Erweiterungen von Theorien ohne Unabhängigkeitseigenschaft durch Indiscernibles

Jochen Förster

Freiburg, im Spätherbst 2004

Diplomarbeit
vorgelegt bei Prof. Dr. Martin Ziegler

Tanzen wir in tausend Weisen,
Frei - sei unsre Kunst geheißen,
Fröhlich - unsre Wissenschaft!
Friedrich Nietzsche

Vorwort

Die fröhliche Wissenschaft

Es hat sich der Brauch entwickelt, über eine wissenschaftliche Arbeit ein Zitat eines möglicherweise großen Denkers zu stellen, zu dem der wissenschaftlich Arbeitende eine gewisse Nähe verspürt, das aber für die eigentliche Arbeit meist ohne Folgen bleibt, und so das einzig persönliche darstellt, das dem angehenden Akademiker erlaubt ist, dem krönenden Abschluß seines mehrjährigen Strebens mitzugeben.
Diesem Brauch entgegen, soll es uns noch ein Weilchen begleiten ...

Der Humor, dem man im universitären Alltag begegnet, kann die Ernsthaftigkeit, die dem gesamten Treiben zu eigen ist, nicht verbergen und sollte in keinem Fall mit echter Fröhlichkeit verwechselt werden, die ihren Ursprung immer in der ironischen Distanz des Menschen zum eigenen Handeln hat. Die Frage, ob unsere Wissenschaft eine fröhliche sei oder nicht, kann ohne Selbstbetrug nur verneint werden, und so soll nun nach Gründen gefragt werden, warum sie keine ist.

Der „Bildungsphilister“

In Nietzsches Denken verweisen alle Schuldzusammenhänge in protestantischer Tradition aufs Individuum. Der einzelne ist schuld daran, daß er so ist, wie er ist, und wenn gesellschaftliche Mißstände ausgemacht werden, so sind die vielen einzelnen, die demselben Typus Mensch angehören, der Grund.

Als den im Kulturleben seiner Zeit herrschenden Typus macht er den „Bildungsphilister“ als Gegenstück zu den „echten Kulturmenschen“([N], S.9) aus. Während die letzteren, „die in allen ihren Bewegungen, ihrem ganzen Gesichtsausdrucke, ihrer fragenden Stimme, ihrem flammenden Auge nur Eins verrieten: daß sie Suchende“([N], S.11/12) seien, benutze ersterer „die Gelegenheit, mit jener Verschmitztheit geringerer Naturen, das Suchen überhaupt zu verdächtigen und zum bequemen Finden aufzufordern.“([N], S.13)
Da er „vor allem sich allein als wirklich begreift und seine Wirklichkeit als das Maß der Vernunft in der Welt“ behandele, dürfe „um keinen Preis an dem ‚Vernünftigen ‘und an dem ‚Wirklichen‘, das heißt an dem Philister selbst gerüttelt werden.“([N], S.15)
Und so trenne er „streng den ‚Ernst des Lebens‘, soll heißen den Beruf, das Geschäft, samt Weib und Kind, ab von dem Spaß: und zu letzterem gehört ungefähr alles, was die Kultur betrifft.“([N], S.15)

Was von der Charakterisierung des „Bildungsphilisters“ nach Ausklammerung der Polemik übrig bleibt, spannt einen bemerkenswerten Bogen von der Aversion gegen suchendes, ständig hinterfragendes und damit auch untergrabendes Denken hin zur Ernsthaftigkeit. Die in unserem Wissenschaftsbetrieb beobachtbare und zunächst zufällig erscheinende Koinzidenz von beidem steht nun in einem gemeinsamen Begründungszusammenhang, der jedoch im Individuum endet. Nietzsche interessiert sich weder für die psychologischen Motive, noch für das gesellschaftliche Umfeld, das diese bedingen könnte. Der Dialektik der Begriffe Menschentyp und Gesellschaft wird keine Beachtung geschenkt, und so sehr jenes polarisierende Denken den Leser auch für sich vereinnahmen mag, so entspringt es doch dem eben noch verleumdeten Haltmachen und Nicht-mehr-weiter-fragen und setzt sich durch seinen pamphletischen Charakter dem Verdacht aus, nur der eigenen Überhebung zu dienen.

Wissenschaft und Gesellschaft

Die von Nietzsche beschriebene Trennung zwischen dem „Ernst des Lebens“und der Kultur läßt sich bis in die Antike zurückverfolgen. Dort unterschied der freie Mensch (im Gegensatz zum Sklaven) seine Zeit zwischen „otium“(Ruhe, Muße) und „negotium“(Arbeit, Mühe, Anstrengung), wobei die Beschäftigung mit Philosophie und den noch nicht ausdifferenzierten Wissenschaften zum „otium“ gehörte.

Die Unterscheidung ist heute eine andere, nämlich die zwischen Arbeitszeit und Freizeit, und die Wissenschaften werden in der Arbeitszeit betrieben.

Bemerkenswert an dieser Verschiebung ist zum einen, daß in der Antike die Muße den positiven Begriff darstellte, während sie bei uns zum sich allein durch die Abwesenheit von Arbeit auszeichnenden, also negativ bezeichneten Teil gehört, zum anderen der Wechsel der Wissenschaften von der privaten in die öffentliche Sphäre. Wissenschaft ist nicht mehr die Beschäftigung des Einzelnen mit Themen seines Interesses, sondern steht in einer stark verflochtenen Beziehung zur Gesellschaft.

Geht man davon aus - und man hat allen Grund dazu - , daß sich der Glaube einer Gesellschaft am Erklärungsprimat in der Medizin und der Meteorologie manifestiert, so enthüllt sich einem der religiöse, wenn auch gottlose Charakter der heutigen Naturwissenschaft.

Und während die Physik die Menscheit mit dem Bau der Atombombe von ihrer übermenschlichen Gewalt endgültig überzeugt hat, bleibt sie doch aufgrund ihrer Abstraktheit für die Masse der Menschen ein Mysterium. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Ausbildung einer Priesterkaste, auf deren Zugehörigkeit durch Imitation der physikalischen Methoden - allem voran der Mathematisierung - auch andere Wissenschaften ihren Anspruch anmelden.

Betont man aber die Parallelität zwischen Akademiker und Priester, so gehört man schon ebenso zur Häresie wie ein Christ, der seine Theologen mit Schamanen vergleicht. Gleichwohl eröffnet dieser Vergleich neue Einsichten, sowohl bezüglich des Umgangs mit den eigenen Grundlagen, als auch in das ernsthafte Gebaren. Beim Wissenschaftler wie beim Priester gilt es eben auch eine bevorzugte Stellung in einer keineswegs auf Gleichheit ausgelegten Gesellschaft zu begründen. Und dabei ist Relativieren der eigenen Sichtweise, zu dem es bei hintergründigem Fragen zwangsläufig kommt, ebenso schädlich wie selbstironisches Auftreten.

Mathematik und Postmoderne

Die zentrale Stellung der Mathematik im naturwissenschaftlich rationalistischen Weltbild verdeutlicht sich darin, daß kaum ein Rationalisierungsversuch, von der Ökonomie über die Biologie bis hin zur Kosmologie, auf ihren Gebrauch verzichtet, und so bildet sie den mystischen Kern dieser Weltauffassung[1]. Daher rührt auch ihr Einfluß auf die Geistesgeschichte, und man kann mit Recht behaupten, daß die Mathematik durch ihre Grundlagenkrise und ihre für einen Rationalisten unbefriedigende Überwindung jenen Übergang wenn auch nicht hervorgebracht, so doch zumindest katalysiert hat, der gewöhnlich mit dem Gegensatzpaar Moderne/Postmoderne bezeichnet wird und dessen zentraler Punkt im Verlust des Glaubens an eine ausgezeichnete, bruchlose und alles umfassende Sichtweise der Welt besteht.

An die Stelle der Vorstellung, sich in naher oder ferner Zukunft im Geiste der Welt im Ganzen bemächtigen und alle Zweifler von der Richtigkeit der eigenen Vorstellung überzeugen zu können, treten nun, da der Glaube daran verloren gegangen ist, daß sich Wahrheit letztlich selbst beleuchtet, die verschiedenen Diskurse, die keinen Außenstehenden mehr zu überzeugen versuchen, der nicht bereit ist, sich von selbst auf sie einzulassen.

Die Pluralität der Diskurse als ein Zeichen der gewachsenen Freiheit des Einzelnen zu deuten, ist aber nur möglich, wenn man zwei Dinge verkennt: daß erstens, im Gegensatz zur Geistesgeschichte, sich die Machtstrukturen in ihrem hierarchischen Charakter erhalten haben und man sich dem Diskurs der Macht, der in der Attitüde immer noch das rationale Denken imitiert und dazu mit der Ernsthaftigkeit einer Autorität auftritt, nur um den Preis des Verzichts auf eine gesellschaftliche Stellung jenseits des Hilfsarbeiters entziehen kann, und daß zweitens diese Machtstrukturen nun frei von dem Zwang sind, den Einzelnen für sich zu gewinnen und ihm mit Ausschluß drohen, falls er beginnt, die Widersprüchlichkeiten ihrer Legitimation zu diskutieren; falls er also versucht, auf die Macht einzuwirken, ohne sich ihr zu ergeben.

Die Mathematik spielte bei diesem Prozeß eine zwielichtige Rolle. Als das rationalistische Deutungsmonopol noch Bestand hatte, wollte sie, bewundert von den vielen, die ihrem Abstraktionsgrad an irgendeiner Stelle nicht mehr folgen konnten, eine Feste bauen, mit dem Plan, ihre Grundlagen darzustellen und ihre zwingende Ableitbarkeit von diesen hoffentlich ebenso denknotwendigen Grundlagen aufzuweisen. Sie folgte damit dem ihre eigene Geschichte befördernden und durch sie selbst reproduzierten Glauben an rationale Begründbarkeit und wollte auch weiterhin das Vorbild der teilweise mathematisierten Wissenschaften bleiben, wenn es darum ging, Beliebigkeit in ihren Herleitungen zu beseitigen.

[1] Dies ist ein stets wiederkehrendes Motiv bei philosophierenden Physikern. Als Beispiel sei hier Heisenberg zitiert: „Ein Verständnis des fast unentwirrbaren und unübersehbaren Gewebes der Naturerscheinungen war [merkwürdigerweise] doch wohl nur möglich, wenn man mathematische Formen in ihm entdecken konnte.“([H], S.21)

Aber sie stieß dabei auf Beliebigkeiten und Unzulänglichkeiten ihrerseits. Schuldbewußt, ihre Versprechungen nicht gehalten zu haben, und aus Angst, ihre angesehene Stellung zu verlieren, biederte sich ein Teil direkt den Produktionsverhältnissen an, der andere Teil ging daran, die Grundlagenproblematik zu historisieren und über Konventionen zu einer Fundierung zu kommen, die das bisher Erarbeitete rechtfertigte und mit deren Hilfe sich weiterhin Ergebnisse produzieren ließen.

Der durchaus wissenschaftliche Trieb, immer weiterzufragen, war im institutionalisierten Wissenschaftsbetrieb schon so weit gezähmt, daß der konservative Instinkt sich durchsetzte, der es nicht duldet, daß das heute Erarbeitete in Zukunft zur Disposition steht, und der eigentlich nur auf geistiger Ebene genau das zu reproduzieren intendiert, was die Gesellschaft ihren Partizipanten durch ihre totale Verwaltung ständig beizubringen versucht; daß nämlich die Struktur schon gebaut und unveränderlich ist und der Einzelne seinen Weg inerhalb dieser Endgültigkeit zu suchen hat.

Parallel zur Ausgrenzung dessen, der sich dem Diskurs der Macht verweigert, läßt diese Mathematik aber nur noch Forschungen zu, die die Autorität ihrer Methoden von Anfang an anerkennen und durch ihre Arbeit bestätigen. So schafft sie es zwar durch die strukturelle Nähe zum Diskurs der Macht ihre angesehene Stellung in jener Gesellschaft vorerst zu halten, verliert aber den Reiz einer freien intellektuellen Betätigung, die nicht bereit ist, sich lange in einem abgegrenzten Bereich aufzuhalten, und hält den Teil ihrer Protagonisten, dem nicht an der Bestätigung des elitären Gefühls gelegen ist, eher durch den Verweis auf Karrieremöglichkeiten oder gar die schiere Notwendigkeit, Geld zu verdienen bei der Stange, als daß sie auf deren eigenes Interesse hofft. Für keinen ist aber die Mathematik ein zweckfreies Spiel, und so kann auch der alltägliche Humor vielmehr als Teil eines Verhaltensmusters begriffen werden, das unsere gesamte spätkapitalistische Arbeitswelt durchzieht, und das auf die „Invisibilisierung der Paradoxie" zielt, die darin besteht, „die Unterwerfung als Befreiung zu deuten"([B], S.146), als daß man ihn ernsthaft für den Ausdruck von Fröhlichkeit halten könnte.

Vor allem aber gab dieser Revisionismus, der die Grundlagenkrise am liebsten ungeschehen gemacht hätte, durch die über die Zeit zu Dogmen erstarrten Konventionen den Mathematikern wieder das Gefühl der Sicherheit im eigenen Denken zurück.

Zur Frage, warum diese Sicherheit gesucht wird, schreibt Adorno: „(...) das keineswegs selbstverständliche Bedürfnis nach absoluter geistiger Sekurität - denn warum eigentlich sollte das spielerische Glück des Geistes vom Risiko des Irrtums gemindert werden? - [ist] der Reflex auf reale Ohnmacht und Unsicherheit, die sich selbst durch Positivität übertäubende Klage dessen, der weder zur realen Reproduktion des Lebens beiträgt noch an dessen realer Beherrschung recht partizipieren darf, sondern einfach als dritte Person den Herrschenden ihr Herrschaftsmittel, den zur Methode versachlichten Geist, verkauft und anpreist. Was sie nicht haben, wollen sie wenigstens in der Fata morgana des Geistes: Unwiderleglichkeit ersetzt ihnen die Herrschaft, fusioniert mit dem Dienst, den sie tatsächlich leisten, ihrem Beitrag zur Naturbeherrschung."([A], S.23)

Auch wenn Adorno das Handeln des Menschen in Bezug zur Gesellschaft setzt, verzichtet er ebensowenig auf Invektiven wie Nietzsche, vielleicht in dem Wissen, daß die reine dialektische Methode im ständigen Zurückverweisen der Schuld zwischen dem Einzelnen und dem Ganzen allzu schnell dem Denkschema der Erbsünde folgt, das alles als von Grund auf verdorben ansieht, und man damit die Menschen nicht zur eigenen Bewegung auffordert, ja sie sogar als aussichtslos darstellt; in dem sophistischen Wissen, daß ohne Propaganda keine Wirkung erzielt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort III

Einleitung 1

Die Arbeit . . . 1

Dankeshymnen . . . 5

1 Dichte Ordnungen 7

1.1 Bezeichnungen und Beispiele . . . 7

1.2 Modelltheorie dichter Ordnungen . . . 8

1.3 Definierbare Mengen im Produktraum . . . 9

1.3.1 Projektionen . . . 10

1.4 Vollständige Ordnungen . . . 11

1.5 Topologie dichter Ordnungen . . . 16

1.6 Topologie im Produktraum . . . 17

1.7 Randpunktfolgen . . . 19

1.7.1 Ein kombinatorisches Lemma mit Folgerung . . . 22

1.8 Randpunktfolgen und Definierbarkeit . . . 24

2 Die Unabhängigkeitseigenschaft 27

2.1 Definitionen und Beispiele . . . 27

2.2 Einfache Eigenschaften . . . 30

2.3 Hilfe von der Kombinatorik des Unendlichen . . . 31

2.4 Formeln in einer freien Variablen x . . . 32

2.5 Boolesche Kombinationen . . . 33

2.6 o-minimale Theorien . . . 34

2.7 Stabile Theorien . . . 34

3 Die Struktur auf Indiscernibles in Theorien ohne UE 35

3.1 Motivation . . . 35

3.2 P-Beschränkungen . . . 36

3.3 Längenbeschränkung von Randpunktfolgen . . . 38

3.4 Definitionsersetzungen . . . 39

3.5 Verzicht auf die Vollständigkeit . . . 41

3.6 Gegenbeispiel einer Theorie mit UE . . . 42

4 P-Beschränkung in kleinen Strukturen **45**

4.1 Neue Typen und eine neue Theorie 45

4.2 Vorbereitungen 48

4.3 Die Erfüllung von einfachen Typen 49

4.4 Formeln ohne endliche Überdeckungseigenschaft 50

4.4.1 σ-Randpunktfolgen und Randpunktsicherungsfolgen 50

4.5 Die P-Beschränkung 55

5 Folgerungen **57**

5.1 Elemenare Äquivalenz der erweiterten Struktur 57

5.2 Elementare Erweiterungen 57

Einleitung

Die Arbeit

Im Jahre 2000 erschien eine wissenschaftliche Arbeit von JOHN BALDWIN und MICHAEL BENEDIKT unter dem Namen „*Stability theory, Permutations of Indiscernibles, and Embedded Finite Models*“ [1], die im Wesentlichen von der Erweiterung spezieller Theorien durch einstellige Relationen handelt und in Fachkreisen als „unlesbar“ [2] empfunden wurde. Daraufhin veröffentlichten ENRIQUE CASANOVAS und MARTIN ZIEGLER im Jahre 2001 die Schrift „*Stable theories with a new predicate*“ [2], die den stabilen Fall in [1] aufgriff, das dortige Ergebnis verallgemeinerte und in einer für jeden Modelltheoretiker verständlichen Weise formulierte.
Der Plan für diese Diplomarbeit war es, zu untersuchen, ob die Ergebnisse von [1] über Theorien ohne Unabhängigkeiseigenschaft einer Prüfung standhielten, und sie gegebenenfalls in eine leichter zu lesende Form zu bringen. Dabei sollte auch die Frage, ob eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse in Anlehnung an [2] möglich sei, Beachtung finden. Die Ergebnisse hielten stand, wovon die folgenden fünfzig Seiten Zeugnis ablegen sollen.

Voraussetzungen zum Verständnis

Voraussetzung zum Verständnis dieser Arbeit sind Kenntnisse in der Modelltheorie und der ihr zugrunde liegenden Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Gleichheit. Für die Abschnitte „*Topologie dichter Ordnungen*“ und „*Topologie im Produktraum*“ werden zusätzlich rudimentäre Kenntnisse im Bereich der Topologie erwartet. Im Abschnitt „*Hilfe von der Kombinatorik des Unendlichen*“ wird zudem ein vertrauter Umgang mit der Ordinalzahlarithmetik vorausgesetzt.
Im Folgenden sollen Bezeichnungsweisen erläutert und abgeglichen werden. Es wird nicht erklärt, was eine Sprache L, eine L-Formel, eine L-Theorie, ein Modell einer Theorie, eine Indiscerniblefolge oder die Basis einer Topologie ist.

Bezeichnungen

Für eine Sprache L seien, wie in der Modelltheorie üblich, L-Theorien sowie L-Typen immer *vollständig*. Die unvollständigen Objekte heißen *L-Satzmenge* im einen und *partieller L-Typ* oder auch *Formelmenge* im anderen Fall.

[2] Mündliche Zitate werden nicht belegt.

Modelle werden immer mit großen Frakturbuchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{I}, \mathfrak{M}, \ldots$ bezeichnet. Die zugehörigen lateinischen Großbuchstaben $A, I, M, \ldots$ stehen jeweils für deren Träger.
Tupel wie $\overline{a}$ seien immer endliche Tupel, also $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ für ein $n \in \omega$. Unendliche Tupel, die nur im Abschnitt 3.6 auftauchen, haben als Kennzeichen die unendliche Indexmenge als Exponent: $\overline{a}^\Omega$. $|\overline{a}|$ sei die Länge des Tupels $\overline{a}$. Um sich nicht immer auf diese Länge beziehen zu müssen, wurde die übliche, aber leicht unsaubere Schreibweise $\overline{a} \in A$ der exakten Schreibweise $\overline{a} \in A^n$ vorgezogen.
Gelegentlich bezeichnet $\overline{a}$ auch die endliche Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Um den Unterschied trotzdem anzudeuten, heißt es dann $\overline{a} \subset A$, anstatt $\overline{a} \in A$. Für ein $B \subset A$ steht dann $B\overline{a}$ für $B \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Für ein Modell $\mathfrak{M}$ bezeichne $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ dessen Theorie und für ein Tupel $\overline{a} \in M$ bezeichne $\mathrm{tp}(\overline{a})$ dessen Typ in $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$.
Für eine Menge A bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ deren Potenzmenge und für eine Teilmenge $B \subset A$ sei B^c das Komplement von B in A, also die Menge $A \setminus B$. Die Komlpementschreibweise setzt damit voraus, daß aus dem Kontext ersichtlich ist, als Teilmenge welcher Menge man B zu betrachten hat.

Die Sprache

Obwohl die Mathematik einen Sprachcode entwickelt hat, der es ermöglicht, auf die eigentliche Sprache weitgehend zu verzichten, wurde dennoch versucht, in vollständigen deutschen Sätzen zu sprechen. Mit Ausnahme von *ÄK*, *RPF* und *UE* für *Äquivalenzklasse*, *Randpunktfolge* und *Unabhängigkeitseigenschaft*, wurde auf Abkürzungen verzichtet.
Wenn in längeren Widerspruchsbeweisen vom Konjunktiv des Irrealen zum Indikativ gewechselt wurde, so kann man darin zwar eine Verletzung der Sprache erkennen; es entspricht aber dem Wunsch der Mathematiker, an der Sprache selbst keinen Anstoß zu nehmen, um den Blick sofort auf die hinter der Sprache stehende Folgerungsstuktur richten zu können. Zudem muß man schon ein überzeugter Platonist sein, wenn man die strikte Trennung des Realen vom Irrealen, die in Angelegenheiten des Geistes doch immer fiktiv ist, in der Sprache einfordert.

Der Schauplatz

In dieser Arbeit geht es um folgende Konstellation:
Man betrachtet ein Modell $\mathfrak{M}$ einer L-Theorie ohne Unabhängigkeitseigenschaft, das eine dicht geordnete Indiscerniblefolge enthält und richtet nun sein Augenmerk auf die $L \cup \{P, <\}$-Struktur, die entsteht, wenn in $\mathfrak{M}$ das einstellige Relationssymbol P durch die Indiscerniblefolge und das zweistellige Relationssymbol $<$ durch die Ordnung der Indiscerniblefolge interpretiert wird.

Der Aufbau

Kapitel 1 behandelt *dichte Ordnungen* und entwickelt die in [1] benutzte Technik der *Randpunktfolgen*.

Im Abschnitt 1.1 werden von dichten Ordnungen Beispiele genannt und Bezeichnungsweisen abgeglichen bzw. eingeführt. Als einzige Nichtstandartbezeichnung verdient nur der Begriff der $<$-*Formel* für quantorenfreie $\{<\}$-Formeln die Erwähnung.

Abschnitt 1.2 zählt modelltheoretische Eigenschaften von dichter Ordnungen auf.

Abschnitt 1.3 betrachtet das *endliche kartesische Produkt* einer dichten Ordnung, führt die Bezeichnungsweise der $(<, A)$-*Äquivalenzklassen* ein und benennt verschiedene Projektionen.

Der Abschnitt 1.4 entwickelt die keineswegs neue Theorie der *Vervollständigung einer dichten Ordnungn* und kann als mathematische Fingerübung verstanden werden, wobei das Ergebnis in Abschnitt 3.5 Verwendung findet.

Die topologische Betrachtung in 1.5 erkennt die vollständigen dichten Ordnungen und nur sie als *zusammenhängend*.

In 1.6 wird die Topologie dieses Produktraumes betrachtet und bewiesen, was in [1] nur vage angedeutet wurde: daß in vollständigen dichten Ordnungen $(<, A)$-Äquivalenzklassen zusammenhängend sind.

Die Definition von *Randpunktfolgen* erfolgt im Abschnitt 1.7. Dort werden neben Beispielen auch einfache Eigenschaften aufgezählt. Besonders hinzuweisen ist dabei auf Lemma 1.7.6, das die falsche Behauptung aus [1], Projektionen von Randpunktfolgen, die auf einer Koordinatenmenge konstant sind, seien ebenfalls Randpunktfolgen, berichtigt. Danach wird noch ein kombinatorisches Lemma für Tupelfolgen erwähnt, das aus dem Satz von Ramsey folgt, und das im Beweis von Satz 3.3.1 benötigt wird.

Abschnitt 1.8 stellt schließlich in vollständigen dichten Ordnungen die Äquivalenz zwischen der Definierbarkeit einer Teilemenge des Produktraums und der Existenz einer endlichen Randpunktfolge von dieser Teilmenge fest.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit der *Unabhängigkeitseigenschaft*.

Zuerst wird im Abschnitt 2.1 die Unabhängigkeitseigenschaft definiert, die Äquivalenz der endlichen zu der unendlichen Formulierung bewiesen, und die Definition mit Beispielen illustriert.

Der Abschnitt 2.2 folgt seinem Namen und beweist einfache Eigenschaften der Unabhängigkeitseigenschaft, darunter die *Symmetrie*.

In 2.3 wird ein sehr nützliches Lemma über Theorien mit Unabhängigkeitseigenschaft bewiesen. Dieses Lemma steht in [4], allerdings ohne Beweis.

Mit Hilfe dieses Lemmas erhält man zwei Eigenschaften der Unabhängigkeitseigenschaft, die nicht auf den ersten Blick ins Auge springen: Abschnitt 2.4 führt in Anlehnung an [4] einen kombinatorischen Beweis des schon in [5] erwähnten, aber dort nur mit Hilfe eines Verweises auf mengentheoretische Ausführungen in [6] bewiesenen Satzes, wonach in einer Theorie mit Unabhängigkeitseigenschaft bereits eine Formel $\gamma(x, \overline{y})$ in einer freien Variablen x die Unabhängigkeitseigenschaft besitzt. Im Abschnitt 2.5 erhält man recht leicht die meines Wissens nirgends erwähnte Eigenschaft, daß in jeder Theorie die Menge der Formeln ohne Unabhängigkeitseigenschaft unter Booleschen Kombinationen abgeschlossen ist. Das Beispiel der Zahlentheorie aus Abschnitt 2.1 zeigt, daß diese Aussage für Quantifikationen im Allgemeinen falsch ist.

Die folgenden zwei Abschnitte beweisen von ganzen Theorieklassen, den o-minimalen Theorien in 2.6 und den stabilen in 2.7, daß diese zur Klasse der Theorien ohne Unabhängigkeitseigenschaft gehören. Der Beweis für die o-minimalen Theorien kann sich durch die Verwendung des Satzes über die Existenz einer Formel in nur einer freien Variablen x auf die eindimensionalen o-minimalen Mengen beschränken und ist deshalb viel kürzer und weniger technisch als die üblichen Beweise.

Kapitel 3 geht es um die auf der Indiscerniblefolge I erzeugte Stuktur, d.h. um die Frage, welche Teilmengen des endlichen kartesischen Produkts I^R mit Hilfe von Parametern aus M definierbar sind. Der ausführlichen Beschreibung des Schauplatzes und den motivierenden Beispielen in 3.1 folgen in 3.2 die Definitionen von *P-beschränkten Quantoren* und *P-beschränkten Formeln*, deren Nutzen die den Definitionen jeweils folgenden Sätze offenbaren.
Abschnitt 3.3 beweist, daß eine Formel ohne Unabhängikeitseigenschaft mit Parametern aus M auf I^R nur Mengen mit endlichen Randpunktfolgen definieren kann, wobei es für jede Formel eine obere Schranke der Randpunktfolgenlänge gibt, die nicht vom Parametertupel abhängt. In meiner Formulierung des Satzes wird deutlich, daß diese Schranke nur von R und der von der jeweiligen Formel nicht erfüllten m-Unabhängigkeitseigenschaft abhängt, nicht aber von anderen Eigenschaften der Formel, wie etwa der Länge des für die Parameter aus M bestimmten Variablentupels. Der Beweis folgt im Wesentlichen [1], wobei der dort übersehene Fall, daß die Randpunktfolge auf einer Hyperdiagonalen liegt, durch Induktion beseitigt wird, die zudem den Vorteil hat, beim Induktionsanfang sehr anschaulich zu sein.
In Abschnitt 3.4 wird der von mir erfundene Begriff der *Definitionsersetzung* eingeführt, der die Formulierung der Sätze vereinfacht und zum besseren Verständnis beiträgt. Die Sätze dieses Abschnitts sind Folgerungen der Randpunktfolgenbeschränkung für *vollständige* dichte Ordnungen mit Hilfe des in Kapitel 1 erarbeiteten Rüstzeugs. Die im Vergleich zu [1] schärfere Formulierung der Randpunktfolgenbeschränkung aus dem letzten Abschnitt liefert hier eine uniformere Möglichkeit, Definitionsersetzungen von L-Formeln zu wählen: Während [1] nur für jede L-Formel die Existenz einer $<$-Formel mit Definitionsersetzungseigenschaft folgert, kann hier für zwei Formeln, die im selben I^R Mengen definieren und beide die Unabhängigkeitseigenschaft nicht haben, dieselbe $<$-Formel als Definitionsersetzung gewählt werden.
Der folgende Abschnitt 3.5 stellt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Abschnitt 3.4 auf *beliebige* dichte Ordnungen dar, und folgt damit einer Schlußfolgerung in [1], deren Beweis dort nur angedeutet ist. Abschnitt 3.6 zeigt schließlich an einem Beispiel, daß die Voraussetzung, nicht die Unabhängigkeitseigenschaft zu haben, für die Ergebnisse dieses Kapitels wesentlich ist. Zusätzlich findet sich im Beweis davon ein Beispiel für die erst in 4.4 definierten *Randpunktsicherungsfolgen*.

