Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematische Fakultät

Über gewisse Klassen von mehrfach bewerteten Körpern

Diplomarbeit
von
Bernd Kapp

eingereicht am
Institut für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik
vorgelegt bei
Prof. Dr. M. Ziegler

Freiburg, im Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **5**

1 Grundlegende Definitionen und Resultate **9**

1.1 Bewertungstheorie . . . 9
1.2 Algebraische Geometrie . . . 14
1.3 Mengentheoretische Topologie . . . 20
1.4 Modelltheorie . . . 21

2 Boolesche mehrfach bewertete Körper **25**

2.1 Die kanonische Topologie und der Holomorphiering eines mehrfach bewerteten Körpers . . . 25
2.2 Die Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$ . . . 32
2.3 Boolesche mehrfach bewertete Körper und ihr Holomorphiering . . . 41
2.4 Beispiele . . . 49
2.5 Approximationssätze für Boolesche mehrfach bewertete Körper . . . 58
2.6 Fortsetzungen von Booleschen Mengen von Bewertungsringen auf Oberkörper . . . 64
2.7 Anmerkungen zu Kapitel 2 . . . 71

3 Regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper **73**

3.1 Definition und äquivalente Eigenschaften . . . 73
3.2 Algebraische Oberkörper regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper . . . 84
3.3 Formal reelle Boolesche regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper . . . 94
3.4 Boolesche regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper mit BAP . . . 98
3.5 Existenz regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper . . . 105
3.6 Anmerkungen zu Kapitel 3 . . . 109

Literaturverzeichnis **111**

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im weitesten Sinne mit dem Studium gewisser Klassen von mehrfach bewerteten Körpern.

Unter einem mehrfach bewerteten Körper versteht man ein Paar (K, W), das aus einem Körper K und einer Menge W von Bewertungsringen des Körpers K besteht.

Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, so läßt sich, wie wir in Abschnitt 2.1 sehen werden, auf der zu (K, W) gehörenden Menge W von Bewertungsringen auf natürliche Art und Weise eine Topologie – die zu W bzw. die zu (K, W) gehörende, sogenannte kanonische Topologie – definieren.

In den beiden Artikeln [Er4] und [Er6] hat sich Yu.L. Ershov ausführlich mit solchen mehrfach bewerteten Körpern (K, W) befaßt, deren wesentliche Eigenschaft darin besteht, daß es sich bei der zu (K, W) gehörenden Menge W von Bewertungsringen bezüglich der obigen Topologie um einen sogenannten Booleschen topologischen Raum handelt. Den Ausgangspunkt für Ershovs Interesse an diesen von ihm als Boolesch bezeichneten mehrfach bewerteten Körpern bildete die Beobachtung, daß es sich bei einigen relativ prominenten Klassen von mehrfach bewerteten Körpern, etwa bei der Klasse $\mathfrak{K}_e$ aller mehrfach bewerteten Körper (K, W), deren zugehörige Menge W aus lediglich endlich vielen (paarweise unvergleichbaren) Bewertungsringen besteht oder für jede Primzahl p bei der Klasse $\mathfrak{K}_p$ aller mehrfach bewerteten Körper (K, W), deren zugehörige Menge W aus allen p-Bewertungsringen von K besteht, um im obigen Sinne Boolesche mehrfach bewertete Körper handelt. Aus dieser Beobachtung resultierte die Hoffnung, daß es möglich sein müsse, diverse Resultate über gewisse Teilklassen von $\mathfrak{K}_e$, $\mathfrak{K}_p$; $p \in \mathbb{P}, \ldots$ auf die entsprechenden, jedoch jeweils weit größeren Teilklassen der Klasse $\mathfrak{K}_B$ aller Booleschen mehrfach bewerteten Körper zu verallgemeinern. Daß diese Hoffnung nicht gänzlich unbegründet war, wird nicht zuletzt durch die stattliche Anzahl von Artikeln belegt, die Ershov in der Zwischenzeit zu diesem Themenkreis veröffentlicht hat (s. z. B. [Er5] bis [Er11], um nur einige zu nennen).

Neben der Verallgemeinerung von einigen eher klassischen Resultaten, wie z. B. des wohlbekannten Approximationstheorems für endlich viele paarweise unabhängige Bewertungsringe, beinhalten diese Artikel vornehmlich Verallgemeinerungen gewisser, hauptsächlich in den 70er und 80er Jahren erzielter Ergebnisse über solche mehrfach bewerteten Körper aus $\mathfrak{K}_e$, $\mathfrak{K}_p$; $p \in \mathbb{P}, \ldots$, die gewissen algebraisch-geometrischen bzw. gewissen modelltheoretischen Lokal-Global Prinzipien genügen (sog. regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper).

Was nun die vorliegende Arbeit anbelangt, so liegt dieser als ein roter Faden die Durchführung des aus den folgenden beiden Punkten (1) und (2) bestehenden Programms zugrunde:

(1) Entwicklung der Grundzüge der Theorie der Booleschen mehrfach bewerteten Körper.

(2) Verallgemeinerung einiger die Klassen $\mathfrak{K}_e$ und $\mathfrak{K}_p$; $p \in \mathbb{P}$ im allgemeinen sowie die Klasse der regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körper aus $\mathfrak{K}_e$ im besonderen betreffenden Resultate zu Ergebnissen über Boolesche (regulär abgeschlossene) mehrfach bewertete Körper.

Darüberhinaus enthält die Arbeit, etwa mit Satz 2.1.3, der besagt, daß für jeden Körper K die Menge aller Bewertungsringe von K bezüglich der kanonischen Topologie quasikompakt ist oder mit der in Satz 3.3.2 angegebenen Charakterisierung derjenigen regulär abgeschlossenen Booleschen mehrfach bewerteten Körper, die formal reell sind, einige (vielleicht) interessante Resultate, die sich keinem der beiden oben genannten Punkte (1) und (2) eindeutig zuordnen lassen.

Ganz allgemein wäre vielleicht noch zu sagen, daß ich mich aus Zeit- und Platzgründen auf die Darstellung lediglich eines Bruchteils des zum Thema „Boolesche (regulär abgeschlossene) mehrfach bewertete Körper“ mittlerweile vorliegenden Materials beschränken mußte und daß ich bei der Auswahl solche Ergebnisse bevorzugt habe, die nicht bereits in aller Ausführlichkeit in einem der oben genannten Artikel abgehandelt werden (auch wenn diesem Auswahlkriterium einige, wie ich finde, sehr schöne Ergebnisse, wie z. B. das in [Er8] bewiesene Theorem 3, welches in Form eines seiner Spezialfälle besagt, daß es zu jedem Booleschen topologischen Raum X einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) gibt, für den W (versehen mit der kanonischen Topologie) und X homöomorph sind, zum Opfer fielen).

Da aus den Überschriften der einzelnen Kapitel und Abschnitte stets relativ klar hervorgeht, wovon diese jeweils handeln, möchte ich an dieser Stelle auf eine zu sehr ins Detail gehende Darstellung des inhaltlichen Aufbaus der Arbeit verzichten und mich lediglich mit den folgenden kurzen, die Kapitel 1 bis 3, aus denen diese Arbeit besteht, betreffenden Bemerkungen begnügen:

Im einleitenden ersten Kapitel werden in knapper Form einige für das Verständnis dieser Arbeit notwendige Konzepte und Resultate aus den Bereichen Bewertungstheorie, algebraische Geometrie, Topologie und Modelltheorie bereitgestellt.

Das zweite Kapitel ist dann zum einen der nahezu vollständigen Durchführung des ersten sowie zum andern der Durchführung desjenigen Teils des zweiten der obigen beiden Programmpunkte gewidmet, der sich mit der Darstellung einiger weiter oben als klassisch bezeichneter Resultate im erweiterten Kontext Boolescher mehrfach bewerteter Körper beschäftigt.

Das dritte Kapitel schließlich befaßt sich mit regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körpern im allgemeinen sowie (unter besonderer Berücksichtigung der im Programmpunkt (2) formulierten Thematik) mit Booleschen regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körpern im besonderen.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß ich den beiden Kapiteln 2 und 3 einige kurze Anmerkungen hintan gestellt habe, in denen jeweils angegeben wird, woher die Ergebnisse, die im entsprechenden Kapitel behandelt werden, stammen.

Für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit möchte ich mich bei Herrn PD Dr. Bernhard Herwig und bei Herrn Prof. Dr. Martin Ziegler bedanken.

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen und Resultate

1.1 Bewertungstheorie

Es folgt eine kurze Auflistung einiger grundlegender Begriffe und Ergebnisse aus dem Bereich der Bewertungstheorie. Was die Beweise der weiter unten zitierten Resultate anbelangt, so verweisen wir hierfür auf das Buch „Valuation Theory“ von O. Endler ([En]).

Mit **Ringen** sind in dieser Arbeit stets kommutative Ringe gemeint, die ein von ihrem Nullelement 0 verschiedenes Einselement 1 besitzen. Gemäß dieser Konvention betrachten wir im Zusammenhang mit einem Körper K lediglich solche Unterringe von K, die das Nullelement 0 und das Einselement 1 von K enthalten. Ist R ein Unterring eines Körpers K und ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, welche die 1 enthält und die 0 nicht enthält, so handelt es sich bei $S^{-1}R := \{r/s \mid r \in R, s \in S\}$ um einen Unterring von K und bei R um einen Unterring von $S^{-1}R$. $S^{-1}R$ wird als der zu S gehörende **Quotientenring** von R bezeichnet. Ist $S := R \setminus \{0\}$, so ist $Q(R) := S^{-1}R$ ein Unterkörper von K; $Q(R)$ wird der **Quotientenkörper** von R genannt. Ist $\mathcal{P}$ ein Primideal von R, so ist $S := R \setminus \mathcal{P}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, für die $1 \in S$ und $0 \notin S$ gilt. Der zugehörige Quotientenring $S^{-1}R$ wird mit $R_{\mathcal{P}}$ bezeichnet und die zu $\mathcal{P}$ gehörende **Lokalisierung** von R genannt. Vom Ideal $\mathcal{P} \cdot R_{\mathcal{P}}$ des Ringes $R_{\mathcal{P}}$ läßt sich leicht nachweisen, daß es sich bei ihm um das einzige maximale Ideal von $R_{\mathcal{P}}$ handelt und daß $(\mathcal{P} \cdot R_{\mathcal{P}}) \cap R = \mathcal{P}$ ist. Ringe R, die genau ein maximales Ideal besitzen oder, was dasselbe besagt, für die gilt, daß es sich bei den Nichteinheiten von R um ein Ideal von R bzw. um das maximale Ideal von R handelt, werden als **lokale** Ringe bezeichnet.

Im Zusammenhang mit einem Unterring R eines Körpers K sagt man von einem Element a aus K, es sei **ganz über R**, falls ein normiertes Polynom f aus $R[X]$ existiert, für das $f(a) = 0$ gilt. Die über R ganzen Elemente von K

bilden einen Unterring $I_K(R)$ von K, der R umfaßt und den man als den **ganzen Abschluß von R in K** bezeichnet. Von einem Unterring R eines Körpers K, für den $R = I_K(R)$ gilt, sagt man, er sei **in K ganz abgeschlossen**.

Ein Unterring $\mathcal{O}$ eines Körpers K heißt **Bewertungsring** von K, falls für jedes Element a aus K^* das Element a oder das Element a^{-1} in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Für jeden Körper K wird der Bewerungsring $\mathcal{O} = K$ als der **triviale** Bewertungsring von K bezeichnet und jeder Bewertungsring $\mathcal{O} \subsetneq K$ ein **nichttrivialer** Bewertungsring von K genannt. Ein Paar $(K, \mathcal{O})$, bestehend aus einem Körper K und einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K, heißt **bewerteter Körper**.

Bei Bewertungsringen von Körpern handelt es sich um lokale Ringe. Das maximale Ideal eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ eines Körpers K bezeichnen wir von nun an stets mit $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. Bei dem zu $\mathcal{O}$ und $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ gehörenden Restklassenring $\mathcal{O}/\mathcal{M}(\mathcal{O})$ handelt es sich wegen der Maximalität von $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ um einen Körper, den wir von nun an stets mit $k_{\mathcal{O}}$ bezeichnen wollen. Man nennt $k_{\mathcal{O}}$ den zu $\mathcal{O}$ bzw. den zu $(K, \mathcal{O})$ gehörenden **Restklassenkörper**.

Für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ handelt es sich bei der Einheitengruppe $\mathcal{O}^*$ von $\mathcal{O}$ um eine Untergruppe der Einheitengruppe K^* von K und bei der zugehörigen Faktorgruppe $K^*/\mathcal{O}^*$, die wir von nun an stets mit $\Gamma_{\mathcal{O}}$ bezeichnen wollen, um eine abelsche Gruppe. In Zukunft bezeichnen wir die (von der Multiplikation der Gruppe K^* induzierte) Multiplikation auf $\Gamma_{\mathcal{O}}$ mit einem $+$ und das neutrale Element $1 \cdot \mathcal{O}^*$ von $\Gamma_{\mathcal{O}}$ mit 0. Wir folgen dabei der Konvention, die besagt, daß man im Falle einer abelschen Gruppe $(G, \cdot)$ die Verknüpfung $\cdot$ mit einem $+$ und das neutrale Element mit 0 bezeichnen soll. Durch die Festsetzung $a\mathcal{O}^* < b\mathcal{O}^* :\Leftrightarrow ba^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{O});\ a, b \in K^*$, wird auf $\Gamma_{\mathcal{O}}$ eine lineare Ordnung definiert, für welche die beiden Identitäten $\{a \in K^* \mid 0 \leq a\mathcal{O}^*\} = \mathcal{O} \setminus \{0\}$ und $\{a \in K^* \mid 0 < a\mathcal{O}^*\} = \mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ gelten. Außerdem ist $<$ auf die im Zusammenhang mit Gruppen übliche Art und Weise mit der Verknüpfung $+$ verträglich; es gilt also für alle Elemente $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{\mathcal{O}}$, daß aus $\gamma_0 < \gamma_1$ stets $\gamma_0 + \gamma_2 < \gamma_1 + \gamma_2$ folgt. Wir wollen uns von nun an die zu einem bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ gehörende Faktorgruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ stets mit der obigen Ordnung $<$ versehen denken und unter einem **positiven** Element von $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ein Element γ aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$ verstehen, für das $0 < \gamma$ gilt.

Diejenige Abbildung mit Definitionsbereich K, die auf K^* mit dem kanonischen Epimorphismus von K^* auf $\Gamma_{\mathcal{O}}$ übereinstimmt und die das Nullelement 0 von K auf ein (nicht in $\Gamma_{\mathcal{O}}$ enthaltenes) Symbol ∞ abbildet, bezeichnen wir von nun an mit $v_{\mathcal{O}}$. Man nennt $v_{\mathcal{O}}$ die zum bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ gehörende **Bewertung**. Die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ wird üblicherweise als die zu $(K, \mathcal{O})/v_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ gehörende **Wertegruppe** bezeichnet.

Für die zu einem bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ gehörende Bewertung $v_{\mathcal{O}}$ gilt die sich aus der Homomorphie des kanonischen Epimorphismusses von K^* auf $\Gamma_{\mathcal{O}}$ und der Konvention $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty;\ \gamma \in \Gamma_{\mathcal{O}}$ ergebende Gleichung

$$v_{\mathcal{O}}(ab) = v_{\mathcal{O}}(a) + v_{\mathcal{O}}(b);\ a, b \in K,$$

aus der insbesondere die beiden Gleichungen

$$v_{\mathcal{O}}(1) = 0$$

und

$$v_{\mathcal{O}}(a^{-1}) = -v_{\mathcal{O}}(a);\; a \in K^*$$

folgen. Wenn man vom Symbol ∞ darüberhinaus annimmt, daß es größer als alle Elemente γ aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ist, so gilt zusätzlich die folgende, später oft verwendete Ungleichung

$$v_{\mathcal{O}}(a+b) \geq \min\{v_{\mathcal{O}}(a), v_{\mathcal{O}}(b)\};\; a, b \in K,$$

die ihrerseits zur Gleichung wird, falls die Elemente $v_{\mathcal{O}}(a)$ und $v_{\mathcal{O}}(b)$ verschieden sind.

Schließlich und endlich gelten (mit den obigen beiden, das Symbol ∞ betreffenden Konventionen) die beiden Identitäten $\mathcal{O} = \{a \in K \mid v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0\}$ und $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \{a \in K \mid v_{\mathcal{O}}(a) > 0\}$.

Was nun die Existenz von Bewertungsringen von Körpern anbelangt, so gilt folgender Sachverhalt:

Fakt 1.1.1 *Für jeden Unterring R eines Körpers K und für jedes Primideal $\mathcal{P}$ von R gibt es einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K, der R umfaßt und für den $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R = \mathcal{P}$ ist.*

Ist $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper und ist K_0 ein beliebiger Oberkörper von K, so wird jeder Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0, für den $\mathcal{O}_0 \cap K = \mathcal{O}$ gilt, als eine **Fortsetzung** von $\mathcal{O}$ auf K_0 bezeichnet. Man prüft leicht nach, daß es sich bei einem Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0 genau dann um eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf K_0 handelt, wenn $\mathcal{O}$ von $\mathcal{O}_0$ umfaßt wird und wenn $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap \mathcal{O} = \mathcal{M}(\mathcal{O})$ ist. Hieraus ergibt sich unter Verwendung von Fakt 1.1.1, daß zu jedem bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ sowie zu jedem Oberkörper K_0 von K ein Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0 existiert, der $\mathcal{O}$ fortsetzt.

Sind $(K, \mathcal{O})$ und $(K_0, \mathcal{O}_0)$ zwei bewertete Körper, für die gilt, daß es sich bei K_0 um einen Oberkörper von K sowie bei $\mathcal{O}_0$ um eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ handelt, so schreiben wir hierfür kurz $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ und sprechen in diesem Zusammenhang in Zukunft von einer **Erweiterung** bewerteter Körper.

Im Falle einer Erweiterung $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ bewerteter Körper handelt es sich bei der (wohldefinierten!) Abbildung $a + \mathcal{M}(\mathcal{O}) \to a + \mathcal{M}(\mathcal{O}_0)$; $a \in \mathcal{O}$ um eine Einbettung des Restklassenkörpers $k_{\mathcal{O}}$ in den Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}_0}$ sowie bei der (ebenfalls wohldefinierten) Abbildung $v_{\mathcal{O}}(a) \to v_{\mathcal{O}_0}(a)$; $a \in K^*$ um eine Einbettung der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ in die Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$, die ordnungserhaltend ist. In dieser Situation werden wir von nun an, indem wir $k_{\mathcal{O}}$ und $\Gamma_{\mathcal{O}}$ mit ihren zu den obigen Einbettungen gehörenden Bildern identifizieren, $k_{\mathcal{O}}$ als Unterkörper von $k_{\mathcal{O}_0}$ und $\Gamma_{\mathcal{O}}$ als Untergruppe von $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$ auffassen, wobei dann im Falle der Wertegruppen die Ordnung $<$ von $\Gamma_{\mathcal{O}}$ mit der Ordnung übereinstimmt, die von der Ordnung $<_0$ von $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$ auf $\Gamma_{\mathcal{O}}$ induziert wird.

Eine Erweiterung $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ bewerteter Körper, für die $\Gamma_{\mathcal{O}_0} = \Gamma_{\mathcal{O}}$ und $k_{\mathcal{O}_0} = k_{\mathcal{O}}$ ist, wird als **unmittelbar** bezeichnet.

Ist $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper und ist K_0 ein Oberkörper von K, so besitzt $\mathcal{O}$, wie wir weiter oben festgestellt haben, stets mindestens eine, jedoch i. a. sogar mehr als eine Fortsetzung auf K_0. Letzteres ist z. B. immer dann (aber nicht ausschließlich dann) der Fall, wenn es sich bei $K \leq K_0$ um eine transzendente Körpererweiterung handelt. Ein bewerteter Körper $(K, \mathcal{O})$ heißt **Henselsch**, falls für jeden über K algebraischen Oberkörper K_0 von K genau ein Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0 existiert, der $\mathcal{O}$ fortsetzt.

