

Beispiel 45 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *der folgende Hypergraph*[2] *(siehe Abbildung 1.8):*
$P := \{a, b_1, b_2, c, d_1, d_2, e, f_1, f_2, g, h_1, h_2, i\}$ *und*

[2] $\mathcal{H}$ ist sogar ein Graph, da nur Zweierkanten vorkommen.

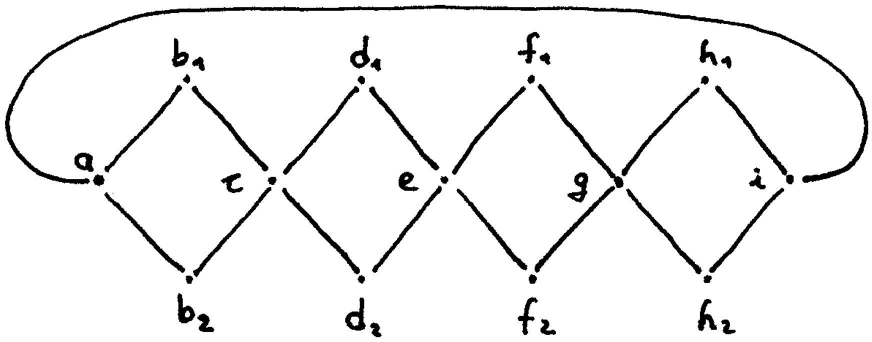

Abbildung 1.8: Der Hypergraph aus Beispiel 45. Hyperkanten, die genau zwei Punkte enthalten, werden (in Anlehnung an die für Graphen übliche Notation) durch eine Kante statt durch eine Menge gekennzeichnet. Hier ist dies überall der Fall.

$K = \bigcup_{j=1}^{2}\{\{a,i\},\{a,b_j\},\{b_j,c\},\{c,d_j\},\{d_j,e\},\{e,f_j\},\{f_j,g\},\{g,h_j\},\{h_j,i\}\}$. *Für* $\mathcal{H}$ *gilt:*

$$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) \leq 3 \textit{ und } \text{mon-gw}(\mathcal{H}) \leq 3.$$

Beweis. Abbildung 1.9 zeigt eine monotone Gewinnstrategie für drei Gendarmen. □

Als weiteres Beispiel soll nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Hypergraph $\mathcal{H}$ mit $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = k$ konstruiert werden. Dazu zunächst eine Definition:

Definition 46 *Seien* $m, n \geq 1$. *Der Hypergraph* $\mathcal{H}_{(n,m)} = (P, K)$, *mit*
$P := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ *und*
$K := \{\{(i_1, i_2), (j_1, j_2)\} \mid (i_1 = j_1 \wedge |j_2 - i_2| = 1) \vee (|j_1 - i_1| = 1 \wedge i_2 = j_2)\}$
heißt $(n \times m)$-Gitter.

Beispiel 47 *Sei* $m > 1$. $\mathcal{H}_{(1,m)}$ *ist ein Weg der Länge* $m - 1$ *(siehe Abbildung 1.10). Es gilt* $\mathrm{gw}(\mathcal{H}_{(1,m)}) = \text{mon-gw}(\mathcal{H}_{(1,m)}) = 1$

Beweis. Es ist prinzipiell mindestens ein Gendarm nötig, um den Räuber zu fangen. Für eine Gewinnstrategie für einen Gendarmen siehe Abbildung 1.11. Diese Gewinnstrategie ist aber bereits monoton. □

Lemma 48 *Sei* $1 < k$, $k \in \mathbb{N}$ *gegeben. Dann gilt für* $\mathcal{H}_{(n,m)}$ *mit* $n = 2(k-1)$ *und* $n \leq m$:

$$\text{mon-gw}(\mathcal{H}_{(n,m)}) = \mathrm{gw}(\mathcal{H}_{(n,m)}) = k$$

Beweis. Zunächst muss eine Gewinnstrategie für k Gendarmen angegeben werden. Anschließend wird gezeigt, dass $k-1$ Gendarmen den Räuber nicht fangen können. Dann ist k die untere Schranke.
Beispielhaft wird in Abbildung 1.13 eine Gewinnstrategie für den Fall $k = 3$ angegeben.

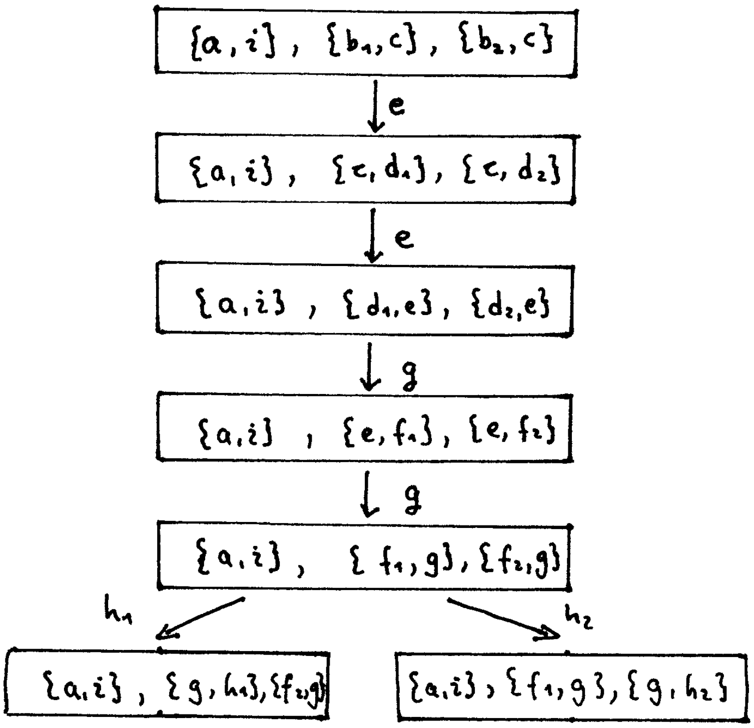

Abbildung 1.9: Eine monotone Gewinnstrategie für drei Gendarmen auf dem Hypergraphen aus Beispiel 45.

Abbildung 1.10: $\mathcal{H}_{(1,m)}$ ist ein Weg der Länge $m-1$. (Identifiziere i mit $(i,1)$ für $i = 1,\ldots,m$.)

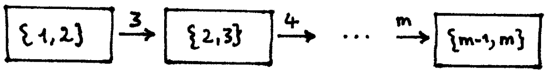

Abbildung 1.11: Eine Gewinnstrategie für einen Gendarmen auf dem Weg der Länge $m-1$ aus Abbildung 1.10, Seite 23.

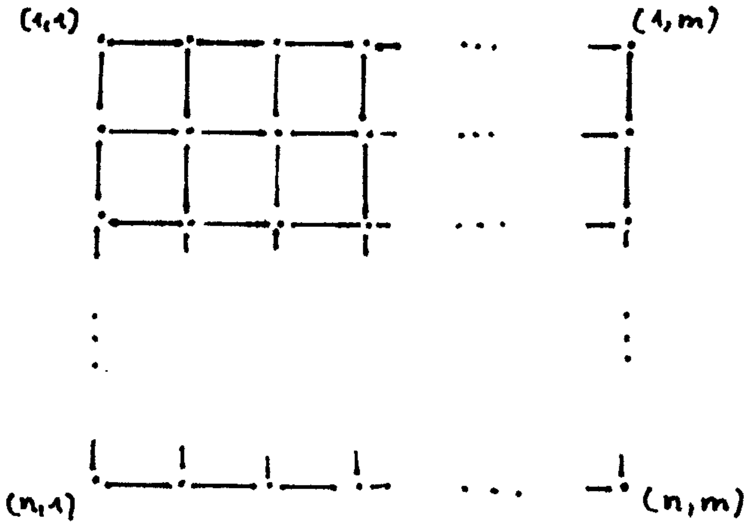

Abbildung 1.12: Ein $(n \times m)$-Gitter $\mathcal{H}_{(n,m)}$ (vgl. Definition 46).

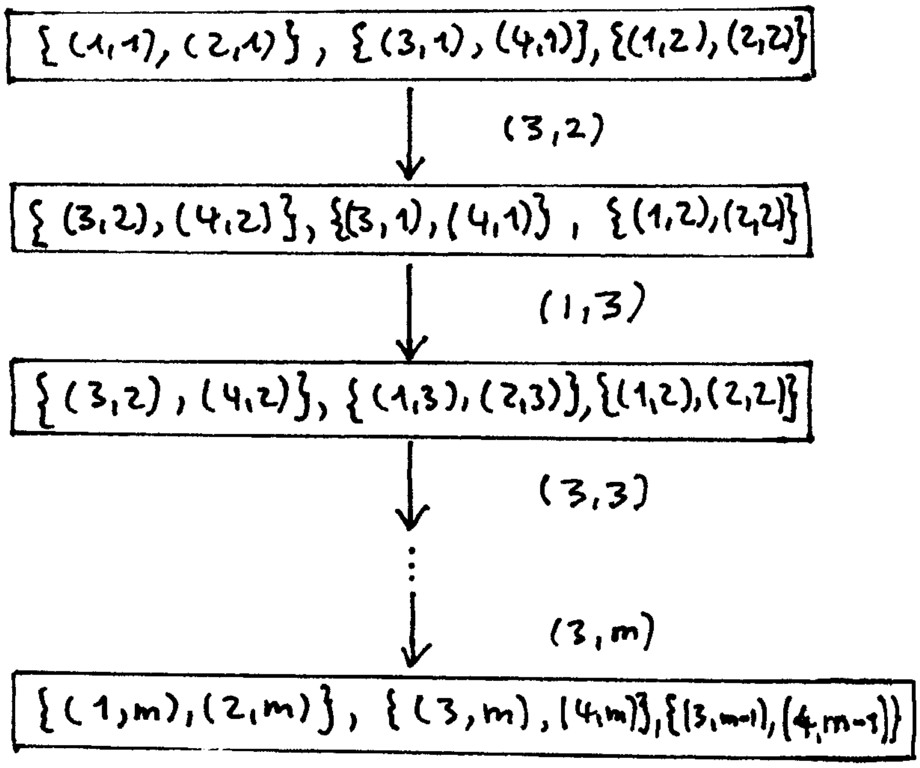

Abbildung 1.13: Eine Gewinnstrategie für drei Gendarmen auf einem $(4 \times m)$-Gitter, $m \geq 4$.

Diese ist aber bereits eine monotone Gewinnstrategie. Im allgemeinen Fall ziehen die Gendarmen wiederholt nach dem Prinzip aus Abbildung 1.14. Also gilt: mon-gw$(\mathcal{H}_{(m,n)}) \leq k$.
Es reicht noch zu zeigen, dass es keine nichtmonotone Gewinnstrategie für $k-1$ Gendarmen gibt. Angenommen II hätte nur $k-1$ Gendarmen zur Verfügung. Wir zeigen, dass der Räuber dann immer entkommen kann.

Behauptung: Für alle $X \in \mathcal{P}_{\leq k-1}(K)$ gibt es eine Zeile oder eine Spalte im Gitter, deren Schnitt mit X leer ist.

Beweis der Behauptung: Um alle Zeilen zu belegen, müssen die Gendarmen auf $k-1$ senkrechten Kanten stehen. Um aber alle Spalten (von denen es mindestens genauso viele wie Zeilen gibt) zu belegen, müssen die Gendarmen auf $k-1$ waagerechten Kanten stehen. Das ist aber nicht gleichzeitig möglich. Also gibt es unbelegte Zeilen oder Spalten.
Diese unbelegten Zeilen oder Spalten heißen *leere Zeile* bzw. *leere Spalte* bzgl. X.

Die Gendarmen fliegen nun etwa von X nach X'.
Der Räuber zieht nun so, dass für alle Positionen (X, r), die auftreten können, die folgende Invariante erhalten bleibt:

$(*)$ r liegt in einer leeren Zeile oder Spalte.

Ist das immer möglich?
Der Räuber kann in seinem ersten Zug in die vorhandene leere Zeile oder Spalte gelangen.
Fall 1: Ist $\bigcup X = \bigcup X'$, so bleibt der Räuber stehen.
Fall 2: Es gibt eine leere Spalte S bezüglich $\bigcup X$ und eine leere Zeile S' bzgl. $\bigcup X'$ (oder umgekehrt). Dann ist $S \cup S'$ während des Fluges der Gendarmen nicht belegt. Also gibt es einen Weg von S nach S', der $\bigcup X \cap \bigcup X'$ nicht schneidet.
Fall 3: $O.E.$ gäbe es bezüglich $\bigcup X$ eine freie Spalte S und bzgl. X' auch eine freie Spalte S' (bei Zeilen geht es aufgrund der Symmetrie analog). Da mindestens ein Gendarm seine Position ändert, existiert während des Fluges der Gendarmen eine leere Zeile. Diese hat aber Schnittpunkte mit S und S', also gibt es einen Weg von S nach S', der $X \cap X'$ nicht schneidet.
Somit kann der Räuber immer so ziehen, dass $(*)$ erhalten bleibt. Also kann er immer entkommen. $\square$

Die Forderung der echten Inklusion $\rho(a) \subsetneq \rho(\text{vorg}(a))$ in der Definition der *Monotonie* einer Gewinnstrategie (an Stelle der einfachen Inklusion $\rho(a) \subseteq \rho(\text{vorg}(a))$) macht einige Beweise komplizierter. In diesen Fällen ist es geschickter, mit *schwacher Monotonie*, zu arbeiten:

Definition 49 *Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine Gewinnstrategie, $\mathcal{T} = (A, B)$ und w die Wurzel von $\mathcal{T}$. $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ heißt* schwach monoton*, wenn für alle mit $a \in A$, $a \neq w$ gilt: $\rho(a) \subseteq \rho(vorg(a))$.*

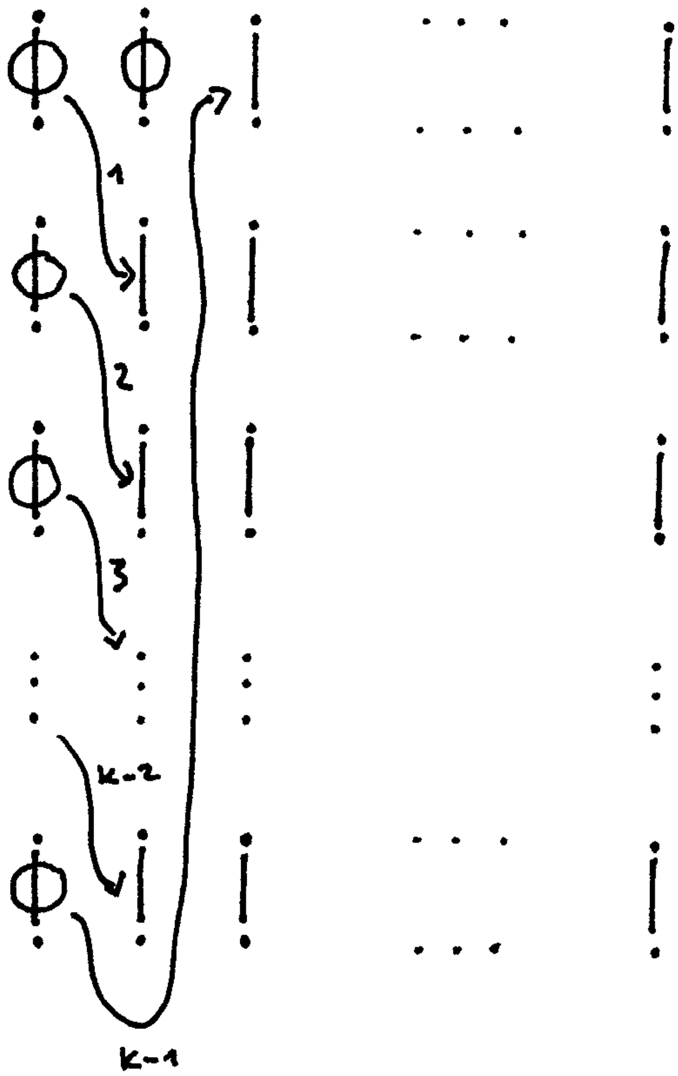

Abbildung 1.14: Im allgemeinen Fall ziehen die Gendarmen wiederholt nach diesem Prinzip. Der Übersichtlichkeit halber sind hier nicht alle Hyperkanten des Gitters eingezeichnet, sondern nur die, auf die die Gendarmen im Laufe der Strategie auch ziehen. Die Kreise deuten die Positionen der Gendarmen an. Die nummerierten Pfeile geben an, in welcher Reihenfolge und wohin die Gendarmen ziehen. In jeder Runde zieht genau ein Gendarm.

Lemma 50 *Zu jeder schwach monotonen Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auf $\mathcal{H}$ gibt es eine monotone Gewinnstrategie der Weite $\leq k$ auf $\mathcal{H}$.*

Beweis. Der Beweis verläuft genau so wie der von Lemma 31. $\square$

1.4 Nichtmonotone Gendarmen sind stärker

Wie in der Einleitung erwähnt, lässt sich für die Räuber-und-Polizisten-Spiele auf Graphen zeigen, dass es zu jeder nichtmonotonen Gewinnstrategie der Weite k bereits eine monotone Gewinnstrategie der Weite k gibt. Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass sich dieses Resultat nicht auf die Spiele auf Hypergraphen übertragen lässt. Dies geschieht durch Konstruktion eines Hypergraphen $\mathcal{H}^1$ mit $\text{mon-gw}(\mathcal{H}^1) = 4$ und $\text{gw}(\mathcal{H}^1) = 3$.

Zunächt aber noch ein wenig Vorarbeit:

Definition 51 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein* n-Zykel *ist ein Hypergraph $\mathcal{Z} = (P, K)$ mit $P := \{1, \ldots, n\}$ und $K := \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq n,\ i - j \equiv 1 \bmod n\}$.*

Bemerkung 52 *Sei $\mathcal{Z}$ ein n-Zykel, $n > 2$. Dann gilt:*

$$\text{mon-gw}(\mathcal{Z}) = \text{gw}(\mathcal{Z}) = 2$$

Definition 53 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $p, q \in P$, $p \neq q$.* p und q mit einer Zweierkante verbinden, *bedeutet, von $\mathcal{H}$ zu dem Hypergraphen $\mathcal{H}'$ mit $\mathcal{H}' = (P, K \cup \{p, q\})$ überzugehen.*

Nun können wir den Hypergraphen $\mathcal{H}^1$ definieren.

Definition 54 *$\mathcal{H}^1 = (P, K)$ sei der folgende Hypergraph (siehe Abbildung 1.15):
Seien $G := \{g_{ij} \mid i, j \in \{1, 2\}\} \cup \{g'_{i,j} \mid i, j \in \{1, 2\}\}$,
$P := G \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 0', 1', 2', 3', 4'\}$ und
$K := \{\{p, g\} \mid p \in P \setminus G \text{ und } g \in G\} \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\} \cup \{\{4', 2'\}, \{2', 3'\}, \{2', 1'\}\} \cup \{\{1', 0'\}, \{3', 0'\}, \{0', 0\}, \{3, 0\}, \{1, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 2\}\}$,
wobei $a_1 = \{g_{1,1}, g_{1,2}, g'_{1,1}, g'_{1,2}\}$, $a_2 = \{g_{2,1}, g_{2,2}, g'_{2,1}, g'_{2,2}\}$,
$b_1 = \{g_{1,1}, g_{2,1}, g'_{1,1}, g'_{2,1}\}$ und $b_2 = \{g_{1,2}, g'_{1,2}, g_{2,2}, g'_{2,2}\}$.
Die Punkte aus G werden im Folgenden* Ballonpunkte *genannt, die anderen* Bodenpunkte.