Kapitel 4 untersucht, was für die erweiterte Struktur $(\mathfrak{M}, P^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}})$ gefolgert werden kann, schränkt aber die Fragestellung gleich am Anfang durch die Definition von *kleinen (erweiterten) Strukturen* auf diese ein. Die Definition entspricht eher der von *„pseudo-*

small“ in [1], wobei die Saturiertheitsbedingung in Anlehnung an [2] abgeschwächt ist.
Der erste Abschnitt 4.1 diese Kapitels konzentriert sich dabei auf das $L_<$-Redukt $(M, <^{\mathfrak{M}})$, das selbstverständlich keine dichte Ordnung ist. Daß dieser Tatsache in [1] die Erwähnung verwehrt wird, kann nicht daran liegen, daß es die Autoren nicht bemerkt hätten, oder gar durch bewußte Verschleierung Schwachstellen des Beweises unsichtbar machen wollten, sondern hat ihre Ursache sicherlich in der Einsicht, daß „eine Produktion, die nicht aus einer aktiven Mystifizierung hervorgeht, (...) immer diesseits der nackten Existenz [bleibt].“([K],S.412) Dieser und die folgenden zwei Abschnitte widmen sich also der unheiligen Aufgabe der Entmystifizierung, die nur gerechtfertigt wäre, wenn sie eine Grundlage dazu liefern würde, besser mystifizieren zu können. So wird in diesem Abschnitt die Modelltheorie dieser Strukturen, die ich *dichte Ordnungen mit unendlichem Außenbereich* nenne, entwickelt. Sie erlauben, im Gegensatz zu dichten Ordnungen, keine Quantorenelimination, was neue Fragen aufwirft.
Der nächste Abschnitt 4.2 beweist, daß für eine Boolesche Kombination von L-Formeln und $<$-Formeln $\varphi(\overline{x}, y)$ die Formel $\exists y \varphi(\overline{x}, y)$ äquivalent zu einer P-beschränkten Formel ist, was ebenso zum mystischen Wissen von [1] gehört, wie die Tatsache, daß die Saturiertheitsbedingung aus der Definition von kleinen Strukturen, die nur Aussagen über L-Typen macht, ausreicht, um auch bestimmte Typen der erweiterten Sprache zu erüllen. Dies wird im Abschnitt 4.3 entmystifiziert.
Der Beweis, daß in kleinen Strukturen jede Formel äquivalent zu einer P-beschränkten Formel ist, folgt in seiner wesentlichen Struktur [2] und steht in Abschnitt 4.5. Der dafür benötigte Satz, daß Formeln einer bestimmten Art nicht die *endliche Überdeckungseigenschaft* haben, ist das Thema von Abschnitt 4.4 und übernimmt die Beweisidee aus [1]. Der Beweis des zentralen Lemmas daraus benötigt zwar immer noch über zwei Seiten; es wurde jedoch durch die Einführung des Begriffs der *Randpunktsicherungsfolge* und die Auslagerung der Lemmata über σ-Randpunktfolgen und Randpunktsicherungsfolgen versucht, dem Beweis Klarheit abzuringen.

Im **Kapitel 5** werden schließlich zwei Folgerungen der P-Beschränkung bewiesen.
Die erste in Abschnitt 5.1 liefert eine hinreichende Bedingung für die elementare Äquivalenz von zwei erweiterten Strukturen.
Die zweite in Abschnitt 5.2 schließt unter der Voraussetzung der Kleinheit der Strukturen $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ und $(\mathfrak{N}, I, <^{\mathfrak{N}})$ mit $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ auf die Beziehung $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \prec (\mathfrak{N}, I, <^{\mathfrak{N}})$.
Beides sind Folgerungen, die ohne Voraussetzung nicht gelten, wie schon in Abschnitt 3.1 zur Motivation gezeigt wurde. Die erste Folgerung ist [1] entnommen, die zweite Folgerung ist selbst erfunden.

Dankeshymnen

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Martin Ziegler vor allem dafür, den Produktivitätsdruck, der mittlerweile auch die Universitäten voll erfaßt hat, weitgehend von mir fern gehalten zu haben. Dies hat die Abfassung des obigen Traktats erst ermöglicht, wobei auch seine Mahnung, immer der Freiheit des Menschen eingedenk zu bleiben, mich zusätzlich ermutigt hat.

Im Hinblick auf die Entstehung des Vorworts danke ich auch Marc Riehle, der mich auf den Einfluß der mathematischen Grundlagenforschung auf die Geistesgeschichte des letzten Jahrhunderts aufmerksam gemacht hat.

Ferner gilt mein Dank Dr. Markus Junker für die ausdauernde fachliche Begleitung, die den mathematischen Teil zu einer wissenschaftlichen Arbeit gedeihen ließ.

Pavla Kopecka danke ich für die Übersetzung von [4]. Diese Schrift lag mir nur im russischen Orginal vor.

Außerdem danke ich meinen Eltern, mich bei der Sicherung der materiellen Existenzgrundlagen sehr wohlwollend unterstützt zu haben, wobei ich nicht umhin kann, gleichzeitig einer Gesellschaft meine Verachtung auszusprechen, die dem Überfluß frönt, und in der es dieser Unterstützung trotzdem bedarf.

Kapitel 1

Dichte Ordnungen

1.1 Bezeichnungen und Beispiele

In diesem Kapitel sei $L_<$ die Sprache, die nur aus dem zweistelligen Relationssymbol $<$ besteht. Φ_{dO} sei die $L_<$-Satzmenge, die dichte offene Ordnungen axiomatisiert, d.h. Ordnungen, bei denen es zu jedem Element sowohl ein größeres als dieses, als auch ein kleineres gibt, und bei denen zwischen zwei verschiedenen Elementen immer noch ein weiteres Element existiert. $\mathfrak{I} = (I, <^{\mathfrak{I}})$ sei Modell von Φ_{dO}. Modelle von Φ_{dO} heißen im Folgenden abkürzend *dichte Ordnungen* .
$\leq$, $\geq$ und $>$ werden wie üblich verwendet.
Wir definieren: Quantorenfreie $L_<$-Formeln heißen *$<$-Formeln.*

Beispiele dichter Ordnungen

- $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$
- $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$
- Seien $(I, <^{\mathfrak{I}})$ und $(J, <^{\mathfrak{J}})$ Ordnungen. Das lexikographische Produkt beider Ordnungen $(I \times J, <^{\mathfrak{I}\times\mathfrak{J}})$ ist folgendermaßen definiert: $(i_1, j_1) <^{\mathfrak{I}\times\mathfrak{J}} (i_2, j_2)$ genau dann, wenn $i_1 <^{\mathfrak{I}} i_2$ oder $(i_1 = i_2$ und $j_1 <^{\mathfrak{J}} j_2)$. Falls $(J, <^{\mathfrak{J}})$ eine dichte Ordnung ist, dann ist für eine beliebige Ordung $(I, <^{\mathfrak{I}})$ das Produkt $(I \times J, <^{\mathfrak{I}\times\mathfrak{J}})$ eine dichte Ordnung.

Konvexe Mengen und Intervalle

$A \subset I$ heißt *konvex*, falls für alle $a, b \in A, c \in I$ gilt: Falls $a <^{\mathfrak{I}} c <^{\mathfrak{I}} b$, so ist $c \in A$.
Sei $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann bezeichne (a, b) das offene Intervall zwischen a und b, d.h. $(a, b) := \{c \in I \mid a <^{\mathfrak{I}} c <^{\mathfrak{I}} b\}$.
$(-\infty, a)$ bezeichne $\{c \in I \mid c <^{\mathfrak{I}} a\}$ und (a, ∞) bezeichne $\{c \in I \mid a <^{\mathfrak{I}} c\}$.
Alle diese Objekte heißen fortan *offene Intervalle von* $(I, <^{\mathfrak{I}})$.
Sei (a, b) ein offenes Intervall. Falls $a \neq -\infty$ bzw. $b \neq \infty$, dann ist $(a, b) \cup \{a\}$ bzw. $(a, b) \cup \{b\}$ ein Intervall und falls $a \neq -\infty$ und $b \neq \infty$, dann ist $(a, b) \cup \{a, b\}$ ein Intervall.

Jedes offene Inervall ist, beinahe selbstredend, auch ein Intervall. Wie man leicht sieht, sind alle Intervalle konvex.

Bemerkung 1.1.1 *Die offenen Intervalle einer dichten Ordung $(I, <^{\mathfrak{I}})$ sind als Substrukturen von $(I, <^{\mathfrak{I}})$ selbst dichte Ordnungen.*

1.2 Modelltheorie dichter Ordnungen

Bemerkung 1.2.1

1. *Je zwei dichte Ordnungen sind partiell isomorph.*
2. *Φ_{dO} ist vollständig.*
3. *Φ_{dO} erlaubt Quantorenelimination.*
4. *Φ_{dO} ist ω-kategorisch.*
5. *Dichte Ordnungen sind ω-saturiert.*
6. *Φ_{dO} ist nicht κ-kategorisch für alle $\kappa > \omega$.*
7. *Φ_{dO} ist nicht stabil.*

Bemerkung 1.2.2 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordung. Es gibt 6 verschiedene Arten von 1-Typen über I:*

- *der Elementtyp $p_a(x) := \langle x \doteq a \rangle$ für ein $a \in I$*
- *der unendlich negative Typ $p_{-\infty}(x) := \langle x < a \mid a \in I \rangle$*
- *der unendlich posivive Typ $p_{\infty}(x) := \langle x > a \mid a \in I \rangle$*
- *der negative Nachbartyp $p_{a-}(x) := \langle x < a, x > b \mid b < a \rangle$ für ein $a \in I$*
- *der positive Nachbartyp $p_{a+}(x) := \langle x > a, x < b \mid b > a \rangle$ für ein $a \in I$*

* *der echte Schnitttyp $p_{\oslash}(x) := \langle x > a \mid a \in A, x < b \mid b \in B \rangle$ für disjunkte konvexe nichtleere Teilmengen $A, B \subset I$ mit $A \cup B = I$, wobei $\sup(A)$ in I nicht existiert.*

In einem homogenen $(I, <^{\mathfrak{I}})$ sind zwei Typen derselben Art durch einen Automorphismus von $(I, <^{\mathfrak{I}})$ ineinander überführbar. Die ersten 5 Arten existieren immer; die Existenz von echten Schnitttypen hängt von $(I, <^{\mathfrak{I}})$ ab.

Dies sieht man folgendermaßen: Sei $p(x)$ ein 1-Typ über I. Falls $(x \doteq a) \notin p(x)$ für alle $a \in I$ ist, dann betrachte in einer elementaren Erweiterung $(J, <^{\mathfrak{J}}) \succ (I, <^{\mathfrak{I}})$, die $p(x)$ durch $c \in J$ realisiert, die Mengen $A := \{a \in I \mid a <^{\mathfrak{J}} c\}$ und $B := \{b \in I \mid b >^{\mathfrak{J}} c\}$. Wie man leicht sieht, sind A und B disjunkt und konvex und da $p(x)$ kein Elementtyp ist, gilt $A \cup B = I$. Falls nun $A = \emptyset$ bzw. $B = \emptyset$, dann ist $p(x)$ der unendlich negative bzw. der unendlich positive Typ. Falls nicht, dann ist A nach oben beschränkt und nichtleer. Falls nun $\sup(A)$ in $(I, <^{\mathfrak{I}})$ existiert, dann gehört es entweder zu A oder zu B und $p(x)$ ist damit ein positiver oder negativer Nachbartyp. Falls $\sup(A)$ in $(I, <^{\mathfrak{I}})$ nicht existiert, dann ist $p(x)$ ein echter Schnitttyp.

1.3 Definierbare Mengen im Produktraum

R sei im Folgenden immer eine natürliche Zahl und $A \subset I$.

Lemma 1.3.1 *In einer Theorie T ist jeder quantorenfreie Typ äquivalent zu einer Formelmenge, die nur aus atomaren und negierten atomaren Formeln besteht.*

Beweis. Sei $p(\overline{x})$ ein Typ in T. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit werden nun die freien Variablen unterdrückt. Sei $\varphi \in p$. Da φ quantorenfrei ist, läßt es sich auf disjunktive Normalform bringen:

$$\varphi = \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{i,j}$$

Die $\varphi_{i,j}$ sind dabei atomare und negiert atomare Formeln. Da p vollständig ist, gibt es, bis auf Äquivalenz modulo T, nur ein i_0, so daß $T \cup p \cup \{\bigwedge_j \varphi_{i_0,j}\}$ konsistent ist. Also ist in T der Typ p äquivalent zu

$$(p \setminus \{\varphi\}) \cup \bigcup_j \{\varphi_{i_0,j}\}$$

Verfährt man so mit allen $\varphi \in p$, so erhält man das Gewünschte. $\square$

Definition 1.3.2 *Sei $A \subset I$. Eine maximal konsistente Menge von atomaren und negiert atomaren $L_<$-Formeln mit Parametern aus A heißt $<$-Typ über A.*

Bemerkung 1.3.3 *Wegen der Quantorenelimination und Lemma 1.3.1 ist jeder $L_<$-Typ über A in Φ_{dO} äquivalent zu einem $<$-Typ über A.*

Lemma 1.3.4 *Für jeden R-Typen $p(x_1, \ldots, x_R)$ über A gibt es 1-Typen $p_1(x_1), \ldots, p_R(x_R)$ über A und eine $<$-Formel $\theta(x_1, \ldots, x_R)$, die einen $<$-Typ über $\emptyset$ beschreibt, sodaß in Φ_{dO} die Formelmenge $\bigcup_i p_i(x_i) \cup \{\theta(x_1, \ldots, x_R)\}$ äquivalent zu $p(x_1, \ldots, x_R)$ ist.*

Beweis. Wegen der Quantorenelimination in Φ_{dO} kann man sich auf $<$-Typen beschränken. Da $L_< \cup \{\doteq\}$ nur aus 2-stelligen Relationssymbolen besteht, kann man nun die atomaren und negiert atomaren Formeln einteilen in die, welche Parameter und damit nur eine freie Variable enthalten und in die Formeln ohne Parameter in 2 freien Variablen. Also hat man:

$$p(x_1, \ldots, x_R) = \big\langle p_1(x_1), \ldots, p_R(x_R), p_\emptyset(x_1, \ldots, x_R)\big\rangle$$

wobei $p_\emptyset(x_1, \ldots, x_R)$ ein $<$-Typ über $\emptyset$ ist und wegen der ω-Kategorizität und der Quantorenelimination aus endlich vielen atomaren und negiert atomaren $L_<$-Formeln besteht, deren Konjunktion die gewünschte $<$-Formel $\theta(x_1, \ldots, x_R)$ ergibt. $\square$

Definition 1.3.5 $E \subset I^R$ ist eine *$(<, A)$-Äquivalenzklasse (ÄK)*, falls E nichtleer und die Erfüllungsmenge eines $<$-Typs über A in R Variablen ist. $\mathrm{tp}(E)$ bezeichne den $<$-Typ von E über $\emptyset$.

Bemerkung 1.3.6 *Sei $A \subset B \subset I$, $\overline{c} \in I^R$, E die $(<, A)$-ÄK von $\overline{c}$ und $\hat{E}$ die $(<, B)$-ÄK von $\overline{c}$. Dann gilt: $\hat{E} \subset E$.*

Beispiele und Bemerkungen

Für $R = 1$ gilt:

- Jedes Element $a \in A$ bildet eine einelementige $(<, A)$-ÄK.
- Alle $(<, A)$-ÄKn sind konvex.
- Falls A endlich ist, dann sind die nicht einelementigen $(<, A)$-ÄKn die offenen Intervalle zwischen benachbarten Elementen (d.h. Elementen, zwischen denen keine weiteren Elemente in A existieren) aus A.

Für beliebiges R ergibt sich aus Lemma 1.3.4:

- Für jede $(<, A)$-ÄK E in I^R gibt es $(<, A)$-ÄKn $E_1, \dots, E_R$ in I, sodaß für $p_\emptyset(x_1, \dots x_R) := \mathrm{tp}(E)$ gilt:
$$E = \{\overline{c} \in E_1 \times \dots \times E_R \mid (I <^{\mathfrak{I}}) \models p(\overline{c})\}$$

Bemerkung 1.3.7 *1. Sei $D \subset I^R$ definierbar über A. Dann ist D Vereinigung von $(<, A)$-ÄKn.*

2. Sei $A \subset I$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele $(<, A)$-ÄKn in I^R. Die Anzahl der verschiedenen $(<, A)$-ÄKn in I^R ist dabei begrenzt durch die Anzahl der $(R + |A|)$-Typen in Φ_{dO}.

3. Sei $A \subset I$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele verschiedene über A definierbare Teilmengen in I^R. Diese Anzahl ist dann beschränkt durch die Anzahl der partiellen $(R + |A|)$-Typen in Φ_{dO}.

Lemma 1.3.8 (von der uniformen Definierbarkeit) *Sei $n, R \in \omega$ und für eine Indexmenge Ω sei $(A_j)_{j\in\Omega}$ eine Familie von Teilmengen von I mit $|A_j| \leq n$ für alle $j \in \Omega$. Sei weiterhin $(D_j)_{j\in\Omega}$ eine Familie von Teilmengen von I^R, wobei D_j definierbar über A_j für alle $j \in \Omega$. Dann gibt es eine $<$-Formel $\theta(\overline{x}, \overline{y})$ und eine Familie $(\overline{b_j})_{j\in\Omega}$, so daß $D_j = \{\overline{c} \in I^R \mid (I, <^{\mathfrak{I}}) \models \theta(\overline{c}, \overline{b_j})\}$ für alle $j \in \Omega$.*

Beweis. Sei im Beweis $|\overline{x}| = R$ und $|\overline{y}| = n$ und seien $\theta_1(\overline{x}, \overline{y}), \dots, \theta_l(\overline{x}, \overline{y})$ alle Formeln in $(R + n)$ freien Variablen. Setze $\theta(\overline{x}, \overline{y}, y_{n+1}, \dots y_{n+l}) := \bigvee_{1\leq i\leq l}(\theta_i(\overline{x}, \overline{y}) \wedge y_1 \doteq y_{n+i})$. Sei nun D_j definierbar über A_j. Wähle nun $b_1, \dots, b_n \in A_j$, so daß D_j definierbar über $\{b_1, \dots, b_n\}$. Nun gilt also: $D_j = \{\overline{c} \in I^R \mid (I, <^{\mathfrak{I}}) \models \theta_i(\overline{c}, \overline{b})\}$ für ein $i \leq l$. Wähle nun $b_{n+i} = b_1$ und $b_{n+r} \neq b_1$ für $r \neq i$. Dann ist $D_j = \{\overline{c} \in I^R \mid (I, <^{\mathfrak{I}}) \models \theta(\overline{x}, \overline{b}, b_{n+1}, \dots b_{n+l})\}$. □

1.3.1 Projektionen

Es folgen nun Definitionen von verschiedenen Projektionen, die später benötigt werden:

Definition 1.3.9 • Sei $D \subset I^R$, $c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n+1}, \dots, c_R \in I$. Die *konstante Projektion einer Koordinate* $p_n[c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n+1}, \dots, c_R]$ oder kurz p_n (falls aus dem Kontext ersichtlich ist, um welche Konstanten es sich handelt) bezeichne folgende Abbildung: $p_n : \mathcal{P}(I^R) \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ gemäß:
$D \longmapsto \{a \in I \mid (c_1, \dots, c_{n-1}, a, c_{n+1}, \dots, c_R) \in D\}$

- Sei wiederum $D \subset I^R$ und $c_{n+1}, \ldots, c_R \in I$. Die konstante Projektion mehrerer Koordinaten $p_{\leq n}[c_{n+1}, \ldots, c_R]$ oder kurz $p_{\leq n}$ bezeichne die Abbildung: $p_{\leq n} : \mathcal{P}(I^R) \longrightarrow \mathcal{P}(I^n)$ gemäß:
  $D \longmapsto \{\overline{a} \in I^n \mid (a_1, \ldots, a_n, c_{n+1}, \ldots, c_R) \in D\}$

- Die *Projektion einer Koordinate* als punktweise Abbildung $\pi_n : I^R \longrightarrow I^{R-1}$ gemäß:
  $(a_1, \ldots, a_R) \longmapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, \ldots, a_R)$

- Die *Projektion einer Koordinate* als Abbildung $\Pi_n : \mathcal{P}(I^R) \longrightarrow \mathcal{P}(I^{R-1})$ gemäß:
  $D \longmapsto \{\pi_n(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\}$

- Die *Projektion mehrerer Koordinaten* $\pi_{>n} : I^R \longrightarrow I^n$ gemäß:
  $(a_1, \ldots, a_R) \longmapsto (a_1, \ldots, a_n)$

Lemma 1.3.10 *Sei E eine $(<, A)$-ÄK in I^R. Dann ist $\Pi_n(E)$ eine $(<, A)$-ÄK in I^{R-1}.*

Beweis. Da $E \neq \emptyset$ ist, ist $\Pi_n(E) \neq \emptyset$.
Sei $p(\overline{x})$ der Typ über A, dessen Erfüllungsmenge E ist. Nach Lemma 1.3.4 gibt es 1-Typen $p_1(x_1), \ldots p_R(x_R)$ über A und eine $<$-Formel $\theta(x_1, \ldots, x_R)$, die nach 1.3.1 Konjunktion von atomaren und negiert atomaren Formeln ist, sodaß

$$p(\overline{x}) = \langle p_1(x_1), \ldots, p_R(x_R), \theta(x_1, \ldots, x_R) \rangle$$

Sei $\theta_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_R)$ die Konjunkton der atomaren und negiert atomaren Formeln aus θ, die x_n nicht enthalten. Dann beschreibt θ_n einen $<$-Typ über $\emptyset$ und damit ist $\langle p_1(x_1), \ldots, p_{n-1}(x_{n-1}), p_{n+1}(x_{n+1}), \ldots, p_R(x_R), \theta_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_R) \rangle$ ein $(R-1)$-Typ über A, dessen Erfüllungsmenge $\Pi_n(E)$ ist. $\square$

1.4 Vollständige Ordnungen

Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung.

Definition 1.4.1 Für A, $B \subset I$ schreibt man $A < B$, falls für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: $a <^{\mathfrak{I}} b$

Definition 1.4.2 Sei A, $B \subset I$. Das Paar (A, B) heißt *Schnitt* über I, falls

1. A, $B \neq \emptyset$
2. $A < B$
3. $A \cup B = I$ und
4. A kein maximales Element enthält.

Man schreibt dafür: $(A \mid B)$. $\mathcal{S}(I)$ bezeichne die Menge der Schnitte über I.

Lemma 1.4.3 *Auf $\mathcal{S}(I)$ gibt es eine kanonische Ordnung vermöge:*

$$(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2) \quad \text{: genau dann, wenn} \quad B_1 \cap \mathrm{A}_2 \neq \emptyset$$

Beweis. Totalität: Sei $(A_1 \mid B_1) \neq (A_2 \mid B_2)$. Sei o.B.d.A. $c \in A_1$ und $c \notin A_2$. Dann ist $c \in B_2$, woraus $(A_2 \mid B_2) <^{\mathcal{S}} (A_1 \mid B_1)$ folgt.

Irreflexivität: Sei $(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2)$. Also existiert $c \in A_2 \cap B_1$. Weil $(A_i \mid B_i)$ ein Schnitt über I für $i = 1, 2$ ist, gilt $a <^{\mathfrak{I}} c$ für alle $a \in A_1$ und $c <^{\mathfrak{I}} b$ für alle $b \in B_2$. Damit ist $A_1 \cap B_2 = \emptyset$, also $(A_2 \mid B_2) \not<^{\mathcal{S}} (A_1 \mid B_1)$.

Transitivität: Sei $(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2)$ und $(A_2 \mid B_2) <^{\mathcal{S}} (A_3 \mid B_3)$. Dann existiert $c \in B_1 \cap A_2$ und $d \in B_2 \cap A_3$. Da $A_2 < B_2$ ist, gilt $c <^{\mathfrak{I}} d$ und mit $c \in B_1$ ist also auch $d \in B_1$. Damit $d \in A_3 \cap B_1$, also $(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_3 \mid B_3)$. □

Definition 1.4.4 Seien $(I, <^{\mathfrak{I}})$ und $(J, <^{\mathfrak{J}})$ dichte Ordnungen. $e : (I, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (J, <^{\mathfrak{J}})$ heißt *Einbettung*, falls für alle $a_1, a_2 \in I$ gilt: Falls $a_1 <^{\mathfrak{I}} a_2$, so $e(a_1) <^{\mathfrak{J}} e(a_2)$.
Die Einbettung e heißt *dicht*, falls $e(I)$ dicht in J liegt, d.h. falls es für alle $b_1, b_2 \in J$ mit $b_1 <^{\mathfrak{J}} b_2$ ein $a \in I$ gibt mit $b_1 <^{\mathfrak{J}} e(a) <^{\mathfrak{J}} b_2$.

Bemerkung 1.4.5 *Jede Einbettung ist injektiv.*

Lemma 1.4.6 *Es gibt eine kanonische Einbettung von $(I, <^{\mathfrak{I}})$ in $(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}})$ vermöge $s : a \longmapsto (A \mid B)$, wobei $A = \{c \in I \mid c <^{\mathfrak{I}} a\}$ (und damit $B = \{c \in I \mid c \geq^{\mathfrak{I}} a\}$). Diese Einbettung ist dicht.*

Beweis. Sei $a_1 <^{\mathfrak{I}} a_2$, $s(a_1) = (A_1 \mid B_1)$ und $s(a_2) = (A_2 \mid B_2)$. Da $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung ist, existiert $c \in (a_1, a_2)$. Also ist $c \in A_2$ und $c \in B_1$ und damit $s(a_1) = (A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2) = s(a_2)$.

Nun zur Dichtheit: Sei $(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2)$. Dann gibt es $a \in B_1 \cap A_2$. Da A_2 kein maximales Element enthält und B_1 nach oben unbeschränkt ist, kann $a \in B_1 \cap A_2$ so gewählt werden, daß es nicht das kleinste Element in $B_1 \cap A_2$ ist.
Sei $s(a) = (A \mid B)$. Da $a \in B$, gilt $a \in B_1 \cap A_2$, also $(A \mid B) <^{\mathcal{S}} (A_2 \mid B_2)$ Da a nicht das kleinste Element von $B_1 \cap A_2$ war, gibt es $c \in B_1 \cap A_2$ mit $c <^{\mathfrak{I}} a$. Wegen $c <^{\mathfrak{I}} a$ gilt $c \in A$, also $c \in B_1 \cap A$ und damit $(A_1 \mid B_1) <^{\mathcal{S}} (A \mid B)$. □

Bemerkung 1.4.7 *Damit ist mit $(I, <^{\mathfrak{I}})$ auch $(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}})$ eine dichte Ordnung.*

Definition 1.4.8 Ein Schnitt $(A \mid B)$ über I heißt *realisierter Schnitt* , falls es ein $a \in I$ gibt mit $(A \mid B) = s(a)$.
$(I, <^{\mathfrak{I}})$ heißt *Dedekind-vollständig* (kurz: *vollständig*), falls jeder Schnitt über I ein realisierter Schnitt ist.

Bemerkung 1.4.9 *$(I, <^{\mathfrak{I}})$ ist genau dann vollständig, wenn s aus* Lemma 1.4.6 *ein Isomorphismus ist.*

Satz 1.4.10 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. $(I, <^{\mathfrak{I}})$ ist genau dann vollständig, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von I ein Supremum besitzt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $C \subset I$ nach oben beschränkt. Betrachte $B = \{d \in I \mid$ für alle $c \in C$ gilt $c \leq^{\mathfrak{I}} d\}$, die Menge der oberen Schranken von C. Nach Voraussetzung ist $B \neq \emptyset$. Setze $A = I \setminus B$. Da $C \neq \emptyset$ ist, ist auch $A \neq \emptyset$.

Sei $a_0 \in A$, und $b_0 \in B$ beliebig. Weil nach Definition $A = \{a \in I \mid \text{es existiert } c \in C \text{ mit } c >^{\mathfrak{I}} a\}$, existiert nun $c \in C$ mit $a_0 <^{\mathfrak{I}} c$. Wegen Def. von B gilt $c \leq^{\mathfrak{I}} b_0$, also $a_0 <^{\mathfrak{I}} b_0$. Da $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ beliebig waren gilt also $A < B$.
Sei wiederung $a_0 \in A$ beliebig und $c \in C$ mit $c >^{\mathfrak{I}} a$. Wegen der Dichtheit gibt es $d \in (a, c)$, für das wegen $d <^{\mathfrak{I}} c$ auch $d \in A$ gilt. Da $a_0 \in A$ beliebig gewählt war, hat A also kein maximales Element.
Also ist $(A \mid B)$ Schnitt über I. Wegen der Vollständigkeit existiert nun $c_0 \in I$ mit $B = \{b \in I \mid b \geq^{\mathfrak{I}} c_0\}$, also ein kleinstes Element der oberen Schranken.

„$\Longleftarrow$“: Sei $(A \mid B)$ Schnitt über I, also $A \subset I$ nichtleer, nach oben beschränkt und ohne maximales Element. Nach Voraussetzung existiert das Supremum $c \in I$, also $A = \{a \in I \mid a <^{\mathfrak{I}} c\}$ oder $A = \{a \in I \mid a \leq^{\mathfrak{I}} c\}$. Letzteres kann nicht sein, da A sonst ein maximales Element hätte. Also ist $(A \mid B)$ ein realisierter Schnitt über I. $\square$

Satz 1.4.11 *In einer vollständigen dichten Ordnung ist eine Teilmenge, die mindestens zwei Elemente enthält, genau dann konvex, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$ “: Schon oben wurde bemerkt, daß Intervalle konvex sind.

„$\Longrightarrow$ “: Sei $c_1, c_2 \in X \subset I$ mit $c_1 <^{\mathfrak{I}} c_2$. Falls ein $a_0 \in I \setminus X$ existiert mit $a_0 <^{\mathfrak{I}} c_1$, dann ist $A = \{a \in I \setminus X \mid a <^{\mathfrak{I}} c_1\}$ nach oben beschränkt und nichtleer. Also existiert $a_1 = \sup(A)$. Wähle im anderen Fall $a_1 = -\infty$.
Falls es ein $b_0 \in I \setminus X$ mit $b_0 >^{\mathfrak{I}} c_2$ gibt, dann ist, da X konvex ist, jedes $b >^{\mathfrak{I}} b_0$ in $I \setminus X$; also ist X selbst nach oben beschränkt und nichtleer. Sei in diesem Fall $b_1 = \sup X$, ansonsten $b_1 = \infty$. Beachte, daß für a_1, b_1 wegen $a_1 \leq^{\mathfrak{I}} c_1 <^{\mathfrak{I}} c_2 \leq^{\mathfrak{I}} b_1$ in jedem Fall $a_1 <^{\mathfrak{I}} b_1$ gilt.
Aus der Konstuktion von a_1 und b_1 und der Konvexheit von X folgt nun leicht, daß alle Elemente aus (a_1, b_1) in X und alle Elemente, die kleiner als a_1 oder größer als b_1 sind, in $I \setminus X$ liegen. Ob nun a_1, b_1, beide oder keines von beiden in X liegen, ändert nichts daran, daß X damit ein Intervall ist. $\square$

Satz 1.4.12 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. Dann ist $\left(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}}\right)$ eine vollständige dichte Ordnung.*

Beweis. In diesem Beweis bezeichnen große Frakturbuchstaben keine Modelle, sondern Mengen von Schnitten.
Sei $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$ ein Schnitt über $\mathcal{S}(I)$. Also sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen von Schnitten über I, wobei für alle $(A_i \mid B_i) \in \mathfrak{A}$ und für alle $(A_j \mid B_j) \in \mathfrak{B}$ gilt: $(A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (A_j \mid B_j)$.
Daher gilt für $A := \bigcup A_i$ mit $(A_i \mid B_i) \in \mathfrak{A}$ und $B := \bigcup B_j$ mit $(A_j \mid B_j) \in \mathfrak{B}$ die Beziehung $A < B$.

- Behauptung: $(A \mid B)$ ist ein Schnitt über I.
  Beweis hiervon: Sei $a \in I$. Dann $s(a) = (\tilde{A} \mid \tilde{B}) \in \mathcal{S}(I)$ und damit $s(a) \in \mathfrak{A}$ oder $s(a) \in \mathfrak{B}$.
  Falls $s(a) \in \mathfrak{B}$, dann $a \in B$ wegen $a \in \tilde{B}$.
  Falls $s(a) \in \mathfrak{A}$, dann gibt es wegen der Dichtheit von $s(I)$ in $\mathcal{S}(I)$ und, weil $\mathfrak{A}$ kein maximales Element hat, ein $\bar{a} >^{\mathfrak{I}} a$ mit $s(\bar{a}) = (\bar{A} \mid \bar{B}) \in \mathfrak{A}$. Für alle $c <^{\mathfrak{I}} \bar{a}$ gilt damit $c \in \bar{A}$ und folglich $c \in A$. Also ist $a \in A$.