Henselsch bewertete Körper lassen sich u. a. auf die folgende Art und Weise charakterisieren:

Fakt 1.1.2 (sog. Henselsches Lemma) *Für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) $(K, \mathcal{O})$ ist Henselsch.

(2) Zu jedem normierten Polynom f aus $\mathcal{O}[X]$, für das ein a aus $\mathcal{O}$ mit $f(a) \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ und $f'(a) \in \mathcal{O}^*$ existiert, gibt es ein b aus $\mathcal{O}$, für das $f(b) = 0$ ist und $b - a$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ liegt.

Unter einer **Henselschen Hülle** eines bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$ versteht man einen bewerteten Körper $(K_0, \mathcal{O}_0) \geq (K, \mathcal{O})$, der die folgende universelle Eigenschaft besitzt:

> Für jede Einbettung μ von $(K, \mathcal{O})$ in einen Henselsch bewerteten Körper $(K', \mathcal{O}')$ gibt es genau eine Einbettung μ_0 von $(K_0, \mathcal{O}_0)$ in $(K', \mathcal{O}')$, die μ fortsetzt.

Dabei versteht man im Zusammenhang mit zwei bewerteten Körpern $(K, \mathcal{O})$ und $(K_0, \mathcal{O}_0)$ unter einer Einbettung von $(K, \mathcal{O})$ in $(K_0, \mathcal{O}_0)$ eine Einbettung μ des Körpers K in den Körper K_0, für die $\mu(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_0 \cap \mu(K)$ ist bzw. für die $(\mu(K), \mu(\mathcal{O})) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ gilt.

Fakt 1.1.3 *Jeder bewertete Körper $(K, \mathcal{O})$ besitzt eine Henselsche Hülle.*

Aus der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle folgt, daß es zu je zwei Henselschen Hüllen $(K_0, \mathcal{O}_0)$ und $(K_1, \mathcal{O}_1)$ eines bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$ stets einen und nur einen Isomorphismus μ von $(K_0, \mathcal{O}_0)$ auf $(K_1, \mathcal{O}_1)$ gibt, der K (punktweise) festläßt. Außerdem gilt, daß es im Zusammenhang mit einer Erweiterung $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ bewerteter Körper mit Henselschem $(K_0, \mathcal{O}_0)$

stets genau eine Henselsche Hülle $(K', \mathcal{O}')$ von $(K, \mathcal{O})$ gibt, für die $(K', \mathcal{O}') \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ gilt.

Die auf die oben angegebene Art und Weise eindeutig bestimmte(n) Henselsche(n) Hülle(n) eines bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$ werden von nun an stets mit $(K, \mathcal{O})^H$ oder auch mit $(H_{\mathcal{O}}(K), \mathcal{O}^H)$ bezeichnet.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die folgenden zusätzlichen Eigenschaften der Henselschen Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ eines bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$ benötigt:

Fakt 1.1.4 *Für jede Henselsche Hülle* $(K, \mathcal{O})^H = (H_{\mathcal{O}}(K), \mathcal{O}^H)$ *eines bewerteten Körpers* $(K, \mathcal{O})$ *gilt:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq H_{\mathcal{O}}(K)$ *ist separabel algebraisch.*

(2) Bei $(K, \mathcal{O}) \leq (K, \mathcal{O})^H$ *handelt es sich um eine unmittelbare Erweiterung bewerteter Körper.*

1.2 Algebraische Geometrie

Es folgt eine kurze Zusammenstellung einiger fundamentaler Konzepte und Resultate aus dem Bereich der algebraischen Geometrie. Wir halten uns dabei im Wesentlichen an das 9. Kapitel „Elements of algebraic geometry“ aus [Fr-Ja], das sich seinerseits, was die grundlegenden Definitionen, Sprechweisen und Bezeichnungen anbelangt, an denen der beiden Bücher [La1] und [We] orientiert. Für jedes der weiter unten aufgeführten Resultate findet sich jeweils in mindestens einer der drei oben angegebenen Quellen ein Beweis.

Es sei K ein Körper, und es sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K, dessen Transzendenzgrad über K mindestens abzählbar unendlich ist. Diese beiden Eigenschaften des Oberkörpers Ω sind zusammengenommen gleichbedeutend damit, daß sich jeder Oberkörper L von K, für den der Transzendenzgrad der Körpererweiterung $K \leq L$ höchstens abzählbar ist, über K in Ω einbetten läßt. Den algebraischen Abschluß von K (in Ω) bezeichnen wir von nun an, wie allgemein üblich, mit $\tilde{K}$, und wenn im weiteren Verlauf dieses Abschnittes von Körpern L oder von Oberkörpern L von K die Rede ist, so sind damit stets Unterkörper L von Ω bzw. Zwischenkörper L von K und Ω gemeint, für die der Transzendenzgrad von Ω über L unendlich ist.

1. K-algebraische Mengen: Es sei n eine natürliche Zahl.

Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{A}$ des Polynomringes $K[X_0, \ldots, X_{n-1}] = K[\bar{X}]$ bezeichnet man die Menge

$$A(\mathcal{A}) := \{(\bar{x}) \in \Omega^n \mid f(\bar{x}) = 0 \ \forall f \in \mathcal{A}\}$$

als die zu $\mathcal{A}$ gehörende **K-algebraische Teilmenge** des Ω^n. Eine beliebige Teilmenge A des Ω^n wird **K-algebraisch** genannt, falls es eine Teilmenge $\mathcal{A}$ des Polynomringes $K[\bar{X}]$ gibt, für die $A = A(\mathcal{A})$ ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $K[\bar{X}]$ und ist I das von $\mathcal{A}$ in $K[\bar{X}]$ erzeugte Ideal, so ist $A(\mathcal{A}) = A(I)$. Weil es sich nach dem Hilbertschen Basissatz beim Polynomring $K[\bar{X}]$ um einen Noetherschen Ring handelt, gibt es endlich viele Polynome $f_0, \ldots, f_{k-1}$ aus I bzw. endlich viele Polynome $g_0, \ldots, g_{l-1}$ aus $\mathcal{A}$, die das Ideal I erzeugen und für die daher $A(\mathcal{A}) = A(I) = A(\{f_0, \ldots, f_{k-1}\}) = A(\{g_0, \ldots, g_{l-1}\})$ gilt. Falls $I = K[\bar{X}]$ ist, so ist, weil dann die 1 in I liegt, $A(\mathcal{A}) = A(I) = \emptyset$. Falls es sich hingegen bei I um ein echtes Ideal von $K[\bar{X}]$ handelt, so ist $A(\mathcal{A}) \cap \tilde{K}^n$, und damit insbesondere auch $A(\mathcal{A})$ selbst, nicht leer (sog. schwache Version des Hilbertschen Nullstellensatzes).

Für je zwei Teilmengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ des Polynomringes $K[\bar{X}]$ ist $A(\mathcal{A}) \cup A(\mathcal{B}) = A(\mathcal{A}\mathcal{B})$, wobei mit $\mathcal{A}\mathcal{B}$ die Teilmenge $\{\sum_{i=0}^{k-1}(f_i \cdot g_i) \mid k \in \mathbb{N},\ f_0, \ldots, f_{k-1} \in \mathcal{A},\ g_0, \ldots, g_{k-1} \in \mathcal{B}\}$ von $K[\bar{X}]$ gemeint ist. Für eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von $K[\bar{X}]$ ist $\bigcap_{i \in I} A(\mathcal{A}_i) = A(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)$. Es handelt sich also sowohl bei endlichen Vereinigungen als auch bei beliebigen Durchschnitten K-algebraischer Mengen wiederum um K-algebraische Mengen. Außerdem ist $\emptyset = A(\{1\}) = A(K[\bar{X}])$ und $\Omega^n = A(\emptyset) = A(\{0\})$. Aus alledem folgt, daß diejenigen Teilmengen des Ω^n, die sich als Komplemente K-algebraischer Mengen schreiben lassen, das System der offenen Mengen einer Topologie des Ω^n bilden. Diese Topologie wird als die **K-Zariski-Topologie** des Ω^n bezeichnet. Die bezüglich dieser Topologie abgeschlossenen Mengen sind genau die K-algebraischen Teilmengen des Ω^n. Für eine beliebige Teilmenge B des Ω^n ist mit der **K-Zariski-Topologie auf B** nichts anderes als die von der K-Zariski-Topologie des Ω^n auf B induzierte Topologie gemeint.

Das zu einer beliebigen Teilmenge B des Ω^n gehörende Ideal

$$I_K(B) := \{f \in K[\bar{X}] \mid f(\bar{x}) = 0 \;\forall\, (\bar{x}) \in B\}$$

des Polynomringes $K[\bar{X}]$ wird als das **Verschwindungsideal** von B in $K[\bar{X}]$ bezeichnet.

Die zu $I_K(B)$ gehörende K-algebraische Menge $A(I_K(B))$ ist, wie sich leicht nachprüfen läßt, in jeder K-algebraischen Menge, die B umfaßt, enthalten. Es folgt, daß $A(I_K(B))$ mit dem Durchschnitt aller K-algebraischen Mengen, die B umfassen (bei welchem es sich seinerseits genau um den bezüglich der K-Zariski-Topologie gebildeten Abschluß $\bar{B}$ in Ω^n handelt) identisch ist. Hieraus wiederum ergibt sich insbesondere, daß im Falle einer K-algebraischen Menge A die beiden Mengen $A(I_K(A))$ und A miteinander übereinstimmen. Für eine K-algebraische Menge $A = A(\mathcal{A})$ gilt darüberhinaus, daß es sich beim Verschwindungsideal $I_K(A)$ von A in $K[\bar{X}]$ genau um das zum von $\mathcal{A}$ in $K[\bar{X}]$ erzeugten Ideal I gehörende Radikalideal $\mathrm{Rad}(I) = \{f \in K[\bar{X}] \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } f^k \in I\}$ handelt (sog. starke Version des Hilbertschen Nullstellensatzes).

Ist L ein Oberkörper von K, ist A eine K-algebraische Menge und ist $(\bar{x})$ ein Punkt aus A, dessen Koordinaten $\bar{x}$ allesamt in L liegen, so wird $(\bar{x})$ als ein **L-rationaler Punkt** von A bezeichnet.

2. K-Varietäten: Eine nichtleere K-algebraische Menge A heißt **irreduzibel**, falls sie sich nicht als Vereinigung zweier echter K-algebraischer Teilmengen von A schreiben läßt. Irreduzible K-algebraische Mengen werden oft auch als **K-Varietäten** bezeichnet.

Man prüft leicht nach, daß eine K-algebraische Menge A genau dann eine K-Varietät ist, wenn es sich bei ihrem Verschwindungsideal $I_K(A)$ um ein Primideal von $K[\bar{X}]$ handelt. Außerdem kann man zeigen, daß jede K-algebraische Menge sich auf (wenn man von der Reihenfolge absieht) genau eine Art und Weise als endliche Vereinigung paarweise nicht ineinander enthaltener K-Varietäten schreiben läßt.

Für einen beliebigen Punkt $(\bar{x})$ des Ω^n handelt es sich beim Verschwindungsideal $I_K(\{(\bar{x})\})$ von $(\bar{x})$ in $K[\bar{X}]$ um ein Primideal von $K[\bar{X}]$ sowie beim K-Zariski-Abschluß $V_{(\bar{x})} := A(I_K(\{(\bar{x})\}))$ von $\{(\bar{x})\}$ in Ω^n, wegen $I_K(V_{(\bar{x})}) = I_K(\{(\bar{x})\})$, um eine K-Varietät des Ω^n (von der wir zusätzlich noch wissen, daß es sich bei ihr genau um den Durchschnitt aller K-algebraischen Teilmengen des Ω^n, die $(\bar{x})$ enthalten, handelt). $V_{(\bar{x})}$ wird als die **von $(\bar{\mathbf{x}})$ erzeugte K-Varietät** des Ω^n bezeichnet.

3. Generische Punkte: Für jeden Punkt $(\bar{x})$ einer Teilmenge B des Ω^n ist das Verschwindungsideal $I_K(B)$ von B im Verschwindungsideal $I_K(\{(\bar{x})\})$ des Punktes $(\bar{x})$ in $K[\bar{X}]$ enthalten. Im Falle einer K-Varietät V macht es Sinn, sich die Frage zu stellen, ob V auch solche Punkte $(\bar{x})$ enthält, für welche die beiden Primideale $I_K(V)$ und $I_K(\{(\bar{x})\})$ übereinstimmen. Ein Punkt $(\bar{x})$ der K-Varietät V, für den die Gleichheit $I_K(V) = I_K(\{(\bar{x})\})$ gilt, wird als ein **generischer Punkt** von V bezeichnet. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß sich die generischen Punkte einer K-Varietät V ebensogut als genau diejenigen Punkte $(\bar{x})$ von V charakterisieren lassen, für die $V = V_{(\bar{x})}$ gilt (woraus insbesondere folgt, daß es sich bei jedem Punkt $(\bar{x})$ des Ω^n um einen generischen Punkt der von ihm erzeugten K-Varietät $V_{(\bar{x})}$ handelt).

Aus den obigen beiden, den Oberkörper Ω betreffenden Grundannahmen ergibt sich nun leicht, daß jede K-Varietät V einen generischen Punkt $(\bar{x})$ besitzt. Betrachten wir nämlich den Integritätsbereich(!) $K[\bar{X}]/I_K(V)$ und fassen wir K, indem wir jedes Element a aus K mit dem Element $a + I_K(V)$ aus $K[\bar{X}]/I_K(V)$ identifizieren, als Unterkörper von $K[\bar{X}]/I_K(V)$ auf, so ist $K[\bar{X}]/I_K(V) = K[X_0 + I_K(V), \ldots, X_{n-1} + I_K(V)] = K[\bar{X} + I_K(V)]$, und für alle Polynome f aus $K[\bar{X}]$ gilt die Äquivalenz $f(\bar{X} + I_K(V)) = 0 \Leftrightarrow f \in I_K(V)$. Weil der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers $K(\bar{X} + I_K(V))$ von $K[\bar{X} + I_K(V)]$ über dem Körper K höchstens n und der Transzendenzgrad von Ω über K unendlich ist und weil es sich bei Ω um einen algebraisch abgeschlossenen Körper handelt, gibt es eine K-Einbettung μ von $K(\bar{X} + I_K(V))$ in Ω. Es ist dann klar, daß es sich bei $\mu((\bar{X} + I_K(V)))$ um einen generischen Punkt von V handelt.

Ist $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V und ist $(\bar{y})$ ein beliebiger Punkt von V, so läßt sich die Abbildung $\bar{x} \to \bar{y}$ wegen $I_K(\{(\bar{x})\}) = I_K(V) \subseteq I_K(\{(\bar{y})\})$ zu einem K-Homomorphismus $\sigma : K[\bar{x}] \to K[\bar{y}]$ fortsetzen, der genau dann ein K-Isomorphismus von $K[\bar{x}]$ auf $K[\bar{y}]$ ist, wenn es sich bei $(\bar{y})$ ebenfalls um einen generischen Punkt von V handelt.

Aus der Tatsache, daß für je zwei generische Punkte $(\bar{x})$ und $(\bar{y})$ von V die beiden Ringe $K[\bar{x}]$ und $K[\bar{y}]$, und daher auch die beiden Körper $K(\bar{x})$ und $K(\bar{y})$[1], über K isomorph sind, folgt insbesondere, daß die Transzendenzgrade der beiden Körpererweiterungen $K \leq K(\bar{x})$ und $K \leq K(\bar{y})$ miteinander übereinstimmen. Der Transzendenzgrad der zu einem generischen Punkt $(\bar{x})$ der K-Varietät V gehörenden Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ wird auch als die **Dimension $\mathbf{dim(V)}$** von V bezeichnet. Es ist klar, daß die Dimension einer K-Varietät V des Ω^n stets $\leq n$ ist, und man überlegt sich leicht, daß sie dann und nur dann gleich n ist,

[1]Ein Körper $K(\bar{x})$, der entsteht, indem man einen generischen Punkt $(\bar{x})$ einer K-Varietät V zu K hinzuadjungiert, wird als ein Funktionenkörper von V bezeichnet.

wenn es sich bei $I_K(V)$ um das Nullideal von $K[\bar{X}]$ bzw. bei V um den kompletten Ω^n handelt.

Eine K-Varietät $V \subseteq \Omega^n$ der Dimension $(n-1)$ wird als **K-Hyperfläche** des Ω^n bezeichnet, und man kann zeigen, daß es sich bei einer beliebigen Teilmenge B des Ω^n genau dann um eine K-Hyperfläche des Ω^n handelt, wenn es ein über K irreduzibles Polynom f aus $K[\bar{X}]$ gibt, für das $A = A(\{f\})$ ist.

4. Varietäten: Ist A eine K-algebraische Teilmenge des Ω^n und ist $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $K[\bar{X}]$, für die $A = A(\mathcal{A})$ gilt, so handelt es sich für jeden Körper L, der die Koeffizienten sämtlicher Polynome aus $\mathcal{A}$ enthält, bei A um eine L-algebraische Teilmenge des Ω^n. Ist $V = A(\mathcal{A})$ eine K-Varietät, so handelt es sich für jeden Unterkörper L von K, der die Koeffizienten sämtlicher Polynome aus $\mathcal{A}$ enthält, bei V um eine L-Varietät. Ist V eine K-Varietät, so handelt es sich für einen Oberkörper L von K bei V zwar um eine L-algebraische Menge, jedoch nicht mehr notwendigerweise um eine L-Varietät. Diejenigen K-Varietäten, die für jeden Oberkörper L von K L-Varietäten sind, werden als **absolut irreduzible** K-Varietäten oder auch kurz als **Varietäten** bezeichnet. Ist V eine Varietät und ist $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $K[\bar{X}]$, für die $V = A(\mathcal{A})$ ist, so handelt es sich für jeden Körper L, der die Koeffizienten sämtlicher Polynome aus $\mathcal{A}$ enthält, bei V um eine absolut irreduzible L-Varietät.

Es läßt sich zeigen, daß im Falle einer Varietät V für jeden Oberkörper L von K die Dimension der K-Varietät V gleich der Dimension der L-Varietät V ist. Hieraus ergibt sich insbesondere, daß es sich bei jeder absolut irreduziblen K-Hyperfläche H des Ω^n für jeden Oberkörper L von K um eine L-Hyperfläche des Ω^n handelt. Absolut irreduzible K-Hyperflächen werden deshalb auch kurz als **Hyperflächen** bezeichnet.

Im Falle einer Varietät V und eines Oberkörpers L von V ist das von $I_K(V)$ in $L[\bar{X}]$ erzeugte Ideal zwar stets im Verschwindungsideal $I_L(V)$ von V in $L[\bar{X}]$ enthalten, es stimmt jedoch i. a. nicht mit diesem Ideal überein. Von einer Varietät V sagt man, sie sei **über K definiert**, falls für jeden Oberkörper L von K das Verschwindungsideal $I_L(V)$ von V in $L[\bar{X}]$ vom Verschwindungsideal $I_K(V)$ von V in $K[\bar{X}]$ erzeugt wird. Ist V eine über K definierte Varietät und ist $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq I_K(V)$ ein Erzeugendensystem von $I_K(V)$, so läßt sich zeigen, daß für jeden Körper L, der die Koeffizienten sämtlicher Polynome $f_i;\ i \in I$ enthält, die absolut irreduzible L-Varietät V über L definiert ist.

Im nun folgenden Fakt 1.2.1 werden diejenigen K-Varietäten V, bei welchen es sich um über K definierte Varietäten handelt, durch eine gewisse Eigenschaft ihrer Funktionenkörper $K(\bar{x})$ charakterisiert.

Fakt 1.2.1 *Für eine K-Varietät V und einen generischen Punkt $(\bar{x})$ von V sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) V ist eine über K definierte Varietät.

(2) Die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ ist regulär.

Dabei heißt eine Körpererweiterung $K \leq L(\leq \Omega)$ **regulär**, falls die beiden Körper L und $\tilde{K}$ in Ω über K linear disjunkt sind.

Es wird sich später in einigen Fällen als praktisch erweisen die folgende, zu Fakt 1.2.1 duale Aussage zur Verfügung zu haben:

Fakt 1.2.2 *Für eine endlich erzeugte Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x}) \leq \Omega$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) $V_{(\bar{x})}$ ist eine über K definierte Varietät.