Bemerkung 55 *Eine monotone Gewinnstrategie der Weite 4 für $\mathcal{H}^1$ ist Abbildung 1.16 zu entnehmen.*

Bemerkung 56 *Eine nichtmonotone Gewinnstrategie der Weite 3 für $\mathcal{H}^1$ ist Abbildung 1.17 zu entnehmen.*

Bemerkung 57 *Sei $\mathcal{H}^1 = (P, K)$ und $X \in \mathcal{P}_{\leq 4}(K)$ eine Position von maximal vier Gendarmen.
a) $P \setminus \bigcup X$ enthält mindestens einen Bodenpunkt.
b) Wenn $\bigcup X$ einen Ballonpunkt auslässt, also $P \setminus (\bigcup X) \cap G \neq \emptyset$, dann ist $P \setminus \bigcup X$ zusammenhängend.*

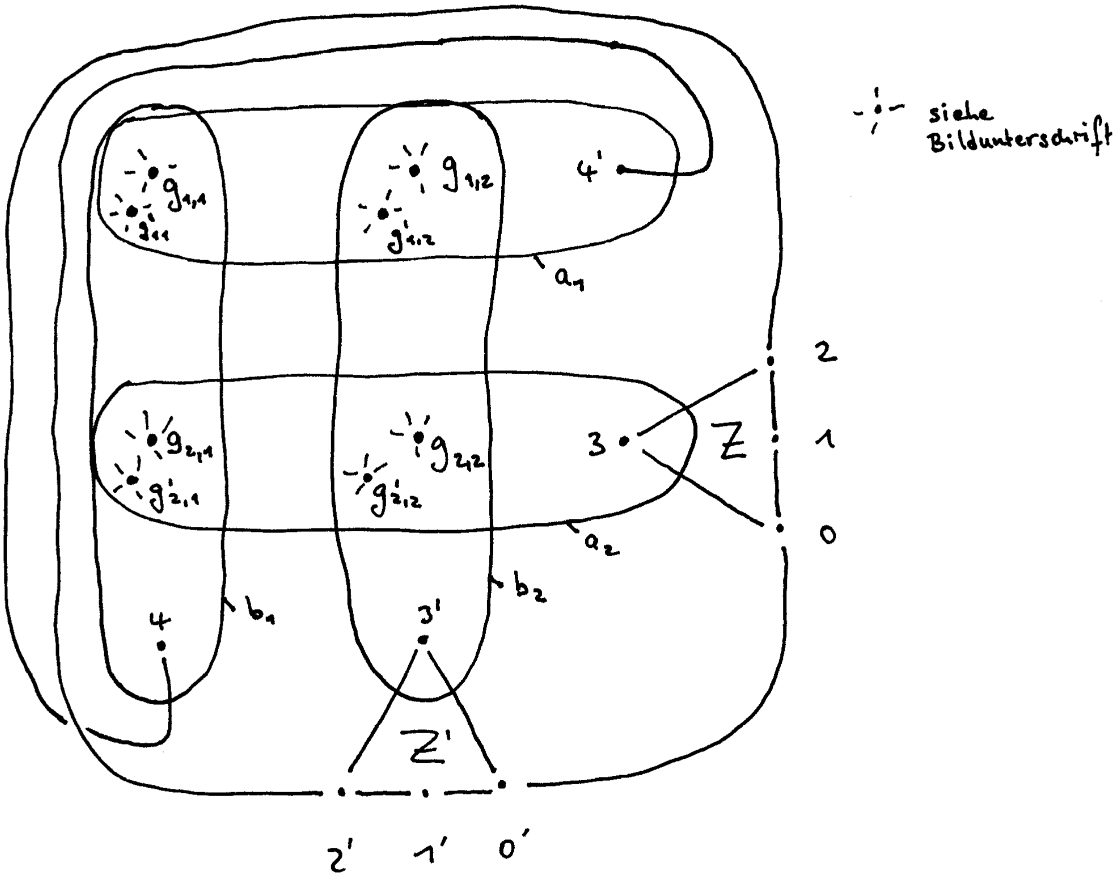

Abbildung 1.15: $\mathcal{H}^1$: Desweiteren gelte in $\mathcal{H}^1$ zusätzlich: Jeder Ballonpunkt ist mit allen Bodenpunkten durch eine Zweierkante verbunden. Diese Kanten sind der Übersichtlichkeit halber nur durch Kränze um die Ballonpunkte angedeutet.

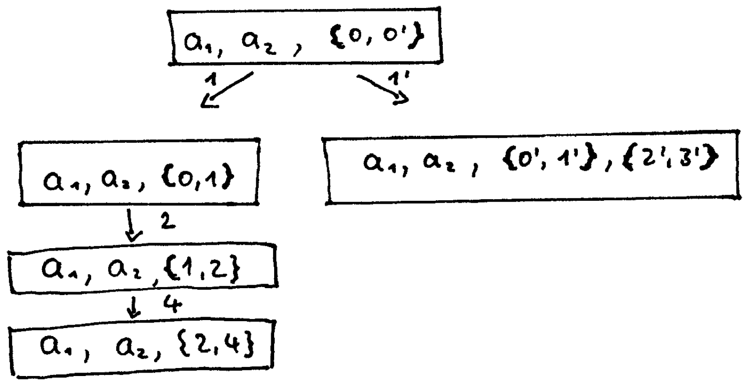

Abbildung 1.16: Eine monotone Gewinnstrategie für 4 Gendarmen auf $\mathcal{H}^1$.

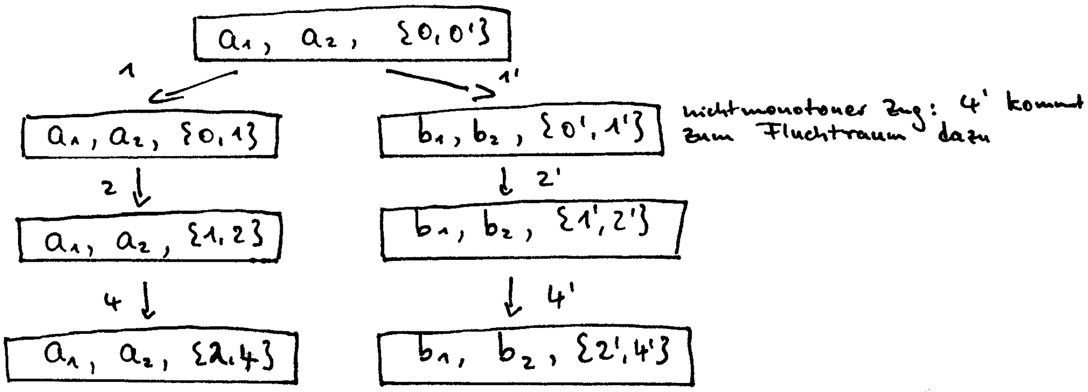

Abbildung 1.17: Eine nichtmonotone Gewinnstrategie für 3 Gendarmen auf $\mathcal{H}^1$.

Beweis. Zu a: Es ist leicht zu sehen, dass mindestens zwei Gendarmen gebraucht werden, um die Punkte 1 und 3 zu belegen. Von Ballonpunkten abgesehen können diese Gendarmen höchstens noch 0 oder 2 mitbelegen.
Analog werden mindestens zwei Gendarmen gebraucht, um die Punkte $1'$ und $3'$ abzudecken. Damit sind vier Gendarmen beschäftigt und immer noch die Punkte 4 und $4'$ frei.
Zu b: Sei $g \in G \setminus \bigcup X$. Da g Ballonpunkt ist, ist g mit jedem Bodenpunkt aus $P \setminus \bigcup X$ über eine Kante verbunden. Da $P \setminus \bigcup X$ nach a) einen Bodenpunkt p enthält, ist g über p auch mit jedem eventuell noch vorhandenen Punkt aus $P \setminus \bigcup X$ verbunden. □

Lemma 58 *Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ mit $\mathcal{T} = (A, B)$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{H}^1$ der Weite ≤ 4. Wenn $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ minimal ist in dem Sinne, dass kein echter Subbaum $\mathcal{T}_a$ von $\mathcal{T}$ eine Gewinnstrategie $(\mathcal{T}_a, \sigma|_{\mathcal{T}_a}, \rho|_{\mathcal{T}_a})$ induziert, dann gilt $G \subseteq \sigma(a)$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Angenommen, $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ ist minimal, $a \in A$, aber $g \in G \setminus \sigma(a)$. Nach Bemerkung 57 ist $P \setminus \bigcup X$ zusammenhängend, d. h. a hat nur einen Nachfolger b, und der Subbaum $\mathcal{T}_b$ liefert eine Gewinnstrategie $(\mathcal{T}_b, \sigma|_{\mathcal{T}_b}, \rho|_{\mathcal{T}_b})$. Widerspruch. □

Zur Erinnerung: Gewinnstrategien sind immer endlich. Also gibt es zu jeder Gewinnstrategie eine minimale.

Korollar 59 *Für $\mathcal{H}^1$ gibt es keine nichtmonotone Gewinnstrategie der Weite < 3.*

Beweis. Sonst gäbe es eine minimale Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ der Weite 2, $\mathcal{T} = (A, B)$. Nach Lemma 58 würden die beiden Gendarmen in jedem Punkt der Strategie G abdecken. Dafür müssten sie jeweils auf a_1 und a_2 bzw. auf b_1 und b_2

stehen. Der unbehelligt auf Punkt 1 stehende Räuber würde derweil den Gendarmen beim „Gewinnen“ zusehen. □

Lemma 60 *Es gibt keine monotone Gewinnstrategie der Weite* 3 *für* $\mathcal{H}^1$.

Beweis. Angenommen es gäbe eine minimale monotone Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ der Weite 3, $\mathcal{T} = (A, B)$. Nach Lemma 58 wäre $G \subseteq \sigma(a)$ für alle $a \in A$.
Leicht zu sehen ist, dass daraus für jedes $a \in A$ folgt: entweder $\{a_1, a_2\} \subseteq \sigma(a)$ oder $\{b_1, b_2\} \subseteq \sigma(a)$.
Wir zeigen jetzt, dass der Räuber immer entkommen kann: Sei $\mathcal{Z}$ der Zykel mit den Punkten $\{0, 1, 2, 3\}$ und analog $\mathcal{Z}'$ der Zykel mit den Punkten $\{0', 1', 2', 3'\}$. w sei die Wurzel von $\mathcal{T}$.
Seien $\{a_1, a_2\} \subseteq \sigma(w)$: Person I beginnt also mit Belegen der Hyperkanten a_1 und a_2 durch die *Wächtergendarmen* W_1 und W_2. Der dritte Gendarm, der *Verfolger* V, belege eine beliebige weitere Kante. II reagiert nun, indem sie einen Punkt des Zykels $\mathcal{Z}'$ belegt. Dies ist möglich, da mindestens ein Punkt von $\mathcal{Z}'$ nicht durch V blockiert ist. (Falls $\{b_1, b_2\} \subseteq \sigma(w)$, so reagiert II der Symmetrie entsprechend in $\mathcal{Z}$ usw.)
Nach Bemerkung 1 ist $\text{mon-gw}(\mathcal{Z}') = 2$. Das heißt: V allein kann den Räuber aus $\mathcal{Z}'$ nicht vertreiben. Der einzig mögliche Zug für I ist, mit W_1 und W_2 nach b_1 und b_2 zu ziehen.

1. Fall: $2' \in \rho(\text{vorg}(a))$. Dann kommt 3 oder 4 zum Fluchtraum hinzu, je nach Position von V im Zug a.
2. Fall: $0' \in \rho(\text{vorg}(a))$. Dann passiert genau dasselbe.
Also gibt es keine minimale monotone Gewinnstrategie der Weite 3. Da es nach Lemma 58 zu jeder monotonen Gewinnstrategie eine minimale monotone Gewinnstrategie der selben Weite gibt, kann es also keine monotone Gewinnstrategie der Weite 3 geben. □

Satz 61 *Für* $\mathcal{H}^1$ *gilt:* $\text{mon-gw}(\mathcal{H}^1) = 4$ *und* $\text{gw}(\mathcal{H}^1) = 3$.

□

1.5 Unbeschränkte Monotoniekosten

Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein Hypergraph konstruiert, bei dem es genügte, einen weiteren Gendarm hinzuzunehmen, um neben einer nichtmonotonen Gewinnstrategie auch eine monotone zu erhalten.
Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ Hypergraphen gibt, bei denen es nicht ausreicht, n Gendarmen dazuzunehmen, um neben einer nichtmonotonen Gewinnstrategie eine monotone zu erhalten.

Satz 62 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es einen Hypergraphen* $\mathcal{H}$*, so dass gilt:*

$$\text{mon-gw}(\mathcal{H}) - \text{gw}(\mathcal{H}) \geq n.$$

Die folgende Definition ermöglicht eine Charakterisierung von Hypergraphen anhand der Gendarmenweiten:

Definition 63 *a) Ein* $(k,k')-$Hypergraph *ist ein Hypergraph* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = k$ *und* $\text{mon-gw}(\mathcal{H}) = k'$.
b) Sei $\mathcal{H}$ *ein* $(k,k')-$Hypergraph *mit* $k' - k = n$. *Dann ist* $\mathcal{H}$ *ein* Hypergraph mit Monotoniekosten n.
c) Sei $\mathcal{H}$ *ein* $(k,k')-$Hypergraph. $\mathrm{RG}(\mathcal{H},k)$ *(bzw. textnormalmon –* $RG(\mathcal{H},k')$*) heißt dann* minimales sicheres (monotones) Spiel auf $\mathcal{H}$.
d) Sei $\mathcal{H}$ *ein* $(k,k')-$Hypergraph *und sei* $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ *eine (monotone) Gewinnstrategie auf* $\mathcal{H}$ *für* k *(bzw.* k'*) Gendarmen. Dann heißt* $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ Zeugin für $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = k$ (bzw. $\text{mon-gw}(\mathcal{H}) = k'$).

Ein minimales sicheres Spiel ist also ein Spiel für k Gendarmen, in dem es eine Gewinnstrategie für die Gendarmen gibt. $k-1$ Gendarmen hingegen haben keine Gewinnstrategie.

Beispiel 64 $\mathcal{H}^1$ *aus Satz 61 ist ein* $(3,4)-$*Hypergraph.*

Beweis. Siehe Satz 61. □

Satz 62 besagt also, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Hypergraphen mit Monotoniekosten $\geq n$ gibt. Wir zeigen sogar:

Satz 65 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es einen Hypergraphen* $\mathcal{H}^n$ *mit Monotoniekosten* n.

Für diesen Existenzbeweis soll die Schalterfunktion der Schaltergendarmen in $\mathcal{H}^1$ aus Abschnitt 1 verallgemeinert werden. Genauer: es soll das Prinzip des nichtmonotonen Schritts, den die Schaltergendarmen in $\mathrm{RG}(\mathcal{H}^1,3)$ ausführen, verallgemeinert werden. Dort hatten die Gendarmen zwei Möglichkeiten, mit nur zwei Gendarmen alle Ballonpunkte zu belegen: entweder durch Belegen der Hyperkanten a_1, a_2 oder durch Belegen von b_1, b_2. Intuitiv gab es also genau zwei mögliche Schalterstellungen. Einmal wurden dabei die Punkte 3 und $4'$ automatisch mit belegt, einmal die Punkte $3'$ und 4.

1.5.1 Schaltergraphen und Schalterspiele

Definition 66 *a) Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Ein* Schaltergraph (mit n-Schalter) *ist ein Tripel* $(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})$. *Hierbei ist* $\mathcal{H} = (P,K)$ *ein Hypergraph, und* $\bar{\alpha} = \alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\bar{\beta} = \beta_1,\ldots,\beta_n$ *sind n-Tupel aus* K *mit* $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_i \neq \beta_j$ *für alle* $i \neq j$.
b) Die n *ausgezeichneten Hyperkanten* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *heißen* Schalterkanten 1 *und werden mit* $\boxed{1}$ *gekennzeichnet, die* n *Hyperkanten* $\beta_1,\ldots,\beta_n$ *heißen* Schalterkanten 2 *und werden mit* $\boxed{2}$ *gekennzeichnet.*

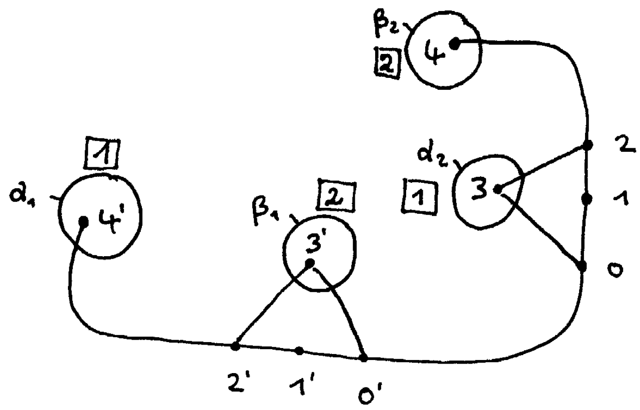

Abbildung 1.18: Ein Schaltergraph mit 2-Schalter $(\mathcal{H}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

c) In Zukunft wird auch die Bezeichnung Schaltergraph *verwendet, wenn n dem Kontext zu entnehmen ist.*

Insbesondere ist also jeder Hypergraph ein Schaltergraph mit 0-Schalter.

Beispiel 67 *Abbildung 1.18 zeigt einen Schaltergraphen mit 2-Schalter.*[3]

Ziel: Auf Schaltergraphen lassen sich zugehörige monotone und nichtmonotone Spiele, die sogenannten *Schalterspiele* definieren. Die Existenz von Schaltergraphen mit Monotoniekosten n für die Schalterspiele ist zunächst einleuchtender. Dieser Existenzbeweis läßt sich auf Hypergraphen und die Räuber-und-Gendarmen-Spiele übertragen, wie der Übertragungssatz 79 weiter unten zeigt. Im Anschluss wird dann der Existenzbeweis für Schaltergraphen durchgeführt.

Definition 68 *a) Sei $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein Schaltergraph mit n-Schalter, $n \leq k$. Das* Schalterspiel $\mathrm{SRG}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, k)$ *verläuft ähnlich wie* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$*: Person I hat k Gendarmen zur Verfügung. n feste Gendarmen, die* Schaltergendarmen, *muss sie allerdings dazu verwenden, in jeder Runde entweder alle Schalterkanten* 1 *oder alle Schalterkanten* 2 *zu belegen. Alle weiteren Gendarmen wie auch der Räuber ziehen wie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$.
b) Die Schaltergendarmen stehen auf Schaltposition 1, *wenn alle Schalterkanten 1 belegt sind, andernfalls auf* Schaltposition 2.
c) In dem monotonen Schalterspiel mon-$\mathrm{SRG}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, k)$ *sind wieder nur monotone Züge erlaubt.*

Definition 69 *Sei $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein Schaltergraph mit n-Schalter.*
a) Die Gendarmenweite des Schaltergraphen $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *ist die natürliche Zahl*

[3] vgl. $\mathcal{H}^1$ aus Satz 61.

$\text{sgw}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *I hat eine Gewinnstrategie in* $\text{SRG}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, k)\}$.
b) Die monotone Gendarmenweite des Schaltergraphen $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *ist die natürliche Zahl*
$\text{mon-sgw}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ *I hat eine Gewinnstrategie in* $\text{mon-SRG}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, k)\}$.

Definition 70 *Ein* $(k, k')-$Schaltergraph $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *ist ein Schaltergraph mit n-Schalter mit*
$\text{sgw}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = k$ *und* $\text{mon-sgw}(\mathcal{H}) = k'$.

Bemerkung 71 $(\mathcal{H}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ *aus Beispiel 67 ist ein* $(3, 4)-$*Schaltergraph.*

Beweis. Der Beweis von Satz 61 lässt sich übertragen. □

1.5.2 Der Übertragungssatz

Nun soll gezeigt werden, dass jeder (k, k')-Schaltergraph $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ durch Ankleben eines geeigneten Hypergraphen, einer sogenannten *n-Mechanik*, in einen (k, k')-Hypergraphen $\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ mit denselben Gendarmenweiten transformiert werden kann: Für jede Gewinnstrategie der Gendarmen in dem minimalen sicheren (monotonen) Spiel $\text{RG}(\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), k)$ wird in jedem Zug (außer an den Fangpositionen) die Belegung entweder aller Schalterkanten 1 oder aller Schalterkanten 2 erforderlich sein.
Jede Gewinnstrategie in dem Spiel $\text{SRG}((\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), k)$ liefert eine Gewinnstrategie in dem Spiel $\text{RG}(\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), k)$ (und analog für die monotonen Varianten).

Definition 72 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *ein Hypergraph.*
a) Zwei Hyperkanten $h, h' \in K$ *heißen* miteinander verankert*, wenn es einen Punkt* $p \in P$ *(genannt* Ösenpunkt*) gibt, so dass gilt:* $p \notin h$, $p \notin h'$, $h \cup \{p\}$, $h' \cup \{p\} \in K$. *Es darf* $\{p\} \in K$ *sein*[4]*, aber abgesehen davon sind die beiden Kanten* $h \cup \{p\}$, $h' \cup \{p\}$ *(genannt* Ankerkanten*) die einzigen weiteren Kanten aus* $\mathcal{H}$*, die* p *enthalten.*
b) h *und* h' *heißen* m-fach verankert *mit Ösenpunkten* $p_1, \dots, p_m$ *(paarweise verschieden), wenn für jeden der Punkte* p_i, $i = 1 \dots n$*, gilt:* h *und* h' *sind verankert mit Ösenpunkt* p_i.

Abbildung 1.19 zeigt zwei einfach verankerte Hyperkanten.

Definition 73 *a) Ein* GOB-Hypergraph (der Ordnung m) *ist ein Hypergraph* $\mathcal{H}_{GOB} = (P, K)$ *zusammen mit einer Partitionierung* $P = G \dot\cup O \dot\cup B$ *von* P*, so dass gilt:*
Für alle $g \in G$ *und* $b \in B$ *gibt es Hyperkanten* $h_g, h_b \in V$*, so dass* $g \in h_g \subseteq G$, $b \in h_b \subseteq B$ *und* h_g *ist mit* h_b *m-fach verankert mit Ösenpunkten* $p_1, \dots p_m \in O$.

[4] Ob $\{p\} \in K$ ist, ist für die Konstruktion zunächst unerheblich. In Abschnitt 1.6 wird aber gezeigt, dass es auch *simpliziale* Hypergraphen mit Monotoniekosten gibt. Dafür müssen wir $\{p\} \in K$ erlauben.