- Behauptung: $\mathfrak{A} = \{(A_i \mid B_i) \in \mathcal{S}(I) \mid (A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (A \mid B)\}$
  Beweis hiervon: Sei $(A_i \mid B_i) \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ kein maximales Element hat, existiert wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(I)$ ein Schnitt $(\bar{A} \mid \bar{B}) \in \mathfrak{A}$ mit $(A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (\bar{A} \mid \bar{B})$, also existiert $a \in \bar{A} \cap B_i$. Da $(\bar{A} \mid \bar{B}) \in \mathfrak{A}$, folgt $a \in A$ und damit $(A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (A \mid B)$.
  Sei $(A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (A \mid B)$. Damit existiert $a \in A \cap B_i$. Da $a \in A$ ist, existiert $(\bar{A} \mid \bar{B}) \in \mathfrak{A}$ mit $a \in \bar{A}$, also gilt: $(A_i \mid B_i) <^{\mathcal{S}} (\bar{A} \mid \bar{B})$. Weil $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$ ein Schnitt über $\mathcal{S}(I)$ ist, ist damit auch $(A_i \mid B_i) \in \mathfrak{A}$. □

Satz 1.4.13 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. Dann gibt es eine vollständige dichte Ordnung $(J, <^{\mathfrak{J}})$, in die $(I, <^{\mathfrak{I}})$ dicht einbettbettbar ist. $(J, <^{\mathfrak{J}})$ ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Existenzaussage ist mit Lemma 1.4.6, Bemerkung 1.4.7 und Satz 1.4.12 schon bewiesen.

Nun zur Eindeutigkeit: Sei $(K, <^{\mathfrak{K}})$ vollständige dichte Ordnung und $t : (I, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (K, <^{\mathfrak{K}})$ eine dichte Einbettung, $\big(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}}\big)$ und $s : (I, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow \big(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}}\big)$ wie oben. Definiere nun $\pi : (K, <^{\mathfrak{K}}) \longrightarrow \big(\mathcal{S}(I), <^{\mathcal{S}}\big)$ folgendermaßen:
$\pi(k) = s(t^{-1}(k))$ für $k \in \mathrm{bild}(t)$ (Beachte: t^{-1} ist wohldefiniert, da t injektiv)
$\pi(k) = (A \mid B)$, wobei $A = \{a \in I \mid t(a) <^{\mathfrak{K}} k\}$ und $B = \{b \in I \mid t(b) >^{\mathfrak{K}} k\}$ für $k \notin \mathrm{bild}(t)$

- Da $k \notin \mathrm{bild}(t)$, ist $(A \mid B)$ ein Schnitt über I. π ist also wohldefiniert.

- Für $k \notin \mathrm{bild}(t)$ ist $\pi(k)$ in I nicht realisiert: Angenommen es existiert $c \in I$ mit $A = \{a \in I \mid a <^{\mathfrak{I}} c\}$ und $B = \{b \in I \mid c \leq^{\mathfrak{I}} b\}$, dann $t(a) <^{\mathfrak{K}} t(c)$ für alle $a \in A$ und $t(c) <^{\mathfrak{K}} t(b)$ für alle $b \in B \setminus \{c\}$. Da t eine dichte Einbettung ist, existiert für alle $l <^{\mathfrak{K}} k$ ein $a \in A$ mit $l <^{\mathfrak{K}} t(a) <^{\mathfrak{K}} k$ und damit $t(c) \geq k$. Ebenso existiert für alle $l >^{\mathfrak{K}} k$ ein $b \in B$ mit $l >^{\mathfrak{K}} t(b) >^{\mathfrak{K}} k$ und damit $t(c) \leq^{\mathfrak{K}} k$, also $t(c) = k$, was $k \notin \mathrm{bild}(t)$ widerspricht.

- π ist ordnungserhaltend: Sei $k, l \in K$ mit $k <^{\mathfrak{K}} l$.
  Da t eine dichte Einbettung ist, existiert $a \in A$ mit $k <^{\mathfrak{K}} t(a) <^{\mathfrak{K}} l$. Seien $\pi(k) = (A_1 \mid B_1)$ und $\pi(l) = (A_2 \mid B_2)$. Egal, ob $k, l \in \mathrm{bild}(t)$ ist oder nicht, gilt $a \in B_1$, und $a \in A_2$, also $\pi(k) <^{\mathcal{S}} \pi(l)$.

- Injektivität: Folgt direkt aus der Ordnungserhaltung.

- Surjektivität: Sei $(A \mid B)$ über I realisierter Schnitt, also $(A \mid B) = s(c)$ für ein $c \in I$. Damit $\pi(t(c)) = (A \mid B)$, also $=(A \mid B) \in \mathrm{bild}(\pi)$.
  Falls $(A \mid B)$ über I nicht realisiert wird, so existiert wegen der Vollständigkeit von K ein $k \in K$ mit $t(a) <^{\mathfrak{K}} k$ für alle $a \in A$ und $t(b) \geq^{\mathfrak{K}} k$ für alle $b \in B$. Falls es $c \in I$ gäbe mit $t(c) = k$, wäre $(A \mid B)$ über I realisierter Schnitt. Also $t(b) >^{\mathfrak{K}} k$ für alle $b \in B$ und damit $(A \mid B) = \pi(k)$. □

Definition 1.4.14 Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. Die vollständige dichte Ordnung $(J, <^{\mathfrak{J}})$, in die $(I, <^{\mathfrak{I}})$ dicht einbettbar ist, heißt *Vervollständigung* von $(I, <^{\mathfrak{I}})$.

Beispiele und Bemerkungen

- Sei $e : (I, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (J, <^{\mathfrak{J}})$ die dichte Einbettung von I in die Vervollständigung J. Indem wir $(I, <^{\mathfrak{I}})$ mit $(e(I), <^{\mathfrak{J}})$ identifizieren, können wir annehmen, daß I Teilmenge seiner Vervollständigung ist.

- Die offenen Intervalle einer vollständigen dichten Ordnung sind vollständige dichte Ordnungen.

- $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ ist keine vollständige dichte Ordnung.

- $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ ist eine vollständige dichte Ordnung.

- Da Φ_{dO} eine vollständige Theorie ist und sowohl $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ als auch $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ zur Modellklasse von Φ_{dO} gehören, kann es also keine Satzmenge geben, deren Modellklasse die vollständigen dichten Ordnungen sind.

- Jede vollständige dichte Ordnung ist mindestens kontinuumsgroß: Da die identische Abbildung $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ dicht in $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ einbettet, ist $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$. Die Menge der Schnitte über $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ ist also kontinuumsgroß. Wegen der partiellen Isomorphie dichter Ornungen und der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, ist $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ das Primmodell von Φ_{dO}. Also gibt es für jede dichte Ordung $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine Einbettung $e : (\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}) \longrightarrow (I, <^{\mathfrak{I}})$. Definiere nun $E : \mathcal{S}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{S}(I)$ durch $(A \mid B) \longmapsto \big(E(A) \mid E(B)\big)$, wobei $E(A) := \{a \in I \mid$ es existiert $q \in A$ mit $e(q) \geq a\}$ und $E(B) = I \setminus E(A)$. Da e ordnungserhaltend ist, ist E injektiv und $\mathcal{S}(I)$ damit mindestens kontinuumsgroß. Nach Bemerkung 1.4.9 ist eine vollständige dichte Ordnung gleichmächtig wie die Menge der Schnitte über ihr, also ist auch I selbst mindestens kontinuumsgroß.

Definierbarkeit von Typen

Zur Erinnerung:

Definition 1.4.15 Sei T eine L-Theorie und $\mathfrak{M} \models T$. Ein L-Typ $p(\overline{x})$ über $A \subset M$ heißt *definierbar über* $B \subset \mathfrak{M}$, falls es für jede L-Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ eine L-Formel $\theta(\overline{y}, \overline{z})$ und ein Tupel $\overline{b} \in B$ gibt, sodaß für alle $\overline{a} \in A$ gilt: $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in p(\overline{x})$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \theta(\overline{a}, \overline{b})$.

Der Begriff der Definierbarkeit von Typen liefert nun eine modelltheoretische Charakterisierung der vollständigen dichten Ordungen:

Satz 1.4.16 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. $(I, <^{\mathfrak{I}})$ ist genau dann vollständig, wenn jeder Typ über I definierbar über I ist.*

Beweis. 1-Typen: Die Vollständigkeit der dichten Ordnung ist offensichtlich äquivalent zur Nichtexistenz von echten Schnitttypen. Im Folgenden sei $\varphi(x, \overline{y})$ immer eine $L_<$-Formel mit Parametern aus I.

- Sei $p_a(x)$ ein Elementtyp. Dann gilt für alle $\overline{b} \in I$: $\varphi(x, \overline{b}) \in p_a(x)$ genau dann, wenn $(I, <^{\mathfrak{I}}) \models \varphi(a, \overline{b})$

- Sei $p_{-\infty}(x)$ der unendlich negative Typ. Dann gilt für alle $\overline{b} \in I$: $\varphi(x, \overline{b}) \in p_{-\infty}(x)$ genau dann, wenn $(I, <^{\mathfrak{I}}) \models \forall z_1 \exists z_2 \big(z_2 < z_1 \wedge \varphi(z_2, \overline{b})\big)$

- Sei $p_{\infty}(x)$ der unendlich positive Typ. Dann gilt für alle $\overline{b} \in I$: $\varphi(x, \overline{b}) \in p_{\infty}(x)$ genau dann, wenn $(I, <^{\mathfrak{I}}) \models \forall z_1 \exists z_2 \big(z_2 > z_1 \wedge \varphi(z_2, \overline{b})\big)$

- Sei $p_{a-}(x)$ ein negativer Nachbartyp. Dann gilt für alle $\overline{b} \in I$: $\varphi(x, \overline{b}) \in p_{a-}(x)$ genau dann, wenn $(I, <^{\mathfrak{I}}) \models \forall z_1 (z_1 < a \longrightarrow \exists z_2 \big(z_1 < z_2 < a \wedge \varphi(z_2, \overline{b})\big)$

- Sei $p_{a+}(x)$ ein positiver Nachbartyp. Dann gilt für alle $\overline{b} \in I$: $\varphi(x, \overline{b}) \in p_{a+}(x)$ genau dann, wenn $(I, <^{\mathfrak{I}}) \models \forall z_1 (z_1 > a \longrightarrow \exists z_2 \big(z_1 > z_2 > a \wedge \varphi(z_2, \overline{b})\big)$

- Sei $p_{\oslash}(x)$ ein echter Schnitttyp, d.h. $p_{\oslash}(x) = \big\langle x > a \mid a \in A, x < b \mid b \in B \big\rangle$ mit $A, B \subset I$ konvex, nichtleer und $A \cup B = I$. Da $p(x)$ kein Nachbartyp ist, hat weder A ein Maximum, noch B ein Minimum. Betrachte die Formel $\varphi(x, y) = x < y$. Wäre $p^{(}_{\oslash}x)$ definierbar, dann gäbe es eine $L_<$-Formel $\theta(y, \overline{z})$ und ein Tupel $\overline{b} \in I$ mit $B = \{c \in I \mid (I, <^{\mathfrak{I}}) \models \theta(c, \overline{b})\}$. Da wegen der Quantorenelimination $\theta(y, \overline{z})$ quantorenfrei gewählt werden kann, muß es ein $b_i \in \overline{b}$ geben mit $B = \{c \in I \mid c > b_i\}$ oder $B = \{c \in I \mid c \geq b_i\}$. Im ersten Fall hätte dann aber A ein Maximum und im zweiten Fall B ein Minimum.

R-Typen: Sei $p(x_1, \dots, x_R)$ ein R-Typ über I. Nach Lemma 1.3.4 gibt es 1-Typen $p_1(x_1)$, $\dots, p_R(x_R)$ über I und eine $<$-Formel $\theta(x_1, \dots, x_R)$, so daß $\bigcup_i p_i(x_i) \cup \{\theta(x_1, \dots, x_R)\}$ modulo Φ_{dO} äquivalent zu $p(x_1, \dots, x_R)$ ist. Also sind die R-Typen über I genau dann definierbar über I, wenn es die 1-Typen über I sind. $\square$

1.5 Topologie dichter Ordnungen

Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine dichte Ordnung. Das System aller offenen Intervalle bildet die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$. Sie heißt die von $<^{\mathfrak{I}}$ induzierte Ordnungstopologie und ist hausdorffsch.
Damit lassen sich die Elemente von $\mathcal{T}$ folgendermaßen schreiben: $X \in \mathcal{T}$, so $X = \bigcup_{i \in \Omega} (a_i, b_i)$ mit einer Indexmenge Ω und $a_i, b_i \in I$ für alle $i \in \Omega$.

Bemerkung 1.5.1 *Für $X \in \mathcal{T}$ und $c \in X$ existiert $a, b \in I$ mit $a <^{\mathfrak{I}} c <^{\mathfrak{I}} b$ und $(a, b) \subset X$.*

Definition 1.5.2 Sei $(I, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. I heißt *zusammenhängend*, falls für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ mit $X_1 \cup X_2 = I$ und $X_1, X_2 \neq \emptyset$ gilt: $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.
$A \subset I$ heißt *zusammenhängend*, falls A bzgl. der induzierten Topologie zusammenhängend ist, d.h. falls für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ mit $A \subset X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap A \neq \emptyset$ und $X_2 \cap A \neq \emptyset$ gilt: $X_1 \cap X_2 \cap A \neq \emptyset$.

Bemerkung 1.5.3 *Sei $(I, \mathcal{T}_1)$ topologischer Raum, $J \subset I$ und $\mathcal{T}_2$ die von $\mathcal{T}_1$ induzierte Topologie auf J. Dann gilt für $D \subset J$: D ist genau dann zusammenhängend in $(I, \mathcal{T}_1)$, wenn D zusammenhängend in $(J, \mathcal{T}_2)$ ist.*

Satz 1.5.4 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ vollständige dichte Ordnung und $a, b \in I$ mit $a <^{\mathfrak{I}} b$. Dann ist (a, b) zusammenhängend.*

Beweis. Sei $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ mit $X_1 \cap (a, b) \neq \emptyset$, $X_2 \cap (a, b) \neq \emptyset$ und $(a, b) \subset X_1 \cup X_2$. Angenommen $(a, b) \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Wähle nun $u \in (a, b) \cap X_1$, $v \in (a, b) \cap X_2$. O.B.d.A. ist $u <^{\mathfrak{I}} v$ (vertausche sonst im Beweis X_1 und X_2). Setze $S := \{s \in (a, b) \mid (u, s) \subset X_1\}$. Da X_1 offen, gilt nach Bemerkung 1.5.1: $S \neq \emptyset$. Außerdem ist S nach oben beschränkt (durch v), besitzt also nach Satz 1.4.10 ein Supremum $s_0 \in (a, b)$. Wegen $(a, b) \subset X_1 \cup X_2$ ist $s_0 \in X_1$ oder $s_0 \in X_2$. Bemerkung 1.5.1 liefert $t_0, t_1 \in I$ mit $s_0 \in (t_0, t_1)$ und $(t_0, t_1) \subset X_1$ oder $(t_0, t_1) \subset X_2$. Ersteres kann nicht sein, weil s_0 dann nicht obere Schranke von S wäre, letzteres nicht, weil s_0 dann nicht kleinste obere Schranke wäre (t_0 wäre dann auch obere Schranke). Also ist (a, b) zusammenhängend. □

Korollar 1.5.5 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine vollständige dichte Ordnung. Dann ist jedes Intervall von $(I, <^{\mathfrak{I}})$ zusammenhängend. Insbesondere ist I selbst zusammenhängend.*

Beweis. Sei J ein Intervall in $(I, <^{\mathfrak{I}})$. Angenommen es existiert $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ mit $J \subset X_1 \cup X_2$, $X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Dann gibt es $c_1 \in J \cap X_1$, $c_2 \in J \cap X_2$. O.B.d.A. sei $c_1 < c_2$. Da J ein Intervall ist, gilt $(c_1, c_2) \subset J$, also ist $(c_1, c_2) \subset X_1 \cup X_2$. Nach Bemerkung 1.5.1 gibt es a_1, b_1 mit $(a_1, b_1) \subset X_1$ und $a_1 < c_1 < b_1$. Also ist $(c_1, c_2) \cap X_1 \neq \emptyset$. Ebenso gibt es a_2, b_2 mit $(a_2, b_2) \subset X_2$ und $a_2 < c_2 < b_2$. Damit ist auch $(c_1, c_2) \cap X_2 \neq \emptyset$ und damit wäre (c_1, c_2) nicht zusammenhängend, was im Widerspruch zu Satz 1.5.4 steht. □

Satz 1.5.6 *Sei die dichte Ordnung $(I, <^{\mathfrak{I}})$ nicht vollständig. Dann ist I nicht zusammenhängend.*

Beweis. Sei $(A \mid B)$ ein nicht realisierter Schnitt über I. Damit gilt $A, B \neq \emptyset$ und da $\sup(A)$ in I nicht existiert, ist

$$A = \bigcup_{a<b\in A} (a, b) \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{a<b\in B} (a, b)$$

Also sind $A, B \in \mathcal{T}$ mit $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = I$ und $A \cap B = \emptyset$. □

1.6 Topologie im Produktraum

Im Produktraum I^R erhält man auf kanonische Weise die Produkttopologie $\mathcal{O}$. Das System der Mengen der Form $\{X_1 \times \dots \times X_R \mid X_i \in \mathcal{T}\}$ bildet dabei eine Basis von $\mathcal{O}$.

Lemma 1.6.1 *Sei $O \in \mathcal{O}$ und $c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n+1}, \dots, c_R \in I$. Dann ist*

$$p_n\left[c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n+1}, \dots, c_R\right](O) \in \mathcal{T}$$

Beweis. Da $O \in \mathcal{O}$, ist $O = \bigcup_{i\in\Omega} X_{i,1} \times \dots \times X_{i,R}$ mit einer Indexmenge Ω. Also ist $p_n(O) = p_n \bigcup_{i\in\Omega} X_{i,1} \times \dots \times X_{i,R} = \bigcup_{i\in\Omega_0} X_{i,n}$ mit $\Omega_0 = \{i \in \Omega \mid c_1 \in X_{i,1} \wedge \dots \wedge c_R \in X_{i,R}\}$ also Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{T}$ und damit selbst in $\mathcal{T}$. □

Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz:

Satz 1.6.2 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine vollständige dichte Ordnung, $A \subset I$ und E eine $(<, A)$-ÄK in I^R. Dann ist E zusammenhängend.*

Dazu benötigt man:

Definition 1.6.3 Sei E eine $(<, A)$-ÄK und $\overline{a}, \overline{b} \in E$. Ein *Weg von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E* ist eine endliche Folge von Tupeln $\overline{c_0}, \ldots, \overline{c_n} \in E$, wobei sich für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Tupel $\overline{c_i}$ und $\overline{c_{i+1}}$ in genau einer Koordinate unterscheiden und $\overline{c_0} = \overline{a}$ und $\overline{c_n} = \overline{b}$ gilt. n heißt dabei *Länge* des Weges.

Lemma 1.6.4 *Sei E eine $(<, A)$-ÄK, wobei $(x_i \neq x_j) \in \mathrm{tp}(E)$ für $i, j \in \{1, \ldots, R\}$ mit $i \neq j$. Seien $\overline{a}, \overline{b} \in E$. Dann gibt es einen Weg von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $x_1 < x_2 < \cdots < x_R \in \mathrm{tp}(E)$ (gehe sonst zu Koordinatenpermutation über). Zeige folgende Behauptung: Stimmen zwei Tupel $\overline{a}$ und $\overline{b}$ aus E auf den letzten $R - n$ Koordinaten überein, dann gibt es einen Weg der Länge n von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E.
Beweis hiervon durch Induktion über n:
Induktionsanfang: $n = 1$: Wähle $\overline{c_0} := \overline{a}$ und $\overline{c_1} := \overline{b}$.
Induktionsschritt: $n - 1 \longrightarrow n$: Sei also $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n, d_{n+1}, \ldots, d_R) \in E$ und $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n, d_{n+1}, \ldots, d_R) \in E$.
Behauptung: Mindestens einer der folgenden Punkte ist in E:
$(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n, d_{n+1}, \ldots, d_R)$ oder $(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n, d_{n+1}, \ldots, d_R)$

- Beweis hiervon: Da $\overline{a}, \overline{b} \in E$ und E Erfüllungsmenge eines $<$-Typs über A, erfüllen mit Lemma 1.3.4 für alle i jeweils a_i und b_i denselben 1-Typ über A. Angenommen $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n, d_{n+1}, \ldots, d_R) \notin E$. Dann muß die Koordinatenordnung $\mathrm{tp}(E)$ widersprechen. Da aber in jedem Fall $a_1 < \cdots < a_{n-1}$ (sonst wäre $\overline{a} \notin E$) und $b_n < d_{n+1} < \cdots < d_R$ (sonst wäre $\overline{b} \notin E$), muß dann $a_{n-1} \geq b_n$ gelten. Da aber auch in jedem Fall $b_1 < \cdots < b_{n-1}$ und $a_n < d_{n+1} < \cdots < d_R$ gilt (mit demselben Argument wie gerade eben), ist dann $a_n > a_{n-1} \geq b_n > b_{n-1}$ und damit $(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n, d_{n+1}, \ldots, d_R) \in E$.

Ist nun $(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n, d_{n+1}, \ldots, d_R) \in E$, dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Weg der Länge $n - 1$ von $\overline{a}$ dorthin in E und damit einen Weg der Länge n von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E. Oder es gibt nach Induktionsvoraussetzung einen Weg der Länge $n - 1$ von $\overline{b}$ nach $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n, d_{n+1}, \ldots, d_R)$ in E und damit einen Weg der Länge n von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E. □

Lemma 1.6.5 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ eine vollständige dichte Ordnung, E eine $(<, A)$-ÄK und $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_1 \cap O_2 \cap E = \emptyset$, $E \subset O_1 \cup O_2$ und $\overline{a}, \overline{b} \in E$. Gibt es einen Weg von $\overline{a}$ nach $\overline{b}$ in E, dann gilt: $\overline{a} \in O_1$ genau dann, wenn $\overline{b} \in O_1$.*

Beweis. Falls dies nicht gilt, dann gibt es eine Stelle des Weges, an dem $\overline{c_i} \in O_1$ genau dann, wenn $\overline{c_{i+1}} \notin O_1$. Sei $k \in \{1, \ldots, R\}$ die Koordinate mit $c_{i,k} \neq c_{i+1,k}$. Betrachte nun die konstante Projektion einer Koordinate $p_k[c_{i,1}, \ldots, c_{i,k-1}, c_{i,k-1}, \ldots, c_{i,R}]$ und $p_k(E)$.

Da dies die Erfüllungsmenge eines 1-Typs über $A \cup \{c_{i,1}, \ldots, c_{i,k-1}, c_{i,k-1}, \ldots, c_{i,R}\}$ und somit konvex ist und mindestens zwei Punkte enthält, ist es nach Korollar 1.4.11 ein Intervall.
Sei $X = p_k(O_1)$ und $Y = p_k(O_2)$. Nach Lemma 1.6.1 gilt: $X, Y \in \mathcal{T}$. Da $E \subset O_1 \cup O_2$, ist $p_k(E) \subset X \cup Y$. Außerdem ist $p_k(E) \cap X \neq \emptyset$ und $p_k(E) \cap Y \neq \emptyset$ ($c_{i,k}$ liegt im einen und $c_{i+1,k}$ im anderen). Da $p_k(E)$ ein Intervall ist, gilt nach Korollar 1.5.5: Es existiert $d \in X \cap Y \cap p_k(E)$. Damit gilt aber $(c_{i,1}, \ldots, c_{i,k-1}, d, c_{i,k+1}, \ldots, c_{i,R}) \in O_1 \cap O_2 \cap E$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Korollar 1.6.6 *Sei E eine $(<, A)$-ÄK in einer vollständigen dichten Ordnung mit $(x_i \neq x_j) \in \mathrm{tp}(E)$ für $i, j \in \{1, \ldots, R\}$ mit $i \neq j$. Dann ist E zusammenhängend.*

Beweis. Ergibt sich direkt aus Lemma 1.6.4 und Lemma 1.6.5. □

Lemma 1.6.7 *Sei E eine Teilmenge der Hyperdiagonalen $D_{i,j} := \{\overline{a} \in I^R \mid a_i = a_j\}$. Dann ist E zusammenhängend in I^R genau dann, wenn $\Pi_j(E)$ zusammenhängend in I^{R-1} ist.*

Beweis. Zeige, daß π_j ein Homöomorphismus zwischen $D_{i,j}$ und I^{R-1} ist:
π_j ist bijektiv.
Das System der Mengen der Form $\{X_1 \times \cdots \times X_i \times \cdots \times X_{j-1} \times X_i \times X_{j+1} \times \cdots \times X_R) \mid X_l \in \mathcal{T}\}$ bildet eine Basis der Topologie auf $D_{i,j}$. Π_j ist nun offensichtlich eine Bijektion zwischen dieser Basis und der am Anfang des Abschnitts beschriebenen kanonischen Basis der Topologie von I^{R-1}, also ein Homöomorphismus.
Da nun $E \subset D_{i,j} \subset I^R$, ist E zusammenhängend in I^R genau dann, wenn E zusammenhängend in $D_{i,j}$ ist (s. Bemerkung 1.5.3). Wegen der Homöomorphie ist nun E zusammenhängend in $D_{i,j}$ genau dann, wenn $\pi_j(E)$ zusammenhängend in I^{R-1} ist. □

Nun kann Satz 1.6.2 bewiesen werden:

Beweis von Satz 1.6.2. Induktion über R:
Induktionsanfang: $R = 1$: E besteht entweder aus einem Punkt, oder ist ein Intervall. Also ist E per Definition zusammenhängend oder nach Korollar 1.5.5.
Induktionsschritt: Alle $(<, A)$-ÄKn in I^{R-1} seinen zusammenhängend. Sei nun E eine $(<, A)$-ÄK in I^R.
Falls $(x_i \neq x_j) \in \mathrm{tp}(E)$ für alle $i \neq j$, dann ist E nach Korollar 1.6.6 zusammenhängend.
Falls $(x_i \doteq x_j) \in \mathrm{tp}(E)$ für $i \neq j$, dann betrachte $\Pi_j(E)$ in I^{R-1}. Nach Lemma 1.6.7 ist E zusammenhängend in I^R genau dann, wenn $\Pi_j(E)$ zusammenhängend in I^{R-1} ist. Nach Lemma 1.3.10 ist $\Pi_j(E)$ eine $(<, A)$-ÄK in I^{R-1}, also nach Induktionsvoraussetzung zusammenhängend. □

1.7 Randpunktfolgen

Definition 1.7.1 1. Sei $D, E \subset I^R$. Ein Tupel $\overline{c} \in I^R$ heißt *Randpunkt von D in E*, falls $\overline{c} \in E$ und für alle $O \in \mathcal{O}$ mit $\overline{c} \in O$ gilt: $O \cap E \cap D \neq \emptyset$ und $O \cap E \cap D^c \neq \emptyset$, d.h. falls $\overline{c}$ im topologischen Unterraum E im Rand von D liegt.

2. Sei $D \subset I^R$, K eine Ordinalzahl und $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ eine Folge von Elementen von I^R. C_ν bezeichne im Folgenden die Menge der in $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ auftretenden Elemente von I und E_ν bezeichne die $(<, C_\nu)$-ÄK von $\overline{c_\nu}$. Eine Folge $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ heißt *Randpunktfolge (RPF) von D*, falls $\overline{c_\nu}$ Randpunkt von D in E_ν für alle $\nu < K$ ist.

3. Eine RPF $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ von $D \subset I^R$ heißt *maximal*, falls für kein $\overline{c_K} \in I^R$ die Folge $(\overline{c_\nu})_{\nu<K+1}$ eine RPF von D ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Sei $E \subset E'$ und $\overline{c}$ Randpunkt von D in E. Dann ist $\overline{c}$ Randpunkt von D in E'.
- Die leere Folge ist RPF für jedes $D \subset I^R$.
- $\emptyset$-definierbare Mengen haben nur die leere Folge als RPF.
- Sei $R = 1$, $a, b \in I$ mit $a < b$ und $D = (a, b)$. Die Folgen $\emptyset$, a, b, (a, b) und (b, a) sind die einzigen RPFn von D. Nur (a, b) und (b, a) sind also maximale RPFn von D.
- Wie in Abbildung 1.1 zu sehen sei $D := \{(x, y) \in I^2 \mid (x \geq y) \wedge (x \leq c) \wedge (y \geq a) \wedge (x = b \longrightarrow y \neq a)\}$ mit $a < b < c \in I$.

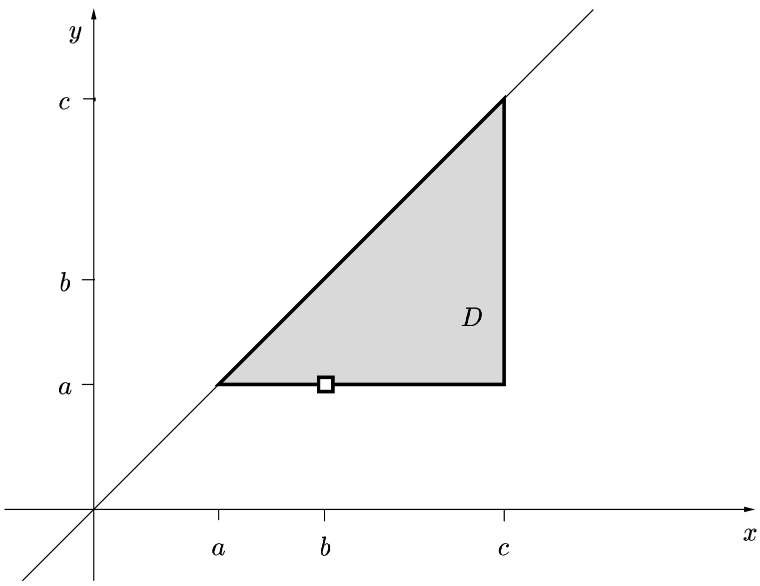

Abbildung 1.1: Eine über $\{a, b, c\}$ definierbare Teilmenge $D \subset I^2$

Die maximalen RPFn von D haben eine der folgenden Formen:

- $\big((c, y), (b, a)\big)$ für $a \leq y \leq c$
- $\big((c, y), (x, a), (b, a)\big)$ für $(a < y \leq c) \wedge (y \neq b)$ und $(a \leq x \leq c) \wedge (x \neq b)$
- $\big((b, a), (c, y)\big)$ für $a \leq y \leq c$
- $\big((x, a), (c, y), (b, a)\big)$ für $(a \leq x < c) \wedge (x \neq b)$ und $(a \leq y \leq c) \wedge (y \neq b)$

– $\big((x,a),(b,a),(c,y)\big)$ für $(a \le x < c) \wedge (x \ne b)$ und $a \le y \le c$

Dies sieht man folgendermaßen: In der $(<,\emptyset)$-ÄK $x < y$ gibt es keinen Randpunkt von D. In der $(<,\emptyset)$-ÄK $x \doteq y$ sind die einzigen Randpunkte von D die Tupel (a,a) und (c,c) und in der $(<,\emptyset)$-ÄK $x > y$ haben die Randpunkte von D die Form (x,y), wobei $y = a$ oder $x = c$ ist.
Ist ein Randpunkt der Form (d,a) für ein $d \in \{x \mid a \le x \le c\}$ als Tupel in der RPF schon gewählt, so sind nur noch die Tupel (b,a) und (c,a) von der Form (x,a) Randpunkte ihrer eigenen $(<,\{d,a\})$-ÄK, vorrausgesetzt, $d \ne b$ bzw. $d \ne c$. Außerdem sind dann noch alle Punkte der Form (c,y) mit $a < y \le c$ Randpunkte ihrer eigenen $(<,\{d,a\})$-ÄK mit einer Ausnahme: Falls $d = c$ gewählt worden war, ist (c,c) der einzige Punkt in seiner eigenen $(<,\{d,a\})$-ÄK und damit kein Randpunkt. Selbst (c,d) ist Randpunkt in der Menge $\{(x,y) \in I^2 \mid x > y \wedge x = d\}$.
Ist unter den bisher gewählten Tupeln das Tupel (b,a) schon enthalten, so sind nur noch Tupel der Form (c,y) mit $a \le y \le c$ Randpunkte ihrer eigenen $(<,\{a,b\})$-ÄK. Mit der Wahl eines dieser Punkte als Fortsetzung der RPF ist diese dann maximal. Mit Überlegungen derselben Art erhält man auch die anderen maximalen RPFn.