(2) Die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ ist regulär.

Ist H eine K-Hyperfläche des Ω^n und ist f ein über K irreduzibles Polynom aus $K[\bar{X}]$, für das $H = A(\{f\})$ gilt, so ist H genau dann eine über K definierte Hyperfläche, wenn es sich bei f um ein absolut irreduzibles Polynom handelt. Dabei heißt ein Polynom f aus $K[\bar{X}]$ **absolut irreduzibel**, falls f für jeden Oberkörper L von K als Polynom in $L[\bar{X}]$ irreduzibel ist.

5. Einfache Punkte: Ist V eine über K definierte Varietät, sind L und L' zwei Oberkörper von K , ist $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq I_L(V)$ ein Erzeugendensystem von $I_L(V)$, ist $\{g_j \mid j \in J\} \subseteq I_{L'}(V)$ ein Erzeugendensystem von $I_{L'}(V)$ und ist schließlich $(\bar{x})$ ein beliebiger Punkt aus V, so gilt für die Matrizen $(\partial f_i(\bar{x})/\partial X_k)_{i\in I, k\leq n}$ und $(\partial g_j(\bar{x})/\partial X_k)_{j\in J, k\leq n}$:

$$\mathrm{Rang}\,(\partial f_i(\bar{x})/\partial X_k)_{i\in I, k\leq n} = \mathrm{Rang}\,(\partial g_j(\bar{x})/\partial X_k)_{j\in J, k\leq n} \leq n - \dim(V).$$

Ein Punkt $(\bar{x})$ aus V heißt **einfach**, wenn der Rang der obigen, zu $(\bar{x})$ gehörenden Matrizen gleich $(n - \dim(V))$ ist. Ein nicht-einfacher Punkt von V wird manchmal auch als ein **singulärer** Punkt von V bezeichnet.

Es folgt, daß es sich bei der Menge A_{sing} aller singulären Punkte von V um eine K-algebraische Teilmenge von V handelt. Darüberhinaus ist A_{sing} echt in V enthalten, da z. B., wie sich zeigen läßt, jeder generische Punkt von V einfach, also nicht-singulär ist.

6. Produktvarietäten und konjugierte Varietäten: Für je zwei K-algebraische Mengen $A \subseteq \Omega^m$ und $B \subseteq \Omega^n$ handelt es sich beim karthesischen Produkt $A \times B$ von A und B um eine K-algebraische Teilmenge des Ω^{m+n}. Es ist jedoch i. a. nicht der Fall, daß es sich, falls V und W zwei K-Varietäten sind, auch bei $V \times W$ um eine K-Varietät handelt. Sind jedoch V und W zwei Varietäten/über K definierte Varietäten, so läßt sich zeigen, daß auch $V \times W$ eine Varietät/über K definierte Varietät ist. Außerdem kann man beweisen, daß im Falle zweier über K definierter Varietäten V und W ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der über K definierten Varietät

$V \times W$ genau dann einfach ist, wenn es sich bei $(\bar{x})$ um einen einfachen Punkt von V und bei $(\bar{y})$ um einen einfachen Punkt von W handelt.

Ist σ ein Automorphismus von Ω, so stimmt für jede K-algebraische Menge A des Ω^n die Menge $\sigma(A) = \{\sigma((\bar{x})) \mid (\bar{x}) \in A\}$ mit der $\sigma(K)$-algebraischen Menge $A(\sigma(I_K(A))$ überein. Ist V eine K-Varietät/Varietät/über K definierte Varietät, so ist $\sigma(V)$ eine $\sigma(K)$-Varietät/Varietät/über $\sigma(K)$ definierte Varietät. Im letzten Fall gilt, daß ein Punkt $(\bar{y})$ aus $\sigma(V)$ genau dann einfach ist, wenn es sich bei $\sigma^{-1}((\bar{y}))$ um einen einfachen Punkt von V handelt.

Für je zwei Automorphismen σ_0 und σ_1 von Ω, die auf K übereinstimmen ist $\sigma_0(A) = A(\sigma_0(I_K(A))) = A(\sigma_1(I_K(A))) = \sigma_1(A)$.

Ist μ eine Einbettung von K in Ω, so läßt sich μ genau dann zu einem Automorphismus von Ω fortsetzen, wenn der Transzendenzgrad von Ω über K mit dem Transzendenzgrad von Ω über $\mu(K)$ übereinstimmt. In diesem Fall ist in Zukunft für eine K-algebraische Menge A mit $\mu(A)$ die $\mu(K)$-algebraische Menge $\sigma(A)$ gemeint, wobei σ ein beliebiger Automorphismus von Ω sein soll, der μ fortsetzt.

1.3 Mengentheoretische Topologie

Aus dem Bereich der mengentheoretischen Topologie werden in dieser Arbeit lediglich absolute Standardresultate verwendet. Die einzige Ausnahme hiervon bildet vielleicht der folgende, unter Umständen nicht ganz so wohlbekannte Satz über sogenannte projektive Systeme topologischer Räume, den wir im Beweis von Satz 3.2.2 benötigen und den wir deshalb, nachdem wir einige der in ihm vorkommenden Begriffe geklärt haben, weiter unten kurz zitieren wollen.

Es sei $(I, \leq)$ eine partielle Ordnung, und es sei $(X_i,\ \pi_{ji} \mid i, j \in I;\ i \leq j)$ eine Familie, die für jedes $i \in I$ aus einem topologischen Raum X_i sowie für je zwei Elemente $i \leq j \in I$ aus einer stetigen Abbildung $\pi_{ji} : X_j \to X_i$ besteht. Die Familie $(X_i,\ \pi_{ji} \mid i, j \in I;\ i \leq j)$ wird als **projektives System** topologischer Räume bezeichnet, falls sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

(1) Für je zwei Elemente i und j aus I gibt es stets ein Element k aus I, für das $i \leq k$ und $j \leq k$ ist.

(2) Für jedes Element i aus I ist π_{ii} die Identität auf X_i.

(3) Für je drei Elemente $i \leq j \leq k$ aus I ist $\pi_{ki} = \pi_{ji} \circ \pi_{kj}$.

Unter dem **projektiven Grenzwert** $\mathbf{\lim_{i\in I} X_i}$ eines projektiven Systems $(X_i,\ \pi_{ji} \mid i, j \in I;\ i \leq j)$ topologischer Räume versteht man denjenigen topologischen Raum X, der aus der Menge

$$\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \mid x_i = \pi_{ji}(x_j)\ \forall\ i \leq j \in I\}$$

sowie aus der von der Produkttopologie auf dieser Menge induzierten Topologie besteht.

Fakt 1.3.1 *Beim projektiven Grenzwert X eines projektiven Systems nichtleerer kompakter[2] topologischer Räume handelt es sich um einen* ***nichtleeren*** *kompakten topologischen Raum.*

Dabei erscheint das Wort „nichtleer“ hier fett gedruckt, weil es weniger die Kompaktheit, als vielmehr die Eigenschaft nicht leer zu sein ist, die wir später im Zusammenhang mit projektiven Grenzwerten projektiver Systeme nichtleerer kompakter topologischer Räume verwenden werden.

Einen Beweis von Fakt 1.3.1 findet man z.B. in [Fr-Ja].

[2] Mit kompakten topologischen Räumen sind in dieser Arbeit stets quasikompakte, Hausdorffsche topologische Räume gemeint.

1.4 Modelltheorie

Die nun folgenden Bemerkungen zu einigen Begriffen, Bezeichnungen und Ergebnissen der Modelltheorie sollen dazu beitragen, das Verständnis der im dritten Kapitel der Arbeit vereinzelt auftretenden modelltheoretischen Argumente zu erleichtern. Für eine umfassendere und zusammenhängendere Darstellung modelltheoretischer Methoden und Resultate sei auf die beiden Bücher [Ch-Ke] und [Pr3] verwiesen.

1. Sämtlichen in dieser Arbeit durchgeführten modelltheoretischen Betrachtungen liegt die Prädikatenlogik der ersten Stufe (mit Gleichheit) zugrunde.

Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe besagt bekanntlich, daß im Zusammenhang mit einer Sprache $\mathcal{L}$ eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Formeln dann und nur dann erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge Σ_0 von Σ erfüllbar ist. Der (absteigende) Satz von Löwenheim und Skolem besagt in seiner schwachen Form, daß jede Menge Σ von $\mathcal{L}$-Formeln im Falle ihrer Erfüllbarkeit ein Modell besitzt, dessen Mächtigkeit nicht größer als das Maximum der Kardinalzahlen $\aleph_0$ und $|\Sigma|$ ist.

2. Es folgen einige Bemerkungen zum Konzept der sogenannten **existenziellen Abgeschlossenheit** von $\mathcal{L}$-Strukturen:

Von einer $\mathcal{L}$-Substruktur $\mathcal{A}$ der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ sagt man, sie sei **in $\mathcal{B}$ existenziell abgeschlossen**, falls jede quantorenfreie Formel $\delta(\bar{X})$ der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, die in der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ (genauer: in der $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Struktur $(\mathcal{B},(a)_{a\in A})$) realisiert wird, auch in deren $\mathcal{L}$-Substruktur $\mathcal{A}$ (genauer: in der $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Substruktur $(\mathcal{A},(a)_{a\in A})$ von $(\mathcal{B},(a)_{a\in A})$) realisiert wird. Dabei ist mit der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ diejenige Konstantenerweiterung der Sprache $\mathcal{L}$ gemeint, bei der sämtliche Elemente a aus $\mathcal{A}$ als neue Konstanten zu $\mathcal{L}$ hinzugefügt werden. Außerdem sind mit $(\mathcal{A},(a)_{a\in A})$ und $(\mathcal{B},(a)_{a\in A})$ die durch kanonische Interpretation der neuen Konstanten entstehenden $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Expansionen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gemeint.

Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Substruktur der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ und läßt sich $\mathcal{B}$ über $\mathcal{A}$ in eine elementare $\mathcal{L}$-Oberstruktur $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ einbetten, so ist $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ existenziell abgeschlossen. Umgekehrt kann man zeigen, daß im Falle einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$, die in einer $\mathcal{L}$-Oberstruktur $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ existenziell abgeschlossen ist, zu jeder $|\mathcal{B}|^+$-saturierten elementaren $\mathcal{L}$-Oberstruktur $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{A}$-Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}^*$ existiert.

Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen, so sagt man von einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ aus $\mathfrak{K}$, sie sei **in $\mathfrak{K}$ existenziell abgeschlossen**, falls $\mathcal{A}$ in jeder $\mathcal{L}$-Oberstruktur $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$, die in $\mathfrak{K}$ liegt, existenziell abgeschlossen ist. Es läßt sich zeigen, daß im Falle einer (nichtleeren) induktiven Klasse $\mathfrak{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen zu jeder $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ aus $\mathfrak{K}$ eine in $\mathfrak{K}$ enthaltene $\mathcal{L}$-Oberstruktur $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ existiert, die in $\mathfrak{K}$ existenziell abgeschlossen ist. Dabei heißt eine Klasse $\mathfrak{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen **induktiv**, falls für jede Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ und jede α-Kette $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_\beta \subseteq \ldots,\ \beta < \alpha$ von

$\mathcal{L}$-Strukturen aus $\mathfrak{K}$ auch die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

3. Sind $+$ und $\cdot$ zwei zweistellige Funktionssymbole, sind 0 und 1 zwei Konstantensymbole und ist $\mathcal{L}_0$ die genau aus den Symbolen $+$, $\cdot$, 0 und 1 bestehende Sprache, so läßt sich jeder Körper K auf naheliegende Art und Weise (und zwar indem man die Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ als die Addition bzw. als die Multiplikation von K und die Konstantensymbole 0 und 1 als das Null- bzw. als das Einselement von K interpretiert) als eine $\mathcal{L}_0$-Struktur $(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K)$ auffassen. Ist darüberhinaus R ein einstelliges Relationssymbol und ist $\mathcal{L}_1$ die Sprache $\mathcal{L}_0 \cup \{R\}$, so läßt sich jeder bewertete Körper $(K, \mathcal{O})$ auf ebenso naheliegende Art und Weise (und zwar indem man die Symbole $+$, $\cdot$, 0, 1 wie oben und das Symbol R als den Bewertungsring $\mathcal{O}$ interpretiert) als eine $\mathcal{L}_1$-Struktur $(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K, R^K)$ auffassen. Es ist dann klar, daß es sich für zwei Körper K und L bei der zu K gehörenden $\mathcal{L}_0$-Struktur genau dann um eine $\mathcal{L}_0$-Substruktur der zu L gehörenden $\mathcal{L}_0$-Struktur handelt, wenn K ein Unterkörper von L ist sowie daß es sich für zwei bewertete Körper $(K, \mathcal{O})$ und $(K_0, \mathcal{O}_0)$ bei der zu $(K, \mathcal{O})$ gehörenden $\mathcal{L}_1$-Struktur genau dann um eine $\mathcal{L}_1$-Substruktur der zu $(K_0, \mathcal{O}_0)$ gehörenden $\mathcal{L}_1$-Struktur handelt, wenn K ein Unterkörper von K_0 und $\mathcal{O}_0$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ ist.

Wann immer wir von nun an mit Körpern K und bewerteten Körpern $(K, \mathcal{O})$ modelltheoretisch argumentieren, denken wir uns K bzw. $(K, \mathcal{O})$ auf die gerade eben beschriebene Art und Weise als $\mathcal{L}_0$- bzw. als $\mathcal{L}_1$-Strukturen aufgefaßt.

Im Hinblick auf spätere Zwecke wollen wir an dieser Stelle festhalten, daß es sich bei der Klasse der bewerteten Körper und bei der Klasse der Henselsch bewerteten Körper um zwei Klassen (von $\mathcal{L}_1$-Strukturen) handelt, die in der Sprache $\mathcal{L}_1$ axiomatisierbar sind.

4. Die nun folgende algebraisch-geometrische Charakterisierung derjenigen Körpererweiterungen $K \leq K_0$, für welche K in K_0 existenziell abgeschlossen ist, wird in Abschnitt 3.1 ausgiebig verwendet werden:

Fakt 1.4.1 *Es sei K ein Körper, es sei Ω der „große" algebraisch abgeschlossene Oberkörper von K, in dem wir in Abschnitt 1.2 algebraische Geometrie betreiben haben, und es sei K_0 ein Zwischenkörper von K und Ω. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(1) K ist in K_0 existenziell abgeschlossen.

(2) Für jede natürliche Zahl n und für je zwei K-algebraische Teilmengen A und B des Ω^n gilt: Besitzt A einen K_0-rationalen Punkt, der nicht in B liegt, so besitzt A auch einen K-rationalen Punkt, der nicht in B liegt.

(3) Jede K-algebraische Menge A, die einen K_0-rationalen Punkt besitzt, besitzt auch einen K-rationalen Punkt.

(4) *Jede K-Varietät V, die einen K_0-rationalen Punkt besitzt, besitzt auch einen K-rationalen Punkt.*

Da mir keine Quelle bekannt ist, auf die ich, was den Beweis von Fakt 1.4.1 anbelangt, verweisen könnte, folgt an dieser Stelle der Vollständigkeit halber ein

Beweis von Fakt 1.4.1: (1)⇒(2): Sind $f_0, \ldots, f_{k-1}$ und $g_0, \ldots, g_{l-1}$ Polynome aus $K[X_0, \ldots, X_{n-1}] = K[\bar{X}]$, für die $A = A(\{f_0, \ldots, f_{k-1}\})$ und $B = A(\{g_0, \ldots, g_{l-1}\})$ gilt, so ist klar, daß die Menge $A \setminus B$ aus genau denjenigen Punkten $(\bar{x})$ des Ω^n besteht, welche die (quantorenfreie) $\mathcal{L}_0(K)$-Formel

$$\delta(\bar{X}) := (\bigwedge_{i=0}^{k-1} f_i(\bar{X}) = 0 \;\wedge\; \bigvee_{j=0}^{l-1} g_j(\bar{X}) \neq 0)$$

realisieren.

Daß A einen K_0-rationalen Punkt besitzt, der nicht in B liegt, bedeutet daher gerade, daß $\delta(\bar{X})$ in K_0 realisiert wird. Weil K in K_0 existenziell abgeschlossen ist, wird $\delta(\bar{X})$ dann auch in K realisiert. Dies wiederum bedeutet nichts anderes, als daß A einen K-rationalen Punkt besitzt, der nicht in B liegt.

(2)⇒(3): Besitzt die K-algebraische Menge A einen K_0-rationalen Punkt, so ist dieser nicht in der K-algebraischen Menge $B = \emptyset$ enthalten. Aus (2) folgt, daß A einen K-rationalen Punkt besitzt.

(3)⇒(4) ist klar.

Für den Beweis von (4)⇒(1) benötigen wir das folgende „Normalformenresultat“ für quantorenfreie $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln:

Lemma 1.4.2 *Zu jeder quantorenfreien $\mathcal{L}_0(K)$-Formel $\delta(\bar{X})$ gibt es eine (positive) natürliche Zahl k, (positive) natürliche Zahlen $l_0, \ldots, l_{k-1}$, Polynome f_{ij}; $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq l_i - 1$ aus $K[\bar{X}]$ sowie Polynome $g_0, \ldots, g_{k-1}$ aus $K[\bar{X}]$, sodaß die beiden $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln $\delta(\bar{X})$ und*

$$\delta'(\bar{X}) := \bigvee_{i=0}^{k-1} (\bigwedge_{j=0}^{l_i-1} f_{ij}(\bar{X}) = 0 \;\wedge\; g_i(\bar{X}) \neq 0)$$

auf der Basis der Theorie T_0 der Körper äquivalent sind.

Beweis von Lemma 1.4.2: Die Behauptung des Lemmas ergibt sich unmittelbar aus den folgenden vier Feststellungen:

(1) Jede quantorenfreie $\mathcal{L}_0(K)$-Formel $\delta(\bar{X})$ ist nach dem Satz über die disjunktive Normalform (s. z. B. [Eb-Fl-Th]) logisch äquivalent zu einer Disjunktion $\bigvee_{i=0}^{k-1} \delta_i(\bar{X})$, $k > 0$, von $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln $\delta_i(\bar{X})$, wobei es sich für jedes i bei $\delta_i(\bar{X})$ um eine Konjunktion atomarer und negiert atomarer $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln handelt; von jeder der Konjunktionen $\delta_i(\bar{X})$ kann man darüberhinaus annehmen, daß sie mit $0 = 0$ mindestens eine atomare und mit $1 \neq 0$ mindestens eine negiert atomare $\mathcal{L}_0(K)$-Formel enthält.

(2) Zu jeder atomaren $\mathcal{L}_0(K)$-Formel $\phi(\bar{X})$ gibt es, wovon man sich leicht überzeugt, ein Polynom f aus $K[\bar{X}]$, für welches die beiden Formeln $\phi(\bar{X})$ und $\phi'(\bar{X}) := f(\bar{X}) = 0$ auf der Basis von T_0 äquivalent sind.

(3) Zu jeder negiert atomaren $\mathcal{L}_0(K)$-Formel $\psi(\bar{X})$ gibt es ein Polynom g aus $K[\bar{X}]$, für welches die beiden $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln $\psi(\bar{X})$ und $\psi'(\bar{X}) := g(\bar{X}) \neq 0$ auf der Basis von T_0 äquivalent sind.

(4) Für Polynome $g_0, \ldots, g_{k-1}$ aus $K[\bar{X}]$ ist die Konjunktion $\phi(\bar{X})$ der $\mathcal{L}_0(K)$-Formeln $g_i(\bar{X}) \neq 0$; $0 \leq i \leq k-1$ auf der Basis von T_0 äquivalent zur $\mathcal{L}_0(K)$-Formel $\phi'(\bar{X}) := g_0(\bar{X}) \cdot \ldots \cdot g_{k-1}(\bar{X}) \neq 0$. ◇

Es sei nun $\delta(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \delta(\bar{X})$ eine quantorenfreie $\mathcal{L}_0(K)$-Formel, die in K_0, etwa durch das Tupel $(\bar{x})$, realisiert wird. Außerdem seien k, $l_0, \ldots, l_{k-1}$ positive natürliche Zahlen und f_{ij}, g_i; $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq l_i - 1$ Polynome aus $K[\bar{X}]$, für welche die quantorenfreie $\mathcal{L}_0(K)$-Formel

$$\delta'(\bar{X}) := \bigvee_{i=0}^{k-1} \left(\bigwedge_{j=0}^{l_i-1} f_{ij}(\bar{X}) = 0 \ \wedge \ g_i(\bar{X}) \neq 0 \right)$$

auf der Basis von T_0 zur Formel $\delta(\bar{X})$ äquivalent ist.