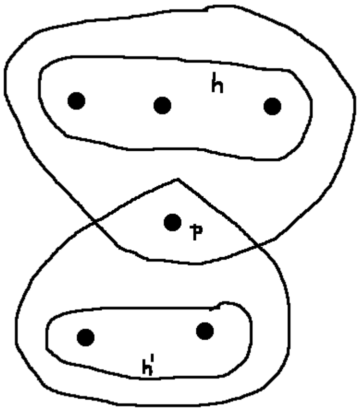

Abbildung 1.19: Die Hyperkanten h und h' sind einfach verankert mit Ösenpunkt p.

b) Die Punkte aus G heißen Ballonpunkte,[5] *die Punkte aus B heißen* Bodenpunkte, *und die Punkte aus O heißen* Ösenpunkte.

c) Die Belegungszahl der Ballonpunkte *ist die natürliche Zahl*
$\beta(G) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n$ *Gendarmen belegen alle Punkte aus* $G\}$.
Analog ist
$\beta(B) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n$ *Gendarmen belegen alle Punkte aus* $B\}$
die Belegungszahl der Bodenpunkte.

Auf einem GOB-Hypergraphen mit großer Ordnung m verlaufen die Spiele entweder so, dass die Gendarmen alle Punkte aus G belegen und auf $\langle B\rangle$ spielen, oder die Gendarmen belegen alle Punkte aus B und spielen auf $\langle G\rangle$. Die Ösenpunkte spielen in beiden Fällen keine wesentliche weitere Rolle.
Dies wird nun weiter präzisiert:

Lemma 74 (Ballon-Lemma) *Sei $\mathcal{H}_{GOB} = (P, K)$ ein GOB-Hypergraph der Ordnung $m > \text{mon-gw}(\langle B\rangle) + \beta(G)$. Weiterhin sei $\beta(B) > \text{mon-gw}(\langle B\rangle) + \beta(G)$. Dann gilt:*
a) $\text{gw}(\mathcal{H}_{GOB}) \leq \text{gw}(\langle B\rangle) + \beta(G)$, *und* $\text{mon-gw}(\mathcal{H}_{GOB}) \leq \text{mon-gw}(\langle B\rangle) + \beta(G)$.
b) Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$, $\mathcal{T} = (A_{\mathcal{T}}, B_{\mathcal{T}})$, eine Gewinnstrategie für maximal $\text{mon-gw}(\mathcal{H}_{GOB})$ *Gendarmen. Dann gilt: $B \nsubseteq \sigma(a)$ für alle $a \in A_{\mathcal{T}}$.*
c) Unter den Voraussetzungen von b) gilt für alle Nachfolger $a \in A_{\mathcal{T}} \setminus \{w\}$:
Ist $G \nsubseteq \sigma(vorg\ (a))$ und a kein Blatt, dann ist $G \cup B \subseteq \sigma(vorg\ (a)) \cup \rho(a)$.
d) Es gibt eine Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$, $\mathcal{T} = (A_{\mathcal{T}}, B_{\mathcal{T}})$, im minimalen sicheren Spiel auf $\mathcal{H}_{GOB}$, so dass für alle $a \in A_{\mathcal{T}}$ gilt: a ist ein Blatt oder $G \subseteq \sigma(a)$.
Dasselbe gilt für das minimale sichere monotone Spiel.

[5] Aus historischen Gründen bezeichne ich diese mit G: Wir denken etwa an einen grünen Ballon.

Erläuterungen: b) besagt, dass die Gendarmen die Bodenpunkte nicht vollständig belegen können.
c) besagt: Wenn die Gendarmen die Ballonpunkte nicht komplett belegen, erhält der Räuber volle Bewegungsfreiheit in $B \cup G$.
d) besagt, dass die Gendarmen im minimalen sicheren Spiel *o. E.* jeweils bis unmittelbar vor dem Fang des Räubers (der sich auf einem Ösenpunkt befindet) die Ballonpunkte komplett abdecken.

Beweis des Lemmas. Zu a: $\mathrm{gw}(\mathcal{H}_{GOB}) \leq \mathrm{gw}(\langle B \rangle) + \beta(G)$, denn $\beta(G)$ Gendarmen können die Ballonpunkte dauerhaft belegen, so dass sich das eigentliche Spiel mit den übrigen Gendarmen ganz in $\langle O \cup B \rangle$ abspielt: Die übrigen Gendarmen spielen zunächst gemäß einer Gewinnstrategie auf $\langle B \rangle$. Hier sind die Fluchträume allerdings um Ösenpunkte vergrößert: Enthält ein Fluchtraum neben einem Ösenpunkt noch weitere Elemente, so ziehen die Gendarmen gemäß der Gewinnstrategie, als wäre kein Ösenpunkt vorhanden. Enthält ein Fluchtraum als einziges Element einen Ösenpunkt, so fangen die Gendarmen den Räuber im nächsten Zug auf die offensichtliche Weise.
Für $\text{mon-gw}(\mathcal{H}_{GOB}) \leq \text{mon-gw}(\langle B \rangle) + \beta(G)$ wird analog argumentiert.

Zu b: Die Anzahl der Gendarmen ist nach Teil a) höchstens $\text{mon-gw}(\langle B \rangle) + \beta(G)$, also kleiner als $\beta(G)$ nach der Voraussetzung.

Zu c: Unter Berücksichtigung der Wahl von m ist dies leicht leicht einzusehen.

Zu d: Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$, $\mathcal{T} = (A_\mathcal{T}, B_\mathcal{T})$, eine Gewinnstrategie im minimalen sicheren (monotonen) Spiel. *O. E.* gelte für jedes $a \in A_\mathcal{T}$ mit $\rho(a) = \{p\}$, $p \in O$: a ist ein Blatt.
Ein Punkt $v \in A_\mathcal{T}$ heiße *Quasiwurzel*, falls $G \subseteq \sigma(a)$ und $G \cup B \subseteq \sigma(\text{vorg }(a)) \cup \rho(a)$.
Sei $v \in A_\mathcal{T}$ eine Quasiwurzel, so dass im Subbaum $\mathcal{T}_v = (A_v, B_v)$ von $\mathcal{T}$ keine weitere Quasiwurzel existiert. Dann gilt:

$(*)$ Für alle $a \in A_v : G \subseteq \sigma(a)$ oder a ist ein Blatt.

Beweis von $(*)$. Angenommen, $a \in A_v$, $G \nsubseteq \sigma(a)$ und a ist kein Blatt. Dann ist $\rho(a) \cap (G \cup B) \neq \emptyset$. Weiterhin liegt $(G \cup B) \setminus \sigma(a)$ in einer Zusammenhangskomponente Z von $P \setminus \sigma(a)$.
Sei a_0 derjenige Nachfolger von a, für den $\rho(a_0) = Z$ gilt. Dann ist $G \nsubseteq \sigma(\text{vorg}(a_0))$ und nach Teil c) ist $G \cup B \subseteq \sigma(\text{vorg}(a_0)) \cup \rho(a_0)$.
Wenn für a_i gilt: $G \nsubseteq \sigma(\text{vorg}(a_i))$ und $G \cup B \subseteq \sigma(\text{vorg}(a_i)) \cup \rho(a_i)$, dann hat a_i genau einen Nachfolger a_{i+1}, der $G \cup B \subseteq \sigma(\text{vorg}(a_{i+1})) \cup \rho(a_{i+1})$ erfüllt, wie leicht einzusehen ist. Aufgrund der Endlichkeit von $\mathcal{T}$ erhalten wir irgendwann ein a_{i_0}, mit $G \subseteq \sigma(a_{i_0})$. a_{i_0} ist dann aber eine Quasiwurzel, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Mit $(*)$ erhalten wir die gesuchte Gewinnstrategie, indem wir an v noch Blätter anfügen, um die möglichen Räuberpositionen auf Ösenpunkten abzudecken und dann die Teilstrategie $\mathcal{T}_v = (A_v, B_v)$ benutzen. □

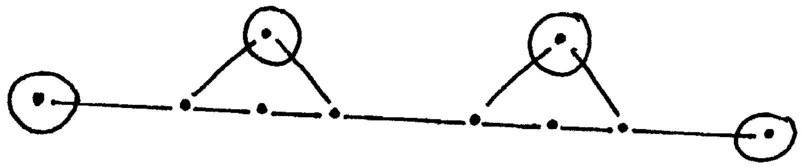

Abbildung 1.20: Ein $(2,2)$-Hypergraph. Dieser Hypergraph liegt den Hypergraphen der Abbildungen 1.18 und 1.21 zugrunde.

Definition 75 *Sei $(\mathcal{H}_B, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein Schaltergraph mit n-Schalter, $\mathcal{H}_B = (B, K_B)$. Der zu $(\mathcal{H}_B, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ gehörige* Hypergraph mit n-Mechanik *ist der folgende GOB-Hypergraph $\mathcal{H}_{GOB} = (P, K)$:*
B (die Menge der Punkte von $\mathcal{H}_B$) ist die Menge der Bodenpunkte von $\mathcal{H}_{GOB}$, $G = \{g_{i,j} \mid i = 1, \dots n\}$ ist die n^2–elementige Menge der Ballonpunkte.
Sei $m :=$ mon-gw$(\langle B \rangle) + n + 1$ die Ordnung von $\mathcal{H}_{GOB}$ und sei $O := \{p_l(g,k) \mid g \in G, k \in K_B, l \in \{1, \dots m\}\}$.
Sei weiterhin $K_G := \{\{g_{i,j}\} \mid i,j = 1, \dots n\} \cup \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$, mit $a_i := \{g_{i,1}, \dots, g_{i,n}\} \cup \alpha_i$ und $b_j := \{g_{1,j}, \dots, g_{n,j}\} \cup \beta_i$, $i,j = 1, \dots, n$.
Sei $K_{GB} := K_G \cup K_B \cup \{a_i \cup \alpha_i \mid i = 1, \dots n\} \cup \{b_j \cup \beta_j \mid j = 1, \dots n\}$, sowie $K := K_{GB} \cup \bigcup_{g \in G, k \in K_B, l \in \{1, \dots m\}} \{\{g\} \cup \{p_l(g,k)\}, \{p_l(g,k)\} \cup k\}$.

Beachte: Nach Definition ist $n = \beta(G)$ und somit $m =$ mon-gw$(\langle B \rangle) + n + 1 \geq$ mon-gw$(\langle B \rangle) + \beta(G)$.

Die Abbildungen 1.20 und 1.21 zeigen ein Beispiel.

Definition 76 *Sei $\mathcal{H}_{GOB}$ der GOB-Hypergraph mit n-Mechanik zu $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Die Gendarmen* bedienen die n-Mechanik *im Spiel* (mon-)RG$(\mathcal{H}_{GOB})$, *wenn sie in jedem Zug die Hyperkanten $a_1, \dots, a_n$ oder die Hyperkanten $b_1, \dots, b_n$ belegen.*

Beachte: Mit der Aussage, dass die Gendarmen die Mechanik bedienen, ist noch nicht eindeutig festgelegt, in welchem Zug sie die Hyperkanten $a_1, \dots, a_n$ und in welchem die Hyperkanten $b_1, \dots, b_n$ belegen.

Wir werden sehen, dass die Strategien für RG$(\mathcal{H}_{GOB})$, in denen die Gendarmen die Mechanik bedienen, gerade den Strategien für SRG$((\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), k)$ entsprechen.

Sei $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein Schaltergraph. Jetzt wollen wir zeigen: Ist $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein (k,k')-Schaltergraph so ist der Hypergraph mit n-Mechanik $\mathcal{H}_{GOB}$ ein (k,k')-Hypergraph (wenn er genug Bodenpunkte hat). Eine Gewinnstrategie im Schalterspiel mit k Gendarmen liefert nach leichter Modifikation (die Gendarmen bedienen die Mechanik, statt die Schalterkanten zu belegen und die Ösenpunkte werden zu den Fluchträumen hinzugefügt) eine Gewinnstrategie im minimalen sicheren Spiel auf $\mathcal{H}_{GOB}$ mit k Gendarmen.

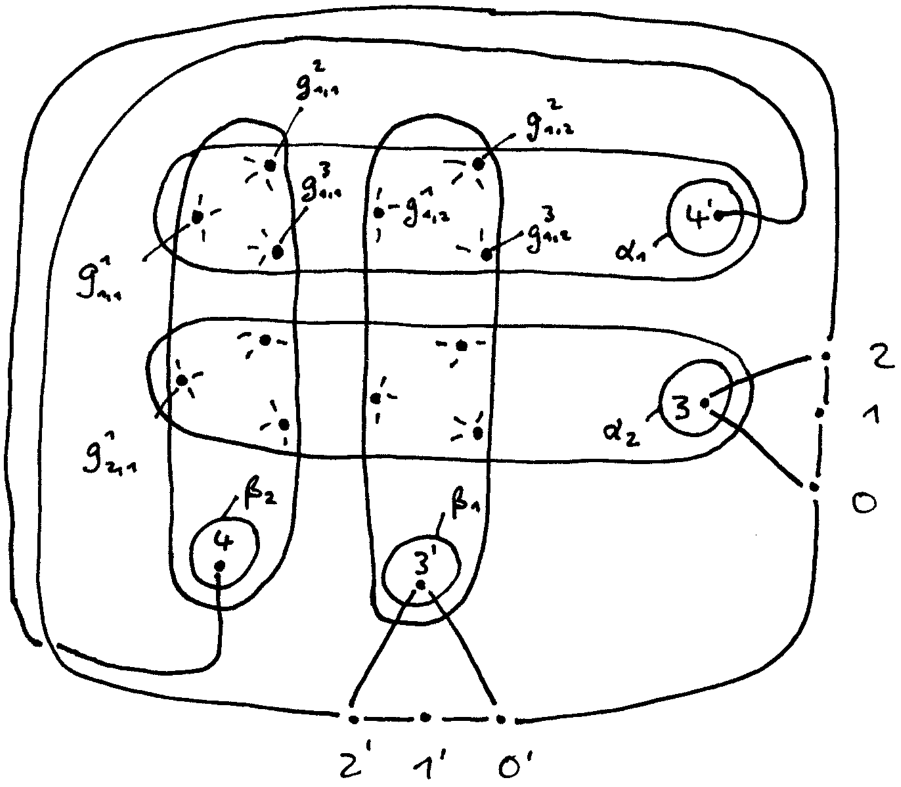

Abbildung 1.21: Der zu $(\mathcal{H}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ aus Abbildung 1.18 gehörige Hypergraph $\mathcal{H}_{GOB}$ mit 2-Mechanik.

Definition 77 *Es seien nur (k,k')-Schaltergraphen $(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})$, $\mathcal{H}=(B,K)$, mit $|\bar{\alpha}|<k$ zugelassen*[6]*, für die außerdem gilt:* $\text{mon-gw}(\mathcal{H})+|\bar{\alpha}|<\beta(G)$. *Sei Φ die folgende Abbildung:*

$$\Phi : \left\{ \begin{matrix} (k,k')\text{-}\textit{Schaltergraphen} \\ \textit{mit Zeuginnen} \\ (\mathcal{T},\sigma,\rho) \textit{ und } (\mathcal{T}',\sigma',\rho') \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} (k,k')\text{-}\textit{Hypergraphen mit} \\ \textit{Mechanik und Zeuginnen} \\ (\mathcal{T},\sigma,\rho) \textit{ und } (\mathcal{T}',\sigma',\rho')) \end{matrix} \right\}$$

$(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta}),(\mathcal{T},\sigma,\rho),(\mathcal{T}',\sigma',\rho') \mapsto \phi(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta}),\phi(\mathcal{T},\sigma,\rho),\phi(\mathcal{T}',\sigma',\rho')$.
Hierbei ist $\phi(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})=\mathcal{H}_{GOB}$ der zu $(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})$ gehörige Hypergraph mit $|\bar{\alpha}|$-Mechanik, und ϕ transformiert die Strategie $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ (und auch die Strategie $(\mathcal{T}',\sigma',\rho')$) folgendermaßen:
1. Die Schaltergendarmen bedienen die Mechanik in $(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})\cup\mathcal{M}_n$, statt die Hyperkanten $a_1,\dots,a_n$ zu belegen: Sie belegen in der Strategie $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ die Schalterkanten $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ genau dann, wenn sie in $\phi(\mathcal{T})$ die Hyperkanten $a_1,\dots,a_n$ belegen und ebenso für b_i un β_i.
2. Ansonsten wird gemäß der Strategie $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ gespielt. Hier können die Fluchträume allerdings um Ösenpunkte p vergrößert worden sein. Enthält ein Fluchtraum neben einem Ösenpunkt noch weitere Elemente, so ziehen die Gendarmen gemäß $(\mathcal{T},\sigma,\rho)$, als wäre kein Ösenpunkt vorhanden. Enthält ein Fluchtraum als einziges Element einen Ösenpunkt, so fangen die Gendarmen den Räuber im nächsten Zug. Das ist immer möglich, da $|\bar{\alpha}|<k$ ist.
Dasselbe gilt für $(\mathcal{T}',\sigma',\rho')$.

Beachte: In $\phi(\mathcal{T},\sigma,\rho)$ und $\phi(\mathcal{T}',\sigma',\rho')$ sind immer alle Ballonpunkte belegt.
Ist diese Zuordnung überhaupt eine Abbildung in den angegebenen Bildbereich? Es muss noch gezeigt werden, dass ϕ wohldefiniert ist. Dies geschieht in Satz 79.

Bemerkung 78 *Sei $\mathcal{H}_{GOB}=\phi(\mathcal{H},\bar{\alpha},\bar{\beta})$, $\mathcal{H}=(B,K)$ und $n=|\bar{\alpha}|$.*
Dann können wir davon ausgehen, dass in jeder Gewinnstrategie für das minimale sichere Spiel auf $\mathcal{H}_{GOB}$ die n-Mechanik bedient wird (abgesehen von den Fangpositionen).

Beweis. $\mathcal{H}_{GOB}$ erfüllt die Voraussetzungen des Ballon-Lemmas (Lemma 74): $\mathcal{H}_{GOB}$ ist nach Definition 75 ein GOB-Hypergraph der Ordnung $m>\text{mon-gw}(\langle B\rangle)+\beta(G)$. Weiterhin gilt $\text{mon-gw}(\langle B\rangle)+\beta(G)=\text{mon-gw}(\langle B\rangle)+n<\beta(B)$ nach Definition 77. Mit Teil d) des Ballon-Lemmas folgt: die n-Mechanik ist in jedem Zug komplett von den Gendarmen belegt (bis auf an den Fangpositionen). Dazu sind mindestens n Gendarmen nötig. Offensichtlich reichen n Gendarmen genau dann aus, wenn sie die Mechanik bedienen. □

Der folgende Satz etabliert die Äquivalenz von Hypergraphen mit Monotoniekosten n und Schaltergraphen mit Monotoniekosten n:

[6] $|\bar{\alpha}|=k$ lassen wir nicht zu: Weiter unten werden wir sehen, dass der $|\bar{\alpha}|+1$. Gendarm benötigt wird, um die Ösenpunkte zu belegen.

Satz 79 (Übertragungssatz) *Sei $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein (k, k')-Schaltergraph, mit den Zeugen $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ und $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$, $|\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}| = n$.*
Dann ist der zu $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ gehörige GOB-Hypergraph $\mathcal{H}_{GOB}$ ein (k, k')-Hypergraph mit n-Mechanik, bezeugt durch $\phi(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ und $\phi(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$.

Beweis. Sei $\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ also ein Hypergraph mit n-Mechanik, d. h. $\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \mathcal{H}_{GOB}$. Wir zeigen:
a) $\phi(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ und $\phi(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ sind Gewinnstrategien für $\mathrm{RG}(\mathcal{H}_{GOB}, k)$ bzw. mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{H}_{GOB}, k')$
b) $\phi(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ und $\phi(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ sind sogar Zeuginnen für $\mathrm{gw}(\mathcal{H}_{GOB}) = k$ und mon-$\mathrm{gw}(\mathcal{H}_{GOB}) = k'$.

a) folgt leicht aus der Definition von ϕ (siehe Definition 77).

Zu b: Angenommen im minimalen sicheren Spiel auf $\mathcal{H}_{GOB}$ werden l Gendarmen benötigt, $l < k$. Da $\phi(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein Hypergraph mit n-Mechanik ist, können wir nach Bemerkung 78 davon ausgehen, dass in jedem Zug (abgesehen von den Fangpositionen) entweder die Hyperkanten $a_1, \dots, a_n$ oder die Hyperkanten $b_1, \dots, b_n$ belegt sind. Dazu sind mindestens n Gendarmen nötig. Die Strategie liegt schon im Bild von Φ (siehe Definition 77). D. h. sie kommt von einer Strategie in $\mathrm{SRG}(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ her. Diese ist sogar eine Gewinnstrategie. Das bedeutet aber, dass es eine Gewinnstrategie für (mon-)$SRG((\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), l)$ gibt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.
Dasselbe gilt für $\phi(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$. □

Für die Konstruktion der Hypergraphen mit Monotoniekosten n brauchen wir noch zwei Hilfsmittel.
Wenn wir einen (k, k)-Hypergraphen folgendermaßen abwandeln, bleiben die Gendarmenweiten erhalten:

Lemma 80 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein (k, k)-Hypergraph. Dann ist auch $\mathcal{H}' = (P, K \cup \{\{p\} \mid p \in P\})$ ein (k, k)-Hypergraph.*

Jeder Punkt $p \in \mathcal{H}'$ liegt also in einer Einerkante.