- Wie im obigen Beispiel zu sehen, müssen die maximalen RPFn einer Menge nicht alle dieselbe Länge haben.

Lemma 1.7.2 *Falls D,E durch $\varphi_D(\overline{x})$ und $\varphi_E(\overline{x})$ definierbar sind, dann gibt es eine Formel $\varphi_{RP(D,E)}(\overline{x})$, deren Erfüllungsmenge die Menge der Randpunkte von D in E sind.*

Beweis. $\overline{v},\overline{w},\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ seien allesamt Variablen-R-Tupel und $\overline{x} < \overline{y}$ sei die abkürzende Schreibweise für $\bigwedge_{1\le i\le R} x_i < y_i$. Folgende Formel liefert das Gewünschte:

$$\varphi_{RP(D,E)}(\overline{x}) := \varphi_E(\overline{x}) \wedge \forall\overline{y}\forall\overline{z}\Big(\overline{y} < \overline{x} < \overline{z} \longrightarrow \exists\overline{v}\exists\overline{w}(\overline{y} < \overline{v} < \overline{z} \wedge \overline{y} < \overline{w} < \overline{z} \wedge \\ \varphi_E(\overline{v}) \wedge \varphi_D(\overline{v}) \wedge \varphi_E(\overline{w}) \wedge \neg\varphi_D(\overline{w}))\Big)$$

□

Lemma 1.7.3 *Falls D durch $\varphi_D(\overline{x})$ definierbar ist, dann gibt es eine Formel $\varphi_{RPF(D)}(\overline{x_0},\dots,\overline{x_{K-1}})$ deren Erfüllungsmenge die Menge der RPFn von D der Länge K sind.*

Beweis. Betrachte die Formel

$$\varphi_{E_\nu,\overline{x_\nu}}(\overline{x},\overline{x_0},\dots,\overline{x_\nu}) := \bigwedge_{1\le i,j\le<R} (x_{\nu,i} < x_{\nu,j} \longleftrightarrow x_i < x_j) \wedge \\ \bigwedge_{1\le j\le R}\ \bigwedge_{\mu<\nu}\ \bigwedge_{1\le i\le R} (x_{\nu,j} < x_{\mu,i} \longleftrightarrow x_j < x_{\mu,i})$$

Sie stellt sicher, daß für ein erfüllendes Tupel $\overline{c},\overline{c_0},\dots,\overline{c_\nu}$ das Tupel $\overline{c}$ denselben Typ über C_ν hat wie $\overline{c_\nu}$. Ersetzt man nun in $\varphi_{RP(D,E)}(\overline{x})$ das Tupel $\overline{x}$ durch $\overline{x_\nu}$ und die Formeln $\varphi_E(\overline{w})$ durch $\varphi_{E_\nu,\overline{x_\nu}}(\overline{w},\overline{x_0},\dots,\overline{x_\nu})$ und ebenso $\varphi_E(\overline{v})$ durch $\varphi_{E_\nu,\overline{x_\nu}}(\overline{v},\overline{x_0},\dots,\overline{x_\nu})$

und streicht man die Formel $\varphi_E(\overline{x_\nu})$ (da ein Tupel immer in seiner eigenen $(<, A)$-ÄK liegt), dann erhält man eine Formel $\varphi_{RP(D,\overline{x_\nu})}(\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_\nu})$, die sicherstellt, daß für ein Erfüllungstupel $\overline{c_0}, \ldots, \overline{c_\nu}$ das Tupel $\overline{c_\nu}$ Randpunkt von D in C_ν ist. Dann liefert $\varphi_{RPF(D)} := \bigwedge_{\nu<K} \varphi_{RP(D,\overline{x_\nu})}$ das Gewünschte. □

Lemma 1.7.4 *Sei $D \subset I^R$. Jede Teilfolge einer RPF von D ist eine RPF von D.*

Beweis. Dies folgt daraus, daß nach Bemerkung 1.3.6 die Äquivalenzklassen E_ν aus der Definition 1.7.1 beim Übergang zur Teilfolge höchstens größer werden können und daher die Randpunkteigenschaft nicht verloren gehen kann. □

Lemma 1.7.5 *Sei $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ eine RPF von $D \subset I^R$ mit $(x_i \doteq x_j) \in \mathrm{tp}(\overline{c_\nu})$ für alle $\nu < K$ und $i \neq j$. Dann ist $\big(\pi_j(\overline{c_\nu})\big)_{\nu<K}$ RPF von $\Pi_j(D)$.*

Beweis. Da $(x_i \doteq x_j) \in \mathrm{tp}(\overline{c_\nu})$ für alle ν, ist jedes $E_\nu \subset \{\overline{a} \in I^R \mid a_i = a_j\}$. □

Lemma 1.7.6 *Ist eine RPF $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ von $D \subset I^R$ auf den Koordinaten $n+1, \ldots, R$ konstant, d.h. $c_{\nu,j} = d_j$ für $\nu < K$ und $j \in \{n+1, \ldots, R\}$, dann ist $\big(\pi_{>n}(\overline{c_\nu})\big)_{0<\nu<K}$ RPF von $p_{\leq n}(D)$.*

Beweis. Es ist $(x_{\nu,j} \doteq d_{0,j}) \in \mathrm{tp}(E_\nu/C_1)$ für $0 < \nu < K$ und $j \in \{n+1, \ldots, R\}$. Also gilt ohnehin $E_\nu \subset \{\overline{a} \in I^R \mid a_j = d_j\}$ für $0 < \nu < K$. Also ist für jedes $\nu > 0$ das Tupel $\pi_{>n}(\overline{c_\nu})$ Randpunkt von $p_{\leq n}(D)$ in der $\big(<, \{c_{l,j} \mid l < \nu,\ j = 1, \ldots, n\}\big)$-ÄK von $\pi_{>n}(\overline{c_\nu})$. □

Lemma 1.7.6 gilt in ähnlicher Weise auch für RPFn, die auf anderen Koordinatenmengen konstant sind, was leicht durch den Übergang zu einer Koordinatenpermutation zu zeigen ist. Die Einschränkung auf die spezielle Koordinatenmenge hat also nur formulierungstechnische Gründe.

1.7.1 Ein kombinatorisches Lemma mit Folgerung

Definition 1.7.7 Sei $m \in \omega$. Eine Tupelfolge $(\overline{a_\mu})_{\mu<m}$ heißt 2-*indiscernible* , falls

- $\mathrm{tp}(\overline{a_{\mu_i}}) = \mathrm{tp}(\overline{a_{\mu_j}})$ für alle $\mu_i, \mu_j < m$ und
- $\mathrm{tp}(\overline{a_{\mu_i}}, \overline{a_{\mu_j}}) = \mathrm{tp}(\overline{a_{\mu_l}}, \overline{a_{\mu_k}})$ für alle $\mu_i < \mu_j$ und $\mu_l < \mu_k$ gilt.

Lemma 1.7.8 *Sei $R \in \omega$ fest. Es gibt eine Funktion $r_R : \omega \longrightarrow \omega$ mit folgender Eigenschaft: Jede Folge $(\overline{a_\mu})_{\mu<r_R(m)}$ in I^R besitzt eine Teilfolge der Länge m, die 2-indiscernible ist.*

Beweis. Da die Typenräume in Φ_{dO} endlich sind, folgt das Lemma aus dem Satz von Ramsey. □

Lemma 1.7.9 *Falls eine Folge $(\overline{a_\nu})_{\nu<m}$ 2-indiscernible und $m > 2$ ist, dann folgt aus $a_{\nu_1,i} = a_{\nu_2,j}$ für $\nu_1, \nu_2 < m$ und $i \neq j$ die Gleichheit $a_{\nu,i} = a_{\nu,j}$ für alle $\nu < m$.*

Beweis. (i) Falls $\nu_1 = \nu_2$, dann ist $(x_i \doteq x_j) \in \mathrm{tp}(\overline{a_{\nu_1}})$ und damit $(x_i \doteq x_j) \in \mathrm{tp}(\overline{a_\nu})$ für alle $\nu < m$.
(ii) Falls $\nu_1 \neq \nu_2$ also o.B.d.A. $\nu_1 < \nu_2$. Da $m > 2$ ist, existiert $\nu_3 \notin \{\nu_1, \nu_2\}$. Betrachte für die nun folgenden Schlußfolgerungen Abbildung 1.2:
Falls $\nu_1 < \nu_3$, dann folgt aus $a_{\nu_1,i} = a_{\nu_2,j}$ und derselben Ordnung von (ν_1, ν_2) und (ν_1, ν_3) die Gleichheit $a_{\nu_1,i} = a_{\nu_3,j}$, also auch $a_{\nu_2,j} = a_{\nu_3,j}$. Damit $(x_j \doteq x_{j+R}) \in \mathrm{tp}(\overline{a_{\nu_2}}, \overline{a_{\nu_3}})$ und $(x_j \doteq x_{j+R}) \in \mathrm{tp}(\overline{a_{\nu_3}}, \overline{a_{\nu_2}})$ also auch in jedem Fall (egal ob $\nu_2 < \nu_3$ oder umgekehrt) $(x_j \doteq x_{j+R}) \in \mathrm{tp}(\overline{a_{\nu_1}}, \overline{a_{\nu_2}})$ und damit $a_{\nu_1,i} = a_{\nu_2,j} = a_{\nu_1,j}$. Damit befinden wir uns aber im Fall (i). Sehr ähnliche Überlegungen führen zum selben Ergebnis für $\nu_3 < \nu_1$. $\square$

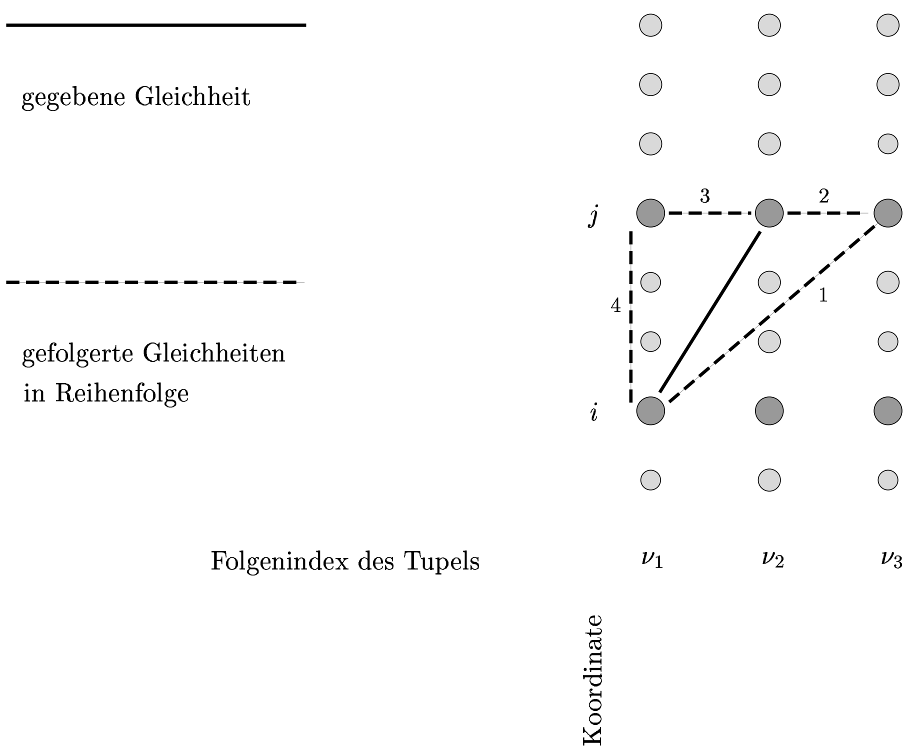

Abbildung 1.2: Die Gleichheitsfolgerungen der Reihe nach

1.8 Randpunktfolgen und Definierbarkeit

In diesem Abschnitt sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ immer eine *vollständige* dichte Ordnung.

Lemma 1.8.1 *Sei $A \subset I$, $D \subset I^R$ und E eine zusammenhängende Menge in I^R mit $D \cap E \neq \emptyset$ und $D^c \cap E \neq \emptyset$. Dann gibt es einen Randpunkt von D in E.*

Beweis. Angenommen es würde kein Randpunkt von D in E existieren. Dann gäbt es für alle $\overline{c} \in E$ eine Menge $O_{\overline{c}} \in \mathcal{O}$ mit $O_{\overline{c}} \cap E \subset D$ oder $O_{\overline{c}} \cap E \subset D^c$. Damit würde aber für $O_1 = \bigcup_{\overline{c} \in D} O_{\overline{c}}$ und $O_2 = \bigcup_{\overline{c} \notin D} O_{\overline{c}}$ gelten:
$E \subset O_1 \cup O_2$, $(O_1 \cap O_2 \cap E) \subset (D \cap D^c) = \emptyset$ und $O_1, O_2 \neq \emptyset$. Dann wäre aber E nicht zusammenhängend. □

Korollar 1.8.2 *Sei $A \subset I$, $D \subset I^R$ und E eine $(<, A)$-ÄK mit $D \cap E \neq \emptyset \neq D^c \cap E$. Dann gibt es einen Randpunkt von D in E.*

Beweis. Da E nach Satz 1.6.2 zusammenhängend ist, folgt dies aus Lemma 1.8.1. □

Lemma 1.8.3 *Sei $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ mit $K < \omega$ maximale RPF von $D \subset I^R$. Dann ist D definierbar über C_K.*

Beweis. Angenommen, D wäre nicht definierbar über C_K. Nach Bemerkung 1.3.7 wäre D dann nicht Vereinigung von $(<, C_K)$-ÄKn. Dann gäbe es eine $(<, C_K)$-ÄK E mit $E \cap D \neq \emptyset$ und $E \cap D^c \neq \emptyset$. Nach Korollar 1.8.2 würde dort ein Randpunkt $\overline{c_K}$ existieren. Dann wäre $(\overline{c_\nu})_{\nu<K+1}$ eine RPF und damit $(\overline{c_\nu})_{\nu<K}$ nicht maximal. □

Lemma 1.8.4 *Ist $(\overline{c_\nu})_{\nu<K+1}$ RPF von $D \subset I^R$, so existiert ein $j \in \{1, \dots, R\}$ mit $c_{K,j} \notin C_K$.*

Beweis. Wäre für jedes $j \in \{1, \dots, R\}$ $c_{K,j} \in C_K$, so würde für die $(<, C_K)$-ÄK E von $\overline{c_K}$ gelten: $(x_j \doteq c_{K,j}) \in \mathrm{tp}(E/C_K)$. Damit wäre aber $E = \{\overline{c_K}\}$, und somit $\overline{c_K}$ als einziges Element von E kein Randpunkt von D in E. □

Lemma 1.8.5 *Sei $D \subset I^R$ definierbar über $A \subset I$ und $\overline{c} \in (I \setminus A)^R$. Dann ist $\overline{c}$ kein Randpunkt von D.*

Beweis. Da D definierbar über A ist, gibt es $a_1, \dots, a_n \in A$, sodaß D definierbar über $\{a_1, \dots, a_n\}$ ist. Nach Bemerkung 1.3.7 ist D endliche Vereinigung von $(<, \{a_1, \dots, a_n\})$-ÄKn mit $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$. Da nach Voraussetzung $c_j \neq a_i$ für alle i, j, gibt es für alle j ein offenes Intervall X_j, so daß $c_j \in X_j$ aber $a_i \notin X_j$ für alle i.
Nun liegen alle $\overline{b} \in (X_1, \dots, X_R)$ in derselben $(<, \{a_1, \dots, a_n\})$-ÄK wie $\overline{c}$ und damit ist $\overline{b} \in D$ genau dann, wenn $\overline{c} \in D$. Also ist $\overline{c}$ kein Randpunkt von D. □

Damit kommen wir zum zentralen Satz über RPFn:

Satz 1.8.6 *Sei $(I, <^{\mathfrak{I}})$ vollständige dichte Ordnung und $D \subset I^R$. Äquivalent sind:*

1. *D ist definierbar.*

2. *Es existiert $K < \omega$, so daß es keine RPF von D der Länge $(K + 1)$ gibt.*

3. Es existiert eine endliche maximale RPF.

Beweis. *3.* $\Longrightarrow$ *1.* ist Aussage von Lemma 1.8.3.

1. $\Longrightarrow$ 2.: D ist also nach Bemerkung 1.3.7 Vereinigung von $(<, \{a_1, \ldots, a_K\})$-ÄKn mit $a_1, \ldots, a_K \in I$. Nach Lemma 1.8.4 und Lemma 1.8.5 gilt für alle RPFn $(\overline{c_\nu})_{\nu<n}$:
Für alle $\nu < n$ existiert $j \in \{1, \ldots, K\}$ und $l \in \{1, \ldots, R\}$ mit $c_{\nu,l} = a_j$ und $a_j \notin C_\nu$. Die RPFn können also maximal die Länge K haben.

2. $\Longrightarrow$ 3.: Die leere Folge ist RPF von D. Aus 2. folgt dann direkt, daß es eine endliche maximale RPF gibt. $\square$

Bemerkungen und Beispiele

Auf die Vollständigkeit der Ordnung kann nicht verzichtet werden:

- Betrachte $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ und $D = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \pi\}$. Da es keinen Randpunkt von D in $\mathbb{Q}$ gibt, ist nur die leere Folge RPF von D und damit maximal, aber D ist nicht definierbar.

Zu Nicht-definierbaren Teilmengen existieren unendliche RPFn:

- Betrachte $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ und $D = \bigcup_{n\in\omega}(n, n + \frac{1}{2})$. Die Folge $(n)_{n\in\omega}$ ist RPF von D.
- Betrachte $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ und $D = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_2 = r_1 + 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Hier ist die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1)_{n\in\omega}$ RPF von D.

Kapitel 2

Die Unabhängigkeitseigenschaft

In diesem Kapitel sei nun L eine beliebige Symbolmenge und T eine L-Theorie.

2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 2.1.1

1. Sei $m \in \omega$. Eine Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat die m- *Unabhängigkeitseigenschaft (m-UE)* in T, falls es $\mathfrak{M} \models T$, $(\overline{a_i})_{i \in m}$ und $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(m)}$ in M gibt mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$.

2. Eine Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat die *Unabhängigkeitseigenschaft (UE)* in T, falls es $\mathfrak{M} \models T$ und Familien $(\overline{a_i})_{i \in \omega}$ und $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(\omega)}$ in M gibt mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$.

3. Eine Theorie T hat die *Unabhängigkeitseigenschaft*, falls es eine Formel gibt, die die UE in T hat.

Falls die Zuordnung der freien Variablen zu den zwei Variablentupeln nicht eindeutig ist, wird die Trennung durch einen Strichpunkt (;) gekennzeichnet.

Satz 2.1.2 *$\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat genau dann die UE in T, wenn $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die m-UE in T für alle $m \in \omega$ hat.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: klar.
„$\Longleftarrow$“: Zeige hierzu, daß folgende Formelmenge erfüllbar ist: $\Phi(\overline{x}^{\omega}, \overline{y}^{\mathcal{P}(\omega)}) = \{\gamma(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \mid i \in \omega, j \in \mathcal{P}(\omega), i \in j\} \cup \{\neg\gamma(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \mid i \in \omega, j \in \mathcal{P}(\omega), i \notin j\}$. Betrachte nun eine endliche Teilmenge Φ_0 und das darin auftretende maximale $i =: i_{max}$. Da außerdem nur endlich viele j auftreten, existiert i_0, so daß alle $j \cap i_0$ paarweise verschieden sind. Erfülle nun für $m = \max\{i_{max}, i_0\}$ die Menge $\{\gamma(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \mid i \in m, j \in \mathcal{P}(m), i \in j\} \cup \{\neg\gamma(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \mid i \in m, j \in \mathcal{P}(m), i \notin j\}$ durch $(\overline{a_i})_{i \in m}$ und $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(m)}$ in einem Modell $\mathfrak{M}$ von T, was wegen der m-UE von $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ möglich ist. Diese endlichen Tupelfamilien erfüllen dann auch Φ_0. $\square$

Bemerkungen und Beispiele

- Die m-UE zu besitzen ist eine erststufige Eigenschaft von einer Formel $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ in T. Die dies bezeugenden Tupel existieren also in jedem $\mathfrak{M} \models T$, wohingegen die Existenz der die UE bezeugenden Tupel nur in genügend saturierten Modellen von T garantiert ist.

- Sowohl bei einer m-UE für ein $m \in \omega$, als auch bei der UE sind die bezeugenden Tupel paarweise verschieden, d.h. für $i_1 \neq i_2$ ist $\overline{a_{i_1}} \neq \overline{a_{i_2}}$ und für $j_1 \neq j_2$ ist $\overline{b_{j_1}} \neq \overline{b_{j_2}}$.
Beweis hierfür: Sei $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ die betrachtete Formel. Falls $\overline{a_{i_1}} = \overline{a_{i_2}}$ für $i_1 \neq i_2$ gilt, dann gibt es für ein j, das i_1 aber nicht i_2 enthält, kein $\overline{b_j}$, sodaß $\gamma(\overline{a_{i_1}},\overline{b_j})$ und $\neg\gamma(\overline{a_{i_2}},\overline{b_j})$ gilt.
Falls $\overline{b_{j_1}} = \overline{b_{j_2}}$ für $j_1 \neq j_2$ gilt, dann gibt es ein i mit $i \in j_1$ genau dann, wenn $i \notin j_2$. Damit gibt es kein $\overline{a_i}$, sodaß $\gamma(\overline{a_i},\overline{b_{j_1}})$ genau dann gilt, wenn $\neg\gamma(\overline{a_i},\overline{b_{j_2}})$ gilt.

- Jedes $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ hat die 0-UE in jedem T.

- Sei $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ eine Formel und $\big(\forall\overline{x}\forall\overline{y}\ \gamma(\overline{x},\overline{y})\big) \in T$. Dann hat $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ nicht die 1-UE in T.

- $x \doteq y$ hat die 1-UE in jeder Theorie, deren Modelle mindestens 2 Elemente besitzen, aber in jeder Theorie nicht die 2-UE.
Beweis hierfür: 1-UE: Sei $c_0 \neq c_1$ Elemente irgendeines Modells. Wähle $a_0 = c_0$, $b_\emptyset = c_1$ und $b_{\{0\}} = c_0$.
2-UE: Da nach obiger Ausführung $a_0 \neq a_1$ gewählt werden müßte, kann es kein $b_{\{0,1\}}$ geben.

- Sei $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ mit $|\overline{x}| = |\overline{y}|$ eine Formel, die in einer Theorie T eine Äquivalenzrelation darstellt. Dann hat $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ nicht die 2-UE in T.
Beweis hierfür: Seien $\overline{a_0},\overline{a_1}$ in $\mathfrak{M} \models T$ beliebig. Entweder gilt: $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a_0},\overline{a_1})$. Dann gibt es kein $\overline{b_{\{0\}}} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a_0},\overline{b_{\{0\}}})$ und $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\overline{a_1},\overline{b_{\{0\}}})$. Oder es gilt: $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\overline{a_0},\overline{a_1})$. Dann gibt es kein $\overline{b_{\{0,1\}}} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a_0},\overline{b_{\{0,1\}}})$ und $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a_1},\overline{b_{\{0,1\}}})$.

- Sei $f \in L$ ein Funktionssymbol und T eine L-Theorie. Dann hat die Formel $\varphi(\overline{x},\overline{y}) := \big(f\ \overline{x} \doteq \overline{y}\big)$ nicht die 2-UE in T.
Beweis hierfür: Angenommen $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ hätte die 2-UE. Dann gäbe es $\overline{a_0},\overline{a_1},\overline{b_\emptyset},\overline{b_{\{0\}}}$, $\overline{b_{\{1\}}},\overline{b_{\{0,1\}}}$ in $\mathfrak{M} \models T$ mit: $f^{\mathfrak{M}}(\overline{a_i}) = \overline{b_j}$ genau dann, wenn $i \in j$. Dann würde aber $f^{\mathfrak{M}}(\overline{a_0}) = \overline{b_{\{0\}}} \neq f^{\mathfrak{M}}(\overline{a_1})$ und gleichzeitig $f^{\mathfrak{M}}(\overline{a_0}) = \overline{b_{\{0,1\}}} = f^{\mathfrak{M}}(\overline{a_1})$ gelten, was nicht sein kann.

- Für $m > 0$ sei
$$\varphi_m(x,y_1,\ldots,y_m) := \Big(\bigvee_{1\leq k\leq m} x \doteq y_k\Big)$$
Dann hat $\varphi_m(x,\overline{y})$ die m-UE in jeder Theorie, deren Modelle mindestens $m+1$ Elemente besitzen, aber in jeder Theorie nicht die $(m+1)$-UE.

Beweis hierfür: m-UE: Wähle $a_0, \ldots, a_{m-1}$ in einem Modell mit mindestens $m+1$ Elementen paarweise verschieden. Für $j = \emptyset$ wähle $\overline{b_\emptyset} = (c, \ldots, c)$ mit $c \notin \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$. Damit gilt $\varphi_m(a_i, \overline{b_\emptyset})$ für kein a_i. Für alle anderen $j \subset \{0, \ldots, m-1\}$ wähle $\overline{b_j}$ so, daß die Koordinatenmenge von $\overline{b_j}$ aus den a_i mit $i \in j$ besteht. Dann gilt $\varphi_m(a_i, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$.
$(m+1)$-UE: Wie oben gezeigt, müssen die a_i paarweise verschieden sein. Damit kann es kein Tupel $\overline{b}$ geben, so daß $\varphi_m(a_i, \overline{b})$ für alle i gilt.

- Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$ die Struktur der natürlichen Zahlen über der Symbolmenge $\{+, \cdot, 0, 1\}$. Dann hat die Formel $\tau(x, y) := \big(\exists z \; x \cdot z \doteq y\big)$, die die Teilbarkeitsrelation beschreibt, die UE in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, obwohl die atomare Formel $x \cdot z \doteq y$ bei keiner Aufteilung der Variablen die UE in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ hat.
  Beweis hierfür: Sei $m \in \omega$ gegeben. Betrachte nun die ersten m Primzahlen $a_0, \ldots, a_{m-1}$ und für jedes $j \subset m$ das Produkt: $b_j := \prod_{i \in j} a_i$ (Das leere Produkt sei gleich 1). Dann gilt $\tau(a_i, b_j)$ genau dann, wenn $i \in j$. Da $m \in \omega$ beliebig war, hat $\tau(x, y)$ die m-UE in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ für alle $m \in \omega$.
  $\varphi_1(x, z; y) := \big(x \cdot z \doteq y\big)$ hat, wie oben gezeigt, als Funktionsformel nicht die 2-UE in jedem T.
  Betrachte $\varphi_2(x; z, y) := \big(x \cdot z \doteq y\big)$: Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $r_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gemäß: $a \longmapsto a \cdot n$ injektiv ist, hat die Formel $\varphi_2(x; z, y)$ nicht die 2-UE in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Hätte sie diese und wären a_0, a_1 sowie $c_\emptyset b_\emptyset, c_{\{0\}} b_{\{0\}}, c_{\{1\}} b_{\{1\}}, c_{\{0,1\}} b_{\{0,1\}}$ die bezeugenden Tupel, dann würde $a_0 \cdot c_{\{0,1\}} = b_{\{0,1\}}$ und $a_1 \cdot c_{\{0,1\}} = b_{\{0,1\}}$ gelten, was wegen der Verschiedenheit von a_0 und a_1 der Injektivität von $r_{c_{\{0,1\}}}$ widersprechen würde.
  Für $\varphi_3(z; x, y) := \big(x \cdot z \doteq y\big)$ gilt wegen der Kommutativität der Multiplikation aus Symmetriegründen dasselbe.
  Alle anderen drei möglichen Aufteilungen gehen aus den bisher betrachteten durch Vertauschung der Rolle der Variablentupel hervor. Wegen der später gezeigten Symmetrie der UE (Korollar 2.2.3) haben also auch diese nicht die UE in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

- E sei ein zweistelliges Relationssymbol und $\Phi_{Gph} = \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y (Exy \longleftrightarrow Eyx)\}$ die Satzmenge, deren Modelle die Graphen sind. Für jedes $m \in \omega$ und jedes $j \in \mathcal{P}(m)$ sei
  $$\Psi_{m,j} := \forall x_0 \ldots \forall x_{m-1} \Big(\big(\bigwedge_{i \neq k} x_i \not\doteq x_k \big) \longrightarrow \exists y \big(\bigwedge_{i \in j} Ex_i y \wedge \bigwedge_{i \notin j} \neg Ex_i y \big) \Big)$$
  Das Axiomensystem des Zufallsgraphen sei:
  $$\Phi_{ZGph} := \Phi_{Gph} \cup \{\Psi_{m,j} \mid m \in \omega, j \in \mathcal{P}(m)\}$$
  Φ_{ZGph} ist vollständig und erlaubt Quantorenelimination. (ohne Beweis)
  Exy hat für jedes $m \in \omega$ die m-UE in Φ_{ZGph}.
  Beweis hierfür: Falls gezeigt ist, daß die Modelle von Φ_{ZGph} nicht endlich sein können, folgt die m-UE aus $\{\Psi_{m,j} \mid j \in \mathcal{P}(m)\}$. Angenommen $\mathfrak{M} \models \Phi_{ZGph}$ wäre endlich, also $M = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$. Dann gäbe es für alle Teilmengen $j \subset m$ das zugehörige b_j. Diese b_j müßten paarweise verschieden sein, was wegen $|M| = m$ nicht sein kann.