Aufgrund der Äquivalenz von $\delta(\bar{X})$ und $\delta'(\bar{X})$ ist $(\bar{x})$ dann auch eine Realisierung von $\delta'(\bar{X})$. Hieraus ergibt sich, daß es eine natürliche Zahl $i \leq k-1$ gibt, für die $f_{i0}(\bar{x}) = \ldots = f_{i(l_i-1)}(\bar{x}) = 0$ und $g_i(\bar{x}) \neq 0$ ist. Ist dann $y := g_i(\bar{x})^{-1}$ und ist V die vom Punkt $(\bar{x}, y) \in K_0^{n+1}$ erzeugte K-Varietät des Ω^{n+1}, so sind die Polynome $f_{i0}, \ldots, f_{i(l_i-1)}$ und $h := g_i \cdot Y - 1$ wegen $f_{i0}(\bar{x}) = \ldots = f_{i(l_i-1)}(\bar{x}) = 0$ und wegen $h(\bar{x}, y) = g_i(\bar{x})y - 1 = 0$ im Verschwindungsideal $I_K(V)$ von V in $K[\bar{X}, Y]$ enthalten. Außerdem besitzt die K-Varietät V, weil sie mit $(\bar{x}, y)$ einen K_0-rationalen Punkt besitzt, nach (4) auch einen K-rationalen Punkt $(\bar{a}, b)$. Aus $f_{i0}, \ldots, f_{i(i_i-1)}$, $h \in I_K(V)$ und $(\bar{a}, b) \in V$ ergibt sich sowohl daß $f_{i0}(\bar{a}) = \ldots = f_{i(l_i-1)}(\bar{a}) = 0$ ist als auch daß $h(\bar{a}, b) = g_i(\bar{a}) \cdot b - 1 = 0$ ist; aus letzterem folgt insbesondere, daß $g_i(\bar{a}) \neq 0$ ist. Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß das Tupel $(\bar{a}) \in K^n$ eine Realisierung der Formel $(\wedge_{j=0}^{l_i-1} f_{ij}(\bar{X}) = 0 \ \wedge \ g_i(\bar{X}) \neq 0)$ in K ist, woraus folgt, daß es sich bei $(\bar{a})$ auch um eine Realisierung der Formel $\delta'(\bar{X})$ in K handelt. Wegen der Äquivalenz von $\delta(\bar{X})$ und $\delta'(\bar{X})$ ist $(\bar{a})$ dann auch eine Realisierung von $\delta(\bar{X})$ in K. □

Kapitel 2

Boolesche mehrfach bewertete Körper

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird ein Paar (K, W), das aus einem Körper K und einer Menge W von Bewertungsringen des Körpers K besteht, als ein **mehrfach bewerteter Körper** bezeichnet. Hierbei ist der Fall $W = \emptyset$ nicht ausgeschlossen.

2.1 Die kanonische Topologie und der Holomorphiering eines mehrfach bewerteten Körpers

Ist W eine Menge von Bewertungsringen eines Körpers K bzw. ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, so läßt sich auf der Menge W der Bewertungsringe auf kanonische Art und Weise eine Topologie definieren:

Für ein beliebiges Element a des Körpers K bezeichnen wir die Menge aller Bewertungsringe $\mathcal{O}$ aus W, die das Element a enthalten, mit V_a^W; wir setzen also

$$V_a^W := \{\mathcal{O} \in W \mid a \in \mathcal{O}\}.$$

Das System aller Teilmengen von W, die für ein gewisses Element a aus K die Form V_a^W besitzen, wird mit $\mathcal{V}_W$ bezeichnet.

Lemma 2.1.1 (Eigenschaften der Mengen aus $\mathcal{V}_W$)

(1) Es ist $V_0^W = V_1^W = W$.

(2) Für jedes Element a aus K ist $V_a^W = \{\mathcal{O} \in W \mid v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0\}$ sowie $W \setminus V_a^W = \{\mathcal{O} \in W \mid a \notin \mathcal{O}\} = \{\mathcal{O} \in W \mid v_{\mathcal{O}}(a) < 0\}$.

(3) Für jedes Element a aus K^* ist darüberhinaus $W \setminus V_a^W = \{\mathcal{O} \in W \mid v_{\mathcal{O}}(a^{-1}) > 0\} = \{\mathcal{O} \in W \mid a^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{O})\}$.

Beweis: Punkt (1) ergibt sich aus der Tatsache, daß 0 und 1 in jedem Unterring, und daher insbesondere in jedem Bewertungsring des Körpers K enthalten sind. Die Punkte (2) und (3) ergeben sich aus den für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ geltenden Identitäten $\mathcal{O} = \{a \in K \mid v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0\}$ und $K \setminus \mathcal{O} = \{a \in K^* \mid v_{\mathcal{O}}(a) < 0\} = \{a \in K^* \mid v_{\mathcal{O}}(a^{-1}) > 0\} = \{a \in K^* \mid a^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{O})\}$. □

Die vom Mengensystem $\mathcal{V}_W$ auf W erzeugte Topologie bezeichnet man als die zu W bzw. als die zu (K, W) gehörende **kanonische Topologie**.

Bemerkung 2.1.2 Es sei W eine Menge von Bewertungsringen eines Körpers K.

(1) Das System der offenen Mengen der zu W gehörenden kanonischen Topologie besteht (definitionsgemäß) genau aus denjenigen Teilmengen von W, welche sich als Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{V}_W$ schreiben lassen. Die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{V}_W$ bilden eine Basis und die Mengen aus $\mathcal{V}_W$ selbst bilden eine Subbasis der zu W gehörenden kanonischen Topologie.

(2) Ist W' eine beliebige Teilmenge von W, so gilt für jedes Element a aus K die Gleichheit $V_a^{W'} = V_a^W \cap W'$. Aus dieser Gleichheit ergibt sich insbesondere, daß es sich bei der zu W' gehörenden kanonischen Topologie um genau diejenige Topologie von W' handelt, welche von der zu W gehörenden kanonischen Topologie auf W' induziert wird.

Wenn im Folgenden im Zusammenhang mit einer Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K topologische Begriffe, wie etwa offene/abgeschlossene Teilmenge, Hausdorff-Eigenschaft, Kompaktheit, etc. verwendet werden, so beziehen sich diese stets auf die zu W gehörende kanonische Topologie. Falls aus dem Zusammenhang klar ist, von welcher Menge W von Bewertungsringen des Körpers K gerade die Rede ist, so schreiben wir in Zukunft der Einfachheit und Bequehmlichkeit halber für die zu einem Element a aus K gehörende Teilmenge V_a^W von W oft auch lediglich kurz V_a.

Unser Vorgehen bei der Definition der zu einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) gehörenden kanonischen Topologie orientiert sich sehr stark an einer ähnlichen Vorgehensweise im Zusammenhang mit mehrfach angeordneten Körpern: Ist X eine Menge von Positivbereichen eines Körpers K, bezeichnet man für jedes Element a aus K die Menge aller Positivbereiche aus X, die a enthalten, mit H_a^X und bezeichnet man das Mengensystem aller H_a^X; $a \in K$ mit $\mathcal{H}_X$, so wird die von $\mathcal{H}_X$ auf X erzeugte Topologie als die zur Menge X bzw. als die zum mehrfach angeordneten Körper (K, X) gehörende kanonische Topologie oder auch als die Harrison-Topologie von $X/(K, X)$ bezeichnet.

Das Mengensystem $\mathcal{H}_X$ ist (wegen $W \setminus H_a^X = H_{(-a)}^X \; \forall\, a \in K$) stets unter Komplementbildung, jedoch i. a. nicht unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen (s. [Pr2]). Die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{H}_X$ bilden eine Basis und die Mengen aus $\mathcal{H}_X$ selbst bilden eine Subbasis der Harrison-Topologie von X. Bei allen diesen Mengen handelt es sich darüberhinaus um clopen Teilmengen von X. X ist stets Hausdorffsch, und falls es sich bei X um die Menge aller Positivbereiche von K, welche eine vorgegebene Teilmenge A von K umfassen (oder allgemeiner: um eine abgeschlossene Teilmenge einer solchen Menge) handelt, so ist X sogar kompakt (s. wiederum [Pr2]). Weil jeder Positivbereich von K die leere Menge umfaßt, ergibt sich aus letzterem insbesondere, daß es sich bei der Menge aller Positivbereiche eines Körpers K (oder allgemeiner: bei jeder abgeschlossenen Teilmenge dieser Menge) um eine kompakte Menge handelt.

Im Vergleich hierzu stellt sich, wie wir im weiteren Verlauf der Arbeit sehen werden, die Situation im Falle der zu einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) gehörenden kanonischen Topologie folgendermaßen dar: Bei den Mengen aus $\mathcal{V}_W$ handelt es sich in der Regel nicht um clopen Teilmengen von W; insbesondere ist $\mathcal{V}_W$ i. a. nicht unter Komplementbildung abgeschlossen. Auch endliche (und unendliche) Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{V}_W$ sind i. a. nicht mehr in $\mathcal{V}_W$ enthalten. Es ist jedoch eine, wenn auch nicht unbedingt unmittelbar einsichtige Tatsache, daß das Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, **falls** es unter Komplementbildung abgeschlossen ist (s. Korollar 2.2.13 zu Lemma 2.2.12).

Satz 2.1.3 *Es sei K ein Körper, und es sei A eine beliebige Teilmenge von K.*

(1) Die Menge $W(A)$ aller Bewertungsringe $\mathcal{O}$ von K, die A umfassen, ist quasikompakt.

(2) Die Menge $W'(A)$ aller nichttrivialen Bewertungsringe $\mathcal{O}$ von K, die A umfassen, ist quasikompakt.

(3) Abgeschlossene Teilmengen von $W(A)$ und $W'(A)$ sind quasikompakt.

Beweis: (1): Wir bezeichnen den von A erzeugten Unterring von K mit R. R ist in jedem Unterring von K, der A umfaßt, und damit insbesondere in jedem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus $W(A)$ enthalten.

Da es sich beim Mengensystem $\mathcal{V}_{W(A)}$ nach Bemerkung 2.1.2 um eine Subbasis der zu $W(A)$ gehörenden kanonischen Topologie handelt, genügt es zu beweisen, daß jede Überdeckung von $W(A)$, die aus Mengen des Systems $\mathcal{V}_{W(A)}$ besteht, eine endliche Teilüberdeckung besitzt (s. Satz 8.9 (sog. Satz von Alexander) in [Qu]).

Ist $(V_b)_{b \in B \subseteq K; B \neq \emptyset}$ eine solche Überdeckung von $W(A)$ und ist die 0 in B enthalten, so ist diejenige Überdeckung von $W(A)$, die lediglich aus der Menge $V_0 = W(A)$ besteht, eine endliche Teilüberdeckung von $(V_b)_{b \in B}$.

Ist die 0 nicht in B enthalten, ist

$$S := \{f(b_0^{-1}, \dots, b_{k-1}^{-1}) \mid k \in \mathbb{N},\ b_0, \dots, b_{k-1} \in B,\ f \in R[X_0, \dots, X_{k-1}]\}$$

der von der Menge $R \cup \{b^{-1} \mid b \in B\}$ erzeugte Unterring von K und ist

$$I := \{f(b_0^{-1}, \ldots, b_{k-1}^{-1}) \mid k \in \mathbb{N},\ b_0, \ldots, b_{k-1} \in B,\ f \in < X_0, \ldots X_{k-1} >_{R[\bar{X}]}{}^{1}\}$$

das von der Menge $\{b^{-1} \mid b \in B\}$ erzeugte Ideal des Ringes S, so überlegt man sich folgendermaßen, daß $I = S$ sein muß: Wäre I echt in S enthalten, so gäbe es ein maximales Ideal $\mathcal{M}$ von S, das I umfassen würde sowie nach Fakt 1.1.1 einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K, der S umfassen und für den $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap S = \mathcal{M}$ gelten würde. Wegen $A \subseteq S \subseteq \mathcal{O}$ wäre $\mathcal{O}$ dann in $W(A)$ enthalten, und wegen $\{b^{-1} \mid b \in B\} \subseteq I \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O})$ wäre $\mathcal{O}$ nach Lemma 2.1.1 in $\bigcup_{b \in B}(W(A) \setminus V_b)$ und damit nicht in $\bigcup_{b \in B} V_b$ enthalten. Die Existenz eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus $W(A)$, der nicht in $\bigcup_{b \in B} V_b$ enthalten ist, würde jedoch der Tatsache widersprechen, daß es sich bei $(V_b)_{b \in B}$ um eine Überdeckung von $W(A)$ handelt.

Weil also $I = S$ ist, liegt insbesondere die 1 in I. Es gibt demnach eine (positive) natürliche Zahl k, Elemente $b_0, \ldots, b_{k-1}$ aus B sowie ein Polynom f aus $< X_0, \ldots X_{k-1} >_{R[\bar{X}]}$, sodaß $f(b_0^{-1}, \ldots, b_{k-1}^{-1}) = 1$ ist. Es ist dann

$$W = V_{b_0} \cup \ldots \cup V_{b_{k-1}}.$$

Gäbe es nämlich einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus $W(A)$, der nicht in $(V_{b_0} \cup \ldots \cup V_{b_{k-1}})$ enthalten wäre, so würden nach Lemma 2.1.1 die Elemente $b_0^{-1}, \ldots, b_{k-1}^{-1}$ allesamt in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ liegen. Zusammen mit den beiden Tatsachen, daß die Koeffizienten von f wegen $R \subseteq \mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$ liegen und daß wegen $f \in < X_0, \ldots X_{k-1} >_{R[\bar{X}]}$ in der Summendarstellung von f kein Element aus $R \setminus \{0\}$ vorkommt, würde hieraus folgen, daß $f(b_0^{-1}, \ldots, b_{k-1}^{-1}) = 1$ ebenfalls in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ läge. Die Existenz eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus $W(A) \setminus (V_{b_0} \cup \ldots \cup V_{b_{k-1}})$ würde also den Widerspruch $1 \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ liefern.

(2): Für jedes Element b aus K ist $V_b^{W(A)} = V_b^{W'(A)} \cup \{K\}$ und $V_b^{W'(A)} = V_b^{W(A)} \setminus \{K\}$. Folglich ist $(V_b^{W'(A)})_{b \in B}$ genau dann eine (endliche) Überdeckung von $W'(A)$, wenn $(V_b^{W(A)})_{b \in B}$ eine (endliche) Überdeckung von $W(A)$ ist. (2) ergibt sich somit, zusammen mit der schon zu Beginn des Beweises von (1) erwähnten Tatsache, daß man sich beim Nachweis der Quasikompaktheit auf Überdeckungen der obigen Form beschränken kann, aus der Quasikompaktheit von $W(A)$.

(3): Es ist ganz allgemein so, daß abgeschlossene Teilmengen quasikompakter topologischer Räume bezüglich der vom topologischen Raum auf ihnen induzierten Topologie selbst wieder quasikompakt sind (s. [Qu]). Folglich handelt es sich bei einer abgeschlossenen Teilmenge W von $W(A)/W'(A)$ um eine Menge von Bewertungsringen, die bezüglich der Topologie, die von $W(A)/\ W'(A)$ auf W induziert wird quasikompakt ist. Diese Topologie ist jedoch nach Bemerkung 2.1.2 mit der zu W gehörenden kanonischen Topologie identisch. □

[1] Mit $< X_0, \ldots X_{k-1} >_{R[\bar{X}]}$ ist das von den Unbestimmten $X_0, \ldots, X_{k-1}$ erzeugte Ideal von $R[X_0, \ldots, X_{k-1}]$ gemeint.

Bemerkung 2.1.4 (1) Es ist offensichtlich, daß eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K nur dann (aber nicht genau dann!) Hausdorffsch ist, wenn je zwei verschiedene Bewertungsringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ aus W paarweise nicht ineinander enthalten sind. Hieraus ergibt sich, daß die Menge $W(A)$ dann und nur dann Hausdorffsch ist, wenn $W(A) = \{K\}$ bzw. wenn $W'(A) = \emptyset$ ist. Für das Vorliegen der Hausdorff-Eigenschaft bei der Menge $W'(A)$ gibt es kein vergleichbar prägnantes Kriterium; alles was sich sagen läßt, ist: $W'(A)$ ist manchmal Hausdorffsch und manchmal nicht.

(2) Mit Hilfe von Fakt 1.1.1 läßt sich beweisen, daß $W'(A)$ dann und nur dann gleich $\emptyset$ ist, wenn es sich beim von A erzeugten Unterring R von K um einen Körper und bei $R \leq K$ um eine algebraische Körpererweiterung handelt.

Die Menge aller Bewertungsringe eines Körpers K ist gleich $W(\emptyset)$ und die Menge aller nichttrivialen Bewertungsringe von K ist gleich $W'(\emptyset)$. Deshalb handelt es sich bei den Aussagen (1), (2) und (3) des nun folgenden Korollars 2.1.5 zu Satz 2.1.3 um Spezialfälle der Aussagen (1), (2) und (3) dieses Satzes.

Korollar 2.1.5 *Es sei K ein beliebiger Körper.*

(1) Die Menge aller Bewertungsringe von K ist quasikompakt.

(2) Die Menge aller nichttrivialen Bewertungsringe von K ist quasikompakt.

(3) Jede abgeschlossene Teilmenge einer der beiden oben genannten Mengen von Bewertungsringen ist quasikompakt. □

Bemerkung 2.1.6 (1) Man kann zeigen, daß $W'(\emptyset)$ im Falle von $W'(\emptyset) \neq \emptyset$ niemals Hausdorffsch ist.

(2) Aus Punkt (2) der Bemerkung 2.1.4, angewandt auf den Spezialfall $A = \emptyset$, ergibt sich, daß $W'(\emptyset)$ genau dann nicht leer ist, wenn es sich bei K **nicht** um einen absolut algebraischen Körper positiver Charakteristik handelt. Dabei heißt ein Körper K absolut algebraisch, falls er über seinem Primkörper algebraisch ist.

Ein weiteres wichtiges Objekt, das man im Zusammenhang mit einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) betrachtet, ist dessen sogenannter **Holomorphiering $\mathbf{R_W}$**. Hiermit ist derjenige Unterring des Körpers K gemeint, der entsteht, wenn man sämtliche Bewertungsringe $\mathcal{O}$ aus W miteinander schneidet; man setzt also $R_W := \{a \in K \mid a \in \mathcal{O} \; \forall \, \mathcal{O} \in W\}$. Warum man für Unterringe von Körpern, die sich als Durchschnitt einer Menge von Bewertungsringen dieses Körpers schreiben lassen, die funktionentheoretisch anmutende Bezeichnung „Holomorphiering“ wählt, wird z. B. in [Ro] erklärt.

Beim Holomorphiering R_W eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W) handelt es sich für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W um einen Unterring von $\mathcal{O}$. Das

Primideal $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R_W$ von R_W, das entsteht, wenn man das maximale Ideal $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus W mit R_W schneidet, bezeichnen wir von nun an mit $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; es ist dann R_W ein Unterring von $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ und $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ ein Unterring von $\mathcal{O}$. Das Ideal $\{r \in R_W \mid r \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in W\}$ von R_W, das entsteht, wenn man alle Primideale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; $\mathcal{O} \in W$ miteinander schneidet, bezeichnen wir von nun an mit I_W. Bei I_W handelt es sich um ein Radikalideal von R_W.