Beweis. Sei also mon-$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = \mathrm{gw}(\mathcal{H}) = k$. Nach Vereinbarung ist $\mathcal{H} \neq (\{p\}, \emptyset)$. Da $\mathcal{H}'$ dieselben Wege wie $\mathcal{H}$ hat, sind auch die zusammenhängenden Teilmengen identisch. Jede Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ für mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ ist also auch eine Gewinnstrategie für mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{H}', k)$, denn die möglichen Fluchträume sind dieselben. Also ist $\mathrm{gw}(\mathcal{H}') \leq$ mon-$\mathrm{gw}(\mathcal{H}') \leq k$.
Jetzt ist nur noch zu zeigen, dass es keine Gewinnstrategie für $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k-1)$ gibt. Wäre aber $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ eine Gewinnstrategie in $\mathrm{RG}(\mathcal{H}', k-1)$, so ließe $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ sich zu einer Gewinnstrategie in $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k-1)$ abwandeln, indem die Gendarmen statt jeder Einerkante $\{p\}$, die nicht in K vorkommt, eine Kante aus K belegen, die p enthält. Eine solche Kante existiert immer, da $\mathcal{H}$ zusammenhängend ist. Widerspruch. □

Die Gendarmen haben also keinen Vorteil, wenn zu jedem Punkt p eines (k,k)-Hypergraphen noch die Einerkante $\{p\}$ hinzugenommen wird.

Wir definieren:

Definition 81 *Ein* punktierter Hypergraph *ist ein Hypergraph* $\mathcal{H} = (P, K)$ *mit* $\{\{p\} \mid p \in P\} \subseteq K$.

Definition 82 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *ein Hypergraph,* $q \notin P$. *Der* Kegel mit Spitze q *über* $\mathcal{H}$ *ist der Hypergraph* $\mathcal{H}_K = (A, B)$, *wobei* $A := P \cup \{p\}$ *und*
$B := K \cup \{\{p, q\} \mid p \in P\}$

Nun wird der Zentrale Satz für Schaltergraphen bewiesen:

Satz 83 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es einen* $(k, k')-$*Schaltergraphen* $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *mit* $k' - k = n$.

Beweis. Für $n = 1$ ist dies bereits in Abschnitt 1.4 gezeigt worden. Wir konstruieren jetzt also $\mathcal{H}^n$ für $n \geq 2$. Nach Lemma 48 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Hypergraphen mit $gw(\mathcal{N})$ =mon-$gw(\mathcal{N}) = n$. Sei $\mathcal{N}$ also so ein Hypergraph. Nach Lemma 80 können wir annehmen, dass $\mathcal{N}$ punktiert ist. Seien weiterhin $\mathcal{N}_1 = (P_1, K_1)$ und $\mathcal{N}_2 = (P_2, K_2)$ zwei Kopien von $\mathcal{N}$, $P_1 := \{n_{1,i} \mid i = 1, \ldots, r\}, P_2 := \{n_{2,i} \mid i = 1, \ldots, r\}$.
Sei $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ der Schaltergraph mit $\mathcal{H} = (P, K)$ und
$P = P_1 \dot{\cup} P_2 \dot{\cup} \{e_{1,i} \mid i = 1, \ldots, n+1\} \dot{\cup} \{e_{2,i} \mid i = 1, \ldots, n+1\} \dot{\cup} \{m\}$ und
$K = K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \{\{e_{1,i}\} \mid i = 1, \ldots, n+1\} \dot{\cup} \{\{e_{2,i}\} \mid i = 1, \ldots, n+1\} \dot{\cup} \{\{m\}\} \cup \{\{e_{1,i}, n_{1,j}\} \mid i = 1, \ldots, n+1; j = 1, \ldots, r\} \cup \{\{e_{2,i}, n_{2,j}\} \mid i = 1, \ldots, n+1; j = 1, \ldots, r\} \dot{\cup} \{\{m\} \cup \{n_{l,j}\} \mid l = 1, 2; j = 1, \ldots, r\}$ und
$\bar{\alpha} = \{e_{1,1}\}, \ldots, \{e_{1,n+1}\}, \{m\}, \{n_{2,1}\}, \ldots, \{n_{2,r}\}$,
$\bar{\beta} = \{e_{2,1}\}, \ldots, \{e_{2,n+1}\}, \{m\}, \{n_{1,1}\}, \ldots, \{n_{1,r}\}$.
Abbildung 1.22 zeigt diesen Schaltergraphen.

Jede Einerkante aus $\mathcal{N}_1$ ist mit $\boxed{1}$ versehen und jede Einerkanten aus $\mathcal{N}_2$ mit $\boxed{2}$. Weiterhin sind die Punkte $m, e_{1,1}, \ldots, e_{1,n+1}$ also jeweils die Spitzen von Kegeln über $\mathcal{N}_1$ und die Punkte $m, e_{2,1}, \ldots, e_{2,n+1}$ jeweils die Spitzen von Kegeln über $\mathcal{N}_2$.

Sei $s := |\mathcal{N}_1| + (n+1) + 1$ die Anzahl der Schaltergendarmen, also $s = |\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}|$.

Abbildung 1.23 zeigt eine nichtmonotone Gewinnstrategie im Schalterspiel mit $s + 1$ Gendarmen.

Abbildung 1.24 zeigt eine monotone Gewinnstrategie im Schalterspiel mit $s + (n+1)$ Gendarmen.

Es gibt keine nichtmonotone Gewinnstrategie im Schalterspiel mit s Gendarmen. Der Räuber könnte folgendermaßen entkommen: In Schalterposition 1 hält er sich irgendwo in $\mathcal{N}_1$ auf und in Schalterposition 2 auf $e_{1,1}$.

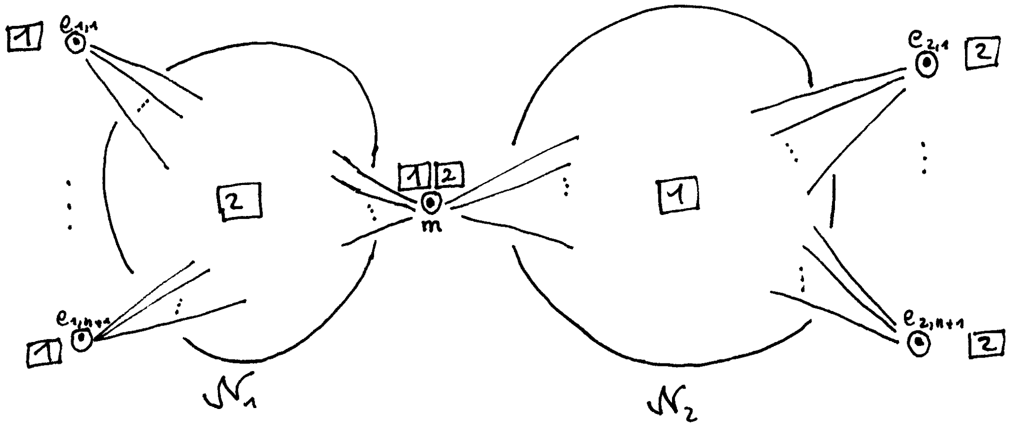

Abbildung 1.22: Der Schaltergraph $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ mit Monotoniekosten n.

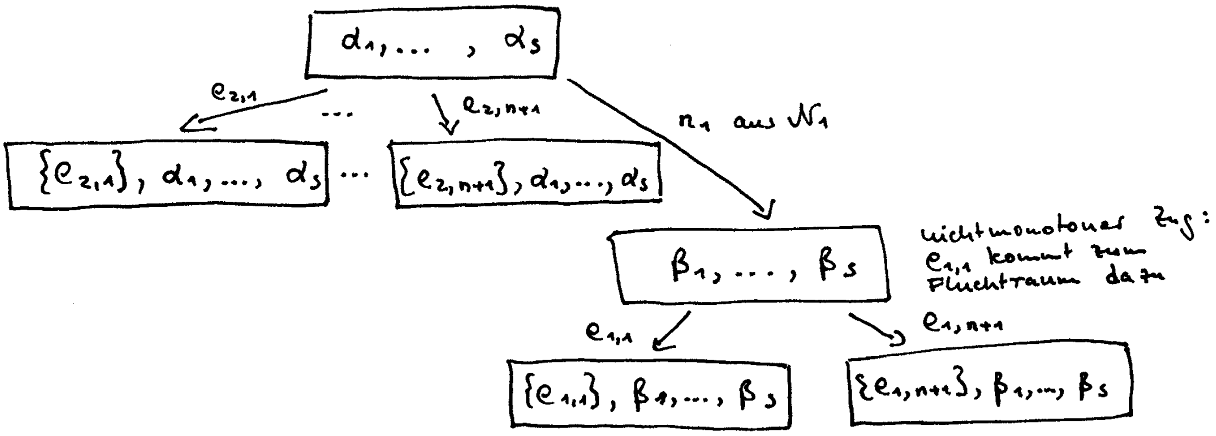

Abbildung 1.23: Eine nichtmonotone Gewinnstrategie im Schalterspiel auf dem Schaltergraphen aus Abbildung 1.22 mit $s+1$ Gendarmen.

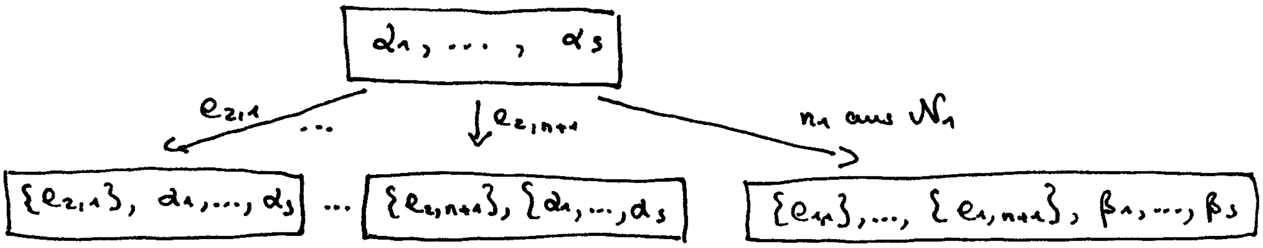

Abbildung 1.24: Eine monotone Gewinnstrategie im Schalterspiel auf dem Schaltergraphen aus Abbildung 1.22 mit $s+(n+1)$ Gendarmen.

Es gibt keine monotone Gewinnstrategie im Schalterspiel mit $s + n$ Gendarmen: $O.\,E.$ seien die Schaltergendarmen in Schalterposition 1. Der Räuber könnte dann entkommen, indem er nach $\mathcal{N}_1$ zieht. Dort reichen nach Wahl von $\mathcal{N}$ n Gendarmen nicht aus, um ihn zu fangen. Da n Gendarmen auch nicht ausreichen, um die Punkte $e_{1,1}, \dots, e_{1,n+1}$ zu belegen, können die Gendarmen nicht in die Schaltposition 2 umschalten, ohne die Monotonie zu verletzen. □

Mit $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ aus diesem Satz und Satz 79 aus diesem Abschnitt haben wir das Ziel erreicht: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Existenz eines $(k, k')-$Hypergraphen $\mathcal{H}^n$ mit Monotoniekosten n gesichert. Dies war die Aussage von Satz 65. □

Wir können uns den $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ zugeordneten Hypergraphen mit n-Mechanik $\mathcal{H}_{GOB}$ also wie $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ vorstellen, müssen uns aber noch die Mechanik hinzudenken. Auch die Gewinnstrategien auf $\mathcal{H}_{GOB}$ verlaufen im wesentlichen wie die auf $(\mathcal{H}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Die Mechanik in $\mathcal{H}_{GOB}$ realisiert das im Schalterspiel per Definition geforderte Bedienen des Schalters.

Sowohl für die Konstruktion von $\mathcal{H}^1$ als auch für die Konstruktion von $\mathcal{H}_{GOB}$ wurde ausgenutzt, dass wir Hyperkanten h mit $|h| \geq 2$ zu Verfügung haben.
Zudem basieren beide Konstruktionen auf der Idee, mittels der Ballonpunkte das vorzeitige Belegen von Punkten im Fluchtraum des Räubers zu erzwingen (etwa der Punkte 4 und $4'$ in $\mathcal{H}^1$ oder der Punkte in den Schalterkanten von $\mathcal{H}_{GOB}$).
Wenn wir nun zu jeder Hyperkante h dieser Hypergraphen alle Teilmengen von h als Hyperkanten hinzunehmen, so ließe sich das vorzeitige Belegen der Punkte im Fluchtraum vermeiden.

Definition 84 *a) Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. $\mathcal{H}$ heißt* simplizial*, wenn für alle $h \in K$ gilt: $\mathcal{P}(h) \subseteq K$.*
b) Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Mit einem simplizialen Graphen *meinen wir den Hypergraph, der aus $\mathcal{G}$ entsteht, indem wir alle Einerkanten hinzunehmen.*
c) Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. Dann bezeichnet $\Sigma\mathcal{H}$ den simplizial gemachten *Hypergraphen $\mathcal{H} = (P, K')$ mit $K' := K \cup \bigcup_{h \in K} \mathcal{P}(h)$.*

Sind die Spiele also auf simplizialen Hypergraphen äquivalent? In Abschnitt 1.6 werden wir sehen, dass dies nicht der Fall ist. Weiterhin wird dort gezeigt, dass die Spiele auch auf Graphen nicht äquivalent sind.

1.6 Monotoniekosten auf Graphen

Gibt es strukturelle Merkmale, anhand derer leicht ersichtlich ist, ob die Spiele auf einem gegebenen Hypergraphen äquivalent sind?
Alle in den Abschnitten 1.4 und 1.5 konstruierten Hypergraphen mit echten Monotoniekosten enthalten Hyperkanten der Mächtigkeit ≥ 3. Sind die Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Graphen äquivalent? In Anlehnung an die Äquivalenz der Räuber-und-Polizisten-Spiele auf Graphen (vgl. Korollar 2 aus der Einleitung)

ist dies eine naheliegende Vermutung.
In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass auch diese Vermutung nicht gilt.

1.6.1 Konstruktion des Gegenbeispiels

Lemma 85 *Für den Graphen $\mathcal{G}$ aus Abbildung 1.8, Seite 22 gilt:*

$$\mathrm{gw}(\mathcal{G}) = \text{mon-gw}(\mathcal{G}) = 3$$

Beweis. Für eine monotone Gewinnstrategie mit drei Gendarmen siehe wieder Abbildung 1.9.

Zwei Gendarmen können den Räuber nicht fangen: Nennen wir die Punkte c, e, g, die 4 Nachbarn haben, *Kreuzpunkte*. Die Gendarmen können höchstens zwei Kreuzpunkte gleichzeitig belegen. Der Räuber kann entkommen, indem er in jedem Zug auf einen freien Kreuzpunkt zieht:

Angenommen, während des Fluges der Gendarmen sind die Kreuzpunkte e und mindestens einer der Punkte a und i von Gendarmen besetzt. Dann stand der Räuber vorher auf c oder g und kann dort bleiben.

In jedem anderen Fall sind alle während des Fluges unbesetzten Kreuzpunkte während des Fluges verbunden, so dass der Räuber nach Belieben wechseln kann:

Wenn während des Fluges zwei Kreuzpunkte besetzt sind, ist das offensichtlich.
Wenn während des Fluges c der einzige besetzte Kreuzpunkt ist, dann sind e und g über f_1 oder f_2 verbunden. Falls g der einzige unbesetzte Punkt ist, argumentieren wir aufgrund der Symmetrie analog.
Wenn während des Fluges e der einzige besetzte Kreuzpunkt ist, sind nach Voraussetzung a und i unbesetzt. Also ist einer der Wege g, h_1, i, a, b_1, c oder g, h_2, i, a, b_2, c frei.
Wenn während des Fluges alle Kreuzpunkte frei sind, sind sie während des Fluges alle miteinander verbunden:

Von den Wegen c, d_1, e und c, d_2, e und $c, b_1, a, i, h_1, g, f_1, e$ können keine zwei durch denselben Gendarm belegt werden. Analoges gilt für e und g. □

Bemerkung 86 *Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Dann gilt: Ist $\Sigma\mathcal{G}$ ein (k, k')-Graph mit Monotoniekosten ≥ 1, dann ist auch $\mathcal{G}$ ein Graph mit Monotoniekosten $k - k' \geq 1$.*

Beweis. Es gilt: $\mathrm{gw}(\mathcal{G}) = \mathrm{gw}(\Sigma\mathcal{G})$ und $\text{mon-gw}(\mathcal{G}) \geq \text{mon-gw}(\Sigma\mathcal{G})$. □

Wir können den Existenzbeweis also für $\Sigma\mathcal{G}$ statt für $\mathcal{G}$ führen. Damit zeigen wir gleichzeitig, dass es simpliziale Hypergraphen mit Monotoniekosten gibt.

Aus der Kontraposition von Bemerkung 86 folgt:

Korollar 87 *Sei $\mathcal{G}$ wie in Lemma 85. Dann gilt:*

$$\mathrm{gw}(\Sigma\mathcal{G}) = \text{mon-gw}(\Sigma\mathcal{G}) = 3.$$

Dies ist unser Ziel:

Satz 88 *Es gibt einen simplizialen Graphen $\mathcal{G}^1_{GOB}$, auf dem das monotone und das nichtmonotone Gendarmenspiel nicht äquivalent sind.*

Dieser Satz wird erst im folgenden Abschnitt endgültig bewiesen. Hier wird nur ein Teil gezeigt.

Beweis. Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ der Hypergraph aus Lemma 85, also
$P = \{a, b_1, b_2, c, d_1, d_2, e, f_1, f_2, g, h_1, h_2, i\}$ und
$K = \bigcup_{j=1,2}\{\{a, i\}, \{a, b_j\}, \{b_j, c\}, \{c, d_j\}, \{d_j, e\}, \{e, f_j\}, \{f_j, g\}, \{g, h_j\}, \{h_j, i\}\}$.
Der Hypergraph $\mathcal{G}^1_{GOB} := (P', K')$ sei der folgende Hypergraph (siehe Abbildung 1.25):
Sei $G := \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, $G \cap P = \emptyset$, die Menge der *Ballonpunkte* und $B := P$ die Menge der Bodenpunkte. Da $\mathcal{G}^1_{GOB}$ simplizial werden soll, gelte: $\{\{b\} \mid b \in B\} \subseteq K'$ und $\{\{g\} \mid g \in G\} \subseteq K'$.
Jede Hyperkante $\{p\} \in K'$ sei außerdem mit jeder Hyperkante $\{g\} \in K'$ sechsmal verankert. Die Menge der dazu nötigen Ösenpunkte heiße O und es sei $\{\{p\} \mid p \in O\} \subseteq K'$. Es werden noch sechs weitere Kanten hinzugenommen. Insgesamt ist:
$P' := G \dot\cup O \dot\cup B$,
$K' := K \cup \{\{a, g_1\}, \{g_1, g_2\}, \{g_2, f_1\}, \{d_2, g_3\}, \{g_3, g_4\}, \{g_4, i\}\} \cup \{\{p\} \mid p \in P'\}$.

Behauptung: $\mathcal{G}^1_{GOB}$ ist ein $(4, 5)$-Hypergraph. Offensichtlich ist $\beta(G) = 2$. Mit Korollar 87 folgt: mon-gw$(\langle B \rangle) = 3$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 74 erfüllt. Wir können also annehmen, dass G in jeder Gewinnstrategie im minimalen sicheren Spiel immer von den Gedarmen belegt ist (außer in den Fangpositionen).

Eine nichtmonotone Gewinnstrategie für vier Gendarmen ist in Abbildung 1.26 angegeben. Die für die Ösenpunkte erforderlichen Spielzüge sind der Übersichtlichkeit halber nicht mit eingezeichnet. Sie ändern ohnehin nichts an der Anzahl der benötigten Gendarmen.

Eine monotone Gewinnstrategie für fünf Gendarmen ergibt sich folgendermaßen: Zwei der Gendarmen stehen während des ganzen Spiels auf den Kanten $\{g_1, g_2\}, \{g_3, g_4\}$. Dann reichen nach Lemma 85 drei weitere Gendarmen aus, um den Räuber auf den Bodenpunkten zu fangen oder in einen Fluchtraum zu drängen, der aus einem einzigen Punkt besteht (wo er im darauf folgenden Zug gefangen wird).

Es bleibt zu zeigen:
a) Es gibt keine nichtmonotone Gewinnstrategie für drei Gendarmen.
b) Es gibt keine monotone Gewinnstrategie für vier Gendarmen.