2.2 Einfache Eigenschaften

Negationstreue

Lemma 2.2.1 *Hat $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die m-UE in T, dann hat auch $\neg\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die m-UE in T.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M} \models T$, $(\overline{a_i})_{i \in m}, (\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(m)} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$. Für $j' = m \setminus j$ gilt dann: $\mathfrak{M} \models \neg\gamma(\overline{a_i}, \overline{b_{j'}})$ genau dann, wenn $i \in j'$. □

Symmetrie

$\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ sei eine Formel in L. $\tilde{\gamma}(\overline{x}, \overline{y})$ sei $\gamma(\overline{y}, \overline{x})$; die Rolle der beiden Variablentupel soll also vertauscht werden.

Lemma 2.2.2 *Falls $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die 2^m-UE in T hat, dann hat $\tilde{\gamma}(\overline{x}, \overline{y})$ die m-UE in T.*

Beweis. Zur Übersichtlichkeit sei $n = 2^m$. Sei $\mathfrak{M} \models T$, $(\overline{a_i})_{i \in n} \in M$, $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(n)} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$. Sei $\big(p(i)\big)_{i \in n}$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}(m)$. Wähle nun für $l = 0, \ldots, m-1$ die Teilmenge $j(l) \in \mathcal{P}(n)$ folgendermaßen: $i \in j(l)$ genau dann, wenn $l \in p(i)$.

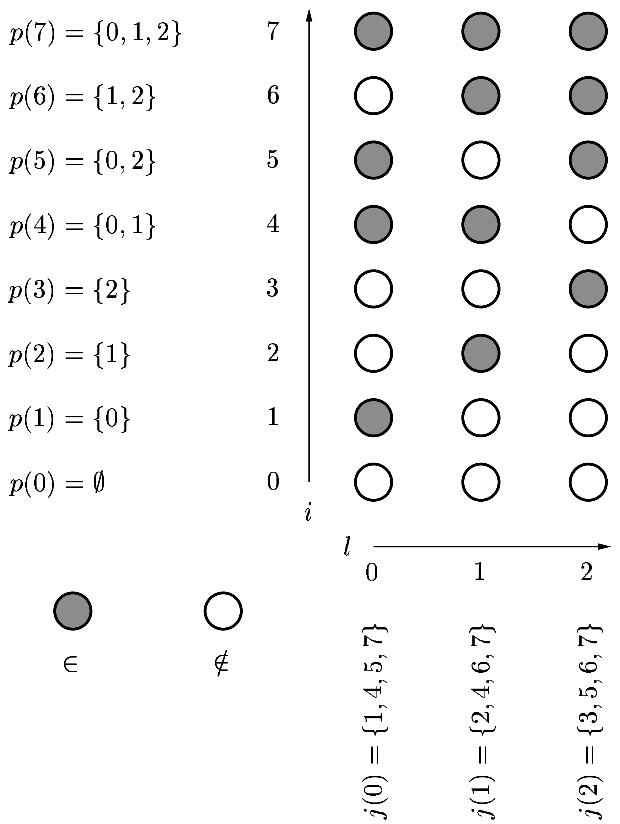

Abbildung 2.1: Von der 8-UE zur 3-UE

Sei nun $s \subset m$. Dann existiert $i \in n$ mit $s = p(i)$. Also gilt: $l \in p(i)$ genau dann, wenn $i \in j(l)$, und dies gilt genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_{j(l)}})$. Damit existiert für alle $s \subset m$ ein a_s mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_s}, \overline{b_{j(l)}})$ genau dann, wenn $l \in s$. $\tilde{\gamma}(\overline{x}, \overline{y})$ hat also die m-UE in T. □

Korollar 2.2.3 *Die UE ist symmetrisch, d.h. $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat die UE in T genau dann, wenn $\tilde{\gamma}(\overline{x}, \overline{y})$ die UE in T hat.*

Beweis. Klar mit Satz 2.1.2, vorangehendem Lemma und der Trivialität: $\tilde{\tilde{\gamma}}(\overline{x}, \overline{y}) = \gamma(\overline{x}, \overline{y})$. □

Abgeleitete Formeln

Sei $R, n \in \omega$ und $\gamma(x_1, \ldots, x_R, y_1, \ldots, y_n)$. Folgende durch Substitution aus γ abgeleitete Formeln sollen nun eine eigene Bezeichnung erhalten:

Für $i \neq j \in \{1, \ldots, R\}$ sei $\hat{\gamma}_{i,j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_R, y_1, \ldots, y_n) := \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_R, y_1, \ldots, y_n)$

Für $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\check{\gamma}_{i,j}(x_1, \ldots, x_R, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n) := \gamma(x_1, \ldots, x_R, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \ldots, y_n)$

Lemma 2.2.4 *Hat $\hat{\gamma}_{i,j}$ oder $\check{\gamma}_{i,j}$ die m-UE in T, dann hat auch γ die m-UE in T.*

Beweis. Dies folgt, indem man bei den die m-UE garantierenden Tupeln $(\overline{a_i})_{i \in m}$ von $\hat{\gamma}_{i,j}$ an der Koordinate j das Element der Koordinate i einfügt. Ebenso verfährt man bei $\check{\gamma}_{i,j}$ mit den Tupeln $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(m)}$. □

2.3 Hilfe von der Kombinatorik des Unendlichen

Lemma 2.3.1 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat die UE in T.*
2. *Für alle unendlichen Kardinalzahlen κ gibt es $\mathfrak{M} \models T$ mit Indiscerniblefolge $(\overline{a_i})_{i<\kappa}$ und einem Tupel $\overline{b}$ in M, sodaß $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_{i \cdot 2}}, \overline{b}) \wedge \neg\gamma(\overline{a_{i \cdot 2+1}}, \overline{b})$ für alle Ordinalzahlen $i < \kappa$.*
3. *Für eine unendliche Kardinalzahl κ gibt es Objekte wie in 2.*

Beweis. 1. $\Longrightarrow$ 2.: Wir erweitern L durch neue Konstanten $\overline{c_k}$ $(k \in \kappa)$, wobei $|\overline{c_k}| = |\overline{x}|$ für alle $k \in \kappa$. Sei Δ die Menge aller L-Formeln, für die es ein $n \in \omega$ gibt, sodaß die Anzahl der freien Variablen $n \cdot |\overline{x}|$ beträgt. Wir müssen zeigen, daß die folgende Formelmenge konsistent ist:

$$\Phi(\overline{y}) := T \cup \{\varphi(\overline{c_{k_1}}, \ldots, \overline{c_{k_n}}) \longleftrightarrow \varphi(\overline{c_{l_1}}, \ldots, \overline{c_{l_n}}) \,|\, k_1 < \cdots < k_n, l_1 < \cdots < l_n, \varphi \in \Delta\} \cup \{\overline{c_k} \neq \overline{c_l} \mid k \neq l < \kappa\} \cup \{\gamma(\overline{c_{k \cdot 2}}, \overline{y}) \wedge \neg\gamma(\overline{c_{k \cdot 2+1}}, \overline{y}) \mid k < \kappa\}$$

Sei dazu $\Phi_0(\overline{y}) \subset \Phi(\overline{y})$ endlich und Δ_0 die (damit auch endliche) Menge der in $\Phi_0(\overline{y})$ vorkommenden Formeln aus Δ. Diese Menge schreiben wir als disjunkte Vereinigung

$$\Delta_0 = \biguplus_{1 \leq n \leq n_{\max}} \Delta_n$$

mit Mengen Δ_n, die nur Formeln der Stelligkeit $n \cdot |\overline{x}|$ enthalten.

Da T die UE hat, gibt es $\mathfrak{M} \models T$ mit $(\overline{a_i})_{i \in \omega}$ und $(\overline{b_j})_{j \in \mathcal{P}(\omega)}$ in M mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$

genau dann, wenn $i \in j$.

Für $1 \leq n \leq n_{\max}$ teilt die Äquivalenzrelation

$$\{i_1 < \cdots < i_n\} \sim_n \{i'_1 < \cdots < i'_n\} :\Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models \bigwedge_{\varphi \in \Delta_n} \left(\varphi(\overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_n}}) \longleftrightarrow \varphi(\overline{a_{i'_1}}, \ldots, \overline{a_{i'_n}})\right)$$

die Menge aller n-elementigen Teilmengen einer Teilmenge (sic!) von ω in höchsens $2^{|\Delta_n|}$ Klassen ein. Nach dem Satz von Ramsey gibt es damit eine Kette unendlicher Teilmengen $\omega =: S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_{n_{\max}}$ mit $\{i_1, \ldots, i_n\} \sim_n \{i'_1, \ldots, i'_n\}$ für alle $i_1 < \cdots < i_n$, $i'_1 < \cdots < i'_n \in S_n$. Seien nun $\overline{c_{k_1}}, \ldots, \overline{c_{k_m}}$ mit $k_1 < \cdots < k_m$ die in $\Phi_0(\overline{y})$ vorkommenden Konstantensymbole, dann ist für $K := \{k_1, \ldots, k_m\}$ und $\overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_m}} \in S_{n_{\max}}$ mit $i_1 < \cdots < i_m$ die erweiterte Struktur $(\mathfrak{M}, \overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_m}})$ Modell von

$$\begin{aligned} T \quad &\cup \quad \{\overline{c_k} \neq \overline{c_l} \mid k \neq l \in K\} \quad \cup \\ \bigcup_{1 \leq n \leq n_{\max}} &\{\varphi(\overline{c_{k_1}}, \ldots, \overline{c_{k_n}}) \longleftrightarrow \varphi(\overline{c_{l_1}}, \ldots, \overline{c_{l_n}}) \mid k_1 < \cdots < k_n, l_1 < \cdots < l_n \in K, \varphi \in \Delta_n\} \end{aligned}$$

Wähle nun ein $j \subset \omega$, sodaß für alle $r < m$ gilt: $i_r \in j$ genau dann, wenn k_r eine gerade Ordinalzahl, d.h. von der Form $l \cdot 2$ für ein $l < \kappa$ ist. Für dieses j gilt dann:

$$(\mathfrak{M}, \overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_m}}) \models \Big(\bigwedge_{k \in K \text{ gerade}} \gamma(\overline{c_k}, \overline{b_j}) \wedge \bigwedge_{k \in K \text{ ungerade}} \neg\gamma(\overline{c_k}, \overline{b_j}) \Big)$$

Damit wird $\Phi_0(\overline{y})$ in $(\mathfrak{M}, \overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_m}})$ durch $\overline{b_j}$ erfüllt.

2. $\Longrightarrow$ 3. ist trivial.

3. $\Longrightarrow$ 1.: Man hat also nun ein Modell $\mathfrak{M}$, die Indiscerniblefolge $(\overline{a_i})_{i<\kappa}$ und ein Tupel $\overline{b}$ in M mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b})$ genau dann, wenn i eine gerade Ordinalzahl ist. Zeige nun: $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ hat die m-UE für alle $m \in \omega$.
Sei nun $m \in \omega$. Wähle nun die Tupel $(\overline{a_i})_{i \in m}$. Für $j \in \mathcal{P}(m)$ betrachte das Tupel $(\overline{a_{k_0}}, \ldots, \overline{a_{k_{m-1}}})$ mit $k_i := 2i$, falls $i \in j$ und $k_i := 2i+1$, falls $i \notin j$. Nun gilt $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_{k_i}}, \overline{b})$ genau dann, wenn $i \in j$ ist. Also ist

$$\Big(\exists \overline{y}\Big(\bigwedge_{i \in j} \gamma(\overline{x_i}, \overline{y}) \wedge \bigwedge_{i \notin j} \neg\gamma(\overline{x_i}, \overline{y})\Big)\Big) \in \mathrm{tp}(\overline{a_{k_0}}, \ldots, \overline{a_{k_{m-1}}})$$

Da dieses Tupel gleich geordnet ist wie $(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{m-1}})$ ist wegen der Indiscernibleeigenschaft die obige Formel auch in $\mathrm{tp}(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{m-1}})$. Also gibt es $\overline{b_j} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$. $\square$

2.4 Formeln in einer freien Variablen x

Satz 2.4.1 *Hat eine Theorie T die UE, so gibt es eine Formel $\gamma(x, \overline{y})$, die die UE in T hat.*

Beweis. Folgende Aussage wird durch Induktion über $|x|$ bewiesen: Falls eine Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ die UE in T hat, gibt es eine Formel $\gamma(x, \overline{y})$, die die UE in T hat.
Für den Induktionsanfang $|x| = 1$ ist nichts zu zeigen.

Induktionsschritt: $n-1 \longrightarrow n$: Habe $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ mit $|\overline{x}| = n$ die UE in T. Sei $\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1}$. Falls $\varphi(\overline{x_0}; \overline{x_1}, \overline{y})$ die UE in T hat, existiert wegen der Induktionsvoraussetzung die geforderte Formel.
Für $\kappa = |T|^+$ existiert nun wegen der Symmetrie der UE (Korollar 2.2.3) nach Lemma 2.3.1 ein Modell $\mathfrak{M} \models T$, eine Tupelfolge $(\overline{a_i})_{i<\kappa}$ in M und ein Tupel $\overline{b} = \overline{b_0}, \overline{b_1}$ in M mit $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{b}, \overline{a_{i\cdot 2}}) \wedge \neg\varphi(\overline{b}, \overline{a_{i\cdot 2+1}})$ für alle $i < \kappa$. Seien nun $(\alpha_i)_{i<\kappa}$ die Limesordinalzahlen, die kleiner als κ sind, in Reihenfolge. Beachte: $|\{\alpha_i \mid i < \kappa\}| = |T|^+$.
Falls $\varphi(\overline{x_0}; \overline{x_1}, \overline{y})$ nicht die UE in T hat, ist wegen Lemma 2.3.1 $(\overline{b_1}, \overline{a_j})_{\alpha_i<j<\alpha_{i+1}}$ für alle $i < \kappa$ keine Indiscerniblefolge. Also gibt es für alle $i < \kappa$ eine Formel $\psi_i(\overline{x_1}, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_{l_i}})$ und Ordinalzahlen $\alpha_i < j(i,0) < \cdots < j(i,l_i) < \alpha_{i+1}$ und $\alpha_i < k(i,0) < \cdots < k(i,l_i) < \alpha_{i+1}$, sodaß $\mathfrak{M} \models \psi_i(\overline{b_1}, \overline{a_{j(i,0)}}, \ldots, \overline{a_{j(i,l_i)}}) \wedge \neg\psi_i(\overline{b_1}, \overline{a_{k(i,0)}}, \ldots, \overline{a_{k(i,l_i)}})$. Da es aber in T nur $|T|$ viele verschiedene Formeln gibt, existiert eine unendliche Menge $S \subset \kappa$ und ein $\psi(\overline{x_1}, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_l})$, mit $\psi(\overline{x_1}, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_l}) = \psi_i(\overline{x_1}, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_{l_i}})$ für alle $i \in S$.
Wähle nun eine unendlich aufsteigende Folge $(s_i)_{i<\omega}$ in S und danach Tupel $\overline{c_i}$ für $i < \omega$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \overline{c_{2i}} &:= \quad \overline{a_{j(s_{2i},0)}}, \ldots, \overline{a_{j(s_{2i},l)}} \\ \overline{c_{2i+1}} &:= \quad \overline{a_{k(s_{2i+1},0)}}, \ldots, \overline{a_{k(s_{2i+1},l)}} \end{aligned}$$

Dann ist $(\overline{c_i})_{i<\omega}$ eine Indiscerniblefolge in $\mathfrak{M}$ und es gilt: $\mathfrak{M} \models \psi(\overline{b_1}, \overline{c_{2i}}) \wedge \neg\psi(\overline{b_1}, \overline{c_{2i+1}})$ für alle $i \in \omega$. Damit hat aber nach Lemma 2.3.1 $\psi(\overline{x_1}; \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_l})$ die UE in T und da $|\overline{x_1}| < n$ ist, existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Formel $\gamma(x, \overline{y})$, die die UE in T hat. $\square$

2.5 Boolesche Kombinationen

Lemma 2.5.1 *Sei $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = \gamma_1(\overline{x}, \overline{y}) \vee \gamma_2(\overline{x}, \overline{y})$. Hat γ die UE in T, so hat γ_1 oder γ_2 die UE in T.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.1 existiert $\mathfrak{M} \models T$, eine Indiscerniblefolge $(\overline{a_i})_{i<\omega}$ und ein Tupel $\overline{b}$ in M, so daß $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_{2i}}, \overline{b}) \wedge \neg\gamma(\overline{a_{2i+1}}, \overline{b})$ für alle $i \in \omega$. Damit gibt es aber für γ_1 oder für γ_2 eine unendliche Menge $S \subset \omega$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma_j(\overline{a_{2i}}, \overline{b})$ für alle $i \in S$, und da ohnehin $\mathfrak{M} \models \neg\gamma_j(\overline{a_{2i+1}}, \overline{b})$ für beide j gilt, hat man $\mathfrak{M} \models \gamma_j(\overline{a_{2i}}, \overline{b}) \wedge \neg\gamma_j(\overline{a_{2i+1}}, \overline{b})$ für dieses j und alle $i \in S$. Die Teilfolge $(\overline{a_i})_{i\in\omega}$, die aus allen $\overline{a_{2i}}$ und $\overline{a_{2i+1}}$ mit $i \in S$ besteht ist als Teilfolge einer Indiscerniblefolge auch eine solche, und damit folgt die UE für dieses γ_j aus Lemma 2.3.1.

Korollar 2.5.2 *In jeder Theorie ist die Menge der Formeln, die nicht die UE haben, unter Booleschen Kombinationen abgeschlossen.*

Beweis. Dies folgt durch Induktion über den Aufbau der Formeln mithilfe von Lemma 2.2.1 und Lemma 2.5.1. $\square$

Korollar 2.5.3 *Hat eine quantorenfreie Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die UE in T, so gibt es eine atomare Formel in denselben freien Variablen, die die UE in T hat.*

Beweis. Folgt direkt aus Korollar 2.5.2. $\square$

2.6 o-minimale Theorien

Definition 2.6.1 Es sei L eine Symbolmenge mit $<\in L$.
(i) Eine L-Struktur $\mathfrak{M}$ heißt *o-minimal*, falls $(M, <^{\mathfrak{M}})$ eine dichte Ordnung ist, und jede über M definierbare Teilmenge $D \subset M$ eine endliche Vereinigung von Intervallen und Punkten aus M ist.
(ii) Eine L-Theorie T heißt o-minimal, falls es eine o-minimale Struktur $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models T$ gibt.

Lemma 2.6.2 *Alle Modelle einer o-minimalen Theorie sind o-minimal.*

Dieses zentrale Lemma über o-minimalen Theorien, die hier nur als Beispielklasse auftreten, wird hier nicht bewiesen. Der interessierte Leser sei auf [3], S.593-605 verwiesen.

Satz 2.6.3 *o-minimale Theorien haben nicht die UE.*

Beweis. Sei T eine o-minimale Theorie. Angenommen, T hat die UE. Dann gibt es nach Satz 2.4.1 eine Formel $\gamma(x, \overline{y})$, die die UE in T hat. Es gibt also $\mathfrak{M} \models T$ o-minimal und $(a_i)_{i\in\omega}$, $(\overline{b_j})_{j\in\mathcal{P}(\omega)}$ in M mit $\mathfrak{M} \models \gamma(a_i, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$. Nun gibt es in jeder unendlichen total geordneten Menge eine unendliche streng monoton wachsende oder eine unendliche streng monoton fallende Folge. Wähle also streng monotone Teilfolge $(a_{i_k})_{k\in\omega}$ und betrachte für $j := \{i_{2k} \mid k \in \omega\} \subset \omega$ die Menge $\{a \in M \mid \gamma(a, \overline{b_j})\}$. Diese Menge kann nicht endliche Vereinigung konvexer Mengen sein, im Widerspruch zur o-Minimalität von $\mathfrak{M}$. $\square$

2.7 Stabile Theorien

Satz 2.7.1 *Falls T die UE hat, ist T nicht stabil.*

Beweis. Falls T die UE hat, dann gibt es eine Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$, die die UE in T hat. Dann existiert ein Modell $\mathfrak{M}$ und Familien $(\overline{a_i})_{i\in\omega}$ und $(\overline{b_j})_{j\in\mathcal{P}(\omega)}$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a_i}, \overline{b_j})$ genau dann, wenn $i \in j$. Sei A die Menge der Koordinaten von $(\overline{a_i})_{i\in\omega}$. Dann ist für jedes $j \in \mathcal{P}(\omega)$ die Formelmenge $\Phi_j = \{\gamma(\overline{a_i}, \overline{y}) \mid i \in j\} \cup \{\neg\gamma(\overline{a_i}, \overline{y}) \mid i \notin j\}$ ein partieller Typ über A. Seien nun $\overline{\Phi_j}$ und $\overline{\Phi_k}$ Vervollständigungen der partiellen Typen Φ_j und Φ_k über A. Dann ist für $j, k \in \mathcal{P}(\omega)$ mit $j \neq k$ auch $\overline{\Phi_j} \neq \overline{\Phi_k}$, da ein $i \in \omega$ existiert, mit $i \in j$ genau dann, wenn $i \notin k$ und damit $\gamma(\overline{a_i}, \overline{y}) \in \overline{\Phi_j}$ genau dann, wenn $\neg\gamma(\overline{a_i}, \overline{y}) \in \overline{\Phi_k}$. Damit gibt es überabzählbar viele Typen über der abzählbaren Parametermenge A. Also ist T nicht stabil. $\square$

Kapitel 3

Die Struktur auf Indiscernibles in Theorien ohne UE

L sei im Rest dieser Arbeit eine Symbolmenge mit $\{P, <\} \cap L = \emptyset$, wobei P ein einstelliges und $<$ ein zweistelliges Relationssymbol sei. T sei eine L-Theorie ohne endliches Modell. $\mathfrak{M}$ sei Modell von T, $I \subset M$ sei eine Folge von Ordnungsindiscernibles bezüglich einer dichten Ordnung $<^{\mathfrak{I}}$.
$L^+ = L \cup \{P, <\}$
Die erweiterte Struktur $\mathfrak{M}^+$ sei $(\mathfrak{M}, P^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}})$ mit $P^{\mathfrak{M}} = I$ und $<^{\mathfrak{M}} = <^{\mathfrak{I}}$ als Gleichung von Teilmengen von M^2 verstanden, d.h. $x <^{\mathfrak{M}} y$ genau dann, wenn $(x, y \in I$ und $x <^{\mathfrak{I}} y)$.
T^+ sei die L^+-Theorie von $\mathfrak{M}^+$.

Definition 3.0.2 Sei $\mathcal{S}(<)$ die Menge der $<$-Typen in Φ_{dO}. Der L-*Typ* einer Indiscerniblefolge I ist eine Abbildung t_I von $\mathcal{S}(<)$ in die Potenzmenge der L-Formlen gemäß:

$$\theta(\overline{x}) \quad \longmapsto \quad \Big\{\gamma(\overline{x}) \in L_{|\overline{x}|} \mid \forall \overline{x}\Big(\big(\bigwedge_i Px_i \wedge \theta(\overline{x})\big) \longrightarrow \gamma(\overline{x})\Big)\Big\}$$

3.1 Motivation

In diesem Kapitel interessiert uns, welche Teilmengen im I^R in der Struktur $\mathfrak{M}^+$ mit Parametern aus M definiert werden können.
Lemma 2.3.1 läßt vermuten, daß für Theorien mit UE keine Teilmenge ausgeschlossen werden kann.
Für stabile Theorien wird in [1] gezeigt, daß sich dort mit L-Formeln und Parametern nur die Teilmengen des I^R definieren lassen, die auch schon durch Formeln in $\doteq$ mit Parametern definierbar sind.
Da, im Gegensatz zu stabilen Theorien, bei Theorien ohne UE nicht generell ausgeschlossen werden kann, daß die Ordnung auf den Indiscernibles durch eine L-Formel definierbar ist, kann man auch i.A. nicht ausschließen, daß die mit Parametern $\{<\}$-definierbaren Teilmengen des I^R auch mit Parametern L-definierbar sind.
Wir werden sehen, daß, im Fall daß die Ordnung auf I eine *vollständige* dichte ist, sich in

Theorien ohne UE nicht mehr Teilmengen durch L-Formeln definieren lassen, als durch $L_<$-Formeln.

In Kapitel 4 und 5 schauen wir auf die erweiterten L^+-Strukturen.
Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell und I, J seien zwei Folgen von Indiscernibles in $\mathfrak{M}$ bezüglich dichten Ordnungen $<^{\mathfrak{I}}$ und $<^{\mathfrak{J}}$. Dann gilt natürlich im Allgemeinen noch lange nicht $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{I}}) \equiv (\mathfrak{M}, J, <^{\mathfrak{J}})$:

- Zuerst müssen die Indiscernibles denselben L-Typ haben. Falls dies nicht gilt, dann sind für ein $\theta(\overline{x})$ die L-Formelmengen $t_I(\theta)$ und $t_J(\theta)$ ungleich, d.h. es gibt ein $\gamma(\overline{x}) \in L$ mit $\gamma(\overline{x}) \in t_I(\theta)$ genau dann, wenn $\gamma(\overline{x}) \notin t_J(\theta)$. Dann gilt aber der L^+-Satz $\forall \overline{x}\Big(\big(\bigwedge_i Px_i \wedge \theta(\overline{x})\big) \longrightarrow \gamma(\overline{x})\Big)$ in einem erweiterten Modell, während sein Negat im anderen gilt.

- Daß diese Bedingung allein nicht genügt, zeigt folgendes Beispiel:
  L bestehe nur aus dem 2-stelligen Relationssymbol R und $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}, R^{\mathfrak{M}})$ seien die reellen Zahlen mit $R^{\mathfrak{M}} = <^{\mathbb{R}}$. I sei das Intervall $(0,1)$ und J sei das Intervall $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, wobei $<^{\mathfrak{I}}$ und $<^{\mathfrak{J}}$ jeweils durch die natürliche Ordnung der reellen bzw. rationalen Zahlen definiert seien. Der L^+-Satz
  $$\forall x \forall y\big((Px \wedge Py \wedge Rxy) \longrightarrow \exists z(\neg Pz \wedge Rxz \wedge Rzy)\big) \tag{3.1}$$
  gilt in $(\mathfrak{M}, J, <^{\mathfrak{J}})$, aber nicht in $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{I}})$.

Sei wiederum $\mathfrak{M}$ ein Modell mit Ordnungsindiscernibles $I \subset M$ und sei $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$. Dann muß nicht einmal $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \equiv (\mathfrak{M}', I, <^{\mathfrak{M}'})$ gelten:

- L bestehe wieder nur aus dem 2-stelligen Relationssymbol R, $\mathfrak{M} = (M, R^{\mathfrak{M}})$ seien die rationalen Zahlen mit $R^{\mathfrak{M}} = <^{\mathbb{Q}}$ und I sei das Intervall $(0,1)$ mit der naürlichen Ordnung als $<^{\mathfrak{I}}$. Nun ist $\mathfrak{M}' := (\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}) \succ (\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$, aber der L^+-Satz (3.1) gilt nur in $(\mathfrak{M}', I, <^{\mathfrak{M}'})$, während er in $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ nicht gilt.

Die Leistung der Kapitel 4 und 5 besteht darin, unter der zusätzlichen Bedingung der *Kleinheit* der erweiterten Strukturen (s. Definition 4.0.4), beide Schlüsse zuzulassen.

3.2 P-Beschränkungen

P-beschränkte Quantoren

Als abkürzende Schreibweise für spezielle L^+-Formeln führen wir ein:
$\exists x{\in}P\ \varphi(x, \overline{y}) := \exists x\big(Px \wedge \varphi(x, \overline{y})\big)$
$\forall x{\in}P\ \varphi(x, \overline{y}) := \forall x\big(Px \longrightarrow \varphi(x, \overline{y})\big)$

Satz 3.2.1 *Sei $\mathfrak{M}^+$ elementar äquivalent zu einer Struktur $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}})$ mit vollständig geordnetem $(J, <^{\mathfrak{J}})$. Dann hat jede in M definierbare Teilmenge von I, die nicht leer und nach oben beschränkt ist, ein Supremum.*

Beweis. Sei für ein $\varphi(x,\overline{y}) \in L$ und $\overline{m} \in M$ die Menge $A = \{a \in I \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a,\overline{m})\}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Nach Voraussetzung gibt es $\mathfrak{N}^+ = (\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \equiv (\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$, wobei $(J, <^{\mathfrak{J}})$ Dedekind-vollständig ist. Deshalb existiert in $\mathfrak{N}^+$ für jedes $\overline{n}$, das durch $\{a \in J \mid \mathfrak{N} \models \varphi(a,\overline{n})\}$ eine nicht leere und beschränkte Teilmenge von J definiert das Supremum. Dies ist erststufig ausdrückbar, etwa durch:

$$\begin{aligned}\forall\overline{y}\Bigg(\Big(\exists x_2{\in}P\ \varphi(x_2,\overline{y}) \wedge \exists x_1{\in}P\ \forall x_2{\in}P\ \big(\varphi(x_2,\overline{y}) \longrightarrow x_2 \leq x_1\big)\Big) \longrightarrow \\ \Big(\exists x_1{\in}P\ \Big(\big(\forall x_2{\in}P\ \varphi(x_2,\overline{y}) \longrightarrow x_2 \leq x_1\big) \wedge \\ \Big(\forall z{\in}P\ \forall x_2{\in}P\ \big(\varphi(x_2,\overline{y}) \longrightarrow x_2 \leq z\big) \longrightarrow x_1 \leq z\Big)\Big)\Big)\Bigg)\end{aligned}$$

Wegen der elementaren Äquivalenz der L^+-Strukturen gilt dies dann auch in $\mathfrak{M}^+$. □

P-beschränkte Formeln

Definition 3.2.2 1. Eine L^+-Formel heißt *einfach*, falls sie eine Boolesche Kombination von L-Formeln und $<$-Formeln ist.

2. Eine L^+-Formel heißt *P-beschränkt*, falls sie von der Form $Q_1\alpha_1{\in}P \ldots Q_n\alpha_n{\in}P$ $\varphi(x_1,\ldots,x_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ mit $Q_i \in \{\forall,\exists\}$ und einfachem $\varphi(\overline{x},\overline{\alpha})$ ist.