Unter Rückgriff auf den Holomorphiering R_W eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W) läßt sich ein interessantes Teilsystem $\mathcal{V}_W^*$ des zu W gehörenden Mengensystems $\mathcal{V}_W$ definieren, welches in vielen Betrachtungen zumindest dieses zweiten Kapitels der Arbeit eine nicht unwichtige Rolle spielen wird, und zwar sei $\mathcal{V}_W^*$ das System aller Teilmengen von W, die für ein Element r aus $R_W \setminus \{0\}$ die Gestalt $V_{1/r}$ besitzen.

Bemerkung 2.1.7 Weil die 1 in R_W liegt und weil $W = V_1 = V_{1^{-1}}$ ist, ist W in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten.

Lemma 2.1.8 (Eigenschaften der Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$) *Es seien r und s Elemente aus $R_W \setminus \{0\}$.*

(1) Es ist $V_{1/r} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \in \mathcal{O}^*\} = \{\mathcal{O} \in W \mid v_\mathcal{O}(r) = 0\} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \notin \mathcal{M}(\mathcal{O})\} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \notin \mathcal{P}(\mathcal{O})\}$.

(2) Es ist $W \setminus V_{1/r} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \notin \mathcal{O}^*\} = \{\mathcal{O} \in W \mid v_\mathcal{O}(r) > 0\} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \in \mathcal{M}(\mathcal{O})\} = \{\mathcal{O} \in W \mid r \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\}$.

(3) $V_{1/r}$ ist genau dann gleich W, wenn r in R_W^* liegt.

(4) $V_{1/r}$ ist genau dann gleich $\emptyset$, wenn r in I_W liegt.

(5) Es ist $V_{1/r} \cap V_{1/s} = V_{1/(rs)}$.

(6) Ist $r \neq s$, so ist $V_{1/r} \cup V_{1/s} \supseteq V_{1/(r-s)}$. Falls darüberhinaus $V_{1/r} \cap V_{1/s} = \emptyset$ ist, so ist $V_{1/r} \cup V_{1/s} = V_{1/(r-s)}$.

(7) $V_{1/r} \cap V_{1/s}$ ist genau dann gleich $\emptyset$, wenn das Element $r \cdot s$ in I_W liegt.

(8) Ist $W \neq \emptyset$, so bilden $V_{1/r}$ und $V_{1/s}$ genau dann eine Partition von W, wenn $r \cdot s$ in I_W liegt und wenn $r - s$ in R_W^* liegt.

Bemerkung 2.1.9 Weil für je zwei Elemente r und s aus $R_W \setminus \{0\}$ auch das Element $r \cdot s$ in $R_W \setminus \{0\}$ liegt, ergibt sich aus Punkt (5) des obigen Lemmas (zusammen mit Bemerkung 2.1.7)[2], daß das Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

[2]Nach Bemerkung 2.1.7 liegt $\{\mathcal{O} \in W \mid \mathcal{O} \in V_{1/r}\ \forall\, r \in \emptyset\} = W$ in $\mathcal{V}_W^*$.

Beweis des Lemmas: (1): Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W sind wegen $r \in R_W \subseteq \mathcal{O}$ die beiden Aussagen $1/r \in \mathcal{O}$ und $r \in \mathcal{O}^*$ äquivalent. Wegen $\mathcal{O}^* = \{a \in K \mid v_{\mathcal{O}}(a) = 0\} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{M}(\mathcal{O})$ sind die Aussagen $r \in \mathcal{O}^*$, $v_{\mathcal{O}}(r) = 0$ und $r \notin \mathcal{M}(\mathcal{O})$ äquivalent. Schließlich sind für einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, weil r in R_W liegt, die beiden Aussagen $r \notin \mathcal{M}(\mathcal{O})$ und $r \notin \mathcal{P}(\mathcal{O})$ äquivalent.

(2) ergibt sich, wenn man beachtet, daß für einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W wegen $r \in R_W \subseteq \mathcal{O}$ und wegen $\mathcal{O} = \{a \in K \mid v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0\}$ die beiden Aussagen $v_{\mathcal{O}}(r) \neq 0$ und $v_{\mathcal{O}}(r) > 0$ äquivalent sind, unmittelbar (durch Komplementbildung) aus (1).

(3): $V_{1/r}$ ist genau dann gleich W, wenn $1/r$ in jedem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W und damit in R_W enthalten ist. Letzteres ist wegen $r \in R_W$ gleichbedeutend mit $r \in R_W^*$.

(4): $V_{1/r}$ ist genau dann leer, wenn $W \setminus V_{1/r}$ gleich W ist. Letzteres ist nach (2) genau dann der Fall, wenn das Element r für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ enthalten ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend damit, daß r in I_W liegt.

(5): Ein beliebiger Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W ist nach (1) genau dann in $V_{1/r} \cap V_{1/s}$ enthalten, wenn sowohl r als auch s nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegen. Weil es sich bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein Primideal von R_W handelt, ist letzteres genau dann der Fall, wenn $r \cdot s$ nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Dies wiederum ist nach Punkt (1), angewandt auf das Element $r \cdot s$ aus $R_W \setminus \{0\}$, gleichbedeutend damit, daß der Bewertungsring $\mathcal{O}$ in $V_{1/(rs)}$ enthalten ist.

(6): Für einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, der in $V_{1/(r-s)}$ enthalten ist, liegt $r - s$ nach (1) nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, woraus folgt, daß mindestens eines der beiden Elemente r und s ebenfalls nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Letzteres hat aber nach (1) zur Konsequenz, daß $\mathcal{O}$ in $V_{1/r}$ oder in $V_{1/s}$ enthalten ist. Falls $V_{1/r} \cap V_{1/s} = \emptyset$ ist, so ist ein beliebiger Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus $V_{1/r} \cup V_{1/s}$ entweder in $V_{1/r}$ oder in $V_{1/s}$ enthalten. Dies ist nach (1) und (2) gleichbedeutend damit, daß auf $\mathcal{O}$ entweder die Aussage ($r \notin \mathcal{P}(\mathcal{O})$ und $s \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$) oder die Aussage ($r \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ und $s \notin \mathcal{P}(\mathcal{O})$) zutrifft. In beiden Fällen liegt $r - s$ nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, und nach (1) ist $\mathcal{O}$ somit in $V_{1/(r-s)}$ enthalten.

(7) ergibt sich unmittelbar aus den Punkten (4) und (5).

(8): Bilden $V_{1/r}$ und $V_{1/s}$ eine Partition von $W \neq \emptyset$, so würde $r = s$ den Widerspruch $W = V_{1/r} \cup V_{1/s} = V_{1/r} \cup V_{1/r} = V_{1/r} = V_{1/r} \cap V_{1/r} = V_{1/r} \cap V_{1/s} = \emptyset$ liefern, sodaß also in diesem Fall $r \neq s$ gilt. Daß dann rs in I_W und $r - s$ in R_W^* liegt, ergibt sich aus den Punkten (3), (6) und (7). Daß es sich umgekehrt im Falle von $r \cdot s \in I_W$ und $r - s \in R_W^*$ bei $[V_{1/r}, V_{1/s}]$ um eine Partition von W handelt, ergibt sich, wenn man beachtet, daß aus $r - s \in R_W^*$ folgt, daß $r \neq s$ ist, ebenfalls aus (3), (6) und (7). $\square$

2.2 Die Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir es nahezu ausschließlich lediglich mit solchen mehrfach bewerteten Körpern (K, W) zu tun haben, deren zugehörige Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen sind. In diesem Abschnitt werden einige wissenswerte Eigenschaften solcher mehrfach bewerteter Körper (K, W) zusammengestellt.

Wir beginnen mit dem folgenden einfachen

Lemma 2.2.1 *Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, so besteht W aus nichttrivialen Bewertungsringen von K.*

Beweis: Wäre K in W enthalten, so wäre für jedes Element r aus $R_W \setminus \{0\}$, weil K in $V_{1/r}$ enthalten wäre, die Menge $V_{1/r}$ nicht leer. Weil aber nach Bemerkung 2.1.7 W in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten ist und weil $\mathcal{V}_W^*$ nach Voraussetzung unter Komplementbildung abgeschlossen ist, ist $\emptyset$ in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten. □

Das zu einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) gehörende Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ ist nach Bemerkung 2.1.9 stets unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen. Falls es darüberhinaus unter Komplementbildung abgeschlossen ist (was jedoch, wie Beispiel 2.2.9 zeigt, i. a. nicht der Fall ist), so ist es folglich auch unter Bildung von endlichen Vereinigungen abgeschlossen.

Insgesamt gilt daher:

Lemma 2.2.2 *Ist das Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W) unter Komplementbildung abgeschlossen, so ist jede Boolesche Kombination von Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$ wieder in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten.* □

Was die Abgeschlossenheit von $\mathcal{V}_W^*$ unter Bildung von endlichen Vereinigungen anbetrifft, so liefert uns das nun folgende Lemma 2.2.3 die folgenden beiden später benötigten zusätzlichen Informationen:

Lemma 2.2.3 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Es sei n eine positive natürliche Zahl, es seien $r_0, \dots, r_{n-1}$ beliebige Elemente aus $R_W \setminus \{0\}$, und es sei $W' := V_{1/r_0} \cup \dots \cup V_{1/r_{n-1}}$.*

(1) Es gibt eine aus Mengen des Systems $\mathcal{V}_W^*$ bestehende Partition $[V_0, \dots, V_{n-1}]$ von W', für die $V_i \subseteq V_{1/r_i}$; $i = 0, \dots, n-1$ gilt.

(2) Ist I das von den Elementen $r_0, \dots, r_{n-1}$ erzeugte Ideal von R_W, so gibt es ein Element r aus $I \setminus \{0\}$, für das $W' = V_{1/r}$ gilt.

Beweis: (1): Wenn man für jedes i aus $\{0,\ldots,n-1\}$ $V_i := V_{1/r_i} \setminus (\bigcup_{j<i} V_j)$ setzt, so läßt sich leicht nachprüfen, daß es sich bei $[V_0,\ldots,V_{n-1}]$ um eine Partition von W' handelt, welche die Bedingung $V_i \subseteq V_{r_i}\ \forall\, i \in \{0,\ldots,n-1\}$ erfüllt. Weil es sich darüberhinaus für jedes i aus $\{0,\ldots,n-1\}$ bei V_i um eine Boolesche Kombination von Mengen des Systems $\mathcal{V}_W^*$ handelt, folgt aus Lemma 2.2.2, daß die Mengen V_i; $i = 0,\ldots,n-1$ in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten sind.

(2): Ist $W' = \emptyset$, so hat z. B. das Element $r := r_0$ die gewünschten Eigenschaften.

Ist $W' \neq \emptyset$, ist $[V_0,\ldots,V_{n-1}]$ eine Partition von W', welche die in (1) genannten Eigenschaften besitzt, ist für jedes i aus $\{0,\ldots,n-1\}$ s_i ein Element aus $R_W \setminus \{0\}$, für das $V_{1/s_i} = V_i$ ist und setzt man $r := r_0 s_0 + \ldots + r_{n-1}s_{n-1}$, so liegt r in I, und wir zeigen jetzt, daß r ungleich 0 ist und daß $V_{1/r} = W'$ gilt:

Ist $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W', so gibt es, weil es sich bei $[V_0,\ldots,V_{n-1}]$ um eine Partition von W' handelt, genau ein i aus $\{0,\ldots,n-1\}$, auf welches die Aussage $\mathcal{O} \in V_i = V_{1/s_i} \subseteq V_{1/r_i}$ zutrifft. Für dieses i gilt nach (1) aus Lemma 2.1.8 die Gleichheit $v_{\mathcal{O}}(r_i) = v_{\mathcal{O}}(s_i) = 0$ und folglich auch die Gleichheit $v_{\mathcal{O}}(r_i s_i) = v_{\mathcal{O}}(r_i) + v_{\mathcal{O}}(s_i) = 0$. Für alle j aus $\{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i\}$ ist $\mathcal{O}$ nicht in V_{1/s_j} enthalten. Nach (1) aus Lemma 2.1.8 ist daher $v_{\mathcal{O}}(s_j) > 0$, und weil r_j in $\mathcal{O}$ liegt, ist $v_{\mathcal{O}}(r_j) \geq 0$; für jedes $j \neq i$ ist somit $v_{\mathcal{O}}(r_j s_j) = v_{\mathcal{O}}(r_j) + v_{\mathcal{O}}(s_j) \geq v_{\mathcal{O}}(s_j) > 0$. Insgesamt ist dann $v_{\mathcal{O}}(r) = v_{\mathcal{O}}(r_0 s_0 + \ldots + r_{n-1}s_{n-1}) = v_{\mathcal{O}}(r_i s_i) = 0$.

Aus dem soeben bewiesenen Sachverhalt, daß nämlich für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W' die Gleichheit $v_{\mathcal{O}}(r) = 0$ gilt, ergibt sich zweierlei: Erstens, daß r ungleich 0 ist (denn wegen $W' \neq \emptyset$ gibt es mindestens einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, der in W' enthalten ist; für diesen Bewertungsring $\mathcal{O}$ ist dann $v_{\mathcal{O}}(r) = 0$ und nicht $v_{\mathcal{O}}(r) = \infty$, wie es sein müßte, wenn $r = 0$ wäre) sowie zweitens (mit (1) aus Lemma 2.1.8), daß jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W' in $V_{1/r}$ enthalten ist.

Ist umgekehrt $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring aus W, der nicht in $W' = V_{1/s_0} \cup \ldots \cup V_{1/s_{n-1}}$ enthalten ist, so gilt nach (1) aus Lemma 2.1.8 für alle i aus $\{0,\ldots,n-1\}$ die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(s_i) > 0$ und folglich, weil die Elemente $r_0,\ldots,r_{n-1}$ in $R_W \subseteq \mathcal{O}$ liegen, auch die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(r_i s_i) (= v_{\mathcal{O}}(r_i) + v_{\mathcal{O}}(s_i)) > 0$. Insgesamt ist dann $v_{\mathcal{O}}(r) = v_{\mathcal{O}}(r_0 s_0 + \ldots + r_{n-1}s_{n-1}) \geq \min\{v_{\mathcal{O}}(r_i s_i) \mid i = 0,\ldots n-1\} > 0$, was nach (2) aus Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit ist, daß $\mathcal{O}$ nicht in $V_{1/r}$ enthalten ist. $\square$

Diejenigen mehrfach bewerteten Körper (K, W), deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, lassen sich folgendermaßen durch ihren Holomorphiering R_W und dessen Radikalideal I_W charakterisieren:

Satz 2.2.4 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{V}_W^*$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

(2) I_W ist nicht das Nullideal, und zu jedem Element r aus R_W gibt es ein Element s aus R_W, für das $r \cdot s$ in I_W und $r - s$ in R_W^* liegt.

(3) I_W ist nicht das Nullideal, und der Restklassenring R_W/I_W ist regulär.

Dabei heißt ein Ring R **regulär**, falls es zu jedem Element r aus R ein Element s aus R gibt, für das $r^2s = r$ gilt.

Beweis von Satz 2.2.4: (1)$\Rightarrow$(2): Nach Bemerkung 2.1.7 liegt W in $\mathcal{V}_W^*$, und weil $\mathcal{V}_W^*$ nach (1) unter Komplementbildung abgeschlossen ist, liegt $\emptyset$ in $\mathcal{V}_W^*$; es gibt also ein Element r aus $R_W \setminus \{0\}$, für das $V_{1/r} = \emptyset$ ist. Nach (4) aus Lemma 2.1.8 liegt r in I_W, sodaß es sich bei I_W nicht um das Nullideal handelt.

Es sei nun r ein beliebiges Element aus R_W. Falls $r = 0$ oder falls $W = \emptyset$ ist, so ist $s := r - 1$ ein Element aus R_W, für das $r \cdot s$ in I_W und $r - s$ in R_W^* liegt. Im Falle ($r \neq 0$ und $W \neq \emptyset$) sei s ein (nach (1) existierendes) Element aus $R_W \setminus \{0\}$, für das $W \setminus V_{1/r} = V_{1/s}$ gilt. Nach Punkt (8) des Lemmas 2.1.8 liegt dann $r \cdot s$ in I_W und $r - s$ in R_W^*.

(2)$\Rightarrow$(3): Ist r ein beliebiges Element aus R_W, so schreiben wir für die Restklasse $r + I_W$ im Folgenden kurz $\bar{r}$.

Wir haben zu zeigen, daß für jedes Element r aus R_W ein Element s aus R_W existiert, für das $\bar{r}^2\bar{s} = \bar{r}$ gilt.

Für ein beliebiges Element r aus R_W gibt es nach (2) ein Element t aus R_W, für das rt in I_W und $r-t$ in R_W^* liegt; es ist dann $\bar{r}\bar{t} = \bar{0}$ und $\bar{r}-\bar{t} \in (R_W/I_W)^*$. Ist nun s ein Element aus R_W, für das $(\bar{r}-\bar{t})\bar{s} = \bar{1}$ ist, so gilt wegen $\bar{r}(\bar{r}-\bar{t}) = \bar{r}^2 - \bar{r}\bar{t} = \bar{r}^2$ die Gleichheit $\bar{r}^2\bar{s} = \bar{r}(\bar{r}-\bar{t})\bar{s} = \bar{r}\bar{1} = \bar{r}$.

(3)$\Rightarrow$(1): Wir haben zu zeigen, daß zu jedem Element r aus $R_W \setminus \{0\}$ ein Element s aus $R_W \setminus \{0\}$ existiert, für das $W \setminus V_{1/r} = V_{1/s}$ gilt.

Ist r eine Einheit von R_W, so ist nach (3) aus Lemma 2.1.8 $V_{1/r} = W$ bzw. $W \setminus V_{1/r} = \emptyset$. Ist dann s ein (nach (3) existierendes) Element aus $I_W \setminus \{0\}$, so ist nach (4) aus Lemma 2.1.8 $V_{1/s} = \emptyset$ und somit $W \setminus V_{1/r} = \emptyset = V_{1/s}$.

Ist r eine Nichteinheit von R_W und ist t ein (nach (3) existierendes) Element aus R_W, für das $\bar{r}^2\bar{t} = \bar{r}$ bzw. $r^2t - r = r(rt-1) \in I_W$ gilt, so ist $s := rt - 1 \neq 0$, und wir zeigen jetzt, daß darüberhinaus die Gleichheit $W \setminus V_{1/r} = V_{1/s}$ gilt. Hierzu sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W.

Ist $\mathcal{O}$ in $W \setminus V_{1/r}$ enthalten, so liegt r nach (1) aus Lemma 2.1.8 in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, woraus folgt, daß das Element $s = rt - 1$ nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Letzteres ist jedoch nach (1) aus Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}$ in $V_{1/s}$ enthalten ist.

Ist umgekehrt $\mathcal{O}$ in $V_{1/s}$ enthalten, so liegt das Element s nach (1) aus Lemma 2.1.8 nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, woraus, weil rs in $I_W \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt und es sich bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein Primideal von R_W handelt, folgt, daß r in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegen muß. Dies jedoch bedeutet nach (2) aus Lemma 2.1.8 gerade, daß $\mathcal{O}$ in $W \setminus V_{1/r}$ enthalten ist. $\square$

Jedes Primideal $\mathcal{P}$ eines regulären Ringes R ist ein maximales Ideal des Ringes R. Ist nämlich r ein beliebiges Element aus $R \setminus \mathcal{P}$ und ist s ein Element aus R, für das $r^2s = r$ bzw. $r(rs-1) = 0$ ist, so liegt, weil r nicht in $\mathcal{P}$ liegt, das Element

$rs - 1$ in $\mathcal{P}$. Die 1 läßt sich also für ein gewisses Element p aus $\mathcal{P}$ in der Form $1 = p + rs$ schreiben, was gleichbedeutend damit ist, daß $\mathcal{P} + Rr = R$ ist.