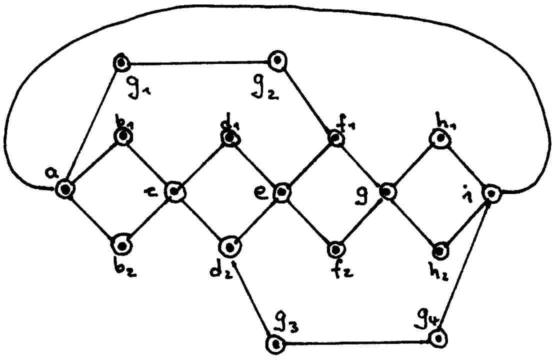

Abbildung 1.25: $\mathcal{G}^1_{GOB}$ aus Satz 88: Die Verankerungen sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet. Jede Hyperkante $\{g_1\}, \ldots, \{g_4\}$ ist mit jeder Hyperkante $\{b\}$, $b \in B$, sechsfach verankert.

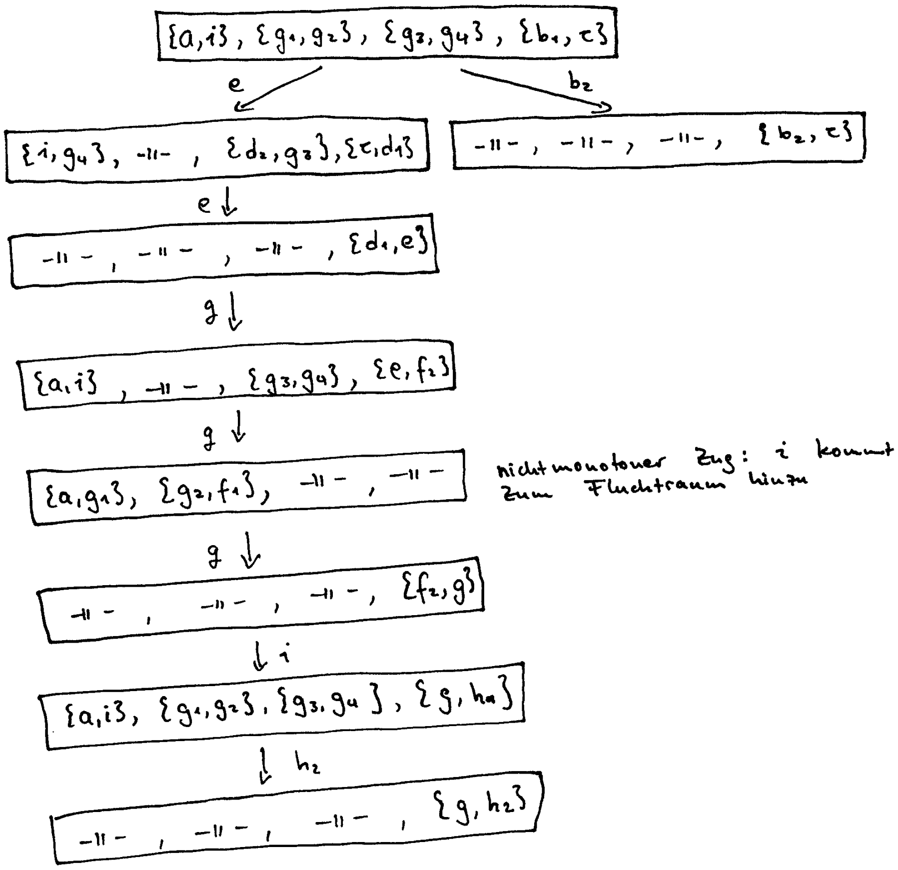

Abbildung 1.26: Eine nichtmonotone Gewinnstrategie für vier Gendarmen auf dem Graphen $\mathcal{G}^1_{GOB}$. Hierbei sind die für die Ösenpunkte erforderlichen Spielzüge nicht mit eingezeichnet.

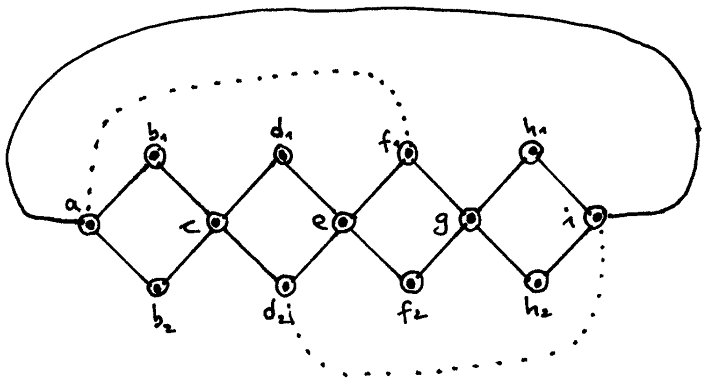

Abbildung 1.27: $\mathcal{G}^1$ aus Definition 89 a). Die gepunkteten Linien stellen die Gendarmenkanten dar. Die Ösenpunkte, die aus den Ankerkanten in $\mathcal{G}^1_{GOB}$ nach Entfernen der Ballonpunkte entstanden sind, sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Zu a: Leicht zu sehen ist: Wenn es eine Gewinnstrategie mit drei Gendarmen gäbe, dann gäbe es insbesondere eine Gewinnstrategie mit zwei Gendarmen auf $\langle B \rangle$. Dies stünde im Widerspruch zu Korollar 87.

b) Wird im folgenden Abschnitt gezeigt. □

1.6.2 Der Räuber kann entkommen

Um Teil b) des Beweises von Satz 88 zu zeigen, soll eine Anschauung der Gewinnstrategien für RG($\mathcal{G}^1_{GOB}$, 4) gegeben werden: Mittels der zwei Gendarmen G_1 und G_2, die die Ballonpunkte bewachen, kann jeder weitere Gendarm V durch Belegen von d_2 den Punkt i mit belegen.[7] Nach Lemma 74 sind in jeder Gewinnstrategie *o. E.* immer alle Ballonpunkte von den Gendarmen belegt (außer an den Blättern). Das heißt: der Räuber kann während des Spiels nie entlang der Wege von a nach f_1 oder von d_2 nach i ziehen.
Diese Beobachtung ausnutzend werden ein neuer Hypergraph $\mathcal{G}^1$ und eine Spielvariante, das *Spiel mit Gendarmenkanten* auf $\mathcal{G}^1$ definiert. Es wird dann gezeigt, dass jede monotone Gewinnstrategie in RG($\mathcal{G}^1_{GOB}$, 4) eine monotone Gewinnstrategie für zwei Gendarmen im Spiel mit Gendarmenkanten auf $\mathcal{G}^1$ induziert. Anschließend wird gezeigt, dass es keine monotone Gewinnstrategie auf $\mathcal{G}^1$ für zwei Gendarmen gibt.

Definition 89 *a) Sei $\mathcal{G}^1$ der Hypergraph, der aus $\mathcal{G}^1_{GOB}$ entsteht, indem alle Ballon- und Ösenpunkte und alle entsprechenden Kanten entfernt und statt dessen neue Kanten $\{a, f_1\}, \{d_2, i\}$ eingefügt werden (siehe Abbildung 89).*

b) Das Spiel mit Gendarmenkanten *auf $\mathcal{G}^1$ Gendarmen ist eine Variante von RG($\mathcal{G}^1, k$): Die Kanten $\{a, f_1\}, \{d_2, i\}$ sind hierbei geheime, nur den Gendarmen*

[7]analog kann durch Belegen von i der Punkt d_2 mit belegt werden, durch a der Punkt f_1, durch f_1 der Punkt a.

bekannte Verbindungen. Sie heißen Gendarmenkanten *und dürfen vom Räuber nicht benutzt werden. Ansonsten gelten die Regeln von $RG(\mathcal{G}^1_{GOB}, k)$.*
Die monotone Variante wird analog zu mon-$RG(\mathcal{G}^1_{GOB}, k)$ definiert.

Lemma 90 *Jede monotone Gewinnstrategie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{G}^1_{GOB}, 4)$ *liefert eine monotone Gewinnstrategie für zwei Gendarmen im Spiel mit Gendarmenkanten auf $\mathcal{G}^1$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine monotone Gewinnstrategie in $\mathrm{RG}(\mathcal{G}^1_{GOB}, 4)$. Nach Lemma 74, Teil d), sind *o. E.* in jedem Zug in $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ die Ballonpunkte belegt. Nun wird eine monotone Gewinnstrategie $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ für zwei Gendarmen im Spiel mit Gendarmenkanten auf $\mathcal{G}^1$ definiert. Dazu wird die Labelfunktion σ abgewandelt. Dadurch, dass es in $\mathcal{G}^1$ keine Ballonpunkte gibt, können wir zwei Gendarmen einsparen:
Sei $\mathcal{T}' := \mathcal{T}$. Sei b ein Punkt von $\mathcal{T}$.
Fall 1: Gibt es zwei Kanten $k_1, k_2 \in \sigma(b)$ mit $(k_1 \cup k_2) \cap G = \emptyset$, so setze $\sigma'(b) := \{k_1, k_2\}$.
Fall 2: Ist $\{a, g_1\} \in \sigma(b)$ und $\{g_2, f_1\} \notin \sigma(b)$, so belege in $\sigma'(b)$ statt $\{a, g_1\}$ die Hyperkante $\{a\}$. Verfahre analog in den drei entsprechenden Fällen.
Gilt $\{\{a, g_1\}, \{g_2, f_1\}\} \subseteq \sigma(b)$, so belege in $\sigma'(b)$ die Hyperkante $\{a, f_1\}$.
Verfahre analog, falls $\{\{a, g_1\}, \{g_2, f_1\}\} \subseteq \sigma(b)$. Dann bleibt $\rho' = \rho$ und somit ist $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$ auch monoton. □

Die Kontraposition dieses Lemmas lautet:

Korollar 91 *Wenn es keine monotone Gewinnstrategie für zwei Gendarmen im Spiel mit Gendarmenkanten auf $\mathcal{G}^1$ gibt, so gibt es auch keine monotone Gewinnstrategie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{G}^1_{GOB}, 4)$.

Satz 92 *Es gibt keine Gewinnstrategie in* mon-$\mathrm{RG}(\mathcal{G}^1_{GOB}, 4)$.

Beweis. Nach Korollar 91 reicht es zu zeigen, dass es keine monotone Gewinnstrategie für zwei Gendarmen im Spiel mit Gendarmenkanten auf $\mathcal{G}^1$ gibt. Dazu wird gezeigt, dass der Räuber immer entkommen kann – unabhängig davon, wie die zwei Gendarmen ziehen. Ausgehend davon, dass der Fluchtraum des Räubers in jedem Zug echt kleiner werden muss, werden wir die Fluchträume, die in einer monotonen Strategie tatsächlich auftreten können, untersuchen. Um die Fluchträume als Intervalle betrachten zu können, werden die Punkte $b_1, b_2, d_1, d_2, f_1, f_2, h_1, h_2$ zu den vier Punkten b, d, f, h zusammengefasst. Wir spielen also auf einer Projektion. Genauer: Ist R ein Fluchtraum des Räubers, so ist $p \in R$ genau dann, wenn $p_1 \in R$ oder $p_2 \in R$ ist für $p \in \{b, d, f, h\}$.

Nun können wir die Fluchträume des Räubers als Intervalle $[p, q]$ mit $p, q \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ auffassen, die die Gendarmen in jedem Schritt verkleinern müssen: Monotone Züge der Gendarmen, die an der Größe des Fluchtintervalles (auf der Projektion) nichts verändern, können wir hierbei vernachlässigen.

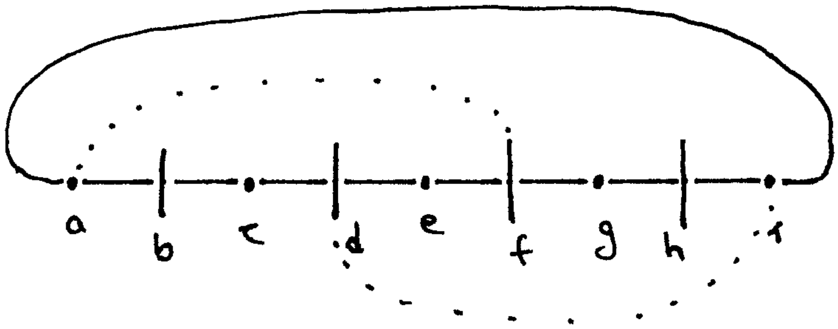

Abbildung 1.28: Wir können die Fluchträume in $\mathcal{G}^1$ als Intervalle auffassen. Hierbei verzichten wir der Übersichtlichkeit halber auf das Einzeichnen von Einerkanten.

Abbildung 1.28 zeigt den Hypergraphen unter der Projektion.

Bei jeder Strategie mit zwei Gendarmen stehen spätestens nach dem zweiten Zug beide Gendarmen auf dem Hypergraphen.
Beachte, dass nicht jedes Fluchtintervall vorkommen kann, da es nur zwei Gendarmen gibt, und da ein Gendarm allein etwa $\{b_1, b_2\}$ nicht belegen kann.[8]
Wir zeigen nun, dass der Räuber die folgende Invariante erhalten kann, bis die Gendarmen keinen monotonen Zug mehr machen können:

Für das Fluchtintervall J des Räubers gilt: $|J| \geq 2$.

Wenn dies gezeigt ist, dann sind wir fertig. Offensichtlich kann der Räuber im ersten Zug die Invariante erhalten.
Nun gehen wir rückwärts vor:

1. Schritt: Alle möglichen Intervalle J mit $|J| = 3$ werden betrachtet. Davon werden diejenigen herausgefunden, in denen der Räuber nicht auf monotone Weise gefangen werden kann. Diese heißen (aus der Sicht des Räubers) *gute Dreierintervalle.* Die übrigen heißen *schlechte Dreierintervalle.*
Intervalle der Länge drei, die tatsächlich vorkommen können, sind $[a, c]$, $[b, d]$, $[d, f]$ und aus Symmetriegründen noch $[f, h]$ und $[g, i]$. Weitere Intervalle können nicht vorkommen, da es nur zwei Gendarmen gibt.
Befindet sich der Räuber in $[a, c]$, so stehen die Gendarmen auf $\{d_2, i\}$ und $\{d_1, e\}$. Dann ist leicht zu sehen, dass sie den Räuber auf monotone Weise fangen können. Also sind $[a, c]$ und analog $[g, i]$ schlechte Dreierintervalle (siehe auch Abbildung 1.29).
Befindet sich der Räuber in $[b, d]$, so stehen die Gendarmen *o. E.* auf $\{a, b_1\}$ und $\{e, d_1\}$. (In den anderen Fällen verläuft die Argumentation ähnlich).
Es ist leicht zu sehen, dass die Gendarmen dann aber keinen monotonen Zug mehr machen können. Also ist $[b, d]$ ein gutes Dreierintervall. Dasselbe gilt aus Symmetriegründen für $[f, h]$ und analog für $[d, f]$.

[8] Der Fluchtraum $[c, e]$ etwa kann nicht vorkommen.

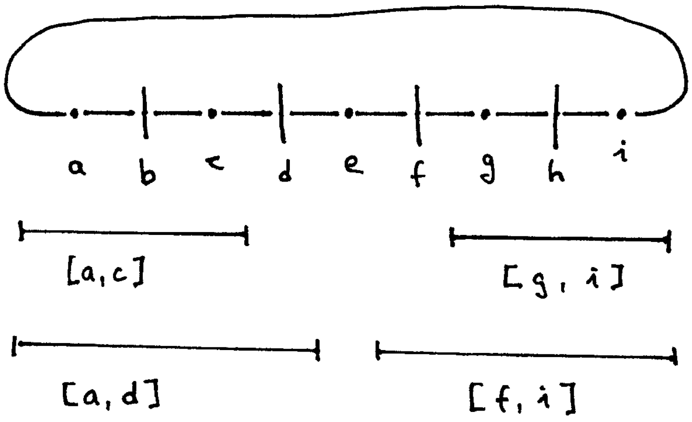

Abbildung 1.29: Die schlechten Intervalle sind: $\mathcal{M} := \{[a,c],[a,d],[g,i],[f,i]\}$.

2. Schritt: Wie betrachten alle vierelementigen Intervalle, die eines der schlechten Dreierintervalle enthalten. Diejenigen dieser vierelementigen Intervalle heißen *schlechte Viererintervalle*, von denen aus der Räuber von den Gendarmen in ein schlechtes Dreierintervall gedrängt werden kann und somit gefangen werden könnte. Die anderen vierelementigen Intervalle heißen *gute Viererintervalle.*[9]
Die schlechten Viererintervalle sind $[a,d]$ und aus Symmetriegründen $[f,i]$. Andere können nicht auftreten.

Damit sehen wir schon, dass es keine *schlechten Fünferintervalle* geben kann:
Zu $[a,d]$ gibt es kein fünfelementiges Intervall J mit $J \subseteq [a,d]$, welches die zwei Gendarmen eingrenzen können. Dasselbe gilt aus Symmetriegründen für $[f,i]$.

Es stellt sich also heraus, dass folgende Menge gerade die schlechten Intervalle enthält:
$\mathcal{M} := \{[a,c],[a,d],[g,i],[f,i]\}$ (siehe Abbildung 1.29).
Der Räuber kann nun die Invariante erhalten, indem er im ersten Zug in ein Intervall J mit $|J| \geq 5$ zieht. Das gibt es immer. Von da an kann er in jedem Zug die schlechten Intervalle vermeiden. Sobald er in einem guten Dreierintervall steht, hat er aber schon gewonnen.

$\square$

Korollar 93 $(\mathcal{G}^1_{GOB})^* = (K^*, P^*)$ *entstehe aus* $\mathcal{G}^1_{GOB} = (K', P')$*, indem alle Einerkanten weggelassen werden. Es ist also* $P^* = P'$ *und* $K^* = K' \setminus \{\{p\} \mid p \in P'\}$*. Dann ist* $\mathcal{G}^1_{GOB}$ *ein* $(4,5)$*-Graph.*

[9] Beachte: Wegen der Monotonie kann das einem Dreierintervall vorangegangene Fluchtintervall nur ein Viererintervall gewesen sein, oder aber es gab kein vorangehendes Fluchtintervall und dies war der erste Zug. Im ersten Zug kann der Räuber aber dem Dreierintervall ausgewichen sein.

Beweis. Da $\mathcal{G}^1_{GOB} = \Sigma(\mathcal{G}^1_{GOB})^*$, folgt $\mathrm{gw}((\mathcal{G}^1_{GOB})^*) = \mathrm{gw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = 4$. Andererseits ist nach Bemerkung 86 $\text{mon-gw}((\mathcal{G}^1_{GOB})^*) \geq \text{mon-gw}(\mathcal{G}^1_{GOB})$. Abbildung 1.26 zeigt aber bereits eine monotone Gewinnstrategie für 5 Gendarmen auf $(\mathcal{G}^1_{GOB})^*$. □

$\mathcal{G}^1_{GOB}$ ist also ein simplizialer Graph mit Monotoniekosten 1 und $(\mathcal{G}^1_{GOB})^*$ ein Graph mit Monotoniekosten 1.

1.7 Abschätzungen der Spielinvarianten

In diesem Abschnitt wollen wir das Gendarmen- und das Polizistenspiel einander gegenüberstellen.
Vorausgesetzt, wir kennen die Invarianten des einen Spiels (etwa des Räuber-und-Polizisten-Spiels) auf $\mathcal{H}$, können wir dann die Invarianten des anderen Spiels (also hier des Räuber-und-Gendarmen-Spiels) auf $\mathcal{H}$ nach oben abschätzen?

Sei κ die Mächtigkeit der größten Hyperkante von $\mathcal{H}$. Wir zeigen nun, dass κk Polizisten eine Gewinnstrategie auf $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ haben, wenn k Gendarmen eine Gewinnstrategie auf $\mathcal{H}$ haben.

Satz 94 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph mit $\max\{|h| \mid h \in K\} = \kappa$. Dann gilt:*
$$\mathrm{pw}(\mathcal{H}) \leq \kappa \mathrm{gw}(\mathcal{H}).$$

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine Gewinnstrategie für k Gendarmen auf $\mathcal{H}$. Jeder der k Gendarmen wird durch κ Polizisten ersetzt. Wir erhalten eine Gewinnstrategie für κk Polizisten auf $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ wie folgt: Belegt ein Gendarm eine Hyperkante h gemäß der Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ für $\mathcal{H}$, so belegen κ Polizisten alle Punkte der zu h gehörigen Clique in $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$. Nach Beispiel 29 wissen wir, dass κ Polizisten reichen, um den Räuber in einer Clique der Mächtigkeit κ zu fangen. Wir haben somit eine Gewinnstrategie für κk Polizisten gefunden. □

Wie gut ist diese Abschätzung?

Beispiel 95 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ eine Clique, $|P| = 2n$. Dann gilt:*
$$\mathrm{gw}(\mathcal{G}) = n \text{ und } \mathrm{pw}(\mathcal{G}) = 2n.$$

Also liefert die Abschätzung aus Bemerkung 94 die kleinste obere Schranke. Andererseits gilt für einen 3-Zykel[10] $\mathcal{Z}$: $\mathrm{gw}(\mathcal{Z}) = 2$ und $\mathrm{pw}(\mathcal{G}) = 3$. Da in diesem Fall $\kappa = 2$ ist, lässt sich die Ungleichung nicht zu einer Gleichung verbessern.