Lemma 3.2.3 *Boolesche Kombinationen von einfachen Formeln sind einfach und Boolesche Kombinationen von P-beschränkten Formeln sind logisch äquivalent zu einer P-beschränkten Formel.*

Beweis. Die Aussage über einfache Formeln folgt direkt aus der Definition von einfach. Zur Aussage über P-beschränkte Formeln: Sei $\psi(\overline{x})$ P-beschränkt, d.h. $\psi(\overline{x}) = Q_1\alpha_1{\in}P \ldots Q_n\alpha_n{\in}P\ \varphi(\overline{x},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ mit $Q_i \in \{\forall,\exists\}$ und einfachem φ. Dann ist $\neg\psi(\overline{x})$ äquivalent zu $\hat{Q}_1\alpha_1{\in}P \ldots \hat{Q}_n\alpha_n{\in}P\ \neg\varphi(\overline{x},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, wobei $\hat{Q}_i = \exists$, falls $Q_i = \forall$ und $\hat{Q}_i = \forall$, falls $Q_i = \exists$. Nach 1. ist $\neg\varphi$ einfach und $\neg\psi$ damit äquivalent zu P-beschränkter Formel.
Sei $\psi_1(\overline{x})$ und $\psi_2(\overline{y})$ P-beschränkt (wobei nicht gesagt sein soll, daß die Schnittmenge der freien Variablen beider Formeln leer sein muß), d.h.: $\psi_1(\overline{x}) = \overline{Q}_1\overline{\alpha}{\in}P\ \varphi_1(\overline{x},\overline{\alpha})$ und $\psi_2(\overline{y}) = \overline{Q}_2\overline{\beta}{\in}P\ \varphi_2(\overline{y},\overline{\beta})$ mit Quantorenblöcken $\overline{Q}_1\overline{\alpha}$ und $\overline{Q}_2\overline{\beta}$, wobei o.E. weder $\overline{\alpha}$ in ψ_2 noch $\overline{\beta}$ in ψ_1 vorkommt (nach eventueller Umbenennung der gebundenen Variablen). Dann ist $\psi_1(\overline{x}) \vee \psi_2(\overline{y})$ äquivalent zu $\overline{Q}_1\overline{\alpha}{\in}P\ \overline{Q}_2\overline{\beta}{\in}P\ \big(\varphi_1(\overline{x},\overline{\alpha}) \vee \varphi_2(\overline{y},\overline{\beta})\big)$, also zu einer P-beschränkter Formel. □

Satz 3.2.4 *Sei T eine L-Theorie und $\mathfrak{M},\mathfrak{N} \models T$ mit Indiscerniblefolgen $I \subset M$ und $J \subset N$ vom selben L-Typ. Sei nun noch φ ein P-beschränkter Satz. Dann gilt:*

$$(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \models \varphi \quad \textit{genau dann wenn} \quad (\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \models \varphi$$

Beweis. Zeige: Für jede L-Formel $\gamma(\overline{x})$ gibt es eine $<$-Formel $\sigma(\overline{x})$, die auf beiden Indiscernibles äquivalent zu $\gamma(\overline{x})$ ist:

Betrachte dazu mit dem L-Typ beider Indiscerniblefolgen t die Menge $\Theta := \{\theta(\overline{x}) \mid \gamma(\overline{x}) \in t(\theta(\overline{x}))\}$ und, da der Typenraum in Φ_{dO} endlich ist, die Formel $\sigma(\overline{x}) := \bigvee_{\theta \in \Theta} \theta$. Da $\forall \overline{x} \in P\ \big(\theta(\overline{x}) \longrightarrow \gamma(\overline{x})\big)$ nach Definition von Θ nur genau für alle $\theta \in \Theta$ gilt, gilt wegen der Indiscernibleeingenschaft $\forall \overline{x} \in P\ \big(\theta(\overline{x}) \longrightarrow \neg\gamma(\overline{x})\big)$ für alle $\theta \notin \Theta$. Damit hat man die Äquivalenz von $\gamma(\overline{x})$ und $\sigma(\overline{x})$ auf den Indiscerniblefolgen.
Damit folgt die Behauptung aus $(I, <^{\mathfrak{I}}) \equiv (J, <^{\mathfrak{J}})$. □

Bemerke: Der L^+-Satz (3.1) im Motivationsbeispiel von Seite 36 ist also nicht nur zufällig nicht P-beschränkt.

3.3 Längenbeschränkung von Randpunktfolgen in Theorien ohne UE

Satz 3.3.1 *Sei $R \in \omega$ und $|\overline{x}| = R$. Es gibt eine Funktion $K_R : \omega \longrightarrow \omega$ mit folgender Eigenschaft: Gibt es für ein $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) \in L$ ein $\overline{b} \in M$ und eine RPF $(\overline{a_\nu})_{\nu < K_R(m)}$ von $D_{\overline{b}} := \{\overline{a} \in I^R \mid \mathfrak{M} \models \gamma(\overline{a}, \overline{b})\}$, so hat $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ die m-UE in T.*

Beweis. Induktion über R:
Induktionsanfang: R=1: Behauptung: $K_1 : m \longmapsto m$ leistet das Gewünschte.
Beweis hierfür: Angenommen es existiert L-Formel $\gamma(x, \overline{y})$, $\overline{b} \in M$ und RPF $(a_\nu)_{\nu<m}$ von $D_{\overline{b}} = \{a \in I \mid \gamma(a, \overline{b})\}$. Da die a_ν paarweise verschieden sind, gibt es Intervallumgebungen U_ν um jedes a_ν, die paarweise disjunkt sind. Damit ist jede Folge $(c_\nu)_{\nu<m}$ mit $c_\nu \in U_\nu$ gleich geordnet wie $(a_\nu)_{\nu<m}$. Da $(a_\nu)_{\nu<m}$ RPF von $D_{\overline{b}}$, gibt es in jedem U_ν Elemente aus $D_{\overline{b}}$ und aus $I \setminus D_{\overline{b}}$. Damit kann man für jedes $X \subset m$ eine Folge $(c_\nu^X)_{\nu<m}$ mit $c_\nu^X \in U_\nu$ wählen mit $c_\nu^X \in D_{\overline{b}}$ genau dann, wenn $\nu \in X$. Es gilt nun also:

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_{\nu \in X} \gamma(c_\nu^X, \overline{b}) \wedge \bigwedge_{\nu \notin X} \neg\gamma(c_\nu^X, \overline{b}) \tag{3.2}$$

Damit ist

$$\Big(\exists \overline{y}\Big(\bigwedge_{\nu \in X} \gamma(x_\nu, \overline{y}) \wedge \bigwedge_{\nu \notin X} \neg\gamma(x_\nu, \overline{y})\Big)\Big) \in \mathrm{tp}(c_0^X, \ldots, c_{m-1}^X) \tag{3.3}$$

Weil I Indiscernible und $(c_\nu^X)_{\nu<m}$ gleich geordnet wie $(a_\nu)_{\nu<m}$ ist, steht dies auch in $\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_{m-1})$. Damit existiert $\overline{b_X}$ mit $\mathfrak{M} \models \gamma(a_\nu, \overline{b_X})$ genau dann, wenn $\nu \in X$. Da $X \subset m$ beliebig war, hat γ die m-UE in T.

Induktionsschritt: $R - 1 \longrightarrow R$: Wähle $K_R(m) := r_R\big(\max\{3, K_{R-1}(m), m+1\}\big)$ mit r_R aus Lemma 1.7.8. Zur Übersichtlichkeit sei $K := \max\{3, K_{R-1}(m), m+1\}$. Angenommen es existiert L-Formel $\gamma(x_1, \ldots, x_R, \overline{y})$, $\overline{b} \in M$ und RPF $(\overline{a_\mu})_{\mu < K_R(m)}$ von $D_{\overline{b}} = \{\overline{a} \in I^R \mid \gamma(\overline{a}, \overline{b})\}$. Wähle nun Teilfolge $(\overline{a_\nu})_{\nu<K}$ aus, die 2-indiscernible ist und wegen $K \geq 3$ damit die Folgerung aus Lemma 1.7.9 erfüllt.

- 1.Fall: $a_{\nu_1,i} = a_{\nu_2,j}$ für ein $i \neq j \in \{1, \ldots, R\}$ und $\nu_1, \nu_2 < K$. Mit Lemma 1.7.9 folgt nun $a_{\nu,i} = a_{\nu,j}$ für alle $\nu < K$. Dann ist nach Lemma 1.7.5 $(\pi_j(\overline{a_\nu}))_{\nu<K}$ RPF von $\Pi_j(D_{\overline{b}})$. Da aber $\Pi_j(D_{\overline{b}}) = \{(a_1, \ldots, a_{R-1}) \mid \hat{\gamma}_{i,j}(a_1, \ldots, a_{R-1}, \overline{b})\}$ und

$K \geq K_{R-1}(m)$ ist, hat nach Induktionsvoraussetzung $\hat{\gamma}_{i,j}$ die m-UE und damit nach Lemma 2.2.4 auch γ.

- 2.Fall: $a_{\nu_1,i} \neq a_{\nu_2,j}$ für alle $i \neq j \in \{1,\dots,R\}$ und $\nu_1,\nu_2 < K$. Seien nun die RPF o.B.d.A nur auf den Koordinaten $i = n+1,\dots,R$ konstant (gehe ansonsten zu einer Koordinatenpermutation über), d.h. $a_{\nu,i} = d_i$ für alle $\nu < K$ und $i = n+1,\dots,R$. Nach Lemma 1.7.6 ist dann $\left(\pi_{>n}(\overline{a_\nu})\right)_{0<\nu<K}$ RPF von $p_{\leq n}(D_{\overline{b}})$. Gehe nun zur Teilfolge $(\overline{a_\nu})_{0<\nu<m+1}$ über und führe eine Indexverschiebung $\nu \longrightarrow \nu - 1$ durch. Nach dieser Vorbereitung hat man also RPF $(\overline{a_\nu})_{\nu<m}$ von $D_{\overline{b}}$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

  1. $\pi_{>n}(\overline{a_\nu})_{\nu<m}$ ist RPF von $p_{\leq n}(D_{\overline{b}})$.
  2. Die Elemente von $\{a_{\nu,i} \mid \nu < m, i = 1,\dots,n\} \cup \{d_i \mid i = n+1,\dots,R\}$ sind paarweise verschieden.

  Wegen 2. kann man nun paarweise disjunkte Intervallumgebungen $U_{\nu,i}$ für $\nu < m$ und $i = 1,\dots,n$ um $a_{\nu,i}$ wählen, die $d_{n+1},\dots,d_R$ nicht enthalten. Betrachte nun die Rechteckumgebungen $O_\nu = (U_{\nu,1},\dots,U_{\nu,n},\{d_{n+1}\},\dots,\{d_R\})$ um $\overline{a_\nu}$ für $\nu < m$. Nach Konstruktion der Umgebungen hat jedes $(m \cdot R)$-Tupel $(\overline{c_0},\dots,\overline{c_{m-1}})$ mit $\overline{c_\nu} \in O_\nu$ für alle $\nu < m$ denselben $<$-Typ wie $(\overline{a_0},\dots,\overline{a_{m-1}})$. Wegen 1. existiert für alle $X \subset m$ $\overline{c_0}^X \in O_0,\dots,\overline{c_{m-1}}^X \in O_{m-1}$ mit $\overline{c_\nu}^X \in D_{\overline{b}}$ genau dann, wenn $\nu \in X$. Wie beim Induktionsanfang $R = 1$ erhält man nun die Beziehungen (3.2) und (3.3) für Tupel $\overline{c_\nu}$ bzw. Variablentupel $\overline{x_\nu}$ und damit den Nachweis für die m-UE von γ in T. □

3.4 Definitionsersetzungen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Theorien T^+ von Modellen $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ mit *vollständiger* dichter Ordnung $(I, <^{\mathfrak{I}})$.

Definition 3.4.1 Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell und $A \subset M$ eine Teilmenge. Seien desweiteren $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ und $\theta(\overline{w},\overline{y})$ zwei Formeln. $\theta(\overline{w},\overline{y})$ heißt *Definitionsersetzung von* $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ *über* A *in* $\mathfrak{M}$, falls es für alle $\overline{m} \in M$ ein Tupel $\overline{b} \in A$ gibt mit

$$\{\overline{a} \in A \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m},\overline{a})\} = \{\overline{a} \in A \mid \mathfrak{M} \models \theta(\overline{b},\overline{a})\}$$

Lemma 3.4.2 *Sei $\theta(\overline{w},\overline{y})$ Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$, dann ist $\theta(\overline{w},\overline{y})$ Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ über J in $\mathfrak{N}^+$ für jedes $\mathfrak{N}^+ \equiv \mathfrak{M}^+$.*

Beweis. Es gilt: $\left(\forall \overline{x}\ \exists \overline{w}{\in}P\ \forall \overline{y}{\in}P\ \left(\varphi(\overline{x},\overline{y}) \longleftrightarrow \theta(\overline{w},\overline{y})\right)\right) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}^+)$. □

Lemma 3.4.3 *Sei $\theta(\overline{w},\overline{y})$ eine $<$-Formel und Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$. Dann gibt es ein $K < \omega$, sodaß es für alle $\overline{m} \in M$ keine RPF von $D_{\overline{m}} := \{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m},\overline{a})\}$ der Länge $K+1$ gibt.*

Beweis. Für alle $\overline{m} \in M$ ist nach Voraussetzung $D_{\overline{m}}$ $<$-definierbar über Mengen der Mächtigkeit $\leq |\overline{w}|$. Nach Lemma 1.8.4 und Lemma 1.8.5 können die RPFn von $D_{\overline{m}}$ maximal Länge $|\overline{w}|$ haben.

L-Formeln

Satz 3.4.4 *Es gibt eine Menge $\{\theta_m(\overline{w_m}, \overline{y}) \mid m \in \omega\}$ von $<$-Formeln mit folgender Eigenschaft: Hat eine L-Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ nicht die m-UE in T, so ist $\theta_m(\overline{w_m}, \overline{y})$ Definitionsersetzung von $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$.*

Beweis. Sei $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \models T^+$ mit vollständiger dichter Ordnung $(I, <^{\mathfrak{I}})$. Für alle $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) \in L$, die nicht die m-UE in T haben, hat nach Lemma 2.2.2 $\tilde{\gamma}(\overline{y}, \overline{x})$ nicht die 2^m-UE. Damit gibt es nach Satz 3.3.1 für alle $\overline{b} \in M$ ein $K_{\overline{b}} < K_R(2^m)$ und eine maximale RPF $(\overline{a_\nu})_{\nu < K_{\overline{b}}}$ von $D_{\gamma, \overline{b}} := \{\overline{a} \in I^R \mid \gamma(\overline{b}, \overline{a})\}$, d.h. $D_{\gamma, \overline{b}}$ ist nach Lemma 1.8.3 für alle $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$, die nicht die m-UE haben und alle $\overline{b} \in N$ mit weniger als $\big(K_R(2^m) \cdot R\big)$ Elementen aus I durch eine $<$-Formel definierbar. Nach Lemma von der uniformen Definierbarkeit (1.3.8) existiert also die geforderte Formel $\theta_m(\overline{w_m}, \overline{y})$. □

Einfache und P-beschränkte Formeln

Korollar 3.4.5 *Sei T eine L-Theorie ohne UE.*

1. *Für jede einfache Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt es eine $<$-Formel $\theta(\overline{w}, \overline{y})$, die Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$ ist.*
2. *Für jede P-beschränkte Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt es eine $<$-Formel $\theta(\overline{w}, \overline{y})$, die Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$ ist.*

Beweis. 1. Da $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ einfach ist, ist $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ Boolesche Kombination von L-Formeln und $<$-Formeln. Da T nicht die UE hat, haben alle L-Formeln γ nicht die UE in T und es gibt daher für alle L-Formeln $<$-Formeln, die eine Definitionsersetzung über I in $\mathfrak{M}^+$ sind. Wähle nun als gesuchtes $\theta(\overline{w}, \overline{y})$ die Boolesche Kombination von $<$-Formeln, die entsteht, wenn in $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ jede L-Formel durch ihre Definitionsersetzung ersetzt wird.
2. Induktion über die Anzahl der beschränkten Quantoren: Induktionsanfang mit 1.
Induktionsschritt: Sei $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) = Qz{\in}P\ \varphi'(\overline{x}, \overline{y}, z)$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ und $\theta_{\varphi'}(\overline{w}, \overline{y}, z)$ eine $<$-Formel mit: Für alle $\overline{m} \in M$ existiert $\overline{b} \in I$ mit

$$\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{y}{\in}P\ \forall z{\in}P\ \ \big(\varphi'(\overline{m}, \overline{y}, z) \longleftrightarrow \theta_{\varphi'}(\overline{b}, \overline{y}, z)\big)$$

Wegen der Quantorenelimination in Φ_{dO} gibt es eine $<$-Formel $\theta_\varphi(\overline{x}, \overline{y})$, die auf I äquivalent zu $Qz{\in}P\ \theta_{\varphi'}(\overline{x}, \overline{y}, z)$ ist. Sei nun $\overline{m} \in M$. Wähle $\overline{b} \in I$ wie in Induktionsvoraussetzung. Für alle $\overline{a} \in I$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{M}^+ \models Qz{\in}P\ \varphi'(\overline{m}, \overline{a}, z)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}^+ \models Qz{\in}P\ \theta_{\varphi'}(\overline{b}, \overline{a}, z)$. Also gilt: $\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{y}{\in}P\ \ \big(\varphi(\overline{m}, \overline{y}) \longleftrightarrow \theta_\varphi(\overline{b}, \overline{y})\big)$. □

Korollar 3.4.6 *Für jede P-beschränkte Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt es $K_\varphi < \omega$, so daß es für alle $\overline{m} \in M$ eine Menge $G(\overline{m}) \subset I$ mit $|G(\overline{m})| < K_\varphi$ gibt, mit folgender Eigenschaft: Für alle $\overline{a} \in I$ und $\overline{a}' \in I$ mit selbem $<$-Typ über $G(\overline{m})$ ist $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m}, \overline{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m}, \overline{a}')$.*

Beweis. Nach Korollar 3.4.5 existiert $\theta(\overline{w}, \overline{y})$, so daß für alle $\overline{m} \in M$ ein $\overline{b} \in I$ existiert mit $\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{y}{\in}\ P\ \big(\varphi(\overline{m}, \overline{y}) \longleftrightarrow \theta(\overline{b}, \overline{y})\big)$. Für ein $\overline{m} \in M$ leistet damit die Menge der Koordinaten des zugehörigen $\overline{b}$ das Gewünschte. Wähle also $K_\varphi = |\overline{w}|$. □

Ausblick

Satz 4.5.1 liefert uns für spezielle erweiterte Strukturen folgendes Korollar (welches zur weiteren Beweisführung bis dahin natürlich nicht verwendet wird):

Korollar 3.4.7 *Sei $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ klein (siehe Definition 4.0.4). Für jede L^+-Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt es eine $<$-Formel $\theta(\overline{w}, \overline{y})$, die Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ über I in $\mathfrak{M}^+$ ist.*

Beweis. Nach der Definition von klein gibt es eine elementar äquivalente kleine Struktur $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \equiv (\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ mit vollständig geordnetem $(J, <^{\mathfrak{J}})$. Nach Satz 4.5.1 ist in $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}})$ jede L^+-Formel äquivalent zu einer P-beschränkten Formel. Korollar 3.4.5 liefert damit die Behauptung für $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}})$, die wegen Lemma 3.4.2 auch in $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$ gilt. □

Definierbarkeit von Typen über vollständig geordneten Indiscernibles

Korollar 3.4.8 *Sei $\mathfrak{M}$ Modell einer L-Theorie T und $I \subset M$ sei eine Folge von Ordnungsindiscernibles bezüglich einer vollständigen dichten Ordnung $<^{\mathfrak{J}}$. Dann ist für jede L-Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$, die nicht die UE in T hat, jeder γ-Typ über I definierbar durch eine $<$-Formel über I.*

Beweis. Sei $p(\overline{x})$ ein γ-Typ über I, d.h. es existiert disjunkte Zerlegung $I^R = I_0 \cup I_1$ mit $p(\overline{x}) = \{\gamma(\overline{x}, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I_0\} \cup \{\neg\gamma(\overline{x}, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I_1\}$. Nun gibt es elementare Erweiterung $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$, die $p(\overline{x})$ durch $\overline{b}$ realisiert. I ist auch Indiscernible in $\mathfrak{M}'$ und auch weiterhin vollständige dichte Ordnung bzgl. $<^{\mathfrak{J}}$. Da $\mathfrak{M}' \models T$ und $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ nicht die UE in T hat, gibt es nach Satz 3.4.4 ein $\theta(\overline{w}, \overline{y})$ und ein $\overline{c} \in I$ mit $(\mathfrak{M}', I, <^{\mathfrak{M}'}) \models \forall \overline{y} {\in} P \ \big(\gamma(\overline{b}, \overline{y}) \longleftrightarrow \theta(\overline{c}, \overline{y})\big)$. Damit ist also $I_0 = \big\{\overline{a} \in I \mid (I, <^{\mathfrak{J}}) \models \theta(\overline{c}, \overline{a})\big\}$, und somit $p(\overline{x})$ durch eine $<$-Formel über I definierbar. □

3.5 Verzicht auf die Vollständigkeit

Korollar 3.5.1 *Sei T eine beliebige Theorie und $\mathfrak{M} \models T$ mit einer Indiscerniblefolge $I \subset M$, bezüglich einer dichten Ordnung $(I, <^{\mathfrak{J}})$. Sei $J \supset I$ die Vervollständigung von I. Falls eine L-Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ nicht die UE in T hat, dann gibt es eine $<$-Formel $\theta(\overline{w}, \overline{y})$, sodaß es für alle $\overline{m} \in M$ ein $\overline{b} \in J$ gibt, mit*

$$\big\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M} \models \gamma(\overline{m}, \overline{a})\big\} = \big\{\overline{a} \in I \mid (J, <^{\mathfrak{J}}) \models \theta(\overline{b}, \overline{a})\big\}$$

Beweis. Zeige zuerst: Es gibt $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, sodaß $(J, <^{\mathfrak{J}})$ Indiscerniblefolge in N ist:
Sei dazu $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_M)$ das L-elementare Diagramm von $\mathfrak{M}$ und c_j mit $j \in J$ neue Konstanten. Zeige nun mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß folgende Satzmenge erfüllbar ist:

$$\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_M) \cup \{c_j \doteq j \mid j \in I\} \cup \bigcup_{n \in \omega, \varphi \in L^n} \{\varphi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \longleftrightarrow \varphi(c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}) \mid j_1 < \cdots < j_n, k_1 < \cdots < k_n \in J\}$$

Betrachte nun eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subset \Phi$ und die endliche Mengen J_0, sodaß in Φ_0 nur c_j mit $j \in J_0$ auftreten. Nun gilt

$$\Phi_0 \subset \Big(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_M) \cup \{c_j \doteq j \mid j \in I \cap J_0\} \cup \\ \bigcup_{n\in\omega,\varphi\in L^n} \{\varphi(c_{j_1},\dots,c_{j_n}) \longleftrightarrow \varphi(c_{k_1},\dots,c_{k_n}) \mid j_1 < \dots < j_n, k_1 < \dots < k_n \in J_0\}\Big)$$

Konstruiere nun ordnungserhaltende partielle Funktion $f : J \longrightarrow J$ mit $\mathrm{def}(f) = J_0$ folgendermaßen: Sei $J_0 = \{j_0,\dots,j_l\}$ mit $j_0 < \dots < j_l$. Für alle $j_\nu \in (J_0 \cap I)$ sei $f(j_\nu) = j_\nu$ und für $j_\nu \in (J_0 \setminus I)$ wähle $f(j_\nu) \in I$ im Intervall $(j_\nu, j_{\nu+1})$ (bzw. im Intervall (j_l,∞) für $\nu = l$), was wegen der Dichtheit von I in J möglich ist.
Da I eine Folge von Indiscernibles in $\mathfrak{M}$ ist, erfüllt $(\mathfrak{M}, f(j_0),\dots,f(j_l))$ die obige Formelmenge und damit auch Φ_0.

Da $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ nicht die UE in T hat, gibt es nach Satz 3.4.4 eine $<$-Formel $\theta(\overline{w},y)$, die Definitionsersetzung von γ über J in $\mathfrak{N}^+$ ist. Für alle $\overline{m} \in N$, also erst recht für alle $\overline{m} \in M$, gibt es also $\overline{b} \in J$ mit $\{\overline{a} \in J \mid \mathfrak{N} \models \gamma(\overline{m},\overline{a})\} = \{\overline{a} \in J \mid (J,<^{\mathfrak{J}}) \models \theta(\overline{b},\overline{a})\}$. Da $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ und $J \cap M = I$ gilt, ist $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M} \models \gamma(\overline{m},\overline{a})\} = \{\overline{a} \in J \mid \mathfrak{N} \models \gamma(\overline{m},\overline{a})\} \cap I = \{\overline{a} \in I \mid (J,<^{\mathfrak{J}}) \models \theta(\overline{b},\overline{a})\}$. □

Beachte: Für das konstruierte $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}})$ gilt i.A. nicht $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \equiv (\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$, geschweige denn $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \succ (\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$.

3.6 Gegenbeispiel einer Theorie mit UE

Lemma 3.6.1 *Sei Φ_{ZGph} das Axiomensystem des Zufallsgraphen von Seite 29 und Ω eine unendliche Indexmenge. Dann ist $p_{Cl}(\overline{x}^\Omega) := \langle Ex_ix_j \mid i,j \in \Omega, i \neq j\rangle$ ein Ω-Typ von Φ_{ZGph}. Ein erfüllendes Tupel von $p_{Cl}(\overline{x}^\Omega)$ heißt Ω-Clique.*

Beweis. Sei $p_0 \subset p_{Cl}(\overline{x}^\Omega)$ endlich. Dann gibt es endliches $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $p_0 \subset \{Ex_ix_j \mid i,j \in \Omega_0, i \neq j\}$. Behauptung: In jedem Modell von Φ_{ZGph} gibt es für alle $n \in \omega$ eine Clique der Größe n. Beweis hierfür:

- Induktion über n: Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
  Induktionsschritt: Sei $\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$ eine Clique der Größe n in $\mathfrak{M} \models \Phi_{ZGph}$, d.h. es gilt $E^{\mathfrak{M}}a_ia_j$ für alle $i \neq j \leq n-1$. Betrachte nun den Satz $\Psi_{n,\{n\}} \in \Phi_{ZGph}$, welcher die Existenz eines $a_n \in M$ mit $E^{\mathfrak{M}}a_ia_n$ für alle $i \leq n-1$ sichert. Damit hat man eine Clique der Größe $n+1$ in $\mathfrak{M}$.

Da es also endliche Cliquen beliebieger Größe in einem Modell von Φ_{ZGph} gibt, ist p_0 erfüllbar. □

Lemma 3.6.2 *Sei $\mathfrak{M} \models \Phi_{ZGph}$ und $(a_i)_{i\in\Omega} \subset M$ eine Ω-Clique. Dann sind die $(a_i)_{i\in\Omega}$ reine Indiscernibles.*

Beweis. Zwei Tupel vom selben $\{\doteq\}$-Typen aus der Indiscerniblefolge erfüllen offensichtlich dieselben atomaren Formeln. Da Φ_{ZGph} Quantorenelimination erlaubt, hat man damit die Indiscernibleeigenschaft. □

Satz 3.6.3 *Sei* $\mathfrak{M} \models \Phi_{ZGph}$ *und* $I = (a_i)_{i\in\mathbb{R}} \subset M$ *eine* $\mathbb{R}$*-Clique. Dann gibt es für alle* $K \in \omega$ *ein* $b \in I$ *und eine RPF* $(a_\nu)_{\nu<K}$ *von* $D_b := \{a \in I \mid Eab\}$.

Beweis. Sei $K \in \omega$ gegeben. Wähle aufsteigende Folge $f_0 < g_0 < \cdots < f_{K-1} < g_{K-1}$ in I und ein b mit $E^{\mathfrak{M}} f_\nu b$ und $\neg E^{\mathfrak{M}} g_\nu b$ für alle $\nu < K$. Da die Intervalle $(f_\nu, g_\nu) \cup \{f_\nu, g_\nu\}$ zusammenhängend sind und jeweils Elemente aus D_b wie aus D_b^c enthalten, gibt es mit Lemma 1.8.1 in jedem Intervall einen RP a_ν von D.
Da für alle ν und jedes $a \in (f_\nu, g_\nu) \cup \{f_\nu, g_\nu\}$ die Ungleichung $a > a_\mu$ für alle $\mu < \nu$ gilt, ist das Intervall $(f_\nu, g_\nu) \cup \{f_\nu, g_\nu\}$ in einer $(<, \{a_0, \ldots, a_{\nu-1}\})$-ÄK enthalten. Also ist $(a_\nu)_{\nu<K}$ RPF von $D_b := \{a \in I \mid Eab\}$. □

Kapitel 4

P-Beschränkung in kleinen Strukturen

Mit Ausnahme von Abschnitt 4.1 sei in diesem Kapitel T eine Theorie ohne UE.

Definition 4.0.4 $\mathfrak{M}^+$ heißt *klein*, falls es $\mathfrak{N}^+ = (\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}})$ gibt mit:
(i) $\mathfrak{M}^+ \equiv \mathfrak{N}^+$
(ii) Für jede endliche Teilmenge $\bar{b} \subset N$ wird jeder L-Typ über $J\bar{b}$ in $\mathfrak{N}$ realisiert.
(iii) $(J, <^{\mathfrak{J}})$ ist eine Dedekind-vollständige dichte Ordnung.

4.1 Neue Typen und eine neue Theorie

In diesem Abschnitt betrachten wir das $L_<$-Redukt und das $L_< \cup \{P\}$-Redukt einer kleinen L^+-Struktur $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$.

Bemerkung 4.1.1 *I ist im $L_<$-Redukt $(M, <^{\mathfrak{M}})$ $\emptyset$-definierbar durch die Formel $\Phi_I(x) := \exists y \; x < y$.*

Lemma 4.1.2 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein und $(M, <^{\mathfrak{M}})$ das $L_<$-Redukt von $\mathfrak{M}^+$. Dann gilt:*

1. *$\Psi(x) := \langle \neg\Phi_I(x) \rangle$ ist ein 1-Typ von $\mathrm{Th}\big((M, <^{\mathfrak{M}})\big)$.*
2. *Für alle $n > 0$ ist $\Psi_n(x_1, \ldots, x_n) := \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Psi(x_i) \cup \{x_i \neq x_j \mid i \neq j\}$ ein n-Typ von $\mathrm{Th}\big((M, <^{\mathfrak{M}})\big)$.*

Beweis. 1.: Da $\mathfrak{M}^+$ klein ist, gibt es $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \equiv \mathfrak{M}^+$, das der Saturiertheitsbedingung aus Definition 4.0.4 genügt. Damit realisiert $\mathfrak{N}$ folgenden partiellen L-Typ: $\{x \neq a \mid a \in J\}$. Also gilt $\mathfrak{N}^+ \models \exists x \; \neg Px$ und damit auch $\mathfrak{M}^+ \models \exists x \; \neg Px$. Für jedes $m \in M$ mit $m \notin I$ gilt aber $(M, <^{\mathfrak{M}}) \models \neg\Phi_I(m)$, $\Psi(x)$ ist somit erfüllbar. Da die Sybolmenge nur aus $<$ besteht, erfüllen alle $m \in M$ die $\Psi(x)$ erfüllen dieselben $L_<$-Formeln. $\Psi(x)$ ist also vollständig.