Somit ergibt sich aus Satz 2.2.4 das folgende Korollar:

Korollar 2.2.5 *Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, so handelt es sich für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W beim Primideal $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ des Holomorphieringes R_W um ein maximales Ideal von R_W.*

Beweis: Weil $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ ein Primideal von R_W ist und weil I_W in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ enthalten ist, handelt es sich bei $\bar{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} := \{\bar{r} = r + I_W \mid r \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\}$ um ein Primideal, und somit sogar um ein maximales Ideal des nach Satz 2.2.4 regulären Restklassenringes R_W/I_W. Hieraus ergibt sich, zusammen mit $I_W \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O})$, daß auch $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ selbst maximal sein muß. $\square$

Der nun folgende Satz 2.2.6 und der weiter unten folgende Satz 2.2.8 besagen zusammengenommen, daß im Falle eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W), dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, genau dann **jedes** maximale Ideal $\mathcal{M}$ des Holomorphieringes R_W von der Form $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; $\mathcal{O} \in W$ ist, wenn W nicht leer ist und jede Überdeckung von W, die aus Mengen des Systems $\mathcal{V}_W^*$ besteht, eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Die Menge der maximalen Ideale eines Ringes R bezeichnen wir von nun an stets mit **Max(R)**.

Satz 2.2.6 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, für den $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$ gilt*[3]*. Dann sind für eine Teilmenge M von $R_W \setminus \{0\}$ die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) Es ist $\bigcup_{r \in M} V_{1/r} = W$.

(2) Das von M in R erzeugte Ideal I ist gleich R.

(3) Es gibt eine endliche Teilmenge M_0 von M, für die $\bigcup_{r \in M_0} V_{1/r} = W$ ist.

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2): Wäre I echt in R_W enthalten, so gäbe es ein maximales Ideal $\mathcal{M}$ aus R_W, das I umfaßt sowie wegen $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$ einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, für den $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}$ ist. Aus der Tatsache, daß es sich bei M um eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ handelt, ergibt sich zusammen mit (1) aus Lemma 2.1.8, daß der Bewertungsring $\mathcal{O}$ für kein Element r aus M in $V_{1/r}$ enthalten ist. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß es sich bei $(V_{1/r})_{r \in M}$ um eine Überdeckung von W handelt.

(2)$\Rightarrow$(3): Weil $I = R$ ist, liegt insbesondere die 1 in I; es gibt daher eine (positive) natürliche Zahl k, Elemente $r_0, \ldots, r_{k-1}$ aus M sowie Elemente $s_0, \ldots, s_{k-1}$ aus

[3] Aus $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$ folgt insbesondere, daß W nicht leer ist.

R_W, für die $r_0s_0+\ldots+r_{k-1}s_{k-1}=1$ ist. Es ist dann $V_{1/r_0}\cup\ldots\cup V_{1/r_{k-1}}=W$, denn die Existenz eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus W, der nicht in $V_{1/r_0}\cup\ldots\cup V_{1/r_{k-1}}$ enthalten wäre, und für den somit nach (2) aus Lemma 2.1.8 sämtliche Elemente $r_0,\ldots,r_{k-1}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ lägen, würde den Widerspruch $1\in\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liefern.

(3)$\Rightarrow$(1) ist klar. $\square$

Korollar 2.2.7 *Es sei* (K,W) *ein mehrfach bewerteter Körper, für den* $\mathrm{Max}(R_W)=\{\mathcal{P}(\mathcal{O})\mid\mathcal{O}\in W\}$ *gilt.*

(1) Jede Überdeckung von W*, die aus Mengen des Systems* $\mathcal{V}_W^*$ *besteht, besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(2) Bilden die Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$ *eine Basis von* W*, so ist* W *quasikompakt.* $\square$

Im Falle eines mehrfach bewerteten Körpers (K,W) mit nichtleerem W, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, läßt sich die Aussage von Satz 2.2.6 umkehren.

Satz 2.2.8 *Ist* (K,W) *ein mehrfach bewerteter Körper mit nichtleerem* W*, dessen zugehöriges Mengensystem* $\mathcal{V}_W^*$ *unter Komplementbildung abgeschlossen ist und für den jede aus Mengen des Systems* $\mathcal{V}_W^*$ *bestehende Überdeckung von* W *eine endliche Teilüberdeckung besitzt, so ist* $\mathrm{Max}(R_W)=\{\mathcal{P}(\mathcal{O})\mid\mathcal{O}\in W\}$.

Beweis: Daß es sich für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein maximales Ideal von R_W handelt, wissen wir bereits (s. Korollar 2.2.5). Es bleibt zu zeigen, daß umgekehrt zu jedem maximalen Ideal $\mathcal{M}$ von R_W ein Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W existiert, für den das Primideal $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ mit dem maximalen Ideal $\mathcal{M}$ übereinstimmt.

Es sei also $\mathcal{M}$ ein beliebiges maximales Ideal des Ringes R_W. Angenommen für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W würde $\mathcal{P}(\mathcal{O})\neq\mathcal{M}$, und somit (weil $\mathcal{M}$ wegen der Maximalität nicht echt in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ enthalten sein kann) $\mathcal{M}\not\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{O})$ gelten. Dann gäbe es zu jedem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W ein Element $r_{\mathcal{O}}$ aus $\mathcal{M}$, das nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt und für das folglich erstens $r_{\mathcal{O}}\neq 0$ und zweitens (nach (1) aus Lemma 2.1.8) $\mathcal{O}\in V_{1/r_{\mathcal{O}}}$ gilt. Weil jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W für das zu ihm gehörende Element $r_{\mathcal{O}}$ in $V_{1/r_{\mathcal{O}}}$ enthalten ist, handelt es sich bei $(V_{1/r_{\mathcal{O}}})_{\mathcal{O}\in W}$ um eine (aus Mengen des Systems $\mathcal{V}_W^*$ bestehende) Überdeckung von W. Weil nach Voraussetzung jede solche Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, gibt es eine natürliche Zahl k sowie Bewertungsringe $\mathcal{O}_0,\ldots,\mathcal{O}_{k-1}$ aus W, für die $W=V_{1/r_{\mathcal{O}_0}}\cup\ldots\cup V_{1/r_{\mathcal{O}_{k-1}}}$ gilt; wegen $W\neq\emptyset$ ist k positiv. Nach Lemma 2.2.3 gibt es dann ein Element r aus dem von den Elementen $r_{\mathcal{O}_0},\ldots,r_{\mathcal{O}_{k-1}}$ erzeugten Ideal I von R_W, das ungleich 0 ist und für das $W=V_{1/r_{\mathcal{O}_0}}\cup\ldots\cup V_{1/r_{\mathcal{O}_{k-1}}}=V_{1/r}$ gilt. Was dieses Element r betrifft, so stellen wir fest, daß es, weil die Elemente $r_{\mathcal{O}_0},\ldots,r_{\mathcal{O}_{k-1}}$ in $\mathcal{M}$ liegen und somit das von ihnen erzeugte Ideal I in $\mathcal{M}$ enthalten ist, einerseits in $\mathcal{M}$ liegt, daß es sich aber bei ihm wegen

$V_{1/r} = W$ nach (1) aus Lemma 2.1.8 andererseits um eine Einheit des Ringes R_W handelt.

Die Existenz des Elementes r, das sowohl im maximalen Ideal $\mathcal{M}$ als auch in R_W^* liegt, führt unsere Anfangsannahme zum Widerspruch; es gibt also einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, für den $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}$ ist. □

Beispiel 2.2.9 Es sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, es sei t ein über dem Körper K transzendentes Element, und es sei W die Menge aller Bewertungsringe des Körpers $K(t)$, die den Bewertungsring $\mathcal{O}$ fortsetzen. Aus den Überlegungen des sechsten Abschnittes dieses Kapitels, in dem wir uns mit Fortsetzungen von Mengen von Bewertungsringen auf Oberkörper beschäftigen werden, ergibt sich, daß es sich beim Holomorphiering R_W von W genau um den Bewertungsring $\mathcal{O}$ handelt.

Es sei r ein beliebiges Element aus $R_W \setminus \{0\} = \mathcal{O} \setminus \{0\} = \mathcal{O}^* \cup (\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\})$. Falls r in $\mathcal{O}^*$ liegt, so ist $V_{1/r} = W$ und falls r in $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ liegt, so ist $V_{1/r} = \emptyset$. Es folgt, daß das Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ im Falle eines nichttrivialen Bewertungsringes $\mathcal{O}$, weil dann $\mathcal{O}^*$ und $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ nicht leer sind, genau aus den Mengen W und $\emptyset$ besteht sowie daß das Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ im Falle $\mathcal{O} = K$, weil dann $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ leer ist, genau aus W besteht. Im ersten Fall ist $\mathcal{V}_W^*$ unter Komplementbildung abgeschlossen, im zweiten Fall nicht. In keinem der beiden Fälle ist $\mathcal{V}_W^*$ eine Basis von W.

Bemerkung 2.2.10 Für die Mengen W aus Beispiel 2.2.9 gilt trivialerweise, daß jede aus Mengen des Systems $\mathcal{V}_W^*$ bestehende Überdeckung von W eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein Beispiel für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W), dessen Mengensystem $\mathcal{V}_W^*$ zwar unter Komplementbildung abgeschlossen ist, der aber die obige „Überdeckungseigenschaft“ nicht besitzt, wird in Abschnitt 2.4 behandelt.

Wir wenden uns nun dem Studium solcher mehrfach bewerteten Körper (K, W) zu, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist und beginnen mit dem folgenden einfachen

Lemma 2.2.11 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist.*

(1) Die Mengen aus $\mathcal{V}_W$ sind clopen Teilmengen von W.

(2) W ist Hausdorffsch.

Beweis: (1) gilt, weil es sich bei den Mengen aus $\mathcal{V}_W$ um offene Teilmengen von W handelt.

(2): Sind $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei verschiedene Bewertungsringe aus W und ist a ein beliebiges Element aus $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}'$ bzw. aus $\mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, je nachdem, ob $\mathcal{O}$ nicht in $\mathcal{O}'$

oder ob $\mathcal{O}'$ nicht in $\mathcal{O}$ enthalten ist, so lassen sich $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ durch die clopen Teilmengen V_a und $W \setminus V_a$ voneinander trennen. $\square$

Wir zeigen nun, daß für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) mit einem unter Komplementbildung abgeschlossenen Mengensystem $\mathcal{V}_W$ die beiden Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$ übereinstimmen.

Satz 2.2.12 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, und es sei $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem Element a aus K ein Element a_* aus $R_W \setminus \{0\}$, für welches $V_a = V_{1/a_*}$ gilt und für welches das Element aa_* in R_W liegt.*

Beweis: Da die Behauptung des Satzes im Falle $W = \emptyset$ klar ist, können wir im Folgenden davon ausgehen, daß $W \neq \emptyset$ ist.

Weil $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, gibt es zu jedem Element a aus K ein Element a^* aus K, für das $W \setminus V_a = V_{a^*}$ gilt. Ein solches Element a^* kann darüberhinaus stets ungleich 0 gewählt werden, denn wenn für $a^* = 0$ die Gleichheit $W \setminus V_a = V_{a^*} = V_0 = W$ gilt, so gilt sie auch für $a^* = 1$. Weil $W \neq \emptyset$ ist und weil V_a und V_{a^*} eine Partition von W bilden, ist $a \neq a^*$. Setzt man nun $a_* := a^*/(a - a^*)$, so ist a_* ungleich 0, und wir beweisen jetzt, daß a_* die im Satz angegebenen Eigenschaften besitzt:

Hierzu sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W. Wir zeigen, daß $\mathcal{O}$ genau dann in V_a enthalten ist, wenn $\mathcal{O}$ in V_{1/a_*} enthalten ist sowie daß die Elemente a_* und aa_* in $\mathcal{O}$ liegen.

Ist $\mathcal{O}$ in V_a enthalten, so ist nach (2) aus Lemma 2.1.1 $v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0$ und $v_{\mathcal{O}}(a^*) < 0$. Folglich ist $v_{\mathcal{O}}(a - a^*) = \min\{v_{\mathcal{O}}(a), v_{\mathcal{O}}(a^*)\} = v_{\mathcal{O}}(a^*)$, und somit ist $v_{\mathcal{O}}(a_*) = v_{\mathcal{O}}(a^*/(a - a^*)) = v_{\mathcal{O}}(a^*) - v_{\mathcal{O}}(a - a^*) = v_{\mathcal{O}}(a^*) - v_{\mathcal{O}}(a^*) = 0$ sowie $v_{\mathcal{O}}(aa_*) = v_{\mathcal{O}}(a_*) + v_{\mathcal{O}}(a) = v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0$.

Daß $v_{\mathcal{O}}(a_*) = 0$ ist, ist gleichbedeutend damit, daß sowohl a_* als auch $1/a_*$ in $\mathcal{O}$ liegen. Daß $1/a_*$ in $\mathcal{O}$ liegt, ist gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}$ in V_{1/a_*} enthalten ist. Schließlich ist $v_{\mathcal{O}}(aa_*) \geq 0$ gleichbedeutend damit, daß das Element aa_* in $\mathcal{O}$ liegt.

Falls $\mathcal{O}$ nicht in V_a enthalten ist, so ist $\mathcal{O}$ wegen $W \setminus V_a = V_{a^*}$ in V_{a^*} enthalten, weshalb $v_{\mathcal{O}}(a) < 0$ und $v_{\mathcal{O}}(a^*) \geq 0$ ist. Folglich ist $v_{\mathcal{O}}(a - a^*) = \min\{v_{\mathcal{O}}(a), v_{\mathcal{O}}(a^*)\} = v_{\mathcal{O}}(a) < 0$, und somit ist $v_{\mathcal{O}}(a_*) = v_{\mathcal{O}}(a^*/(a - a^*)) = v_{\mathcal{O}}(a^*) - v_{\mathcal{O}}(a - a^*) = v_{\mathcal{O}}(a^*) - v_{\mathcal{O}}(a) > 0$ sowie $v_{\mathcal{O}}(aa_*) = v_{\mathcal{O}}(a) + v_{\mathcal{O}}(a_*) = v_{\mathcal{O}}(a) + (v_{\mathcal{O}}(a^*) - v_{\mathcal{O}}(a)) = v_{\mathcal{O}}(a^*) \geq 0$.

Daß $v_{\mathcal{O}}(a_*) > 0$ ist, bedeutet gerade, daß a_* in $\mathcal{O}$ und daß $1/a_*$ nicht in $\mathcal{O}$ liegt. Letzteres ist gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}$ nicht in V_{1/a_*} enthalten ist. Daß $v_{\mathcal{O}}(aa_*) \geq 0$ ist, bedeutet nichts anderes, als daß das Element aa_* in $\mathcal{O}$ liegt. $\square$

Punkt (2) des nun folgenden Korollars 2.2.13 zu Satz 2.2.12 beinhaltet die Bestätigung der im ersten Abschnitt dieses Kapitels aufgestellten Behauptung, daß nämlich das Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, **falls** es unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Es verhält sich hier also anders als im Falle einer Menge von Positivbereichen X eines Körpers K, wo das Mengensystem $\mathcal{H}_X$ i. a. nicht unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, obwohl es stets unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

Punkt (5c) des Korollars 2.2.13 besagt, daß Mengen W von Bewertungsringen, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, die bemerkenswerte Eigenschaft besitzen, daß sie sich durch Lokalisierung nach den Primidealen $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; $\mathcal{O} \in W$ aus ihrem Holomorphiering R_W rekonstruieren lassen.

Korollar 2.2.13 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper mit einem unter Komplementbildung abgeschlossenen Mengensystem $\mathcal{V}_W$.*

(1) Die Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$ stimmen miteinander überein.

(2) Jede Boolesche Kombination von Mengen aus $\mathcal{V}_W$ ist wieder in $\mathcal{V}_W$ enthalten.

(3) $\mathcal{V}_W$ ist eine Basis der kanonischen Topologie von W (die darüberhinaus nach Lemma 2.2.11 aus clopen Teilmengen von W besteht).

(4) I_W ist nicht das Nullideal, und R_W/I_W ist regulär.

(5) Für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W gilt:

(a) $\mathcal{O}$ ist nichttrivial.

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt in $\mathrm{Max}(R_W)$.

(c) Die beiden Ringe $\mathcal{O}$ und $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ sind gleich.

Beweis: (1) ergibt sich unmittelbar aus obigem Satz.

(2) folgt aus (1) und Lemma 2.2.2.

(3) folgt, weil es sich bei den Teilmengen von W, die sich als endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{V}_W$ schreiben lassen, um eine Basis der kanonischen Topologie von W handelt, aus (2).

(4) folgt aus (1) und Satz 2.2.4.

(5): (a) ergibt sich aus (1) und Lemma 2.2.1. (b) ergibt sich aus (1) und Korollar 2.2.5.

(c): Für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W ist $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ ein Unterring von $\mathcal{O}$. Daß diese beiden Ringe in Wahrheit sogar gleich sind, sieht man, wenn man für ein beliebiges Element a aus $\mathcal{O}$ zunächst unter Verwendung des obigen Satzes ein Element a_* aus $R_W \setminus \{0\}$ wählt, für das $V_a = V_{1/a_*}$ gilt und für welches das

Element aa_* in R_W liegt, wenn man sodann das Element a in der Form $a = aa_*/a_*$ als Quotient zweier Elemente aus R_W schreibt und bemerkt, daß das Element a_* wegen $\mathcal{O} \in V_a = V_{1/a_*}$ nach (1) aus Lemma 2.1.8 nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt und wenn man schließlich aus alledem folgert, daß a in $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ enthalten ist. $\square$

Beispiel 2.2.14 (Fortsetzung von Beispiel 2.2.9) Die Mengen W aus Beispiel 2.2.9 lassen sich nicht auf die oben angegebene Art und Weise aus ihrem Holomorphiering R_W und dessen Primideal(en) $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$; $\mathcal{O}' \in W$ rekonstruieren, denn wegen $R_W = \mathcal{O}$ und wegen $\mathcal{P}(\mathcal{O}') = \mathcal{M}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O}' \in W$ gilt $(R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O}')} = \mathcal{O} \neq \mathcal{O}'\ \forall\, \mathcal{O}' \in W$. Insbesondere ist $\mathcal{V}_W$ daher nicht unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beispiele für mehrfach bewertete Körper (K, W), deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, findet man in Abschnitt 2.4.

2.3 Boolesche mehrfach bewertete Körper und ihr Holomorphiering

Wir kommen nun ohne weitere Umschweife zur Definition eines der zentralen Begriffe dieser Arbeit, und zwar dem der **Booleschen Menge von Bewertungsringen** eines Körpers bzw. dem des **Booleschen mehrfach bewerteten Körpers**.

Ist W eine Menge von Bewertungsringen eines Körpers K, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, so bezeichnet man die Menge W bzw. den mehrfach bewerteten Körper (K, W) als **Boolesch**, falls es sich bei W (zusammen mit der kanonischen Topologie) um einen sogenannten Booleschen topologischen Raum handelt. Unter einem **Booleschen topologischen Raum** versteht man einen kompakten (kompakt = quasikompakt + Hausdorffsch) topologischen Raum X, der eine Basis besitzt, die aus clopen Teilmengen von X besteht. Die Stone-Räume Boolescher Algebren sind Boolesch, und jeder Boolesche topologische Raum ist homöomorph zum Stone-Raum der Booleschen Algebra seiner clopen Teilmengen (s. z. B. [Bu-Sa]).

Ist K ein Körper und ist A eine Teilmenge von K, so ist die Menge $X(A)$ aller Positivbereiche von K, die A umfassen, bezüglich der Harrison-Topologie ein Boolescher topologischer Raum (s. Abschnitt 1.1). Hingegen ist die Menge $W(A)$ aller Bewertungsringe von K, die A umfassen, bezüglich der kanonischen Topologie i. a. kein Boolescher topologischer Raum, da $W(A)$ (bezüglich dieser Topologie) zwar stets quasikompakt, jedoch i. a. weder Hausdorffsch ist, noch eine Basis besitzt, die aus clopen Teilmengen von $W(A)$ besteht.

Lemma 2.3.1 *Für eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) W ist Boolesch.

(2) W ist quasikompakt.