Satz 96 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Es gilt:*
$$\text{mon-gw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{pw}(\mathcal{H}).$$

[10] Siehe Definition 51.

Beweis. Sei $\mathrm{pw}(\mathcal{H}) = k$ und $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ eine monotone Gewinnstrategie für k Polizisten auf $\mathcal{H} = (P, K)$. Jeder Punkt $p \in P$ liegt in einer Hyperkante aus K. Wir können also eine Abbildung $\varphi : P \to K$ definieren, mit $p \in \varphi(p)$ für alle $p \in P$. k Gendarmen können das nichtmonotone Spiel nun auf folgende Weise gewinnen:
Am Anfang besetzen die Gendarmen die Hyperkanten $\varphi(p)$ mit $p \in \sigma(w)$, w Wurzel von $\mathcal{T}$. Der Räuber wählt einen Fluchtraum ρ' bzgl. $\sigma' = \bigcup_{p\in\sigma(w)} \varphi(p)$. Dieser ist für genau einen Nachfolger a der Wurzel von $\mathcal{T}$ in $\rho(a)$ enthalten. Die Gendarmen reagieren, indem sie die Hyperkanten $\varphi(p)$ mit $p \in \sigma(a)$ besetzen. Der Räuber wählt daraufhin einen neuen Fluchtraum ρ' bzgl. des neuen $\sigma' = \bigcup_{p\in\sigma(a)} \varphi(p)$. Auch dieser ist für genau einen Nachfolger b von a in $\rho(b)$ enthalten, usw.
Auf diese Weise ergibt sich eine Gewinnstrategie $(\mathcal{T}', \sigma', \rho')$, $\mathcal{T}' = (A,' B')$ im nichtmonotonen Gendarmenspiel, zusammen mit einer Abbildung $\psi : A' \to A$, für die gilt:

- Für alle $a' \in A' \setminus \{w'\}$, w' Wurzel von $\mathcal{T}'$, ist $\psi(\mathrm{vorg}(a')) = \mathrm{vorg}(\psi(a))$ und $\psi(w') = w$.

- Für alle $a' \in A'$ ist $\sigma'(a') = \{\varphi(p) \mid p \in \sigma(\psi(a'))\}$ und $\rho'(a') \subseteq \rho(\psi(a'))$.

Es genügt nun zu zeigen, dass diese Gewinnstrategie sogar schwach monoton ist. Andernfalls würde es ein $a' \in A' \setminus \{w'\}$ mit $\rho'(a') \nsubseteq \rho(\mathrm{vorg}(a'))$ geben.
Sei also $p \in \rho'(a') \setminus \rho'(\mathrm{vorg}(a'))$.
Beachte, dass $\mathrm{vorg}(a') \neq w'$, da sonst $\rho'(\mathrm{vorg}(a')) = P$ wäre. Also ist $\mathrm{vorg}^2(a')$ definiert.
Während des Fluges der Gendarmen von $\sigma'(\mathrm{vorg}^2(a'))$ nach $\sigma'(\mathrm{vorg}(a'))$ sind die Fluchträume $\rho'(\mathrm{vorg}(a'))$ und $\rho'(a')$ miteinander verbunden, d. h. es existiert ein Weg W in $P \setminus (\sigma'(\mathrm{vorg}^2(a')) \cap \sigma'(\mathrm{vorg}(a')))$ von p zu einem Punkt $q \in \rho'(\mathrm{vorg}(a'))$. Wir können annehmen, dass q der erste in $\rho'(\mathrm{vorg}(a'))$ liegende Punkt auf dem Weg W ist. Sei r der unmittelbar davor auf dem Weg liegende Punkt. Da $r \notin \rho'(\mathrm{vorg}(a'))$ und $q \in \rho'(\mathrm{vorg}(a'))$ beachbart sind, muss $r \in \sigma'(\mathrm{vorg}^2(a'))$ gelten.
D. h. es ist $r \in \phi(s)$ für ein $s \in \sigma(\mathrm{vorg}^2(a))$, wobei $a = \psi(a')$. Andererseits ist $r \in (P \setminus (\sigma'(\mathrm{vorg}^2(a')) \cap \sigma'(\mathrm{vorg}(a')))) \cap \sigma'(\mathrm{vorg}^2(a'))$. Damit haben wir einen nichtmonotonen Schritt in der Polizistenstrategie (und folglich einen Widerspruch) gefunden:
s ist in $P \setminus (\sigma'(\mathrm{vorg}^2(a')) \cap \sigma'(\mathrm{vorg}(a')))$ über W und $\phi(s)$ mit $q \in \rho'(\mathrm{vorg}(a')) \subseteq \rho(\mathrm{vorg}(a))$ verbunden. Da $s \notin \sigma(\mathrm{vorg}(a))$ ist, liegt s somit in einem möglichen Fluchtraum bzgl. $\sigma(\mathrm{vorg}(a))$ im Polizistenspiel. Wegen $s \in \sigma(\mathrm{vorg}^2(a))$ ist hier die Monotonie verletzt. $\square$

Es gibt einen Graphen, auf dem die Ungleichung als Gleichung gilt:

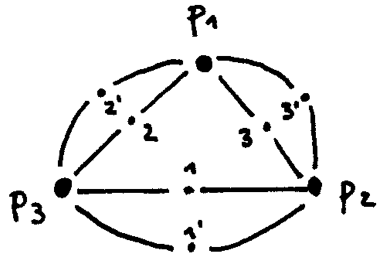

Abbildung 1.30: Ein Graph $\mathcal{G}$ mit $\mathrm{pw}(\mathcal{G}) = \mathrm{gw}(\mathcal{G}) = 3$.

Beispiel 97 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ der folgende Graph (siehe Abbildung 1.30):*
$P := \{p_1, p_2, p_3, 1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$ *und* $K := \{(p_1, 2), (p_1, 2'), (p_1, 3), (p_1, 3')\}$
$\cup \{(p_2, 1), (p_2, 1'), (p_2, 3), (p_2, 3'), (p_3, 1), (p_3, 1'), (p_3, 2), (p_3, 2')\}$. *Es gilt:*

$$\mathrm{pw}(\mathcal{G}) = \mathrm{gw}(\mathcal{G}) = 3.$$

Beweis. a) Zu $\mathrm{pw}(\mathcal{G}) \leq 3$: Drei Polizisten haben eine Gewinnstrategie, indem sie sich im ersten Zug auf $\{p_1, p_2, p_3\}$ stellen. Im zweiten Zug fangen sie den Räuber.
b) Zu $\mathrm{gw}(\mathcal{G}) \geq 3$: Zwei Gendarmen kann der Räuber immer entkommen: In jedem Zug der zwei Gendarmen ist einer der Punkte aus $\{p_1, p_2, p_3\}$ unbelegt. Der Räuber zieht nun so, dass er in jedem Zug auf einem Punkt aus $\{p_1, p_2, p_3\}$ steht.
Nach Satz 96 folgt $3 \leq \mathrm{gw}(\mathcal{G}) \leq \text{mon-gw}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{pw}(\mathcal{G}) \leq 3$ und schließlich die Behauptung. □

Wieder zeigt der 3-Zykel, dass sich die Ungleichung aus Satz 96 nicht zu einer Gleichhung verbessern lässt.

Insgesamt erhalten wir mit Satz 96, dem Satz von Thomas und Seymour und Satz 94:

Korollar 98 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph mit* $\max\{|h| \mid h \in K\} = \kappa$. *Es gilt:*

$$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) \leq \text{mon-gw}(\mathcal{H}) \leq \text{mon-pw}(\mathcal{H}) = \mathrm{pw}(\mathcal{H}) \leq \kappa \mathrm{gw}(\mathcal{H}).$$

Die erste Ungleichung lässt sich nach Satz 61 nicht zu einer Gleichung verbessern (in vielen Fällen gilt aber die Gleichung: so etwa auf einem 3-Zykel).

Kapitel 2

Zerlegungen

2.1 Baumzerlegungen

Wir wollen einem Graphen $\mathcal{G}$ die kleinste natürliche Zahl k (seine *Baumweite*) zuordnen, so dass $\mathcal{G}$ „in eine Baumstruktur zerlegt“ werden kann mit maximal k Punkten aus $\mathcal{G}$ an jedem Baumpunkt. Bäume (mit mindestens einer Kante) werden die Baumweite 1 haben. Je kleiner die Baumweite eines Graphen ist, desto „baumähnlicher“ ist der Graph. Die Baumweite ist also ein Maß dafür, wie weit die Struktur eines Graphen von der eines Baumes entfernt ist. In Abschnitt 2.4 werden wir zeigen, dass die Baumweite eines Graphen $\mathcal{G}$ durch seine Polizistenweite beschrieben wird.
Es sei noch einmal daran erinnert, dass Graphen nicht leer sind.

Definition 99 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph. Eine* Baumzerlegung *von $\mathcal{G}$ ist ein Paar $(\mathcal{T}, \chi)$, bestehend aus einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (A, B)$ und einer Labelfunktion $\chi : A \to \mathcal{P}(P)$. Weiterhin soll gelten:*

1. Für alle $p \in P$ gibt es ein $a \in A$, so dass $p \in \chi(a)$.
(a deckt p ab.)

2. Für jede Kante $k \in K$ gibt es ein $a \in A$, so dass $k \subseteq \chi(a)$.
(a deckt k ab.)

3. Für alle $p \in P$ ist $\{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ zusammenhängend.

Die Bedingungen 1 und 2 zusammen besagen, dass $\mathcal{G}$ die Vereinigung der Subgraphen $\langle\chi(a)\rangle$ ist. Bedingung 3 besagt, dass für jedes $p \in P$ die Menge $\mathcal{T}(p) := \{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ einen Subbaum $\langle\mathcal{T}(p)\rangle$ von $\mathcal{T}$ induziert.

Abbildung 2.1 zeigt einen Graphen mit drei zugehörigen Baumzerlegungen.

Definition 100 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein Graph, $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$, $\mathcal{T} = (A, B)$.*
1. Die Weite *der Baumzerlegung ist die natürliche Zahl*

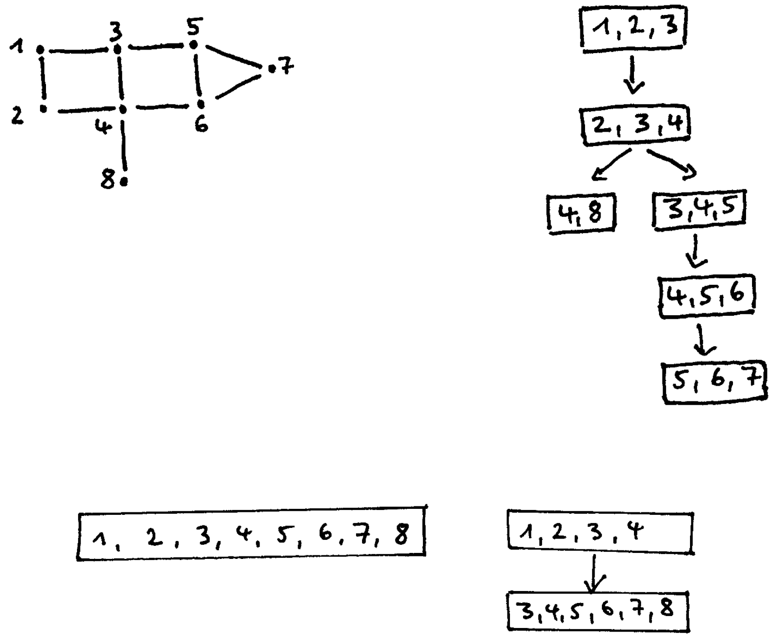

Abbildung 2.1: Ein Graph mit drei zugehörigen Baumzerlegungen (vgl. Abbildung 1.2, Seite 15).

$\mathrm{w}(\mathcal{T}, \chi) := \max\{|\chi(a)| \mid a \in A\} - 1$

2. *Die* Baumweite *des Graphen $\mathcal{G}$ ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{bw}(\mathcal{G}) := \min\{\mathrm{w}(\mathcal{T}, \chi) \mid (\mathcal{T}, \chi)$ *Baumzerlegung von* $\mathcal{G}\}$.

Beispiel 101 *Jeder Baum $\mathcal{G} = (P, K)$ mit $K \neq \emptyset$ hat die Baumweite 1:*[1]

Beweis. Da $\mathcal{G}$ mindestens eine Kante enthält, muss es nach Definition 99 in jeder zugehörigen Baumzerlegung auch einen Punkt a geben, der die Kante abdeckt. Also ist $\mathrm{bw}(\mathcal{G}) \geq 1$. Der Beweis von $\mathrm{bw}(\mathcal{G}) \leq 1$ ist eine Übungsaufgabe (Tipp: Unter Verwendung der Baumstruktur von $\mathcal{G}$ wird eine Baumzerlegung der Weite 1 konstruiert). □

Abbildung 2.2 zeigt einen Baum mit einer zugehörigen Baumzerlegung.

Das folgende Lemma zeigt, dass Baumzerlegungen Zusammenhang erhalten:

Lemma 102 *Sei $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G} = (P, K)$, $\mathcal{T} = (A, B)$ und sei $Z \subseteq P$ zusammenhängend.*
Dann ist

$$\mathcal{T}(Z) := \{a \in A \mid \chi(a) \cap Z \neq \emptyset\}$$

zusammenhängend in $\mathcal{T}$.

[1] Tatsächlich dient das -1 in der Definition laut [Die97] keinem anderen Zweck, als diese Behauptung wahr zu machen.

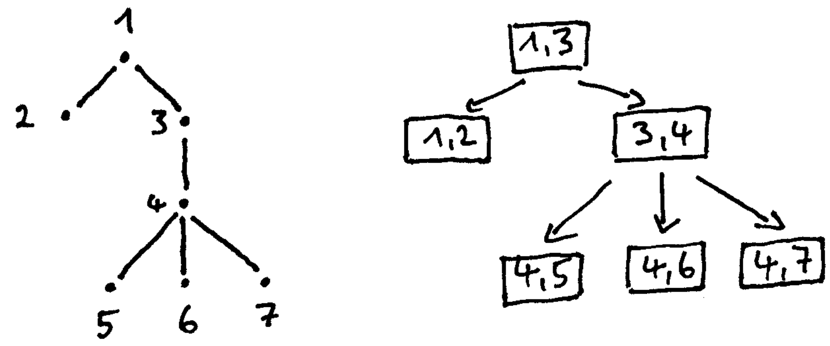

Abbildung 2.2: Ein Baum mit einer zugehörigen Baumzerlegung (vgl. Abbildung 1.4, Seite 16).

Beweis. $\mathcal{T}(Z) = \bigcup_{h \in Z} \mathcal{T}(h)$ ist eine Vereinigung von Mengen, die nach Bedingung 3 aus Definition 99 zusammenhängend sind. Nach Bedingung 2 ist weiter $\mathcal{T}(p) \cap \mathcal{T}(q) \neq \emptyset$ für $(p, q) \in K$. Also gilt die Behauptung. $\square$

Definition 103 *Sei $\mathcal{T}$ ein Baum, $\mathcal{T} = (A, B)$. Sei χ eine auf A definierte Labelfunktion und $a \in A$. Es ist $\chi(A_a) := \bigcup_{b \in A_a} \chi(b)$.*

Bemerkung 104 *Die Definition einer* Baumzerlegung *lässt sich auf natürliche Weise auch auf Hypergraphen $\mathcal{H}$ erweitern: Wir ersetzen in der Definition 99 einfach die Worte „Graph“ durch „Hypergraph“ und „Kante“ durch „Hyperkante“. So können wir gemäß Definition 100 auch einem Hypergraphen eine* Baumweite *zuordnen.*

2.2 Hyperbaumzerlegungen

In diesem Abschnitt werden Hyperbaumzerlegungen und die Hyperbaumweite eines Hypergraphen definiert. In Abschnitt 2.4 wird gezeigt, dass die Hyperbaumweite eines Hypergraphen gleich der monotonen Gendarmenweite eines Hypergraphen ist.

Definition 105 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. Eine* Hyperbaumzerlegung *von $\mathcal{H}$ ist ein Tripel $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$, bestehend aus einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (A, B)$ und zwei Labelfunktionen $\chi : A \to \mathcal{P}(P)$ und $\lambda : A \to \mathcal{P}(K)$. Weiterhin soll gelten:*

1. *Für jede Hyperkante $h \in K$ gibt es ein $a \in A$, so dass $h \subseteq \chi(a)$ ist.*
   (a deckt h ab.)
2. *Für alle $p \in P$ ist $\{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ zusammenhängend.*
3. *Für alle $a \in A$ gilt: $\chi(a) \subseteq \bigcup \lambda(a)$.*
4. *Für alle $a \in A$ gilt: $\chi(A_a) \cap \bigcup \lambda(a) \subseteq \chi(a)$.*

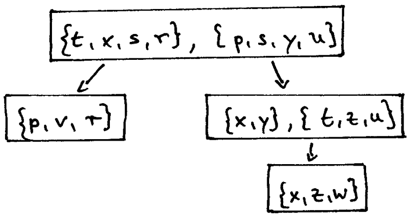

Abbildung 2.3: Eine Hyperbaumzerlegung des Hypergraphen aus Abbildung 1.1, Seite 10. Hier sind nur die Kantenlabels λ eingezeichnet, und es ist $\chi := \bigcup \lambda$.

Da wir nur zusammenhängende Hypergraphen $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \neq (\{p\}, \emptyset)$ betrachten, gilt:

Bemerkung 106 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ ist genau dann eine Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{H}$, wenn gilt:*

12. $(\mathcal{T}, \chi)$ ist eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}$.

34. Für alle $a \in A$ gilt: $\chi(A_a) \cap \bigcup \lambda(a) = \chi(a)$.

Abbildung 2.3 zeigt eine Hyperbaumzerlegung des Hypergraphen aus Abbildung 1.1, Seite 10.

Bemerkung 107 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{H}$, $\mathcal{T} = (A, B)$. Dann gilt für die Wurzel w von $\mathcal{T}$:*

$$\bigcup \lambda(w) = \chi(w).$$

Beweis. Es gilt $\chi(A_w) = P$. Nach Bedingung 4 aus Definition 105 gilt: $\bigcup \lambda(w) = \chi(A_w) \cap \bigcup \lambda(w) \subseteq \chi(w)$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus Bedingung 3. $\square$

Der Wurzel einer Hyperbaumzerlegung kommt also eine besondere Rolle zu und Bedingung 4 verhindert, dass wir beliebig umwurzeln können.

Definition 108 *Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph, $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{H}$, $\mathcal{T} = (A, B)$.*

1. Die Weite *der Hyperbaumzerlegung ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{hw}(\mathcal{T}, \chi, \lambda) := \max\{|\bigcup \lambda(a)| \mid a \in A\}$.

2. Die Hyperbaumweite *des Hypergraphen $\mathcal{H}$ ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{hbw}(\mathcal{H}) := \min\{\mathrm{hw}(\mathcal{T}, \chi, \lambda) \mid (\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ *Hyperbaumzerlegung von* $\mathcal{H}\}$.

Beachte, dass hier im Gegensatz zur Baumweite keine Verschiebung um 1 erfolgt.

Beispiel 109 *Jeder Baum $\mathcal{H} = (P, K)$ mit $K \neq \emptyset$ hat Hyperbaumweite 1.*

2.3 Gemeinsame Verallgemeinerungen

Unser Ziel ist es, Zuordnungen

$$\begin{Bmatrix} \text{Baumzerlegungen von } \mathcal{H} \\ \text{der Weite} \leq k-1 \end{Bmatrix} \rightleftarrows \begin{Bmatrix} \text{monotone Gewinnstrategien für} \\ \leq k \text{ Polizisten auf } \mathcal{H} \end{Bmatrix}$$

und

$$\begin{Bmatrix} \text{Hyperbaumzerlegungen von } \mathcal{H} \\ \text{der Weite} \leq k \end{Bmatrix} \rightleftarrows \begin{Bmatrix} \text{monotone Gewinnstrategien für} \\ \leq k \text{ Gendarmen auf } \mathcal{H} \end{Bmatrix}$$

zu finden. Um diese zwei Zuordnungen gleichzeitig zu etablieren, führen wir die *$\mathcal{H}$-Baumzerlegungen von $\mathcal{G}$* ein, welche eine gemeinsame Verallgemeinerung der Baumzerlegungen und Hyperbaumzerlegungen sind. Anschließend definieren wir eine gemeinsame Verallgemeinerung des Räuber-und-Polizisten-Spiels und des Räuber-und-Gendarmen-Spiels: das sogenannte *$\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$*. In Abschnitt 2.4 zeigen wir, dass es eine Zuordnung zwischen den $\mathcal{H}$-Baumzerlegungen von $\mathcal{G}$ der Weite $\leq k$ und den Gewinnstrategien im monotonen $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$ für $\leq k$ Polizisten gibt (und umgekehrt). Die gesuchten Zuordnungen ergeben sich dann als Spezialfälle.