2.: Induktion über n: Induktionsanfang mit 1.
Induktionsschritt: Sei die Behauptung für $(n-1)$ gezeigt. Also gilt: $\mathfrak{N}^+ \models \exists^{\geq n-1} x \; \neg Px$

bezeugt durch $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Wegen der Saturiertheitsbedingung aus Definition 4.0.4 realisiert $\mathfrak{N}$ folgenden partiellen L-Typ: $\{x \neq a \mid a \in J\} \cup \{x \neq b_i \mid 0 < i < n\}$. Also gilt: $\mathfrak{N}^+ \models \exists^{\geq n} x\ \neg Px$, und damit $\mathfrak{M}^+ \models \exists^{\geq n} x\ \neg Px$, woraus die Erfüllbarkeit von Ψ_n folgt. Die Vollständigkeit folgt wie in (i). □

Definition 4.1.3 Φ_{dOA} sei folgende $L_<$-Satzmenge, die *dichte Ordnungen mit unendlichem Außenbereich* beschreibt: $\Phi_{dOA} := \Phi_{dO}^{rel} \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \Psi_n(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \omega\}$, wobei Φ_{dO}^{rel} die nach $\Phi_I(x)$ relativierten Sätze von Φ_{dO} sind.

Korollar 4.1.4 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein. Dann ist $(M, <^{\mathfrak{M}}) \models \Phi_{dOA}$.*

Beweis. $(M, <^{\mathfrak{M}}) \models \Phi_{dO}^{rel}$ ist ohnehin klar und $(M, <^{\mathfrak{M}}) \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \Psi_n(x_1, \ldots, x_n)$ folgt aus Lemma 4.1.2 für jedes $n \in \omega$, da Haupttypen in jedem Modell realisiert werden. □

Lemma 4.1.5 (Modelltheoretische Eigenschaften)

1. *Φ_{dOA} ist ω-kategorisch.*

2. *Φ_{dOA} ist modellvollständig.*

3. *Φ_{dOA} erlaubt keine Quantorenelimination.*

4. *In der Sprache $L_< \cup \{P\}$ erlaubt $\Phi_{dOA} \cup \{\forall x(\Phi_I(x) \longleftrightarrow Px)\}$ Quantorenelimination.*

Beweis. 1. Jedes abzählbare Modell von Φ_{dOA} besteht aus aus einer abzählbaren dichten Ornung und einem abzählbar unendlichen Außenbereich. Wegen der ω-Kategorizität dichter Ornungen (s. Bem. 1.2.1) und der unendlicher Mengen sind also je zwei abzählbare Modelle von $\mathrm{Th}\big((M, <^{\mathfrak{M}})\big)$ isomorph.
2. ergibt sich aus der Modellvollständigkeit von Φ_{dO} und der unendlicher Mengen.
3. Die Erfüllungsmenge einer $<$-Formel in nur einer freien Variablen ist entweder gleich dem gesamten Träger oder leer, da dies für die einzigen atomaren $L_<$-Formeln in einer Variablen $x \doteq x$ und $x < x$ gilt. $\Phi_I(x)$ dagegen ist eine $L_<$-Formel, die den Träger teilt.
4. Der quantorenfreie Typ eines Tupels legt in $L_< \cup \{P\}$ (im Gegensatz zu $L_<$) fest, welche freien Variablen nur in der dichten Ordnung und welche nur im Außenbereich belegt werden können. Damit vererbt sich die Quantorenelimination von dichten Ordnungen und unendlichen Mengen. □

Beachte: Während wegen der Quantorenelimination die $<$-Typen in Φ_{dO} genau den $L_<$-Typen in Φ_{dO} entsprechen, sind die $<$-Typen in Φ_{dOA} im Allgemeinen nur partielle $L_<$-Typen in Φ_{dOA}.

Beispiel: Der $<$-Typ $\Theta(x,y) := \{\neg x < y, \neg y < x, x \neq y\}$ hat folgende drei $L_<$-Vervollständigungen:

- $p_1(x,y) := \big\langle \Phi_I(x), \neg\Phi_I(y) \big\rangle$

- $p_2(x,y) := \big\langle \neg\Phi_I(x), \Phi_I(y) \big\rangle$

– $p_3(x,y) := \langle \neg\Phi_I(x), \neg\Phi_I(y), x \neq y \rangle$

Die $<$-Typen, bei denen die $<$-Relation nur negiert auftritt, sind aber die einzigen Beispiele von $<$-Typen in Φ_{dOA} mit mehreren Vervollständigungen:

Lemma 4.1.6 *Sei $\Theta(\overline{x})$ ein atomarer $<$-Typ in Φ_{dOA} mit $(x_i < x_j) \in \Theta(\overline{x})$ für ein Paar (i,j). Dann bestimmt $\Theta(\overline{x})$ einen $L_<$-Typ in Φ_{dOA}.*

Beweis. Da $(x_i < x_j) \vdash \Phi_I(x_i)$, gilt für alle $k \neq i$: Falls $(x_i < x_k)$ oder $(x_k < x_i)$ oder $(x_i \doteq x_k) \in \Theta(\overline{x})$, dann gilt $\Theta(\overline{x}) \vdash \Phi_I(x_k)$. Falls nicht, dann gilt $\Theta(\overline{x}) \vdash \neg\Phi_I(x_j)$. Damit ist aber der atomare $L_< \cup \{P\}$-Typ von $\overline{x}$ festgelegt, der wegen der Quantorenelimination (Lemma 4.1.5 4.) den $L_< \cup \{P\}$-Typ und damit auch den $L_<$-Typ festlegt.

Lemma 4.1.7 *Sei $\Theta(\overline{x}, y)$ ein (böser) $<$-Typ, in dem alle $<$-Atome negiert auftreten, und sei $\Theta_<(\overline{x})$ die Menge aller $<$-Atome aus $\Theta(\overline{x}, y)$, in denen y nicht vorkommt, sowie $\Delta(\overline{x}, y)$ die Menge aller $\doteq$-Atome aus $\Theta(\overline{x}, y)$. Dann ist die Formelmenge $\{\neg Py\} \cup \Theta(\overline{x}, y)$ in $\Phi_{dOA} \cup \forall x\big(Px \longleftrightarrow \Phi_I(x)\big)$ äquivalent zu $\{\neg Py\} \cup \Theta_<(\overline{x}) \cup \Delta(\overline{x}, y)$.*

Beweis. Da nur Formeln entfernt wurden ist $\vdash$ klar und $\dashv$ ergibt sich daraus, daß aus $\neg Py$ die entfernten Formeln $\neg y < x_i$ und $\neg x_i < y$ folgen.

Lemma 4.1.8 *Jeder n-Typ von Φ_{dOA} läßt folgende Darstellung zu:*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \big\langle \Phi_I(x_i) \mid i \in X, \neg\Phi_I(x_i) \mid i \notin X, \theta_<(x_i \mid i \in X), \Delta(x_1, \ldots, x_n) \big\rangle$$

mit einem $X \subset \{1, \ldots, n\}$, einer $<$-Formel $\theta_<$ in den Variablen $(x_i)_{i \in X}$ und einem Gleichheitstypen Δ.

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 1.3.4 erhält man wegen der Quantorenelimination in der Sprache $L_< \cup \{P\}$ (Lemma 4.1.5) eine Darstellung von p der Form

$$\bigcup_{\varphi \in p} \{\alpha_{\varphi,1}(x_1)\} \cup \cdots \cup \bigcup_{\varphi \in p} \{\alpha_{\varphi,n}(x_n)\} \cup \bigcup_{\varphi \in p} \{\theta_\varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

, wobei hier die $\alpha_{\varphi,i}(x_i)$ atomare und negiert atomare Formeln in einer freien Variablen ohne Parameter, also von der Form Px_i oder $\neg Px_i$ sind. Man hat also:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \big\langle Px_i \mid i \in X, \neg Px_i \mid i \notin X, \theta(x_1, \ldots, x_n) \big\rangle$$

für ein $X \subset \{1, \ldots, n\}$ und einer $<$-Formel θ. Da p ein vollständiger Typ ist, ist θ Konjunktion von atomaren und negiert atomaren Formeln. Für alle $i \notin X$ ist aber $\neg x_i < x_j$ und $\neg x_j < x_i$ für alle j schon durch $\neg Px_i$ festgelegt. Sei nun $\theta_<(x_i \mid i \in X)$ die Konjunktion atomaren und negiert atomaren Formeln aus θ in $<$, die die x_i mit $i \notin X$ nicht enthalten und $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ die Konjunktion aller atomaren und negiert atomaren Formeln aus θ in $\doteq$. Damit ist offensichtlich $p(x_1, \ldots, x_n)$ in der um P erweiterten Theorie gleich

$$\big\langle Px_i \mid i \in X, \neg Px_i \mid i \notin X, \theta_<(x_i \mid i \in X), \Delta(x_1, \ldots, x_n) \big\rangle$$

Die Ersetzung von Px_i durch $\Phi_I(x_i)$ liefert nun das Gewünschte. □

4.2 Vorbereitungen

Lemma 4.2.1 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein. Für jede L-Formel $\gamma(\overline{x}, y)$ gibt es eine P-beschränkte Formel, die in* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}^+)$ *äquivalent zu $\exists y\,(\neg Py \wedge \gamma(\overline{x}, y))$ ist.*

Beweis. Da $\gamma(\overline{x}, y)$ nicht die UE hat, gibt es nach Satz 3.4.4 eine $<$-Formel $\theta(\overline{w}, y)$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \forall\overline{x}\exists\overline{w}{\in}\, P\ \forall y{\in}\, P\ (\gamma(\overline{x}, y) \longleftrightarrow \theta(\overline{w}, y))$. Wähle nun $(\mathfrak{N}, J, <^{\mathfrak{N}}) \equiv \mathfrak{M}^+$ mit den Eigenschaften aus Definition 4.0.4. Sei $K := |\overline{w}|$. Sei $\overline{n} \in N$. Angenommen es existiert $a_0, ...a_K \in J$ paarweise verschieden mit $\mathfrak{N} \models \gamma(\overline{n}, a_i)$ für alle i. Dann gilt $\mathfrak{N} \models \gamma(\overline{n}, a)$ für unendlich viele $a \in J$. Da θ aber nur höchsens K viele Elemente einzeln auszeichnen kann, enthält $\{a \in J \mid (J, <^{\mathfrak{J}}) \models \theta(\overline{b}, a)\}$ somit ein Intervall. Damit ist die Formelmenge $\{\gamma(\overline{n}, y)\} \cup \{y \neq a \mid a \in J\}$ ein partieller L-Typ über $J\overline{n}$, da jede endliche Teilmenge erfüllbar ist. Wegen der Saturiertheitsbedingung gibt es also ein $c \in N$ mit $\mathfrak{N} \models \gamma(\overline{n}, c)$ und $c \notin J$. Da $\overline{n} \in N$ beliebig war gilt also:

$$\mathfrak{N}^+ \models \forall\overline{x}\Big(\exists^{>K} y{\in}P\ \gamma(\overline{x}, y_i) \longrightarrow \exists y\big(\neg Py \wedge \gamma(\overline{x}, y)\big)\Big) \tag{4.1}$$

Behauptung: Nun gilt:

$$\mathfrak{N}^+ \models \forall\overline{x}\bigg(\Big(\forall y_0{\in}P \dots \forall y_{K-1}{\in}P\ \exists y\Big(\bigwedge_{i<K} y \neq y_i \wedge \gamma(\overline{x}, y)\Big)\Big) \longleftrightarrow \exists y\big(\neg Py \wedge \gamma(\overline{x}, y)\big)\bigg)$$

Beweis hiervon:

- „$\longleftarrow$“: klar.
- „$\longrightarrow$“: Sei $\overline{n} \in N$. Für alle $a_0, \dots, a_{K-1} \in I$ existiert also ein c mit $c \neq a_i$ für alle $i < K$ und $\mathfrak{N}^+ \models \gamma(\overline{n}, c)$ Betrachte $B := \{b \in I \mid \mathfrak{N}^+ \models \gamma(\overline{n}, b)\}$
  1.Fall: $|B| \leq K$: Wähle $a_0, \dots, a_{K-1} \in B$, so daß $B = \{a_0, \dots, a_{K-1}\}$. Nach Voraussetzung existiert $c \in N$ mit $c \neq a_i$ für alle $i < K$ und $\mathfrak{N}^+ \models \gamma(\overline{n}, c)$. Also existiert $c \in N \setminus I$ mit $\mathfrak{N}^+ \models \gamma(\overline{n}, c)$
  2.Fall: $|B| > K$: Dann existiert $c \notin I$ mit $\mathfrak{N}^+ \models \gamma(\overline{n}, c)$ nach (4.1).

Da mit $\gamma(\overline{x}, y)$ auch $\exists y\,\big(\bigwedge_{i<K} y \neq y_i \wedge \gamma(\overline{x}, y)\big)$ eine L-Formel ist, hat man die gesuchte äquivalente P-beschränkte Formel, die wegen der elementaren Äquivalenz dann auch in $\mathfrak{M}^+$ äquivalent zu $\exists y\big(\neg Py \wedge \gamma(\overline{x}, y)\big)$ ist. □

Satz 4.2.2 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein und $\varphi(\overline{x}, y)$ eine einfache Formel. Dann ist $\exists y \varphi(\overline{x}, y)$ in* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}^+)$ *äquivalent zu einer P-beschränkten Formel.*

Beweis. Bringe zuerst $\varphi(\overline{x}, y)$ auf disjunktive Normalform, finde also eine Darstellung folgender Art:

$$\varphi(\overline{x}, y) = \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{i,j}(\overline{x}, y)$$

Fasse nun unter jedem $\bigwedge$ die L-Formeln zu einer L-Formel γ_i und die $<$-Formeln zu einer $<$-Formel θ_i zusammen. Damit hat man:

$$\varphi(\overline{x}, y) = \bigvee_i \big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$$

O.B.d.A. sind die $\theta_i(\overline{x}, y)$ vollständige $<$-Typen. (Falls nicht, zerlege θ_i in eine Disjunktion von vollständigen $<$-Typen und wende das Distributivgesetz an.)

- Falls nun $\theta_i(\overline{x}, y) \vdash \Phi_I(y)$ dann ist $\exists y\big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$ äquivalent zu $\exists y{\in}P\ \big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$, also P-beschränkt.

- Falls $\theta_i(\overline{x}, y) \vdash \neg\Phi_I(y)$, dann ist $\exists y\big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$ nach Lemma 4.1.8 äquivalent zu
$$\exists y\big(\neg Py \wedge \gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \tilde{\theta}_i(\overline{x}) \wedge \Delta(\overline{x}, y)\big)$$
mit $<$-Formel $\tilde{\theta}_i(\overline{x})$ und $\{\doteq\}$-Formel $\Delta(\overline{x}, y)$. Nun ist $\tilde{\gamma}_i(\overline{x}, y) := \big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \Delta(\overline{x}, y)\big)$ eine L-Formel und damit ist $\exists y\big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$ äquivalent zu $\tilde{\theta}_i(\overline{x}) \wedge \exists y\big(\neg Py \wedge \tilde{\gamma}_i(\overline{x}, y)\big)$ und damit nach Lemma 4.2.1 äquivalent zu einer P-beschränkten Formel.

- Falls beides nicht der Fall ist, dann weiß man aus Lemma 4.1.6, daß in diesem Fall $\theta_i(\overline{x}, y)$ nur negierte $<$-Atome enthält. Hier ist $\exists y\big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$ zuerst einmal äquivalent zu
$$\exists y{\in}P\ \big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big) \vee \exists y\big(\neg Py \wedge \gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big)$$
Nun ist $\neg Py \wedge \theta_i(\overline{x}, y)$ nach Lemma 4.1.7 äquivalent zu $\neg Py \wedge \theta_{<,i}(\overline{x}) \wedge \Delta(\overline{x}, y)$ mit einer $<$-Formel $\theta_{<,i}(\overline{x})$ und einer $\{\doteq\}$-Formel $\Delta(\overline{x}, y)$, und damit hat man die Äquivalenz zu der Formel
$$\exists y{\in}P\ \big(\gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \theta_i(\overline{x}, y)\big) \vee \Big(\theta_{<,i}(\overline{x}) \wedge \exists y\big(\neg Py \wedge \gamma_i(\overline{x}, y) \wedge \Delta(\overline{x}, y)\big)\Big)$$
, die wie im Fall davor nach Lemma 4.2.1 äquivalent zu einer P-beschränkten Formel ist. $\square$

4.3 Die Erfüllung von einfachen Typen

Wenn nun im Folgenden für freie Variablen die griechischen Buchstaben α und β verwendet werden, dann, um anzuzeigen, daß nur deren Belegung durch Elemente der Indiscerniblefolge von Belang ist.

Lemma 4.3.1 *Sei $\mathfrak{M}^+$ so saturiert, daß für alle $\overline{m} \subset M$ jeder L-Typ über $I\overline{m}$ in M realisiert wird. Es sei $\varphi(\overline{x}, y, \overline{\alpha})$ eine einfache L^+-Formel. Falls für ein $\overline{m} \in M$ die Formelmenge $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\}$ in T^+ konsistent ist, dann wird sie durch ein Element $n \in M$ erfüllt.*

Beweis. Sei für ein $\overline{m} \in M$ die Formelmenge $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\}$ in T^+ konsistent.

1.Fall: $p(y) = \{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\} \cup \{y \neq b \mid b \in I\overline{m}\}$ ist konsistent in T^+.
Benutze nun die konjunktive Normalform: $\varphi(\overline{x}, y, \overline{\alpha}) = \bigwedge_{i<k} \big(\gamma_i(\overline{x}, y, \overline{\alpha}) \vee \theta_i(\overline{x}, y, \overline{\alpha})\big)$ mit L-Formeln γ_i und $<$-Formeln θ_i. Sei nun $\overline{m} \in M$. Wähle $n_0 \in M \setminus I\overline{m}$ und betrachte mit $A_i := \{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \neg\theta_i(\overline{m}, n_0, \overline{a})\}$ folgende Formelmenge : $q(y) = \bigcup_{i<k}\{\gamma_i(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in A_i\} \cup \{y \neq a \mid a \in I\overline{m}\}$. Da $p(y) \vdash q(y)$, ist auch $q(y)$ konsistent in T^+. Da $q(y)$ ein partieller L-Typ über $I\overline{m}$ ist, wird er nach Voraussetzung durch ein $n \in M$ erfüllt. Da aber $n \neq a$ für alle $a \in I\overline{m}$, erfüllen n und n_0 dieselben $<$-Formeln über $I\overline{m}$. Damit gilt für alle $i < k$ und alle $\overline{a} \in I$: Falls $\mathfrak{M}^+ \not\models \gamma_i(\overline{m}, n, \overline{a})$, so $\overline{a} \notin A_i$, also $\mathfrak{M}^+ \models \theta_i(\overline{m}, n_0, \overline{a})$

und damit auch $\mathfrak{M}^+ \models \theta_i(\overline{m}, n, \overline{a})$. Damit erfüllt n jedes Konjunktionsglied der konjunktiven Normalform von $\varphi(\overline{m}, y, \overline{a})$ für alle $\overline{a} \in A$.

2.Fall: $p(y) = \{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\} \cup \{y \neq b \mid b \in I\overline{m}\}$ ist inkonsistent in $\mathfrak{M}^+$.
Dann gibt es endliche Teilmenge $E \subset I\overline{m}$, so daß $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\} \cup \{y \neq b \mid b \in E\}$ inkonsistent ist. Damit $\mathfrak{M}^+ \models \left(\forall \overline{a} \in P\ \varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longrightarrow \bigvee_{b \in E} y \doteq b\right)$. Da $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \mid \overline{a} \in I\}$ nach Voraussetzung konsistent war, existiert $n \in E$, das diese Formelmenge erfüllt. $\square$

4.4 Formeln ohne endliche Überdeckungseigenschaft

Erinnerung: Eine Formelmenge heißt *K-konsistent*, falls jede K-elementige Teilmenge konsistent ist.

Es folgt nun eine unseren speziellen Bedürfnissen angepaßte Definition der *endlichen Überdeckungseigenschaft*:

Definition 4.4.1 Eine Formel $\chi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ hat die *endliche Überdeckungseigenschaft über I*, falls es für alle $K \in \omega$ folgende Objekte gibt: Tupel $\overline{m} \in M$ und $\overline{b} \in I$ und eine Familie $(\overline{a_i})_{i \in \Omega}$ von Tupeln in I, so daß $\{\chi(\overline{m}, \overline{y}, \overline{a_i}, \overline{b}) \mid i \in \Omega\}$ K-konsistent, aber nicht konsistent in $\mathfrak{M}^+$ ist.

Bemerkung 4.4.2 *Falls $\chi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ nicht die endliche Überdeckungseigenschaft über I hat, gibt es also $K \in \omega$, so daß für alle $\overline{m} \in M$, $\overline{b} \in I$ und Familien $(\overline{a_i})_{i \in \Omega}$ von Tupeln in I aus der K-Konsistenz von $\{\chi(\overline{m}, \overline{y}, \overline{a_i}, \overline{b}) \mid i \in \Omega\}$ die Konsistenz geschlossen werden kann. Ist $\mathfrak{M}^+$ genügend saturiert, dann gilt:*

$$\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{x} \forall \overline{\beta} \in P \left(\left(\forall \overline{\alpha_0} \in P \ldots \forall \overline{\alpha_{K-1}} \in P\ \exists \overline{y} \left(\bigwedge_{i<K} \chi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\alpha_i}, \overline{\beta}) \right) \right) \longrightarrow \exists \overline{y} \forall \overline{\alpha} \in P\ \chi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) \right)$$

Ziel dieses Abschnitts ist folgender Satz:

Satz 4.4.3 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein, $\varphi(\overline{x}, y, \overline{\alpha})$ eine einfache Formel und $\theta(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ eine $<$-Formel, die Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x}, y; \overline{\alpha})$ über I in $\mathfrak{M}^+$ ist. Dann hat $\left(\varphi(\overline{x}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha}, \overline{\beta})\right)$ nicht die endliche Überdeckungseigenschaft über I.*

4.4.1 σ-Randpunktfolgen und Randpunktsicherungsfolgen

Definition 4.4.4 Sei $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_{n-1}})$ eine $<$-Formel mit $|\overline{\alpha}| = |\overline{\beta_0}| = \cdots = |\overline{\beta_{n-1}}|$. $(\overline{b_\nu})_{\nu<n}$ heißt *σ-RPF*, falls $(\overline{b_\nu})_{\nu<n}$ RPF von $\{\overline{a} \in I^R \mid (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}}) \models \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}})\}$ ist.

Lemma 4.4.5 *Sei $(\overline{b_\nu})_{\nu<n}$ eine σ-RPF und $f : (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}})$ ein partieller Isomorphismus mit $B_n \subset \operatorname{def}(f)$. Dann ist auch $\left(f(b_{\nu,1}), \ldots, f(b_{\nu,R})\right)_{\nu<n}$ eine σ-RPF.*

Beweis. Ersetzt man in Lemma 1.7.2 $\varphi_D(\overline{x})$ durch $\sigma(\overline{x}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_{n-1}})$, so erhält man die Formel $\varphi_{B-RP(E)}(\overline{x}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_{n-1}})$, deren Erfüllungsmenge aus Tupeln $\overline{c}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}}$ besteht, so daß $\overline{c}$ Randpunkt von der Menge $\{\overline{a} \in I^R \mid (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}}) \models \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}})\}$ in E ist.
Verfährt man nun wie in Lemma 1.7.3, so erhält man eine Formel φ_{B-RPF} in den freien

Variablen $(\overline{x_0},\dots,\overline{x_{n-1}},\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}})$, deren Erfüllungsmenge aus den Tupeln $(\overline{c_0},\dots,\overline{c_{n-1}},\overline{b_0},\dots,\overline{b_{n-1}})$ besteht, sodaß $(\overline{c_\nu})_{\nu<n}$ RPF der Menge $\{\overline{a} \in I^R \mid (\mathfrak{I},<^{\mathfrak{I}}) \models \sigma(\overline{a},\overline{b_0},\dots,\overline{b_{n-1}})\}$ sind.
Wählt man nun $\varphi_{\sigma-RPF}(\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}}) := \varphi_{B-RPF}(\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}},\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}})$, so ist die Erüllungsmenge die Menge der σ-RPFn.
Da aber $\varphi_{\sigma-RPF}(\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}})$ eine $<$-Formel ist, und gleichgeordnete $(R\cdot n)$-Tupel denselben $<$-Typ über $\emptyset$ haben, erfüllt mit $(\overline{b_\nu})_{\nu<n}$ auch $\big(f(b_{\nu,1}),\dots,f(b_{\nu,R})\big)_{\nu<n}$ die Formel $\varphi_{\sigma-RPF}(\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_{n-1}})$. □

Lemma 4.4.6 *Sei $\overline{b_0},\dots,\overline{b_n}$ RPF von $D \subset I^R$, B_ν für $\nu \leq n+1$ die Menge der Koordinaten von $\overline{b_0},\dots,\overline{b_{\nu-1}}$ und E_ν jeweils die $(<,B_\nu)$-ÄK von b_ν. Seien nun zu allen Elementen aus B_{n+1} $(l_{\nu,j},u_{\nu,j})$ paarweise disjunkte Intervallumgebungen. Dann gibt es eine Doppelfolge $(\overline{f_\nu},\overline{g_\nu})_{\nu<n}$ mit $\overline{f_\nu},\overline{g_\nu} \in E_\nu$ und $f_{\nu,j},g_{\nu,j} \in (l_{\nu,j},u_{\nu,j})$ und $\overline{f_i} \in D$ genau dann, wenn $\overline{g_i} \notin D$.*
Sei außerdem $D' \subset I^R$ derart, daß $\overline{f_i} \in D'$ genau dann, wenn $\overline{g_i} \notin D'$. Dann existiert eine RPF $\overline{b_0}',\dots,\overline{b_{n-1}}'$ von D' mit $b'_{\nu,j} \in (l_{\nu,j},u_{\nu,j})$ für alle j.

Beweis. Da es nach Definition 1.7.1 in jeder Umgebung der $\overline{b_\nu}$ in E_ν Elemente aus D und aus D^c gibt, gilt das auch für Rechteckumgebungen.

Zur Existenz der RPF von D': Induktion über ν: Induktionsanfang: Da $\overline{f_0} \in D'$ genau dann, wenn $\overline{g_0} \notin D'$ und beide in derselben $\big(<,\{l_{0,1},\dots,l_{0,R},u_{0,1},\dots,u_{0,R}\}\big)$-ÄK liegen, existiert dort nach Korollar 1.8.2 ein Randpunkt $\overline{b_0}'$.
Induktionsschritt: Zeige für alle ν, daß $\overline{f_\nu}$ und $\overline{g_\nu}$ in derselben $(<,B'_\nu)$-ÄK liegen: Nach Voraussetzung liegen sie in derselben $(<,B_\nu)$-ÄK. Sei $s \subset \{1,\dots,R\}$ die Menge der Koordinaten von $\overline{b_\nu}$, die schon in B_ν vorkommen. Dann ist $b_{\nu,j} = f_{\nu,j} = g_{\nu,j}$ für alle $j \in s$, da $\overline{f_\nu},\overline{g_\nu} \in E_\nu$. Für die anderen Koordinaten gilt (nach obiger Wahl der Umgebungen): Aus $f_{\nu,j} < b_{\mu,i}$ folgt $f_{\nu,j} < u_{\nu,j} < l_{\mu,i}$ und damit $f_{\nu,j} < b'_{\mu,i}$ und aus $f_{\nu,j} > b_{\mu,i}$ folgt $f_{\nu,j} > l_{\nu,j} > u_{\mu,i}$ und damit $f_{\nu,j} > b'_{\mu,i}$ für $\mu < \nu$ und $i \in \{1,\dots,R\}\backslash s$. Also liegen $\overline{f_\nu}$ und $\overline{g_\nu}$ in derselben $(<,B'_\nu)$-ÄK. Da sie auch in derselben $\big(<,\{l_{\nu,1},\dots,l_{\nu,R},u_{\nu,1},\dots,u_{\nu,R}\}\big)$-ÄK liegen, existiert nach Korollar 1.8.2 ein Randpunkt $\overline{b_\nu}'$ mit $b'_{\nu,i} \in (l_{\nu,i},u_{\nu,i})$, der die RPF $(\overline{b_\nu}')_{\nu<n-1}$ fortsetzt. □

Definition 4.4.7 Eine wie oben beschaffene Doppelfolge $(\overline{f_\nu},\overline{g_\nu})_{\nu<n}$ heißt *Randpunktsicherungsfolge* der RPF $(\overline{b_\nu})_{\nu<n}$.

Bemerkung 4.4.8 *Die im Beweis von Satz 3.6.3 verwendete Doppelfolge $(f_\nu,g_\nu)_{\nu<K}$ ist eine Randpunktsicherungsfolge.*

Lemma 4.4.9 *Es sei $(\mathfrak{M},I,<^{\mathfrak{M}}) \models T^+$ mit vollständiger dichter Ordnung $(I,<^{\mathfrak{I}})$ und so saturiert, daß über jedem $\overline{a} \in M$ jeder L-Typ über $I\overline{a}$ in M erfüllt werde.*
Sei zudem $\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})$ eine einfache Formel und $\sigma(\overline{\alpha},\overline{\beta_0},\dots,\overline{\beta_n})$ eine $<$-Formel. Dann gilt:

(i) Es existiert $K_\sigma < \omega$, so daß für alle $\overline{m} \in M$ und jede σ-RPF $\overline{b_0},\dots,\overline{b_n}$ die Formelmenge $\{\varphi(\overline{m},y,\overline{a}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a},\overline{b_0},\dots,\overline{b_n}) \mid \overline{a} \in I\}$ konsistent ist genau dann, wenn sie K_σ-konsistent ist.

(ii) Es existiert $K'_\sigma < \omega$, so daß für alle $\overline{m} \in M$ eine Menge $G_\sigma(\overline{m}) \subset I$ mit $|G_\sigma(\overline{m})| < K'_\sigma$ existiert mit: Für alle σ-RPFn $\overline{b'_0}, \ldots, \overline{b'_n}$ vom selben $<$-Typ über $G_\sigma(\overline{m})$ wie $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$ gilt: $\mathfrak{M}^+ \models \exists y \forall \overline{\alpha} \in P\ \big(\varphi(\overline{m}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{\alpha}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})\big)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}^+ \models \exists y \forall \overline{\alpha} \in P\ \big(\varphi(\overline{m}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{\alpha}, \overline{b_0}', \ldots, \overline{b_n}')\big)$

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei (i) für $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_n})$ schon gezeigt. Dann ist für alle $\overline{m} \in M$ und alle σ-RPFn $(\overline{b_j})_{j<n+1}$ die Formel $\exists y \forall \overline{\alpha} \in P\ \big(\varphi(\overline{m}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{\alpha}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})\big)$ äquivalent zur Formel: $\forall \overline{\alpha_0} \in P \ldots \forall \overline{\alpha_{K_\sigma - 1}} \in P\ \exists y \bigwedge_{i<K_\sigma} \big(\varphi(\overline{m}, y, \overline{\alpha_i}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{\alpha_i}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})\big)$, was nach Satz 4.2.2 äquivalent zu einer P-beschränkten Formel ist. Nach Korollar 3.4.6 existiert also dieses K'_σ.

(i): Da φ einfach ist, sind nach Korollar 3.4.5 die Mengen der Form $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, d, \overline{a})\}$ uniform durch eine $<$-Formel $\theta(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ definierbar, d.h. für alle $\overline{m}, d \in M$ über einer Menge mit höchstens $|\overline{\beta}|$ Elementen. Nach Lemma 1.8.4 existiert also ein K_φ, so daß RPFn von $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, d, \overline{a})\}$ für alle $\overline{m}, d \in M$ höchstens die Länge K_φ haben.