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Weil $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, handelt es sich nach Korollar 2.2.13 bei $\mathcal{V}_W$ um eine Basis von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht sowie nach Lemma 2.2.11 bei W um einen Hausdorffschen topologischen Raum. Weil nach (2) darüberhinaus auch noch Quasikompaktheit vorliegt, ist W insgesamt Boolesch. $\square$

Die folgenden beiden Eigenschaften Boolescher Mengen von Bewertungsringen ergeben sich mehr oder weniger unmittelbar aus der Definition:

Lemma 2.3.2 *Es sei W eine Boolesche Menge von Bewertungsringen eines Körpers K.*

(1) *Eine Teilmenge W' von W ist genau dann eine Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K, wenn W' eine abgeschlossene Teilmenge von W ist.*

(2) *Die clopen Teilmengen von W sind genau die Mengen aus $\mathcal{V}_W$.*

Beweis: (1): Für jedes Element a aus K gilt die Gleichheit $V_a^{W'} = V_a^W \cap W'$. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß für jede Teilmenge W' von W deren Mengensystem $\mathcal{V}_{W'}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

Eine Teilmenge A eines Booleschen topologischen Raumes X ist, zusammen mit der von X auf A induzierten Topologie, genau dann selbst wieder ein Boolescher topologischer Raum, wenn A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist (s. [Qu]). Folglich ist W', zusammen mit der von W auf W' induzierten Topologie, genau dann ein Boolescher topologischer Raum, wenn W' eine abgeschlossene Teilmenge von W ist. Die von W auf W' induzierte Topologie stimmt jedoch nach Bemerkung 2.1.2 gerade mit der kanonischen Topologie von W' überein.

(2): Nach Lemma 2.2.11 ist jede Menge aus $\mathcal{V}_W$ eine clopen Teilmenge von W.

Ist C eine beliebige clopen Teilmenge von W, so läßt sich C, weil C offen ist, weil es sich nach Korollar 2.2.13 bei $\mathcal{V}_W$ um eine Basis von W handelt und weil C als abgeschlossene Teilmenge des Booleschen topologischen Raumes W kompakt ist, als Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathcal{V}_W$ schreiben; C liegt somit, weil $\mathcal{V}_W$ unter Bildung von endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist (s. Korollar 2.2.13), selbst in $\mathcal{V}_W$. □

Innerhalb der Klasse der mehrfach bewerteten Körper (K, W) mit nichtleerem W, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, lassen sich die Booleschen mehrfach bewerteten Körper folgendermaßen charakterisieren:

Satz 2.3.3 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) mit nichtleerem W, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) *(K, W) ist Boolesch.*

(2) $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$.

Beweis: Weil $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, ist $\mathcal{V}_W = \mathcal{V}_W^*$ und bilden die Mengen aus $\mathcal{V}_W = \mathcal{V}_W^*$ eine Basis von W (s. Korollar 2.2.13). (1)$\Rightarrow$(2) ergibt sich daher unmittelbar aus Satz 2.2.8, und (2)$\Rightarrow$(1) ergibt sich unmittelbar aus Korollar 2.2.7 und Lemma 2.3.1. □

Unter dem **Jacobson-Radikal** $J(R)$ eines Ringes R versteht man das Radikalideal von R, das entsteht, wenn man alle maximalen Ideale $\mathcal{M}$ von R miteinander schneidet; man setzt also $J(R) := \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R)\}$. Ein Unterring

R eines Körpers K wird als ein **Prüfer-Ring** von K bezeichnet, falls es sich für jedes maximale Ideal $\mathcal{M}$ von R bei der Lokalisierung $R_{\mathcal{M}}$ von R nach $\mathcal{M}$ um einen Bewertungsring von K handelt.

Korollar 2.3.4 *Es sei (K, W) ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehörige Menge W nicht leer ist.*

(1) Es ist $I_W = J(R_W)$.

(2) $J(R_W)$ ist nicht das Nullideal, und der Restklassenring $R_W/J(R_W)$ ist regulär.

(3) Es ist $W = \{(R_W)_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R_W)\}$.

(4) R_W ist ein Prüfer-Ring des Körpers K, der ungleich K ist.

Beweis: (1): Aus $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$ ergibt sich $I_W = \bigcap \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\} = \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R_W)\} = J(R_W)$.

(2) ergibt sich, unter Verwendung von Punkt (4) des Korollars 2.2.13, aus (1).

(3) ergibt sich, unter Vewrwendung von Punkt (5c) des Korollars 2.2.13, aus der Gleichheit $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$.

(4) Daß R_W ein Prüfer-Ring von K ist, ergibt sich aus (3). Daß $R_W \neq K$ ist, ergibt sich aus (2). □

Die in Satz 2.3.3 und Korollar 2.3.4 zusammengestellten Ergebnisse über Boolesche mehrfach bewertete Körper und deren Holomorphieringe werfen die folgenden beiden Fragen auf:

(1) Ist jeder Unterring R eines Körpers K, der die Eigenschaften (2) und (4) aus Korollar 2.3.4 besitzt, Holomorphiering einer Booleschen Menge W von Bewertungsringen des Körpers K?

(2) Ist jeder mehrfach bewertete Körper (K, W), der die Eigenschaft (2) aus Satz 2.3.3 sowie die Eigenschaften (2) und (4) aus Korollar 2.3.4 besitzt, Boolesch?

Bei der Beantwortung dieser beiden Fragen spielt der weiter unten folgende Satz 2.3.6, in dem einige Eigenschaften der zu einem Prüfer-Ring R eines Körpers K gehörenden Menge $W_R := \{R_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R)\}$ von Bewertungsringen aufgelistet werden, eine Schlüsselrolle. Bevor wir uns jedoch Satz 2.3.6 zuwenden, stellen wir im nun folgenden Fakt 2.3.5 einige Eigenschaften von Prüfer-Ringen zusammen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden.

Fakt 2.3.5 *Es sei R ein Prüfer-Ring eines Körpers K.*

(1) Der Quotientenkörper von R ist gleich K.

(2) Für jedes maximale Ideal $\mathcal{M}$ von R ist $R_{\mathcal{M}}$ der einzige Bewertungsring $\mathcal{O}$ des Körpers K, der R umfaßt und für den $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R = \mathcal{M}$ ist.

(3) Ist $\mathcal{M}$ ein maximales Ideal von R und ist $\mathcal{O}$ der Bewertungsring $R_{\mathcal{M}}$, so gibt es zu jedem Element a aus $\mathcal{O}$ ein Element r aus R, für das $r - a$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ liegt; falls $R \neq K$ ist, so kann r stets ungleich a gewählt werden. In jedem Fall ist $k_{\mathcal{O}} = R/\mathcal{M}$.

Die (einfachen) Beweise der obigen drei Aussagen sowie weitere Informationen über Prüfer-Ringe findet man z. B. im elften Abschnitt von [En].

Satz 2.3.6 *Es sei R ein Prüfer-Ring eines Körpers K, und es sei $W_R = \{R_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R)\}$ die zu R gehörende Menge von Bewertungsringen des Körpers K. Dann gilt:*

(1) Es ist $R_{W_R} = R$, es ist $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W_R\} = \mathrm{Max}(R)$, und es ist $I_{W_R} = J(R)$.

(2) $\mathcal{V}^*_{W_R}$ ist eine Basis von W_R.

(3) W_R ist quasikompakt.

(4) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) W_R ist Boolesch.

(b) $\mathcal{V}_{W_R}$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

(c) Die Mengen aus $\mathcal{V}_{W_R}$ sind clopen, und $\emptyset$ liegt in $\mathcal{V}_{W_R}$.

(d) Die Mengen aus $\mathcal{V}^*_{W_R}$ sind clopen, und $\emptyset$ liegt in $\mathcal{V}^*_{W_R}$.

(e) $\mathcal{V}^*_{W_R}$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

(f) $J(R)$ ist nichttrivial, und der Restklassenring $R/J(R)$ ist regulär.

(5) Ist W eine Menge von Bewertungsringen des Körpers K, für die $R_W = R$ und $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\} = \mathrm{Max}(R)$ ist, so ist $W = W_R$.

Beweis: (1): Die Gleichheit $R_{W_R} = R$ ergibt sich aus der wohlbekannten Tatsache, daß ganz allgemein für jeden Integritätsbereich R die Gleichheit $R = \bigcap \{R_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R)\}$ gilt (s. z. B. Lemma 2.6 in [Fr-Ja]).

Die Gleichheit $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W_R\} = \mathrm{Max}(R)$ ergibt sich aus der Tatsache, daß für ein Primideal $\mathcal{P}$ eines Ringes R stets die Gleichheit $(\mathcal{P} \cdot R_{\mathcal{P}}) \cap R = \mathcal{P}$ gilt.

Die Gleichheit $J(R) = I_{W_R}$ ergibt sich unmittelbar aus der Gleichheit $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W_R\} = \mathrm{Max}(R)$.

(2): Weil es sich nach Bemerkung 2.1.2 bei $\mathcal{V}_{W_R}$ um eine Subbasis von W_R handelt und weil das Mengensystem $\mathcal{V}^*_{W_R}$ nach Bemerkung 2.1.9 unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß zu jedem

Element a aus K und zu jedem maximalen Ideal $\mathcal{M}$ von R, dessen zugehöriger Bewertungsring $\mathcal{O} := R_{\mathcal{M}}$ in V_a enthalten ist, ein Element s aus R existiert, auf das die Aussage $\mathcal{O} \in V_{1/s} \subseteq V_a$ zutrifft.

Es sei also a ein Element aus K und $\mathcal{M}$ ein maximales Ideal von R, und es gelte $\mathcal{O} := R_{\mathcal{M}} \in V_a$. Weil $\mathcal{O}$ in V_a enthalten ist, d. h. weil a in $\mathcal{O}$ liegt, gibt es Elemente r aus R und s aus $R \backslash \mathcal{M}$, für die $a = r/s$ gilt. Weil s nicht in $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt, ist $\mathcal{O}$ nach (1) aus Lemma 2.1.8 in $V_{1/s}$ enthalten. Weil jeder Bewertungsring $\mathcal{O}'$ aus W_R, der das Element $1/s$ enthält wegen $r \in R = R_{W_R} \subseteq \mathcal{O}'$ auch das Element $r/s = a$ enthält, ist darüberhinaus auch $V_{1/s} \subseteq V_a$ erfüllt.

(3) ergibt sich aus (1), (2) und Korollar 2.2.7.

(4): (a)$\Rightarrow$(b), (b)$\Rightarrow$(c) und (c)$\Rightarrow$(d) sind klar.

Wegen (1) und (2) ergibt sich die Äquivalenz der Aussagen (d) und (e) unmittelbar aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2.3.7 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W), für den $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$ gilt und für den die Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$ eine Basis der kanonischen Topologie von W bilden, sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) Die Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$ sind clopen, und $\emptyset$ liegt in $\mathcal{V}_W^*$.

(2) $\mathcal{V}_W^*$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis des Lemmas: (1)$\Rightarrow$(2): Wir haben zu zeigen, daß für jedes Element r aus $R_W \setminus \{0\}$ die Menge $W \setminus V_{1/r}$ in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten ist.

Ist r eine Einheit von R_W, so ist nach (3) aus Lemma 2.1.8 die Menge $W \setminus V_{1/r}$ gleich der leeren Menge; diese liegt aber nach Voraussetzung in $\mathcal{V}_W^*$.

Ist r eine Nichteinheit von R_W, so ist $W \setminus V_{1/r}$ nach (3) aus Lemma 2.1.8 ungleich $\emptyset$. Darüberhinaus läßt sich die Menge $W \setminus V_{1/r}$ (die nach Voraussetzung clopen ist), weil $W \setminus V_{1/r}$ offen ist, weil es sich nach Voraussetzung bei $\mathcal{V}_W^*$ um eine Basis von W handelt und weil $W \setminus V_{1/r}$ als abgeschlossene Teilmenge des nach Korollar 2.2.7 quasikompakten topologischen Raumes W selbst quasikompakt ist, als endliche Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{V}_W^*$ schreiben; es gibt also eine (wegen $W \setminus V_{1/r} \neq \emptyset$ positive) natürliche Zahl k sowie Elemente $r_0, \ldots, r_{k-1}$ aus $R_W \setminus \{0\}$, für die $W \setminus V_{1/r} = V_{1/r_0} \cup \ldots \cup V_{1/r_{k-1}}$ und daher $W = V_{1/r} \cup (W \setminus V_{1/r}) = V_{1/r} \cup V_{1/r_0} \cup \ldots \cup V_{1/r_{k-1}}$ gilt. Zusammen mit Lemma 2.2.6 folgt hieraus, daß das von den Elementen $r, r_0, \ldots, r_{k-1}$ erzeugte Ideal I des Ringes R_W gleich R_W ist; es gibt also Elemente $s, s_0, \ldots, s_{k-1}$ aus R_W, für die $rs + r_0 s_0 + \ldots + r_{k-1} s_{k-1}$ gleich 1 ist. Wir setzen nun $t := 1 - rs = r_0 s_0 + \ldots + r_{k-1} s_{k-1}$ und zeigen, daß $t \neq 0$ ist sowie daß $W \setminus V_{1/r} = V_{1/t}$ gilt:

Wäre $t = 0$, so wäre $rs = 1$, was der Tatsache widersprechen würde, daß es sich bei r um eine Nichteinheit von R_W handelt.

Es sei nun $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W. Falls $\mathcal{O}$ in $W \setminus V_{1/r}$ enthalten ist, so liegt r nach (2) aus Lemma 2.1.8 in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; es folgt, daß rs in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$

liegt bzw. daß $t = 1 - rs$ nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Letzteres ist nach (1) aus Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}$ in $V_{1/t}$ enthalten ist.

Falls $\mathcal{O}$ in $V_{1/t}$ enthalten ist, so liegt $t = r_0s_0 + \ldots + r_{k-1}s_{k-1}$ nach (1) aus Lemma 2.1.8 nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; es folgt, daß es mindestens ein i aus $\{0, \ldots, k-1\}$ gibt, für das r_i nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Für jedes solche i gilt aber $\mathcal{O} \in V_{1/r_i} \subseteq W \setminus V_{1/r}$.

(2)$\Rightarrow$(1) ist klar. $\diamond$

Die Äquivalenz der Aussagen (e) und (f) ergibt sich aus (1) und Satz 2.2.4.

(e)$\Rightarrow$(b): Es sei a ein beliebiges Element aus K. Wir haben zu zeigen, daß die Menge $W_R \setminus V_a$ in $\mathcal{V}_{W_R}$ enthalten ist.

Behauptung: $W_R \setminus V_a$ ist eine offene (und damit insgesamt eine clopen) Teilmenge von W_R.

Beweis der Behauptung: Wir zeigen, daß zu jedem maximalen Ideal $\mathcal{M}$ von R, dessen zugehöriger Bewertungsring $\mathcal{O} := R_{\mathcal{M}}$ in $W_R \setminus V_a$ enthalten ist, eine offene Teilmenge V von $W_R \setminus V_a$ existiert, die $\mathcal{O}$ enthält.

Es sei also $\mathcal{M}$ ein maximales Ideal von R, dessen zugehöriger Bewertungsring $\mathcal{O} = R_{\mathcal{M}}$ nicht in V_a enthalten ist. Dann ist $a \neq 0$, und das Element $1/a$ liegt im maximalen Ideal $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{M} \cdot R_{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{O}$. Es gibt daher Elemente r aus $\mathcal{M}$ und s aus $R \setminus \mathcal{M}$, für die $1/a = r/s$ ist. Weil r in $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt und weil s nicht in $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt, ist $\mathcal{O}$ nach (1) und (2) aus Lemma 2.1.8 in der Menge $V := (W_R \setminus V_{1/r}) \cap V_{1/s}$ enthalten.

Weil für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}'$ aus W_R, der in V enthalten ist, nach (1) und (2) aus Lemma 2.1.8 $v_{\mathcal{O}'}(r) > 0$ sowie $v_{\mathcal{O}'}(s) = 0$ gilt und somit insgesamt $v_{\mathcal{O}'}(1/a) = v_{\mathcal{O}'}(r/s) = v_{\mathcal{O}'}(r) - v_{\mathcal{O}'}(s) = v_{\mathcal{O}'}(r) > 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}'}(a) < 0$ ist, handelt es sich bei V nach Lemma 2.1.1 um eine Teilmenge von $W_R \setminus V_a$. Weil $\mathcal{V}^*_W$ nach Voraussetzung unter Komplementbildung sowie generell unter Bildung von endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist (s. Bemerkug 2.1.9), handelt es sich bei V um eine Menge aus $\mathcal{V}^*_{W_R}$ und somit insbesondere um eine offene Teilmenge von W_R, bzw. $W_R \setminus V_a$. $\diamond$

Weil die Mengen aus $\mathcal{V}^*_{W_R}$ nach (2) eine Basis von W_R bilden, weil $W_R \setminus V_a$ nach obiger Behauptung eine offene Teilmenge von W_R ist und weil $W_R \setminus V_a$ als abgeschlossene Teilmenge des quasikompakten Raumes W_R selbst quasikompakt ist, läßt sich $W_R \setminus V_a$ als endliche Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{V}^*_{W_R}$ schreiben. Weil $\mathcal{V}^*_{W_R}$ nach Voraussetzung unter Komplementbildung, und damit nach Lemma 2.2.2 auch unter Bildung von endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, ist diese endliche Vereinigung, und somit $W_R \setminus V_a$ selbst, in $\mathcal{V}^*_{W_R} \subseteq \mathcal{V}_{W_R}$ enthalten, und genau das wollten wir zeigen.

(b)$\Rightarrow$(a) ergibt sich aus (3) und Lemma 2.3.1.

(5) ergibt sich aus (1) und dem Punkt (3) des Faktes 2.3.5.

(6) ergibt sich aus Punkt (2) des Faktes 2.3.5. □

Wir bezeichnen eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K bzw. einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) von nun an als **quasi-Boolesch**, falls es einen Prüfer-Ring R des Körpers K gibt, für den $W = W_R$ gilt.

Bemerkung 2.3.8 (1) Jeder Boolesche mehrfach bewertete Körper ist nach (3) und (4) aus Korollar 2.3.4 quasi-Boolesch.

(2) Ein quasi-Boolescher mehrfach bewerteter Körper ist nach Satz 2.3.6 genau dann Boolesch, wenn auf die zu W gehörenden Mengensysteme $\mathcal{V}_W$ und $\mathcal{V}_W^*$ die in Punkt (4) dieses Satzes angegebenen äquivalenten Aussagen (a) bis (e) zutreffen.

In den nun folgenden drei Sätzen werden u. a. die Antworten auf die obigen beiden Fragen (1) und (2) formuliert:

Satz 2.3.9 *Es sei R ein Unterring eines Körpers K.*

(1) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a) R ist Holomorphiering einer quasi-Booleschen Menge W von Bewertungsringen des Körpers K.

(b) R ist ein Prüfer-Ring des Körpers K.

Zusatz: Ist R Holomorphiering der quasi-Booleschen Menge W, so ist $W = W_R$.

(2) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a) R ist Holomorphiering einer nichtleeren Booleschen Menge W von Bewertungsringen des Körpers K.

(b) R ist ein Prüfer-Ring des Körpers K, dessen Jacobson Radikal $J(R)$ nichttrivial und dessen Restklassenring $R/J(R)$ regulär ist.

Beweis: (1): Wir beweisen zunächst (a)⇒(b) und den Zusatz: Ist W eine quasi-Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K, für die $R_W = R$ ist und ist S ein Prüfer-Ring von K, für den $W = W_S$ ist, so gilt nach (1) aus Satz 2.3.6 die Gleichheit $R = R_W = S$ und folglich auch die Gleichheit $W = W_S = W_R$.

(b)⇒(a): Ist R ein Prüfer-Ring von K, so ist R (nach (1) aus Satz 2.3.6) Holomorphiering der quasi-Booleschen Menge W_R.

(2): (a)⇒(b): Ist W eine Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K, für die $R = R_W$ ist, so ist W, weil W nach Bemerkung 2.3.8 quasi-Boolesch ist, nach (1) gleich W_R. Weil $J(R)$ nichttrivial und $R/J(R)$ regulär ist, ist W_R, und damit W, nach (4) aus Satz 2.3.6 Boolesch.

(b)⇒(a): Ist R ein Prüfer-Ring von K, dessen Jacobson-Radikal $J(R)$ nichttrivial und dessen Restklassenring $R/J(R)$ regulär ist, so ist R nach (1) aus Satz 2.3.6 Holomorphiering der nach (4) aus Satz 2.3.6 Booleschen Menge W_R. □

Satz 2.3.10 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) (K, W) *ist quasi-Boolesch.*

(2) R_W *ist ein Prüfer-Ring von* K*, und es ist* $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$.