Definition 110 *Seien $\mathcal{G} = (P, K)$ und $\mathcal{H} = (P, H)$ Hypergraphen mit gemeinsamer Punktemenge P. Sei $\mathcal{G}$ zusammenhängend und $\mathcal{H}$ nicht notwendigerweise zusammenhängend mit $\bigcup_{h \in H} h = P$.*
*Eine $\mathcal{H}$-*Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ *ist ein Tripel $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$, bestehend aus einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (A, B)$ und zwei Labelfunktionen $\chi : A \to \mathcal{P}(P)$ und $\lambda : A \to \mathcal{P}(H)$. Weiterhin soll gelten:*

1. *Für jede Hyperkante $k \in K$ gibt es ein $a \in A$, so dass $k \subseteq \chi(a)$.*
(*a* deckt *h* ab.)
2. *Für alle $p \in P$ ist $\{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ zusammenhängend.*
3. *Für alle $a \in A$ gilt: $\chi(a) \subseteq \bigcup \lambda(a)$.*
4. *Für alle $a \in A$ gilt: $\chi(A_a) \cap \bigcup \lambda(a) \subseteq \chi(a)$.*

Bemerkung 111 *Sei $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$. Dann ist $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$.*

Bemerkung 112 *Sei $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Dann ist $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{G}$.*

Die Beweise werden der Leserin bzw. dem Leser überlassen.

Definition 113 *1. Die* Weite *der $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{w}(\mathcal{T}, \chi, \lambda) := \max\{|\lambda(a)| \mid a \in A\}$.

2. Die $\mathcal{H}$-Baumweite von $\mathcal{G}$ *ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{bw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) := \min\{\mathrm{w}(\mathcal{T},\chi,\lambda) \mid (\mathcal{T},\chi,\lambda)\ \mathcal{H}\text{-}Baumzerlegung\ von\ \mathcal{G}\}$.

Die Baumweite und die Hyperbaumweite ergeben sich als Spezialfälle:

Bemerkung 114 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein zusammenhängender Hypergraph. Es gilt:*

$$\mathrm{bw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\mathcal{H}).$$

Bemerkung 115 *Sei* $\mathcal{G} = (P, K)$ *ein zusammenhängender Hypergraph und* $\mathcal{H} = (P, H)$ *mit* $H = \mathcal{P}_{=1}(P)$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{bw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) = \mathrm{bw}(\mathcal{G}) + 1.$$

Definition 116 *Seien* $\mathcal{G} = (P, K)$ *und* $\mathcal{H} = (P, H)$ *Hypergraphen.* $\mathcal{G}$ *sei zusammenhängend,* $\mathcal{H}$ *nicht notwendigerweise zusammenhängend mit* $\bigcup_{h\in H} h = P$.

a) Das $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$, $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$, *wird von zwei Personen, I und II, gespielt. Person I spielt die Polizisten und Person II den Räuber. Person I spielt auf* $\mathcal{H}$ *und Person II spielt auf* $\mathcal{G}$.[2] *Eine* Position *des Spiels* $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$ *ist ein Paar* (X, r), *wobei* $X \in \mathcal{P}_{\le k}(H)$, $r \in P$.

Zu Beginn des Spiels wählt I ein $X \in \mathcal{P}_{\le k}(H)$. *II antwortet durch Wahl eines* $r \in P$.

In jeder Runde des Spiels, etwa in Position (X, r), *wählt I ein* $X' \in \mathcal{P}_{\le k}(H)$. *II antwortet durch Wahl eines* $r' \in P$, *für das es einen Weg in* $\mathcal{G}$ *von* r *nach* r' *gibt, der* $\bigcup X \cap \bigcup X'$ *nicht schneidet.*

Das Spiel endet, wenn eine Position (X, r) *mit* $r \in \bigcup X$ *erreicht wird. Diese Position heißt auch* Fangposition. *In diesem Fall gewinnt I. Tritt dieser Fall nie ein, so gewinnt II.*

b) Das monotone $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$, $\text{mon-Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$, *verläuft wie* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$, *wobei I nur monotone Züge machen darf. Der Fluchtraum des Räubers in* $\mathcal{G}$ *(!) muss also in jedem Zug echt kleiner werden. Wenn es eine Runde gibt, in der dies nicht möglich ist, so gewinnt II.*

In diesem Spiel spielen I und II also auf jeweils einem von zwei Hypergraphen mit gleicher Punktemenge.

Definition 117 *Seien* $\mathcal{G} = (P, K)$ *und* $\mathcal{H} = (P, H)$ *Hypergraphen.* $\mathcal{G}$ *sei zusammenhängend,* $\mathcal{H}$ *nicht notwendigerweise zusammenhängend mit* $\bigcup_{h\in H} h = P$.
1. Eine Strategie im Spiel $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$ für die Polizisten *ist ein Tripel* $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$, *so dass gilt:*

- $\mathcal{T} = (A, B)$ *ist ein nicht notwendigerweise endlicher Baum.*

[2] Die Idee, die „Spielpläne“ für I und II zu unterscheiden, stammt aus einer e-Mail von Prof. G. Gottlob.

- $\tau : A \to \mathcal{P}_{\leq k}(H)$.
- $\rho : A \to \mathcal{P}(P)$.
- $\rho(w) = P$ *und* $\rho(b) \in \mathcal{R}(\bigcup \tau(a), \bigcup \tau_{vorg}(a), \rho(a))$, *falls* $b \neq w$ *und* $a = vorg(b)$.
- *Für jedes* $a \in A$ *und jedes* $R \in \mathcal{R}(\bigcup \tau(a), \bigcup \tau_{vorg}(a), \rho(a))$ *existiert genau ein Nachfolger* $b \in A$ *mit* $\rho(b) = R$.

2. $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$ *ist eine* monotone Strategie, *wenn für alle* $a \in A$ *mit* $a \neq w$ *gilt:* $\rho(a) \subsetneq \rho(vorg(a))$.

Definition 118 *1.* $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$ *ist eine* Gewinnstrategie für $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$, *wenn* $\mathcal{T}$ *endlich ist.*
2. $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$ *ist eine* Gewinnstrategie für $\text{mon-Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$, *wenn sie zusätzlich monoton ist.*

Lemma 119 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *ein Hypergraph. Es gilt: Zu jeder schwach monotonen Gewinnstrategie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$ *existiert eine monotone Gewinnstrategie in* $\mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$.

Beweis. Der Beweis verläuft wie der von Lemma 31. □

Definition 120 *Seien* $\mathcal{G}$ *und* $\mathcal{H}$ *wie in Definition 116.*
1. Die $\mathcal{H}$-Polizistenweite von $\mathcal{G}$ *ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{pw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid I \textit{ hat eine Gewinnstrategie in } Pol_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)\}$.
2. Die monotone $\mathcal{H}$-Polizistenweite von $\mathcal{G}$ *ist die natürliche Zahl*
$\text{mon-pw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid I \textit{ hat eine Gewinnstrategie in } \text{mon-Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)\}$.

Das Räuber-und-Polizisten-Spiel und das Räuber-und-Gendarmen-Spiel ergeben sich als Spezialfälle:

Bemerkung 121 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein (zusammenhängender) Hypergraph. Dann gilt:*
a) $\mathrm{pw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = \mathrm{gw}(\mathcal{H})$.
b) $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}, k) = \mathrm{RG}(\mathcal{H}, k)$.

Bemerkung 122 *Sei* $\mathcal{G} = (P, K)$ *ein zusammenhängender Hypergraph und* $\mathcal{H} = (P, H)$ *mit* $H = \mathcal{P}_{=1}(P)$. *Es gelten:*
a) Sei $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$ *eine Gewinnstrategie für* $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$, $\mathcal{T} = (A, B)$. *Mit* $\sigma := \bigcup \tau$ *ist* $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ *eine Gewinnstrategie für* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$.
b) Sei $(\mathcal{T}, \sigma, \rho)$ *eine Gewinnstrategie für* $\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$, $\mathcal{T} = (A, B)$. *Mit* $\tau(a) := \mathcal{P}_{=1}(\sigma(a))$ *ist* $(\mathcal{T}, \tau, \rho)$ *eine Gewinnstrategie für* $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$.
c) $\mathrm{pw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) = \mathrm{pw}(\mathcal{G})$.

2.4 Zerlegungen und Gewinnstrategien

Ziel dieses Kapitels ist es, folgende Sätze zu beweisen:

Satz 123 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Äquivalent sind:*
a) Die Baumweite von $\mathcal{H}$ ist $\leq k-1$.
b) Es gibt eine monotone Gewinnstrategie im Räuber-und-Polizisten-Spiel auf $\mathcal{H}$ mit $\leq k$ Polizisten.[3]

Satz 124 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Äquivalent sind:*
a) Die Hyperbaumweite von $\mathcal{H}$ ist $\leq k$.
b) Es gibt eine monotone Gewinnstrategie im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf $\mathcal{H}$ mit $\leq k$ Gendarmen.[4]

Die $\mathcal{H}$-Baumzerlegungen von $\mathcal{G}$ und das $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel von $\mathcal{G}$ ermöglichen uns einen gemeinsamen Beweis für beide Sätze.
Als erstes wird gezeigt, wie wir aus einer monotonen Gewinnstrategie in $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G},k)$ eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ der Weite $\leq k$ gewinnen können. Dazu ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 125 *Sei $(\mathcal{T},\tau,\rho)$ eine monotone Gewinnstrategie für $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G},k)$, $\mathcal{T}=(A,B)$.*
Dann gibt es für jedes $p\in P$ genau ein $a\in A$ mit:

$$(*)\qquad p\in\bigcup\tau(a)\ \text{und}\ p\in\rho(a).$$

Beweis. Zunächst wird die Existenz gezeigt: Sei w die Wurzel von $\mathcal{T}$. Aus $p\in P$ folgt $p\in\rho(w)$. Für jedes $a\in A$ gibt es entweder genau einen Nachfolger $b\in A$ mit $p\in\rho(b)$, oder es gilt $p\in\bigcup\tau(a)$, denn $\rho(a)\subseteq\bigcup\tau(a)\cup\bigcup_{a=\mathrm{vorg}(b)}\rho(b)$.
Da $\mathcal{T}$ endlich ist, muss der zweite Fall in einem Punkt a eintreten. Dann erfüllt a die Bedingung $(*)$.
Die Eindeutigkeit von a folgt aus der Monotonie von $(\mathcal{T},\tau,\rho)$:
Angenommen a' würde die Bedingung ebenfalls erfüllen und $a'\neq a$. Sei nun $b\in A$ so gewählt, dass b auf dem Weg von w nach a und auf dem Weg von w nach a' liegt, und kein Nachfolger von b diese Eigenschaft hat. Wegen der Monotonie ist $p\in\rho(b)$, also $p\notin\bigcup\tau(\mathrm{vorg}(b))$. Mit Hilfe der Monotonie lässt sich weiterhin einsehen, dass b nicht die Eigenschaft $(*)$ haben kann. Also ist $p\notin\bigcup\tau(b)$. Somit existiert ein Fluchtraum R bzgl. $\bigcup\tau(b)$ mit $p\in R$. Zu R existiert genau ein Nachfolger c von b mit $R=\rho(c)$. Wegen der Monotonie gilt $\rho(a)\subseteq\rho(c)$ und $\rho(a')\subseteq\rho(c)$. Das steht im Widerspruch zur Wahl von b. $\square$

Satz 126 *Sei $(\mathcal{T},\tau,\rho)$ eine monotone Gewinnstrategie in $\mathrm{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G},k)$, $\mathcal{T}=(A,B)$.*
Setze $\lambda:=\tau$,

[3] Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung für Hypergraphen von Korollar 1 aus der Einleitung.
[4] Dies ist Satz 3 aus der Einleitung.

$\chi(w) := \bigcup \tau(w)$ *für die Wurzel* w *von* $\mathcal{T}$ *und*
$\chi(a) := \bigcup \tau(a) \cap (\chi(vorg(a)) \cup \rho(a))$ *für* $a \in A$, $a \neq w$.

Dann ist $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ *eine* $\mathcal{H}$*-Baumzerlegung von* $\mathcal{G}$ *der Weite* $\leq k$.

Beweis. Da $|\lambda(a)| = |\tau(a)|$ für alle $a \in A$, reicht es zu zeigen, dass $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ die vier Bedingungen aus Definition 110 erfüllt:

Zu Bedingung 1. Zu zeigen: Für alle $h \in K$ gibt es ein $a \in A$ mit $h \subseteq \chi(a)$.
Für alle $a \in A$ mit $h \cap \rho(a) \neq \emptyset$ gilt: $\bigcup \tau(a) \cap h = \chi(a) \cap h$. Sei a so gewählt, dass $h \cap \rho(a) \neq \emptyset$, aber $h \cap \rho(b) = \emptyset$ für alle Nachfolger b von a. Dann ist $h \subseteq \bigcup \tau(a)$, also $h \subseteq \chi(a)$.

Zu Bedingung 2. Zu zeigen: Für alle $p \in P$ ist $\{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ zusammenhängend.
Sei $p \in P$. Angenommen $\{a \in A \mid p \in \chi(a)\}$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es (mindestens) zwei Zusammenhangskomponenten Z_1 und Z_2 in $\mathcal{T}$. Sei z_1 der Punkt aus Z_1 mit kürzestem Weg von w nach z_1. Sei ebenso $z_2 \in Z_2$ mit kürzestem Weg von w nach z_2. Dann gilt $z_1 \neq z_2$ und beide Punkte erfüllen $(*)$ aus Lemma 125, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit steht.

Zu Bedingung 3. Die Bedingung ist per definitionem erfüllt.

Zu Bedingung 4. Behauptung: $\chi(A_a) \subseteq \chi(\mathrm{vorg}(a)) \cup \rho(a)$.
Aus der Behauptung folgt Bedingung 4: $\chi(A_a) \cap \bigcup \tau(a) \subseteq [\chi(\mathrm{vorg}(a)) \cup \rho(a)] \cap \bigcup \tau(a) = \chi(a)$.
Nehmen wir also an, dass es ein $p \in \chi(A_a) \setminus [\chi(\mathrm{vorg}(a)) \cup \rho(a)]$ gibt. Dann gibt es ein $b \in A_a$ mit $p \in \chi(b)$. Wähle andererseits ein c zu p mit der Eigenschaft $(*)$ aus Lemma 125. Dann ist $p \in \bigcup \tau(c) \cap \rho(c) \subseteq \chi(c)$ nach Definition. Da $p \notin \chi(\mathrm{vorg}(a))$ ist, gilt wegen der Zusammenhangseigenschaft (Bedingung 2): $c \in A_a$. Da die Strategie monoton war, ist $\rho(a) \subseteq \rho(c)$, also $p \in \rho(a)$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von p.
Damit haben wir gezeigt: $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ ist eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ der Weite $\leq k$. □

Hiermit haben wir die eine Richtung der Zuordnung erhalten. Nun wollen wir aus einer $\mathcal{H}$-Baumzerlegung eine monotone Gewinnstrategie gewinnen. Dazu zunächst eine Definition:

Definition 127 *Sei* $(\mathcal{T}, \chi)$ *eine Baumzerlegung von* $\mathcal{G}$, $\mathcal{T} = (A, B)$, $a \in A$. *Die* Baumkomponente von a *ist definiert als:*

$$\beta(a) := \chi(A_a) \setminus \chi_{vorg}(a).$$

Hierbei haben wir die Abkürzung

$$\chi_{vorg}(a) = \begin{cases} \emptyset & \textit{für } a = w, \\ \chi(vorg(a)) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

verwendet.

Das folgende Lemma zeigt die schwache Monotonie von Baumkomponenten:

Lemma 128 *Sei $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$, $\mathcal{T} = (A, B)$, $a \in A$, $a \neq w$. Dann gilt:*
$$\beta(a) \subseteq \beta(vorg(a)).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(a) \setminus \beta(\text{vorg}(a)) &= [\chi(A_a) \setminus \chi_{\text{vorg}}(a)] \setminus [\chi(A_{\text{vorg}(a)}) \setminus \chi_{\text{vorg}}(\text{vorg}(a))] \\
&= (\chi(A_a) \setminus [\chi(A_{\text{vorg}(a)}) \setminus \chi_{\text{vorg}}(\text{vorg}(a))]) \setminus \chi_{\text{vorg}}(a) \\
&= ([\chi(A_a) \setminus \chi(A_{\text{vorg}(a)})] \cup [\chi(A_a) \cap \chi_{\text{vorg}}(\text{vorg}(a))]) \setminus \chi_{\text{vorg}}(a) \\
&= [\chi(A_a) \cap \chi_{\text{vorg}}(\text{vorg}(a))] \setminus \chi_{\text{vorg}}(a) \\
&= \emptyset,
\end{aligned}$$

denn es gibt kein p mit $p \in \chi(a)$, $p \in \chi_{\text{vorg}}(\text{vorg}(a))$ aber $p \notin \chi_{\text{vorg}}(a)$. □

Lemma 129 *Sei $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$, $\mathcal{T} = (A, B)$ und $a \in A$. Sei $R \in \mathcal{R}(\chi(a), \chi_{vorg}(a), \beta(a))$. Dann ist $R \subseteq \beta(b)$ für genau einen Nachfolger b von a.*

Beweis. Sei $p \in R$ und W ein Weg in $\mathcal{G} \setminus (\chi(a) \cap \chi_{\text{vorg}}(a))$, der p mit $q \in \beta(a)$ verbindet. Dann wird jede Kante des Weges von Punkten aus A_a oder $A \setminus A_a$ abgedeckt. Es kann aber keine Kante des Weges von $A \setminus A_a$ abgedeckt werden, weil sonst ein Punkt $r \in W$ von A_a und $A \setminus A_a$ abgedeckt würde, also $r \in \chi(a) \cap \chi_{\text{vorg}}(a))$ wäre.
Also ist $p \in \chi(A_a) \setminus \chi(a)$, das heißt $p \in \beta(b)$ für genau einen Nachfolger b von a. □

Nun wird gezeigt, wie aus einer $\mathcal{H}$-Baumzerlegung der Weite $\leq k$ für $\mathcal{G}$ eine Gewinnstrategie für $\leq k$ Polizisten abgelesen werden kann. Die Kantenlabels geben hierbei die Positionen der Polizisten an:

Satz 130 *Zu jeder $\mathcal{H}$-Baumzerlegung $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ von $\mathcal{G}$ der Weite k gibt es eine monotone Gewinnstrategie in $\text{Pol}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, k)$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine $\mathcal{H}$-Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ der Weite k, $\mathcal{T} = (A, B)$, w die Wurzel von $\mathcal{T}$. Nach Bemerkung 111 ist $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$.
Wir geben nun eine schwach monotone Gewinnstrategie an:
Sei $R_0 := P$ der anfängliche Fluchtraum des Räubers. Sei $a_0 := w$. Die Polizisten wählen die durch $\lambda(a)$ gegebenen Kanten und besetzen somit $\sigma_0 := \bigcup \lambda(a_0)$. Wir setzen $\sigma_{-1} := \emptyset$.
Offensichtlich gilt $R_0 \subseteq \beta(a_0)$.
Im Zug $n+1$ wähle der Räuber ein $R_{n+1} \in \mathcal{R}(\sigma_n, \sigma_{n-1}, R_n)$.
Es gelte $R_n \subseteq \beta(a_n)$. Dann folgt:

$R_{n+1} \subseteq \bigcup \mathcal{R}(\sigma_n, \sigma_{n-1}, R_n) \subseteq \bigcup \mathcal{R}(\chi(a_n), \chi_{vorg}(a_n), \beta(a_n)),$

da $\chi(a_n) \subseteq \sigma_n$, $\chi_{vorg}(a_n) \subseteq \sigma_{n-1}$, und $R_n \subseteq \beta(a_n)$ ist.
Nach Lemma 129 existiert genau ein Nachfolger a_{n+1} von a_n, so dass $R_{n+1} \subseteq \beta(a_{n+1})$. Die Polizisten wählen die durch $\lambda(a_{n+1})$ gegebenen Kanten und besetzen $\sigma_{n+1} := \bigcup \lambda(a_{n+1})$.
Da $\mathcal{T}$ endlich ist, erhalten wir auf diese Weise eine Gewinnstrategie für k Polizisten.

Wir zeigen: $R_{n+1} \subseteq R_n$ für alle n.

Damit ist die Gewinnstrategie dann schwach monoton.
Angenommen es gibt ein $q \in R_{n+1} \setminus R_n$. Sei $p \in R_n$. Sei r der erste Punkt außerhalb von R_n auf einem Weg in $\mathcal{G}\setminus(\sigma_n \cap \sigma_{n-1})$ von p nach q. Dann ist $r \in \sigma_{n-1}$, also $r \notin \sigma_n$. Es folgt $r \in \bigcup \mathcal{R}(\sigma_n, \sigma_{n-1}, R_n) \subseteq \bigcup \mathcal{R}(\chi(a_n), \chi_{vorg}(a_n), \beta(a_n))$. Nach Lemma 129 existiert genau ein Nachfolger b von a, so dass $r \in \beta(b)$.
Andererseits ist $r \in \sigma_{n-1} = \bigcup \lambda(a_{n-1})$ und $r \in \beta(b) = \chi(A_b) \setminus \chi(a_n) \subseteq \chi(A_{a_{n-1}})$, und somit ist nach 4. aus Definition 110 $r \in \chi(a_{n-1})$. Es folgt $r \notin \chi(A_{a_n}) \setminus \chi(a_{n-1}) = \beta(a_n)$.
Also ist $r \in \beta(b) \setminus \beta(a_n)$, im Widerspruch zu Lemma 128. $\square$

Damit haben wir die andere Richtung der Zuordnung gezeigt. Mit den Sätzen 130 und 126 ergibt sich:

Korollar 131 *Seien $\mathcal{G} = (P, K)$ und $\mathcal{H} = (P, H)$ Hypergraphen. $\mathcal{G}$ sei zusammenhängend, $\mathcal{H}$ sei nicht notwendigerweise zusammenhängend mit $\bigcup_{h \in H} h = P$. Äquivalent sind:*
a) $\mathrm{bw}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \leq k$.
b) Es gibt eine monotone Gewinnstrategie im $\mathcal{H}$-Polizisten-Spiel auf $\mathcal{G}$ mit $\leq k$ Polizisten.