$\boxed{\text{Abwärtsinduktion über } n\text{:}}$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = K_\varphi$: Wähle $K_\sigma = 2(n+1)$. $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) \mid \overline{a} \in I\}$ ist nicht K_σ-konsistent. Denn: Wäre es das, dann wäre für eine Randpunktsicherungsfolge $(\overline{f_\nu}, \overline{g_\nu})_{\nu<n+1}$ um $(\overline{b_\nu})_{\nu<n+1}$ die Menge $\big\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}) \mid \overline{a} \in \{\overline{f_0}, \overline{g_0}, \ldots, \overline{f_n}, \overline{g_n}\}\big\}$ konsistent. Also würde ein d_0 existieren, für das mit Lemma 4.4.6 die Menge $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, d_0, \overline{a})\}$ eine RPF der Länge $K_\varphi + 1$ hätte, was nicht sein kann.

<u>Induktionsschritt</u>: Sei (i) und damit auch (ii) für alle n' mit $K_\varphi \geq n' > n$ gezeigt. Sei Λ die Menge aller $<$- Formeln σ in den Variablen $\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta'_n}$ für $K_\varphi \geq n' > n$ modulo Φ_{dO}. Da Φ_{dO} ω-kategorisch ist, ist Λ endlich und damit auch $\Sigma_{\sigma \in \Lambda} K'_\sigma$. Aus demselben Grund gibt es eine Funktion $p_R : \omega \longrightarrow \omega$, sodaß es über einer Menge der Mächtigkeit r maximal $p_R(r)$ viele R-Typen in $(\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}})$ gibt.

Sei nun $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_n})$, $\overline{m}$ und $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$ gegeben. Wähle nun $K_\sigma := p_R\big(\Sigma_{\sigma' \in \Lambda} K'_{\sigma'} + 3R \cdot (n+1)\big) + 2R \cdot (n+1)$ und zeige mit Hilfe des Endlichkeitssatzes: Aus der K_σ-Konsistenz der Menge $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}) \mid \overline{a} \in I\}$ folgt ihre Konsistenz.

Sei also endliches $E \subset I^R$ gegeben und $\bar{E} \subset I$ die Menge der Koordinaten von E. Sei $G(\overline{m}) := \bigcup_{\sigma' \in \Lambda} G_{\sigma'}(\overline{m})$. Wähle nun $(l_{\nu,j}, u_{\nu,j})$ um die $b_{\nu,j}$, so daß alle Elemente von $\bar{E} \cup G(\overline{m})$, die von $b_{\nu,j}$ verschieden sind, außerhalb dieses Intervalls liegen und mit Lemma 4.4.6 Randpunktsicherungsfolge $(\overline{f_\nu}, \overline{g_\nu})$ um $\overline{b_\nu}$ mit $f_{\nu,j}, g_{\nu,j} \in (l_{\nu,j}, u_{\nu,j})$.
Wähle nun $U \subset I^R$ mit $|U|$ so, daß alle $<$-Typen über $G(\overline{m}) \cup \{b_{\nu,j}, l_{\nu,j}, u_{\nu,j} \mid j = 1, \ldots, R; \nu < n+1\}$ in U erfüllt werden und definiere $S =: \{\overline{f_\nu} \mid \nu < n+1\} \cup \{\overline{g_\nu} \mid \nu < n+1\} \cup U$.
Da $|G(\overline{m})| \leq \Sigma_{\sigma' \in \Lambda} K'_{\sigma'}$ und $\big|\{b_{\nu,j}, l_{\nu,j}, u_{\nu,j} \mid j = 1, \ldots, R; \nu < n+1\}\big| \leq 3R \cdot (n+1)$ ist, gilt $|U| \leq p_R\big(\Sigma_{\sigma' \in \Lambda} K'_{\sigma'} + 3R \cdot (n+1)\big)$ und damit $|S| \leq K_\sigma$.

Erfülle nun mit Lemma 4.3.1 $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}) \mid \overline{a} \in S\}$ durch d_0.
Für die Menge $D' = \{\overline{a} \in I^R \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, d_0, \overline{a})\}$ gilt also für alle $\nu < n+1$: $\overline{f_\nu} \in D'$ genau dann, wenn $\overline{g_\nu} \notin D'$. Nach Lemma 4.4.6 existiert also eine RPF $\overline{b_0}', \ldots, \overline{b_n}'$ von D' mit $b'_{\nu,j} \in (l_{\nu,j}, u_{\nu,j})$ für alle $\nu < n+1$ und $j \in \{1, \ldots, R\}$.

Fall A: Diese RPF von D' ist maximal. Dann ist nach Lemma 1.8.3 D' definierbar über B'_{n+1}, also gilt für alle $\overline{a}, \overline{a}' \in I^R$, die denselben <- Typ über B'_{n+1} haben: $\overline{a} \in D'$ genau dann, wenn $\overline{a}' \in D'$.
Behauptung: für alle $\overline{e} \in E$ gibt es $\overline{s} \in S$ vom selben <- Typ über $B_{n+1} \cup B'_{n+1}$.
Beweis hiervon:

- Nach Wahl von U gibt es für jedes $\overline{e} \in E$ ein $\overline{s} \in S$ vom selben <-Typ über $B_{\nu+1} \cup \{l_{\nu,j}, u_{\nu,j} \mid j = 1, \ldots, R; \nu < n+1\}$. Für alle $\nu < n+1$ und $i, j \in \{1, \ldots, R\}$ gilt nach Wahl der $l_{\nu,j}, u_{\nu,j}$: Aus $e_i < b_{\nu,j}$ folgt $e_i < l_{\nu,j}$ und damit $e_i < b'_{\nu,j}$. Da $\overline{s} \in S$ vom selben <-Typ über $\{l_{\nu,j}\}$ wie $\overline{e}$ ist, gilt also $s_i < b'_{\nu,j}$. Ebenso folgt aus $e_i > b_{\nu,j}$, daß $e_i > u_{\nu,j}$ und damit $e_i > b'_{\nu,j}$ ist, und wegen $s_i > u_{\nu,j}$ auch $s'_i > b'_{\nu,j}$.
  Für $e_i = b_{\nu,j}$ gilt ohnehin $s_i = b_{\nu,j} = e_i$.

Nun gilt:

Für ein $\overline{s}$ vom selben <- Typ über B_{n+1} wie $\overline{e}$:	$\sigma(\overline{e}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{s}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})$
Für ein $\overline{s}$ vom selben <- Typ über B'_{n+1} wie $\overline{e}$:	$\varphi(\overline{m}, d_0, \overline{e}) \longleftrightarrow \varphi(\overline{m}, d_0, \overline{s})$
Für alle $\overline{s} \in S$ wegen der Wahl von d_0:	$\varphi(\overline{m}, d_0, \overline{s}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{s}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})$
Also für alle $\overline{e} \in E$:	$\varphi(\overline{m}, d_0, \overline{e}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{e}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})$

Fall B: Die RPF $(\overline{b_\nu}')_{\nu<n+1}$ von D' ist nicht maximal. Dann gibt es eine Verlängerung der Folge $(\overline{b_\nu}')_{\nu<n'+1}$, die wegen Satz 3.3.1 für ein $n' < K_\varphi$ maximal ist. Nun gibt es also eine <-Formel $\sigma'(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_{n'}})$ in Λ mit

$$\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{\alpha} \in P \; \left(\varphi(\overline{m}, d_0, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma'(\overline{\alpha}, \overline{b_0}', \ldots, \overline{b_{n'}}')\right)$$

Sei nun $\bar{E}, \bar{S} \subset I$ die Menge der Koordinaten aus E bzw. S und $(h_\nu)_{\nu<k}$ die aufsteigende Aufzählung der Elemente von $G \cup B'_{n+1}$. Sei $I_0 := (-\infty, h_0)$, $I_{\nu+1} := (h_\nu, h_{\nu+1})$ für $\nu < k-1$ und $I_k := (h_{k-1}, \infty)$ Konstruiere nun partiellen Isomorphismus $f : (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}})$ folgendermaßen: $h_\nu \longmapsto h_\nu$ für alle $\nu < k$.
Bilde in jedem Intervall I_ν die endliche Menge $(B'_{n'+1} \setminus B'_{n+1}) \cap I_\nu$ ordnungserhaltend und so nach I_ν ab, daß alle Elemente aus $(\bar{E} \cup \bar{S}) \cap I_\nu$ größer als die Bilder von $(B'_{n'+1} \setminus B'_{n+1}) \cap I_\nu$ sind, was wegen der Dichtheit der Ordnung möglich ist.
Nun hat man partiellen Isomorphismus $f : (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}}) \longrightarrow (\mathfrak{I}, <^{\mathfrak{I}})$ mit $B'_{n'+1} \subset \mathrm{def}(I)$, also sind nach Lemma 4.4.5 die Bildtupel $\left(f(\overline{b_\nu})\right)_{\nu<n'+1}$ eine σ'-RPF. Da diese denselben <-Typ über $G(\overline{m})$ und damit über $G_{\sigma'}(\overline{m})$ hat wie die Urbildfolge, existiert wegen Induktionsvoraussetzung (ii) und der Saturiertheit von $\mathfrak{M}^+$ mit Lemma 4.3.1 ein $d_E \in M$ mit

$$\mathfrak{M}^+ \models \forall \overline{\alpha} \in P \; \left(\varphi(\overline{m}, d_E, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \sigma'\left(\overline{\alpha}, f(\overline{b_0}), \ldots, f(\overline{b_{n'}})\right)\right) \tag{4.2}$$

Behauptung: Für alle $\overline{e} \in E$ existiert ein $\overline{s} \in S$ vom selben $<$-Typ über $B_{n+1} \cup f(B'_{n'+1})$.
Beweis hierfür:

- Sei $\overline{e} \in E$. Nach Wahl von S existiert ein $\overline{s} \in S$ mit selbem $<$-Typ über $G(\overline{m}) \cup \{b_{\nu,j}, l_{\nu,j}, u_{\nu,j} \mid j = 1, \ldots, R;\ \nu < n+1\}$. Damit hat $\overline{e}$ denselben $<$-Typ über B_{n+1} wie $\overline{s}$. Wie in Fall A erhält man: $\overline{e}$ und $\overline{s}$ haben denselben Typ über B'_{n+1}. Da für alle $i \in \{1, \ldots, R\}$ e_i und s_i im selben Intervall I_ν liegen und es dort nach Konstruktion von f kein $f(b)$ für $b \in B'_{n'+1} \setminus B'_{n+1}$ zwischen e_i und s_i geben kann, erfüllen e_i und s_i denselben $<$-Typ über $f(B'_{n'+1})$. Also ist $\overline{s} \in S$ vom selben $<$-Typ über $f(B'_{n'+1})$ wie $\overline{e}$.

Nun gilt:
Für $\overline{e}$ und $\overline{s}$ vom selben $<$-Typ über $f(B'_{n'+1})$ nach (4.2):
$$\varphi(\overline{m}, d_E, \overline{e}) \longleftrightarrow \varphi(\overline{m}, d_E, \overline{s})$$
Für $\overline{e}$ und $\overline{s}$ vom selben $<$-Typ über B_{n+1}: $\sigma(\overline{e}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{s}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}})$
Für alle $\overline{s} \in S$ gilt nach Wahl von d_E: $\varphi(\overline{m}, d_E, \overline{s}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{s}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}})$
Also für alle $\overline{e} \in E$: $\varphi(\overline{m}, d_E, \overline{e}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{e}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{n-1}})$

□

Beweis von Satz 4.4.3. Sei vorerst $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \models T^+$ mit vollständiger dichter Ordnung $(I, <^{\mathfrak{I}})$ und so saturiert, daß über jedem $\overline{a} \subset M$ jeder L-Typ über $I\overline{a}$ in M erfüllt werde.

Nach Lemma 3.4.3 gibt es $K_\varphi < \omega$, sodaß es für alle $\overline{m}, n \in M$ keine RPF von $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, n, \overline{a})\}$ der Länge $K_\varphi + 1$ gibt. Betrachte nun alle $<$-Formeln $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_n})$ mit $|\overline{\beta_0}| = \cdots = |\overline{\beta_n}| = |\overline{\alpha}|$ für $n < K_\varphi$. Da Φ_{dO} ω-kategorisch ist, gibt es davon bis auf Äquivalenz modulo Φ_{dO} nur endlich viele. Sei zu diesen σ jeweils K_σ wie in Lemma 4.4.9 (i). Wähle nun K als das Maximum dieser K_σ und $2(K_\varphi + 1)$.
Sei nun für $\overline{m} \in M$ und $\overline{b} \in I$ die Formelmenge $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \theta(\overline{a}, \overline{b}) \mid \overline{a} \in I\}$ K-konsistent. Sei $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$ eine maximale RPF von $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \theta(\overline{a}, \overline{b})\}$.
Angenommen $n \geq K_\varphi$: Wähle Randpunktsicherungsfolge $(\overline{f_\nu}, \overline{g_\nu})$ um $\overline{b_\nu}$ für $\nu < n+1$ und erfülle $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \theta(\overline{a}, \overline{b}) \mid \overline{a} \in \{\overline{f_\nu}, \overline{g_\nu} \mid \nu < n+1\}\}$ durch n_0. Dann existiert aber nach Lemma 4.4.6 eine RPF der Menge $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m}, n_0, \overline{a})\}$, die länger als K_φ ist, was nicht sein kann.
Also ist $n < K_\varphi$. Nach Lemma 1.8.3 ist $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \theta(\overline{a}, \overline{b})\}$ definierbar über $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$. Also gibt es $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_n})$, sodaß $\{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \theta(\overline{a}, \overline{b})\} = \{\overline{a} \in I \mid \mathfrak{M}^+ \models \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})\}$.
Da $K \geq K_\sigma$ folgt die Konsistenz von $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \sigma(\overline{a}, \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}) \mid \overline{a} \in I\}$ mit Lemma 4.4.9 und damit die Konsistenz von $\{\varphi(\overline{m}, y, \overline{a}) \longleftrightarrow \theta(\overline{a}, \overline{b}) \mid \overline{a} \in I\}$.
Da $\big(\varphi(\overline{x}, y, \overline{\alpha}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha}, \overline{\beta})\big)$ eine einfache Formel ist, gibt es nach Lemma 4.3.1 in M ein erfüllendes Element.

In $\mathfrak{M}^+$ gilt also:

$$\forall\overline{x}\forall\overline{\beta}\in P\ \Big(\forall\overline{\alpha_0}\in P\ldots\forall\overline{\alpha_{K-1}}\in P\ \exists y\Big(\bigwedge_{i<K}\big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha_i})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha_i},\overline{\beta})\big)\Big)\longrightarrow$$
$$\exists y\forall\overline{\alpha}\in P\ \big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)\Big)$$

Da dies in T^+ steht, hat in allen kleinen $\mathfrak{M}^+$ die Formel $\big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)$ nicht die endliche Überdeckungseigenschaft. □

4.5 Die P-Beschränkung

Satz 4.5.1 *Sei $\mathfrak{M}^+$ klein. Dann ist in* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}^+)$ *jede L^+-Formel äquivalent zu einer P-beschränkten Formel.*

Beweis. Induktion über den Aufbau der Formeln:
Induktionsanfang: L-Formeln und $\{<\}$-Formeln sind P-beschränkt. Px ist äquivalent zu $\exists\alpha\in P\ x=\alpha$.

Induktionsschritt: Boolesche Kombinationen von P-beschränkten Formeln sind nach Lemma 3.2.3 äquivalent zu einer P-beschränkten Formel.

Sei nun $\psi(\overline{x})=\exists y\Phi(\overline{x},y)$ mit P-beschränktem $\Phi(\overline{x},y)$, also $\Phi(\overline{x},y)=\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})$ mit $\overline{Q}\overline{\alpha}\in P=Q_1\alpha_1\in P\ldots Q_l\alpha_l\in P$ und einfachem $\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})$.
Nach Korollar 3.4.5 existiert $<$-Formel $\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})$, die Definitionsersetzung von $\varphi(\overline{x},y;\overline{\alpha})$ über I ist. Es gilt also:

$$\mathfrak{M}^+\models\forall\overline{x}\forall y\exists\overline{\beta}\in P\ \forall\overline{\alpha}\in P\ \ \big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)$$

Damit ist $\Phi(\overline{x},y)$ in $\mathfrak{M}^+$ äquivalent zu

$$\exists\overline{\beta}\in P\ \ \big(\forall\overline{\alpha}\in P\ \ \big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)\wedge\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)$$

Nach Satz 4.4.3 gibt es ein $K<\omega$, so daß für alle $\overline{m}\in M,\overline{b}\in I$ die Formelmenge

$$\{\varphi(\overline{m},y,\overline{a})\longleftrightarrow\theta(\overline{a},\overline{b})\mid\overline{a}\in I\}$$

genau dann konsistent ist, wenn sie K-konsistent ist. Behauptung: $\exists y\Phi(\overline{x},y)$ ist in $\mathfrak{M}^+$ äquivalent zu:

$$\psi'(\overline{x})=\exists\overline{\beta}\in P\Big(\Big(\forall\overline{\alpha_0}\in P\ldots\forall\overline{\alpha_{K-1}}\in P\ \exists y\bigwedge_{i<K}\big(\varphi(\overline{x},y,\overline{\alpha_i})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha_i},\overline{\beta})\big)\Big)\wedge\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\Big)$$

Beweis hiervon:

- „$\longrightarrow$": Gelte $\mathfrak{M}^+\models\exists y\Phi(\overline{m},y)$ für $\overline{m}\in M$. Damit existiert $n\in M$ mit $\mathfrak{M}^+\models\Phi(\overline{m},n)$ also nach oben auch

  $$\mathfrak{M}^+\models\exists\overline{\beta}\in P\ \big(\forall\overline{\alpha}\in P\ \big(\varphi(\overline{m},n,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)\wedge\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)$$

  und damit

  $$\mathfrak{M}^+\models\exists y\exists\overline{\beta}\in P\ \big(\forall\overline{\alpha}\in P\ \big(\varphi(\overline{m},y,\overline{\alpha})\longleftrightarrow\theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)\wedge\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\big)$$

Da y keine freie Variable von $\left(\overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right)$ ist, folgt:

$$\mathfrak{M}^+ \models \exists\overline{\beta}\in P\ \left(\exists y\forall\overline{\alpha}\in P\ \left(\varphi(\overline{m},y,\overline{\alpha}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right) \wedge \overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right)$$

und aus $\vdash \left(\exists y\forall\overline{\alpha}\ \chi(\overline{x},y,\overline{\alpha}) \longrightarrow \forall\overline{\alpha_0}\ldots\forall\overline{\alpha_{K-1}}\ \exists y \bigwedge_{i<K}\chi(\overline{x},y,\overline{\alpha_i})\right)$ für alle Formeln $\chi(\overline{x},y,\overline{\alpha})$ und alle $K<\omega$ folgt $\mathfrak{M}^+ \models \psi'(\overline{m})$.

- „$\longleftarrow$“: Gelte $\mathfrak{M}^+ \models \psi'(\overline{m})$ für $\overline{m}\in M$. Also existiert $\overline{b}\in I$ mit

  $$\mathfrak{M}^+ \models \left(\forall\overline{\alpha_0}\in P\ldots\forall\overline{\alpha_{K-1}}\in P\ \exists y \bigwedge_{i<K}\left(\varphi(\overline{m},y,\overline{\alpha_i}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha_i},\overline{b})\right) \wedge \overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{b})\right)$$

  Damit ist aber nun $\{\varphi(\overline{m},y,\overline{a}) \longleftrightarrow \theta(\overline{a},\overline{b}) \mid \overline{a}\in I\}$ K-konsistent und somit nach Satz 4.4.3 konsistent.
  Nach Lemma 4.3.1 existiert dann ein $n\in M$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \forall\overline{\alpha}\in P\ \left(\varphi(\overline{m},n,\overline{\alpha}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha},\overline{b})\right)$. Also $\mathfrak{M}^+ \models \exists\overline{\beta}\in P\ \left(\forall\overline{\alpha}\in P\ \left(\varphi(\overline{m},n,\overline{\alpha}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right) \wedge \overline{Q}\overline{\alpha}\in P\ \theta(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right)$ und damit $\mathfrak{M}^+ \models \exists y\Phi(\overline{m},y)$.

Nun ist die Formel $\bigwedge_{i<K}\left(\varphi(\overline{m},y,\overline{\alpha_i}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha_i},\overline{b})\right)$ einfach und damit ist $\exists y\bigwedge_{i<K}\left(\varphi(\overline{m},y,\overline{\alpha_i}) \longleftrightarrow \theta(\overline{\alpha_i},\overline{b})\right)$ nach Satz 4.2.2 äquivalent zu einer P-beschränkten Formel. $\square$

Kapitel 5

Folgerungen

5.1 Elemenare Äquivalenz der erweiterten Struktur

Korollar 5.1.1 *Seien $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ zwei L-Strukturen ohne UE mit Ordnungsindiscernibles $I \subset M$ und $J \subset N$ vom Ordungstyp einer dichten Ordnung und vom selben L-Typ. $(M, I, <^{\mathfrak{M}})$ und $(N, J, <^{\mathfrak{N}})$ seien klein. Dann ist $(M, I, <^{\mathfrak{M}}) \equiv (N, J, <^{\mathfrak{N}})$.*

Beweis. Hierzu benötigt man für jede L^+-Formel eine in beiden Modellen äquivalente P-beschränkte Formel. Im Beweis von Satz 4.5.1 gehen an zwei Stellen der Konstruktion für das jeweilige Modell spezifische Größen in die Argumentation ein: Die Wahl der Definitionsersetzung über I und die Größe von K. Nach Satz 3.4.4 hängt für eine L-Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{\alpha})$ die Definitionsersetzung über I nur von der nicht im Modell realisierten m-UE von $\gamma(\overline{x}, \overline{\alpha})$ ab. Da letzeres aber in der Theorie des Modells steht und nach Voraussetztung $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ gilt, erhält man für jedes L-Formel $\gamma(\overline{x}, \overline{\alpha})$ in beiden Strukturen dieselbe Definitionsersetzung über I. Aus dem Beweis von Korollar 3.4.5 geht hervor, daß sich das auf einfache Formeln überträgt. Nun muß man nur noch im Beweis von Satz 4.5.1 von in beiden Modellen möglicherweise verschiedenen K das größere wählen, um eine P-beschränkte Formel zu erhalten, die in beiden Modellen äquivalent zur ursprünglichen L^+-Formel ist.
Mit Satz 3.2.4 erhält man nun die Behauptung. □

5.2 Elementare Erweiterungen

Korollar 5.2.1 *Sei $\mathfrak{M}$ eine L-Struktur ohne UE und I eine Folge von Indiscernibles in M. Außerdem sei $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ und sowohl $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}})$, als auch $(\mathfrak{N}, I, <^{\mathfrak{N}})$ seien klein. Dann gilt: $(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{M}}) \prec (\mathfrak{N}, I, <^{\mathfrak{N}})$.*

Beweis. Zu zeigen: Für alle L^+-Formeln $\varphi(\overline{x})$ und alle $\overline{m} \in M$ gilt:

$$(\mathfrak{M}, I, <^{\mathfrak{I}}) \models \varphi(\overline{m}) \ \text{ genau dann, wenn } \ (\mathfrak{N}, I, <^{\mathfrak{I}}) \models \varphi(\overline{m})$$

Induktion über den Aufbau der Formeln:
$\varphi(\overline{x})$ L-Formel: Gilt wegen $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

$\varphi(\overline{x})$ $<$-Formel: Gilt wegen $(\mathfrak{N}, <^{\mathfrak{N}}) \upharpoonright M = (\mathfrak{M}, <^{\mathfrak{M}})$ und der Modellvollständigkeit von Φ_{dOA} aus Satz 4.1.5.
Boolesche Kombinationen: klar.
Sei $\varphi(\overline{x}) = \exists y \in P \psi(\overline{x}, y)$ und $\overline{m} \in M$.
Gelte $\mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m})$. Dann existiert ein $a \in I$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \psi(\overline{m}, a)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{N}^+ \models \psi(\overline{m}, a)$, also auch $\mathfrak{N}^+ \models \varphi(\overline{m})$.
Gelte $\mathfrak{N}^+ \models \varphi(\overline{m})$. Dann existiert ein $a \in I$ mit $\mathfrak{N}^+ \models \psi(\overline{m}, a)$. Da a damit in M liegt, gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{M}^+ \models \psi(\overline{m}, a)$ und damit $\mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{m})$.
Da es, wie im Beweis von Korollar 5.1.1 gezeigt, für jede Formel L^+-Formel eine in $\mathfrak{M}^+$ und $\mathfrak{N}^+$ äquivalente P-beschränkte Formel gibt, folgt das zu zeigende für alle L^+-Formeln. $\square$

Literaturverzeichnis

[A] THEODOR W. ADORNO: *Zur Metakritik der Erkenntnistheorie.* Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1970

[B] DIRK BAECKER: *Die Form des Unternehmens.* Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1999

[H] WERNER HEISENBERG: *Der Teil und das Ganze.* R. Piper & Co. Verlag, München 1969

[K] PIERRE KLOSSOWSKI: *Nietzsche und der Circulus vitiosus deus.* Matthes & Seitz Verlag, München 1986

[N] FRIEDRICH NIETZSCHE: *Unzeitgemäße Betrachtungen.* Alfred Kröner Verlag, Leipzig 1930 [1873]

[1] JOHN BALDWIN, MICHAEL BENEDIKT: *Stability theory, Permutations of Indiscernibles, and Embedded Finite Models.* Transactions of the American Mathematical Society 352 (2000), 4937-4969

[2] ENRIQUE CASANOVAS, MARTIN ZIEGLER: *Stable theories with a new predicate.* The Journal of Symbolic Logic 66 (2001), 1127-1140

[3] J. F. KNIGHT, A. PILLAY, C. STEINHORN: *Definable sets in ordered structures.* Transactions of the American Mathematical Society 295 (1986), 593-605

[4] K. SCH. KUDAIBERGENOV: *O Svojstve Nesawisimosti.* Sibirskij Mathematitscheskij Schurnal 41 (2000), 134-135; englische Übersetzung in: *On the independence property.* Siberian Mathematical Journal 41 (2000), 113

[5] S.SHELAH: *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models.* North-Holland Publishing Company, 1978

[6] J. E. BAUMGARTNER: *Almost disjoint sets, the dense problem and partition calculus.* Anals of Marhematic Logic 9 (1976), 401-439

Index

Symbole

$\overline{a}^{\Omega}$, 2
$|\overline{a}|$, 2
$\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, 2
$\mathrm{tp}(\overline{a})$, 2
$\mathcal{P}(A)$, 2
$L_{<}$, 7
$<$-Formel, 7
$>$, 7
$\geq$, 7
$\leq$, 7
Φ_{do}, 7
$p_a(x)$, 8
$p_{-\infty}(x)$, 8
$p_{\infty}(x)$, 8
$p_{a-}(x)$, 8
$p_{a+}(x)$, 8
$p_{\oslash}(x)$, 8
$<$-Typ, 9
$(<, A)$-Äquivalenzklasse, 9
$\mathrm{tp}(E)$, 9
p_n, 10
$p_{\leq n}$, 11
π_n, 11
Π_n, 11
$\pi_{>n}$, 11
$\mathcal{S}(I)$, 11
$<^{\mathcal{S}}$, 11
$\mathcal{T}$, 16
$\mathcal{O}$, 17
2-indiscernible, 22
r_R, 22
Φ_{ZGph}, 27
$\hat{\gamma}_{i,j}$, 29
$\check{\gamma}_{i,j}$, 29
L^+, 33
$\mathfrak{M}^+$, 33
T^+, 33
Ω-Clique, 40
$\Phi_I(x)$, 43
Φ_{dOA}, 44
σ-Randpunktfolge, 48

Stichwörter

Äquivalenzklasse
    $(<, A)$-, 9

Clique
    Ω-, 40

Dedekind-vollständige Ordnung, 12
Definierbarkeit
    von Typen, 15
Definitionsersetzung, 37
dichte Einbettung, 12
dichte Ordnung, 7
    mit Außenbereich, 44

echter Schnitttyp, 8
Einbettung, 12
    dichte, 12
einfache Formel, 35
Elementtyp, 8
endliche Überdeckungseigenschaft, 48
erweiterte Struktur, 33

Folge
    2-indiscernible, 22
Formel
    $<$-Formel, 7
    einfache, 35
    ohne m-Unabhängigkeitseigenschaft, 25
    ohne Unabhängigkeitseigenschaft, 25
    P-beschränkte, 35

Graph, 27
    Zufallsgraph, 27

indiscernible
    2-indiscernible, 22
Intervall, 7
    offenes, 7

K-konsistent, 48
kleine Struktur, 43
konvexe Menge, 7

Länge
    eines Tupels, 2
    eines Weges, 18
lexikographisches Produkt, 7
L-Theorie, 1
L-Typ, 1
    einer Indiscerniblefolge, 33
    partieller, 1

Menge
    konvexe, 7

Nachbartyp
    negativer, 8
    positiver, 8

offenes Intervall, 7
o-minimale Struktur, 32
o-minimale Theorie, 32
Ordnung
    dichte, 7
        mit Außenbereich, 44
    vollständige dichte, 12
Ordnungstopologie, 16

Pandpunkt, 19
P-Beschränkung
    von Formeln, 35
    von Quantoren, 34
Produkt
    lexikographisches, 7
Produkttopologie, 17
Projektion, 10
    einer Koordinate, 11
    konstante, einer Koordinate, 10
    konstante, mehrerer Koordinaten, 11
    mehrerer Koordinaten, 11

Quantor
    P-beschränkter, 34

Randpunktfolge, 20
    maximale, 20
    σ-, 48
Randpunktsicherungsfolge, 49

Schnitt, 11
  realisierter, 12
Schnitttyp
  echter, 8
Struktur
  erweiterte, 33
  kleine, 43
  o-minimale, 32

Teilbarkeitsrelation, 27
Theorie
  L-Theorie, 1
  ohne Unabhängigkeitseigenschaft, 25
  o-minimale, 32
Topologie
  durch eine Ordnung induzierte, 16
  im Produktraum, 17
Typ
  $<$-Typ, 9
  echter Schnitttyp, 8
  einer $(<, A)$-Äquivalenzklasse, 9
  Elementtyp, 8
  L-Typ, 1
    einer Indiscerniblefolge, 33
    paritieller, 1
  negativer Nachbartyp, 8
  positiver Nachbartyp, 8
  unendlich negativer, 8
  unendlich positiver, 8

Überdeckungseigenschaft
  endliche, 48
Unabhängigkeitseigenschaft
  m-, einer Formel, 25
  einer Formel, 25
  einer Theorie, 25

Vervollständigung
  einer dichten Ordnung, 14
vollständige dichte Ordnung, 12

Weg, 18
  Länge, 18

Zufallsgraph, 27
zusammenhängend
  Teilmenge, 16
  Topologischer Raum, 16

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Mittel und Quellen angefertigt zu haben.