Satz 123 folgt nun aus Korollar 131 und den Bemerkungen 115 und 122:

Korollar 132 *Sei $\mathcal{G} = (P, K)$ ein zusammenhängender Hypergraph und $\mathcal{H} = (P, H)$ mit $H = \{\{p\} \mid p \in P\}$. Äquivalent sind:*
a) $\mathrm{bw}(\mathcal{G}) \leq k$.
b) Es gibt eine monotone Gewinnstrategie im Räuber-und-Polizisten-Spiel auf $\mathcal{G}$ mit $\leq k$ Polizisten.

Satz 124 folgt aus Korollar 131 und den Bemerkungen 114 und 121:

Korollar 133 *Seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ zusammenhängende Hypergraphen, $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Äquivalent sind:*
a) $\mathrm{hbw}(\mathcal{G}) \leq k$.
b) Es gibt eine monotone Gewinnstrategie im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf $\mathcal{G}$ mit $\leq k$ Gendarmen.

Diese Resultate erlauben uns, zwischen monotonen Gewinnstrategien und Zerlegungen in gewisser Hinsicht hin und her zu wechseln. Wir schauen uns zum Abschluss des Abschnitts noch ein interessantes Beispiel an:

Bemerkung 106 zeigt, dass eine Hyperbaumzerlegung eine Baumzerlegung mit zusätzlichen Kantenlabels und einer zusätzlichen Bedingung ist. Wir können einer Hyperbaumzerlegung also zwei Weiten ablesen: Die Weite der zugrunde liegenden Baumzerlegung (also die Mächtigkeit des größten Punktelabels) und die Weite der Hyperbaumzerlegung (die Mächtigkeit des größten Kantenlabels). Können wir zu jedem Hypergraphen $\mathcal{H}$ mit $\mathrm{hbw}(\mathcal{H}) = k$ und $\mathrm{bw}(\mathcal{H}) = l$ eine Hyperbaumzerlegung finden, die die beiden minimalen Weiten k und l gleichzeitig realisiert? Das folgende Beispiel zeigt, dass dies nicht immer möglich ist:

Beispiel 134 *Sei $\mathcal{G}$ der Graph aus Beispiel 97 (siehe Abbildung 1.30, Seite 53). Wir wissen bereits, dass $\mathrm{pw}(\mathcal{G}) = \mathrm{gw}(\mathcal{G}) = 3$ ist. Sei $(\mathcal{T}, \chi)$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{G}$ der Weite 3. Dann gibt es kein λ, so dass $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{G}$ ist.*

Wir können also aus $(\mathcal{T}, \chi)$ gar keine Hyperbaumzerlegung für $\mathcal{G}$ gewinnen.

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \chi)$, $\mathcal{T} = (A, B)$, eine Baumzerlegung der Weite 3. Wir fassen die Baumzerlegung gemäß Satz 130 als schwach monotone Gewinnstrategie $(\mathcal{T}, \chi, \rho)$ mit geeignetem ρ auf.
Wir zeigen zunächst: Es gibt ein $a \in A$ mit $\chi(a) = \{p_1, p_2, p_3\}$.
Es reicht zu zeigen, dass in jeder schwach monotonen Gewinnstrategie die Position $\{p_1, p_2, p_3\}$ der Polizisten vorkommen muss. Dies ist aber der Fall, denn sonst könnte der Räuber entkommen, indem er sich in jedem Zug auf dem unbelegten Punkt aus $\{p_1, p_2, p_3\}$ aufhält.
Sei $a \in A$ so, dass $\rho(a) \cap \{p_1, p_2, p_3\} = \emptyset$, aber $\rho(\mathrm{vorg}(a)) \cap \{p_1, p_2, p_3\} \neq \emptyset$. Sei etwa $p_1 \in \rho(\mathrm{vorg}(a))$. Dann ist $\{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \chi(\mathrm{vorg}(a))$, denn:
Angenommen, $p_2 \notin \chi(\mathrm{vorg}(a))$. Da $p_2 \notin \rho(a)$ ist, obwohl $p_1 \in \rho(\mathrm{vorg}(a))$, ist dann $\{3, 3'\} \subseteq \chi(\mathrm{vorg}(a)) \cap \chi_{\mathrm{vorg}}(\mathrm{vorg}(a))$. Zusammen mit $\{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \chi(\mathrm{vorg}(a))$ ergibt sich $|\chi(\mathrm{vorg}(a))| \geq 5$, ein Widerspruch. (Falls $p_3 \notin \chi(\mathrm{vorg}(a))$ ist, argumentieren wir analog.) Also gilt $\chi(\mathrm{vorg}(a)) = \{p_1, p_2, p_3\}$.
Sei *o. E.* $p_1 \in \rho(\mathrm{vorg}(a))$, also $p_1 \notin \chi_{\mathrm{vorg}}(\mathrm{vorg}(a))$. Wegen der Zusammenhangsbedingung bedeutet das, dass p_1 in keinem χ-Label eines Punktes aus $A \backslash A_{\mathrm{vorg}(a)}$ vorkommt. Um in $\lambda(\mathrm{vorg}(a))$ den Punkt p_1 abzudecken, muss für ein $x \in \{2, 2', 3, 3'\}$ die Kante (p_1, x) in $\lambda(\mathrm{vorg}(a))$ liegen. Da aber $x \notin \chi(\mathrm{vorg}(a))$ liegt, ist $x \in [\bigcup \lambda(\mathrm{vorg}(a)) \cap \chi(A_{\mathrm{vorg}(a)})] \setminus \chi(\mathrm{vorg}(a))$. Da (p_1, x) nicht in $A \setminus A_{\mathrm{vorg}(a)}$ abgedeckt werden kann, liegt $x \in \chi(A_{\mathrm{vorg}(a)})$.
Damit können wir aber die Bedingung 4 einer Hyperbaumzerlegung im Punkt $\mathrm{vorg}(a)$ nicht erfüllen. □

2.5 Verallgemeinerte Hyperbaumzerlegungen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf die Bedeutung der Bedingung 4 in der Definition einer Hyperbaumzerlegung eingehen. Wird in Definition 105 auf die Bedingung 4 verzichtet, so erhalten wir die *verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung*:[5]

Definition 135 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *ein Hypergraph.*
Eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung *von* $\mathcal{H}$ *ist ein Tripel* $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$*, bestehend aus einem endlichen Baum* $\mathcal{T} = (A, B)$ *und zwei Labelfunktionen* $\chi : A \to \mathcal{P}(P)$ *und* $\lambda : A \to \mathcal{P}(K)$*. Weiterhin sollen die Bedingungen 1,2 und 3 aus Definition 105 gelten.b*

Definition 136 *Sei* $\mathcal{H} = (P, K)$ *ein Hypergraph,* $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ *eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung von* $\mathcal{H}$*,* $\mathcal{T} = (A, B)$*.*
1. Die Weite *der Hyperbaumzerlegung ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{vhw}(\mathcal{T}, \chi, \lambda) := \max\{|\lambda(a)| \mid a \in A\}$.

2. Die verallgemeinerte Hyperbaumweite *des Hypergraphen* $\mathcal{H}$ *ist die natürliche Zahl*
$\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) := \min\{\mathrm{hw}(\mathcal{T}, \chi, \lambda) \mid (\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ *verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung von* $\mathcal{H}\}$.

Jede Hyperbaumzerlegung ist also eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung. Gibt es zu jeder Verallgemeinerten Hyperbaumzerlegung der Weite k eine Hyperbaumzerlegung der Weite k? Die Antwort ist: Nein.

Satz 137 *Für* $\mathcal{H}^1$ *aus Satz 61 gilt:* $\mathrm{hbw}(\mathcal{H}^1) = 4$ *und* $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}^1) = 3$.

Beweis. Nach Korollar 133 und Satz 61 ist $\mathrm{hbw}(\mathcal{H}^1) = \text{mon-gw}(\mathcal{H}^1) = 4$. Eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung der Weite 3 ist Abbildung 2.4 zu entnehmen. Der Beweis, dass 3 die untere Schranke ist, wird der Leserin bzw. dem Leser überlassen. □

Satz 138 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein Hypergraph. Dann gilt:* $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H})$.

Die Bedingung 4 einer Hyperbaumzerlegung sagt in gewissem Sinne aus, dass wir die Gendarmen geschickt stellen müssen: Die möglichen Fluchträume des Räubers bzgl. $\bigcup \tau(a)$ müssen Fluchträume des Räubers bzgl. $\chi(a)$ sein. Person I darf also nicht zu viele Punkte belegen: Der Räuber darf nicht merken, ob Person I nach den χ-Labels oder nach den λ-Labels spielt. In simplizialen Hypergraphen kann Person I dies immer erreichen.

Beweis. Sei $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung der Weite k von $\mathcal{H}$, $\mathcal{T} = (A, B)$. Sei $\lambda'(a) := \{h \cap \chi(a) \mid h \in \lambda(a)\}$. Wie leicht zu sehen ist, ist $(\mathcal{T}, \chi, \lambda')$ dann eine Hyperbaumzerlegung der Weite $\leq k$ von $\Sigma\mathcal{H}$. Also gilt

[5] Dieser Begriff wurde in [GLS01a] eingeführt.

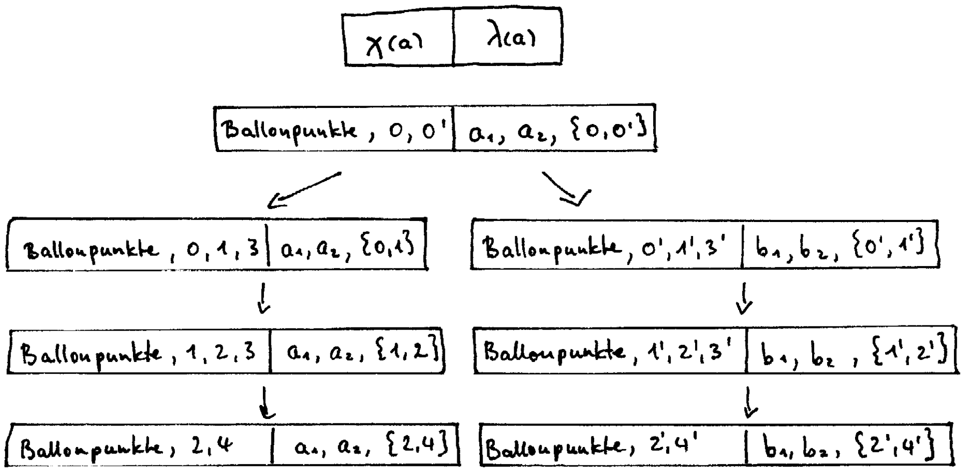

Abbildung 2.4: Eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{H}^1$: An jeder Stelle sind links die Punktelabels und rechts die Kantenlabels angegeben. Beachte: Dies ist keine Hyperbaumzerlegung, da die Wurzel Bedingung 4 nicht erfüllt.

$\mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H}) \leq \mathrm{vhbw}(\mathcal{H})$.
Umgekehrt ist auch $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H})$:
Sei $(\mathcal{T}, \chi, \lambda)$ eine Hyperbaumzerlegung von $\Sigma\mathcal{H}$ der Weite k, $\mathcal{T} = (A, B)$. Sei für jede Hyperkante h von $\Sigma\mathcal{H}$ $\varphi(h)$ eine Hyperkante von $\mathcal{H}$, die h überdeckt: $h \subseteq \varphi(h)$. Sei $\lambda'(a) := \{\varphi(h) \mid h \in \lambda(a)\}$. Es ist leicht zu überprüfen, dass $(\mathcal{T}, \chi, \lambda')$ dann eine verallgemeinerte Hyperbaumzerlegung von $\mathcal{H}$ ist. □

Korollar 139 *Sei $\mathcal{H}$ ein simplizialer Hypergraph. Dann gilt:* $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\mathcal{H})$.

Korollar 140 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Dann gilt:* $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) = \mathrm{vhbw}(\Sigma\mathcal{H})$.

Nach Satz 61, Seite 31 und Satz 137 ist $\mathrm{gw}(\mathcal{H}^1) = 3 = \mathrm{vhbw}(\mathcal{H}^1)$. Ist nun für alle Hypergraphen $\mathcal{H}$ $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = \mathrm{vhbw}(\mathcal{H})$? Auch hier ist die Antwort: Nein.

Beispiel 141 *Für $\mathcal{G}^1_{GOB}$ aus Satz 88 gilt:*
$$\mathrm{vhbw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = 5 \textit{ und } \mathrm{gw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = 4.$$

Beweis. Da $\mathcal{G}^1_{GOB}$ simplizial ist, gilt nach Korollar 139 und Satz 88: $\mathrm{vhbw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = \mathrm{hbw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = 5$. Weiterhin gilt nach Satz 88: $\mathrm{gw}(\mathcal{G}^1_{GOB}) = 4$. □

Korollar 142 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Dann gilt:* $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{vhbw}(\mathcal{H})$.

Beweis. Wie leicht zu sehen ist, ist $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = \mathrm{gw}(\Sigma\mathcal{H})$, also gilt:
$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = \mathrm{gw}(\Sigma\mathcal{H}) \leq$mon-$\mathrm{gw}(\Sigma\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H}) = \mathrm{vhbw}(\mathcal{H})$. □

2.6 Zusammenfassung der Resultate

Korollar 98 enthält eine Ungleichungskette für die Spielinvarianten. Auf der Seite der Zerlegungen erhalten wir mit den Korollaren 132, 133 und 142:

Korollar 143 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph mit* $\max\{|h| \mid h \in K\} = \kappa$. *Es gilt:*
$$\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H}) \leq \mathrm{hbw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{bw}(\mathcal{H}) + 1 \leq \kappa\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}).$$

Insgesamt erhalten wir:

Korollar 144 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph mit* $\max\{|h| \mid h \in K\} = \kappa$. *Es gilt:*
$\mathrm{gw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) = \mathrm{hbw}(\Sigma\mathcal{H}) \leq \mathrm{hbw}(\mathcal{H}) = \text{mon-gw}(\mathcal{H}) \leq \mathrm{pw}(\mathcal{H}) = \text{mon-pw}(\mathcal{H}) = \mathrm{bw}(\mathcal{H}) + 1 \leq \kappa\mathrm{gw}(\mathcal{H}) \leq \kappa\mathrm{vhbw}(\mathcal{H})$.

Keine der Ungleichungen lässt sich zu einer Gleichung verschärfen.

Ausblick

In [GLS99a] haben Gottlob, Leone und Scarcello einen Algorithmus angegeben, der in polynomieller Zeit entscheidet, ob für einen gegebenen Hypergraphen $\mathcal{H}$ und ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{hbw}(\mathcal{H}) \leq k$.
Zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ umfasst die Klasse der Hypergraphen mit verallgemeinerter Hyperbaumweite $\leq k$ die Klasse der Hypergraphen mit Baumweite $\leq k$. Es stellt sich also die Frage:

Frage 1: Gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit entscheidet, ob für einen gegebenen Hypergraphen $\mathcal{H}$ und ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}) \leq k$?

Kurz vor der Fertigstellung der Diplomarbeit fanden sich noch Verbesserungen der Beispiele für Hypergraphen mit Monotoniekosten, für deren Aufnahme es allerdings schon zu spät war:

Tatsache 1: Es gibt *Graphen* mit beliebig hohen Monotoniekosten.

Tatsache 2: Es gibt $(2, 3)$-Hypergraphen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ mit $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}_1) = 2$ und $\mathrm{vhbw}(\mathcal{H}_2) = 3$.[6]

Das Auftreten von Monotoniekosten ist noch nicht endgültig geklärt. Speziell können wir fragen:

Frage 2: Sei $\mathcal{H}$ ein Hypergraph. Gilt: Aus $\mathrm{gw}(\mathcal{H}) = 1$ folgt $\text{mon-gw}(\mathcal{H}) = 1$?[7]

Weiter stellt sich die Frage, ob die Monotoniekosten stärker als jede rekursive Funktion wachsen. Genauer:

Frage 3: Gibt es zu jeder rekursiven Funktion f einen (k, k')- Hypergraphen mit $k' > f(k)$?

Frage 4: Was geschieht bei Übertragung der Spiele und der Zerlegungen auf unendliche Graphen und Hypergraphen?

Bei wörtlicher Übertragung folgt:

Bemerkung 145 *Sei $\mathcal{G}$ eine Kopie von $\mathbb{N}$, also $\mathcal{G} = (\mathbb{N}, \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\})$.*
a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: II gewinnt (mon-)$\mathrm{Pol}(\mathcal{G}, k)$.
b) $\mathrm{bw}(\mathcal{G}) = 1$.

Beweis. Zu a: Der Räuber kann entkommen, indem er sich immer in der unendlichen Zusammenhangskomponente aufhält.
Zu b: Setze $\chi(i) := \{i, i+1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\mathcal{G}, \chi)$ eine Baumzerlegung der Weite 1.

[6] $\mathcal{H}_1$ hat 10 Punkte und 8 maximal dreielementige Hyperkanten. $\mathcal{H}_3$ hat 11 Punkte und 18 maximal dreielementige Hyperkanten.

[7] Wenn ja, so hieße das: Auf *azyklischen* Hypergraphen (siehe [Yan81]) sind die Räuber-und-Gendarmen-Spiele äquivalent. Siehe dazu [GLS01a], Abschnitt 3.

Dann wäre $\mathrm{bw}(\mathcal{G}) = 1$, aber $\mathrm{gw}(\mathcal{G}) \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass die Baumweite von $\mathcal{G}$ nicht durch das Spiel beschrieben wird. Auf unendlichen Graphen sind die Begriffe also verschieden.

Verzeichnis der wichigsten Definitionen

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Bod93] H. L. Bodlaender. A Tourist Guide through Treewidth. *Acta Cybernetica*, 11:1-23, 1993.

[Bod98] H. L. Bodlaender. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theoretical Computer Science*, 209:1-2, 1998.

[Die97] R. Diestel. *Graph Theory*, Springer-Verlag New York, 1997.

[FFG00] J. Flum, M. Frick, M. Grohe. *Query evaluation via tree-decompositions*, 2000, z. Z. erhältlich unter http://sunpool.mathematik.uni-freiburg.de/home/flum/preprints.html.

[GLS99a] G. Gottlob, N. Leone, F. Scarcello. Hypertree Decompositions and Tractable Queries. Eine Vorabversion erschien in *Proceedings of the Eighteenth ACM Symposium on Principles of Database Systems (PODS'99)*, 21-32, Philadelphia, 1999.

[GLS99b] G. Gottlob, N. Leone, F. Scarcello. A Comparison of Structural CSP Decomposition Methods. *Artificial Intelligence*, 124:243-282, 2000. Eine Vorabversion erschien in *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, 1:394-399, 1999.

[GLS01a] G. Gottlob, N. Leone, F. Scarcello. Robbers, Marshals, and Guards: Game Theoretic and Logical Characterizations of Hypertree Width. *Proceedings of the Twentieth ACM Symposium on Principles of Database Systems (PODS'01)*, 21-32, California, 2001.

[GLS01b] G. Gottlob, N. Leone, F. Scarcello. *Hypertree Decompositions: A Survey*, Hrsg. J. Sgall, A. Pultr und P. Kolman, MFCS 2001, LNCS 2136, 37-57, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.

[Gro00] M. Grohe. *Einbettungen und Minoren von Graphen*, Skript zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Freiburg, Sommersemester 2000.

[Hal76] R. Halin. S-functions for graphs. *Journal of Geometry*, 8, 171-186, 1976.

[KV00] Ph. G. Kolaitis und M. Y. Vardi. Conjunctive-Query Containment and Constraint Satisfaction, *Journal of Computer and System Sciences*, 61:302-332, 2000. Eine Vorabversion erschien in PODS'98, 205-213, 1998.

[RS86] N. Robertson, P. D. Seymour. Graph Minors II. Algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7:309-322, 1986.

[STh93] P. D. Seymour and R. Thomas. Graph Searching and a Min-Max Theorem for Tree-Width. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 85:22-33,1993.

[Yan81] M. Yannakakis. Algorithms for Acyclic Database Schemes. *Proceedings of the International Conference on Very Large Data Bases (VLDB'81)*, 82-94, 1981.