(3) R_W *ist ein Prüfer-Ring von* K*, und es ist* $W = W_{R_W}$.

Beweis: (1)⇒(2) ergibt sich aus Punkt (1) des Satzes 2.3.6. (2)⇒(3) ergibt sich aus Punkt (5) desselben Satzes. (3)⇒(1) ergibt sich aus der Definition des Begriffs „quasi-Boolesch“. □

Satz 2.3.11 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) mit nichtleerem W sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) (K, W) *ist Boolesch.*

(2)
- *(a)* R_W *ist ein Prüfer-Ring von* K.
- *(b) Es ist* $\mathrm{Max}(R_W) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W\}$.
- *(c)* $J(R_W)$ *ist nichttrivial und* $R_W/J(R_W)$ *ist regulär.*

Zusatz: Ist (K, W) Boolesch, so ist $W = W_{R_W}$.

Beweis: (1)⇒(2) und der Zusatz ergeben sich aus Satz 2.3.3 und Korollar 2.3.4.

(2)⇒(1): Wegen (a) und (b) gilt nach Satz 2.3.10 die Gleichheit $W = W_{R_W}$. Wegen (c) ist W_{R_W}, und damit W, nach Punkt (4) aus Satz 2.3.6 Boolesch. □

2.4 Beispiele

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns ausführlich mit Beispielen sowohl für Boolesche als auch für nicht-Boolesche mehrfach bewertete Körper. Wir beginnen mit dem verhältnismäßig einfachen

Beispiel 2.4.1 *Für eine endliche Menge W von paarweise nicht ineinander enthaltenen, nichttrivialen Bewertungsringen $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ eines Körpers K gilt:*

(1) $\mathcal{V}_W = \mathcal{V}^*_W = \mathrm{Pot}(W)$.

(2) W ist Boolesch.

(1): Da die Behauptung im Falle $W = \emptyset$ klar ist, können wir im Folgenden davon ausgehen, daß $W \neq \emptyset$ ist.

Wir haben zu zeigen, daß jede Teilmenge W' von W für ein geeignet gewähltes Element r aus $R_W \setminus \{0\}$ die Form $V_{1/r}$ besitzt. Wir verwenden hierzu das sogenannte schwache Approximationstheorem für endlich viele paarweise nicht ineinander enthaltene Bewertungsringe eines Körpers K.

Fakt 2.4.2 *Ist W eine endliche Menge von paarweise nicht ineinander enthaltenen Bewertungsringen $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ eines Körpers K, so gibt es für beliebige Elemente $a_0 \in \mathcal{O}_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{O}_{n-1}$ ein Element r aus R_W, für das $r - a_i \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_i)$; $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt.*

Einen Beweis des schwachen Approximationstheorems findet man z.B. in [En].

Es sei nun also W' eine beliebige Teilmenge von W.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß es sich bei W' um die leere Menge handelt: Besteht dann die Menge W lediglich aus einem einzigen Bewertungsring $\mathcal{O}_0$, so ist $R_W = \mathcal{O}_0$, und aus der Nichttrivialität von $\mathcal{O}_0$ folgt, daß $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \neq \{0\}$ ist. Für jedes Element r aus $\mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \setminus \{0\}$ ist aber $V_{1/r} = \emptyset = W'$ (s. Lemma 2.1.8). Falls die Menge W aus mindestens zwei Bewertungsringen besteht, so liefert uns das schwache Approximationstheorem für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ ein Element r_i aus R_W, für das $r_i \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_i)$ sowie $r_i - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_j)$; $j \in \{0 \ldots n-1\} \setminus \{i\}$ gilt. Dieses zum Bewertungsring $\mathcal{O}_i$ gehörende Element r_i ist für jedes j aus $\{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O}_j)$ enthalten. Weil für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Menge $W \setminus \{\mathcal{O}_i\}$ bzw. die Menge $\{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ nicht leer ist (denn W besitzt mindestens zwei Elemente), folgt hieraus insbesondere, daß es sich für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ bei r_i nicht um die 0, und daher insgesamt um ein Element aus $\mathcal{P}(\mathcal{O}_i) \setminus \{0\}$ handelt. Ist dann $r := \prod_{i=0}^{n-1} r_i$ das Produkt der endlich vielen Elemente $r_0, \ldots, r_{n-1}$, so liegt r in $(\bigcap_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(\mathcal{O}_i)) \setminus \{0\} = I_W \setminus \{0\}$, was nach Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit ist, daß $V_{1/r} = \emptyset = W'$ gilt.

Falls es sich bei W' um eine nichtleere Teilmenge von W handelt, so liefert das schwache Approximationstheorem die Existenz eines Elementes r aus R_W, für das, wenn wir $J := \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid \mathcal{O}_i \in W'\}$ setzen, die Beziehungen $r - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_i)\ \forall\, i \in J$ und $r \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_i)\ \forall\, i \notin J$ gelten. Aus der Beziehung $r - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_i)\ \forall\, i \in J$ ergibt sich, daß für jedes i aus J das Element r nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O}_i)$ enthalten ist. Weil es sich bei W' bzw. bei J um eine nichtleere Menge handelt, folgt hieraus insbesondere, daß $r \neq 0$ ist. Aus der Tatsache, daß r genau dann nicht in $\mathcal{P}(\mathcal{O}_i)$ liegt, wenn es sich bei i um ein Element aus J bzw. bei $\mathcal{O}_i$ um ein Element aus W' handelt, ergibt sich mit Lemma 2.1.8 die Gleichheit $V_{1/r} = W'$.

(2): Weil $\mathcal{V}_W$ nach (1) unter Komplementbildung abgeschlossen ist und weil W als endlicher topologischer Raum quasikompakt ist, ist W nach Lemma 2.3.1 Boolesch. $\square$

Beispiel 2.4.3 *Die Menge $W_{\pi,n}$ aller (π, n)-Bewertungsringe eines formal (π, n)-adischen Körpers (K, π) ist Boolesch.*

Es sei K ein Körper, es sei π ein Element aus K, und es sei n eine positive natürliche Zahl. Unter einem **$(\pi, \mathbf{n})$-Bewertungsring** des Körpers K versteht man einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K, dessen Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ein kleinstes positives Element e besitzt und für dessen zugehörige Bewertung $v_{\mathcal{O}}$ die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot e$ gilt.

Lemma 2.4.4 *Für einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ des Körpers K sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{O}$ ist ein (π, n)-Bewertungsring von K.

(2) $\mathcal{O}$ ist nichttrivial, und für alle positiven Elemente γ aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$ gilt die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot \gamma$.

Beweis: (1)⇒(2): Daß $\mathcal{O}$ nichttrivial ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ein (kleinstes) positives Element besitzt. Ist e das kleinste positive Element von $\Gamma_{\mathcal{O}}$, so gilt für jedes positive Element γ aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$ die Ungleichung $0 < e \leq \gamma$ und folglich auch die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot e \leq n \cdot \gamma$.

(2)⇒(1): Weil es sich bei $\mathcal{O}$ um einen nichttrivialen Bewertungsring von K handelt, ist die Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ebenfalls nichttrivial und besitzt daher insbesondere positive Elemente. Weil für jedes positive Element γ nach (2) die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot \gamma < \infty$ gilt, folgt aus der Existenz positiver Elemente, daß es sich bei $v_{\mathcal{O}}(\pi)$ nicht um das „Element“ ∞, sondern um ein (positives) Element der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ handelt. Es gibt dann in $\Gamma_{\mathcal{O}}$ höchstens n positive Elemente, die kleiner oder gleich $v_{\mathcal{O}}(\pi)$ sind. Gäbe es nämlich (mindestens) $(n+1)$ solche positiven Elemente und lägen somit (mindestens) n Elemente $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_{n-1}$ echt unterhalb von $v_{\mathcal{O}}(\pi)$, so würde für das positive Element $\delta := \min\{\gamma_0, \gamma_1 - \gamma_0, \gamma_2 - \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}\}$ die Ungleichung $0 < n \cdot \delta \leq \gamma_0 + (\gamma_1 - \gamma_0) + (\gamma_2 - \gamma_1) + \ldots + (\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}) = \gamma_{n-1} < v_{\mathcal{O}}(\pi)$ gelten, was jedoch der Ungleichung aus (2) widersprechen würde.

Das kleinste der höchstens n positiven Elemente von $\Gamma_{\mathcal{O}}$, die kleiner oder gleich $v_{\mathcal{O}}(\pi)$ sind, ist das kleinste positive Element e der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$. Für e gilt dann darüberhinaus nach (2) die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot e$. $\square$

Ist K ein Körper und ist π ein Element aus K, so nennt man K bzw. das Paar (K, π) einen **formal $(\pi, \mathbf{n})$-adischen Körper**, falls K mindestens einen (π, n)-Bewertungsring besitzt. Die Menge aller (π, n)-Bewertungsringe eines formal (π, n)-adischen Körpers K bezeichnen wir von nun an mit $\mathbf{W}_{\pi,\mathbf{n}}$ und den Holomorphiering von $W_{\pi,n}$ bezeichnen wir von nun an mit $\mathbf{R}_{\pi,\mathbf{n}}$.

Lemma 2.4.5 *Es sei (K, π) ein formal (π, n)-adischer Körper.*

(1) Das Element π liegt in $R_{\pi,n}$ und ist ungleich 0 und ungleich 1.

(2) Für jedes Element r aus $R_{\pi,n}$ ist das Element $1 - r\pi$ eine Einheit von $R_{\pi,n}$.

(3) π ist in jedem maximalen Ideal von $R_{\pi,n}$ enthalten.

(4) Für jedes Element a aus K^* ist das Element $a' := a - \pi/a^n$ ungleich 0 und liegt das Element $a'' := 1/a'$ in $R_{\pi,n}$.

Beweis: (1): π ist wegen $(0 < v_{\mathcal{O}}(\pi)\ \forall\, \mathcal{O} \in W_{\pi,n})$ in jedem (π, n)-Bewertungsring von K enthalten und liegt daher in $R_{\pi,n}$. Wäre $\pi = 0$ oder wäre $\pi = 1$, so würde für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K gelten, daß $v_{\mathcal{O}}(\pi) = \infty$ bzw. daß $v_{\mathcal{O}}(\pi) = 0$ ist. Dann würde K aber keinen (π, n)-Bewertungsring besitzen und wäre somit nicht formal (π, n)-adisch.

(2): Es sei r ein beliebiges Element aus $R_{\pi,n}$. Für einen beliebigen (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K ist dann wegen $r \in R_{\pi,n} \subseteq \mathcal{O}$ und wegen $v_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$ auch $v_{\mathcal{O}}(r\pi) > 0$ und folglich $v_{\mathcal{O}}(1 - r\pi) = 0$. Hieraus folgt erstens, daß $1 - r\pi$ ungleich 0 ist (denn K besitzt mindestens einen (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$, und für diesen Bewertungsring $\mathcal{O}$ ist dann $v_{\mathcal{O}}(1 - r\pi) = 0$ und nicht, wie es sein müßte, wenn $1 - r\pi = 0$ wäre, $v_{\mathcal{O}}(1 - r\pi) = \infty$) sowie zweitens (mit (1) aus Lemma 2.1.8), daß $V_{1/(1-r\pi)} = W_{\pi,n}$ ist. Letzteres ist nach (3) aus Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit, daß es sich bei $1 - r\pi$ um eine Einheit von $R_{\pi,n}$ handelt.

(3): Es sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges maximales Ideal von $R_{\pi,n}$. Läge π nicht in $\mathcal{M}$, so wäre $\mathcal{M} + \pi R_{\pi,n} = R_{\pi,n}$, und es gäbe ein Element r aus $R_{\pi,n}$, für welches das Element $1 - r\pi$ in $\mathcal{M}$ liegen würde. Die Existenz eines solchen Elementes r aus $R_{\pi,n}$ widerspricht aber (2).

(4): Es sei a ein beliebiges Element aus K^*. Wäre $a' := a - \pi/a^n = 0$, so wäre $\pi = a^{n+1}$ und für jeden (π, n)-Bewertungsring von K würde die Gleichheit $(n + 1) \cdot v_{\mathcal{O}}(a) = v_{\mathcal{O}}(\pi)$ gelten. Tatsächlich gilt aber für jeden (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K (und K besitzt mindestens einen (π, n)-Bewertungsring!) die Ungleichung $(n + 1) \cdot v_{\mathcal{O}}(a) \neq v_{\mathcal{O}}(\pi)$. Ist nämlich $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, für den $v_{\mathcal{O}}(a) \leq 0$ ist, so ist $(n + 1) \cdot v_{\mathcal{O}}(a) \leq 0$, aber $v_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$, und ist $\mathcal{O}$ ein

(π, n)-Bewertungsring von K, für den $v_{\mathcal{O}}(a) > 0$ ist, so gilt nach Lemma 2.4.4 die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot v_{\mathcal{O}}(a) < (n+1) \cdot v_{\mathcal{O}}(a)$.

Es bleibt zu zeigen, daß das Element $a'' := 1/a'$ in jedem (π, n)-Bewertungsring von K enthalten ist: Ist $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, für den $v_{\mathcal{O}}(a) > 0$ ist, so gilt nach Lemma 2.4.4 die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot v_{\mathcal{O}}(a)$ bzw. die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(\pi/a^n) \leq 0$; somit ist $v_{\mathcal{O}}(a') = v_{\mathcal{O}}(a - \pi/a^n) = v_{\mathcal{O}}(\pi/a^n) \leq 0$. $v_{\mathcal{O}}(a') \leq 0$ ist aber gleichbedeutend mit $v_{\mathcal{O}}(1/a') \geq 0$ bzw. mit $a'' \in \mathcal{O}$. Ist $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, für den $v_{\mathcal{O}}(a) = 0$ ist, so ist $v_{\mathcal{O}}(\pi/a^n) = v_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$; somit ist $v_{\mathcal{O}}(a') = v_{\mathcal{O}}(a - \pi/a^n) = v_{\mathcal{O}}(a) = 0$. a' und a'' sind dann Einheiten von $\mathcal{O}$. Ist schließlich $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, für den $v_{\mathcal{O}}(a) < 0$ ist, so ist $v_{\mathcal{O}}(\pi/a^n) > 0$, weshalb $v_{\mathcal{O}}(a') = v_{\mathcal{O}}(a - \pi/a^n) = v_{\mathcal{O}}(a) < 0$ bzw $v_{\mathcal{O}}(a'') > 0$ ist und a'' somit in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ liegt. □

Wir sind nun in der Lage zu beweisen, daß es sich bei der Menge $W_{\pi,n}$ aller (π, n)-Bewertungsringe eines formal (π, n)-adischen Körpers (K, π) um eine Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K handelt.

Satz 2.4.6 *Es sei (K, π) ein formal (π, n)-adischer Körper.*

(1) Das Mengensystem $\mathcal{V}_{W_{\pi,n}}$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

(2) Es ist $\mathrm{Max}(R_{\pi,n}) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in W_{\pi,n}\}$.

Korollar 2.4.7 *Die Menge $W_{\pi,n}$ aller (π, n)-Bewertungsringe eines formal (π, n)-adischen Körpers (K, π) ist Boolesch.*

Beweis des Korollars: Die Aussage des Korollars ergibt sich unter Verwendung von Satz 2.3.3 unmittelbar aus Satz 2.4.6. □

Beweis des Satzes: (1): Wir haben zu zeigen, daß zu jedem Element a aus K ein Element b aus K existiert, für das $W_{\pi,n} \setminus V_a = V_b$ gilt. Ist $a = 0$, so ist $W_{\pi,n} \setminus V_a = W_{\pi,n} \setminus V_0 = \emptyset = V_{1/\pi}$, wobei die letzte Gleichheit deshalb gilt, weil für jeden (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K $v_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(1/\pi) < 0$ ist und das Element $1/\pi$ daher in keinem (π, n)-Bewertungsring von K enthalten ist.

Ist $a \neq 0$, so ist $W_{\pi,n} \setminus V_a = V_{1/(\pi a^n)}$. Ist nämlich $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, der in $W_{\pi,n} \setminus V_a$ enthalten ist und für den daher $v_{\mathcal{O}}(a) < 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(1/a) > 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(1/a) \geq e$ ist, so gilt die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(1/a^n) = n \cdot v_{\mathcal{O}}(1/a) \geq n \cdot e \geq v_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$, aus der die Ungleichung $v_{\mathcal{O}}(1/(\pi a^n)) \geq 0$ folgt. Deshalb ist der Bewertungsring $\mathcal{O}$ in $V_{1/(\pi a^n)}$ enthalten. Ist umgekehrt $\mathcal{O}$ ein (π, n)-Bewertungsring von K, der in $V_{1/(\pi a^n)}$ enthalten ist und für den daher $v_{\mathcal{O}}(1/(\pi a^n)) \geq 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(\pi a^n) \leq 0$ gilt, so ist $n \cdot v_{\mathcal{O}}(a) = v_{\mathcal{O}}(a^n) \leq -v_{\mathcal{O}}(\pi) < 0$, woraus folgt, daß $v_{\mathcal{O}}(a) < 0$ sein muß. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}$ nicht in V_a enthalten ist.

(2): Daß es sich für jeden (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein maximales Ideal von $R_{\pi,n}$ handelt, folgt mit Korollar 2.2.13 aus (1). Es bleibt zu zeigen, daß zu jedem maximalen Ideal $\mathcal{M}$ von $R_{\pi,n}$ ein (π, n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K existiert, für den $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}$ gilt. Für ein beliebiges maximales Ideal $\mathcal{M}$ von $R_{\pi,n}$ gibt es nach Fakt 1.1.1 einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ des Körpers K, der $R_{\pi,n}$ umfaßt und für den $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R_{\pi,n} = \mathcal{M}$ gilt. Weil nach (3) aus Lemma 2.4.5 das Element $\pi \neq 0$ in $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O})$ enthalten ist, ist $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ nicht das Nullideal. Somit handelt es sich also bei $\mathcal{O}$ um einen nichttrivialen Bewertungsring von K sowie bei $v_{\mathcal{O}}(\pi)$ um ein positives Element der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$, und wir zeigen jetzt, daß darüberhinaus für jedes positive Element γ der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ die Ungleichung $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot \gamma$ gilt. Aus Lemma 2.4.4 ergibt sich dann, daß es sich bei $\mathcal{O}$ um einen (π, n)-Bewertungsring von K handelt, und weil für $\mathcal{O}$ darüberhinaus die Gleichheit $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}$ gilt, ist der Punkt (2) damit bewiesen.

Es sei also γ ein beliebiges positives Element der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$, und es sei a ein beliebiges Element aus $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$, für das $v_{\mathcal{O}}(a) = \gamma$ gilt. Nach Lemma 2.4.5 ist dann das Element $a' := a - \pi/a^n$ ungleich 0 und liegt das Element $a'' := 1/a'$ in $R_{\pi,n}$. Weil der Bewertungsring $\mathcal{O}$ den Holomorphiering $R_{\pi,n}$ umfaßt, liegt a'' auch in $\mathcal{O}$. Da somit $v_{\mathcal{O}}(a'') \geq 0$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(a') = v_{\mathcal{O}}(a - \pi/a^n) \leq 0$ ist, folgt aus $v_{\mathcal{O}}(a) = \gamma > 0$, daß $v_{\mathcal{O}}(\pi/a^n) \leq 0$ sein muß. Hieraus ergibt sich $v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot v_{\mathcal{O}}(a) = n \cdot \gamma$ bzw. insgesammt $0 < v_{\mathcal{O}}(\pi) \leq n \cdot \gamma$, und genau dies wollten wir zeigen. □

Beispiel 2.4.8 Es sei p eine Primzahl, und es seien n und f positive natürliche Zahlen.

Ist $\mathcal{O}$ ein (p, n)-Bewertungsring eines Körpers K, so hat der Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$, weil $v_{\mathcal{O}}(p) > 0$ ist bzw. weil p in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ liegt, die Charakteristik p. Die Charakteristik des Körpers K selbst ist hingegen $\neq p$, denn wie wir in Lemma 2.4.5 bewiesen haben, ist in einem formal (p, n)-adischen Körper stets $p \neq 0$. Die Charakteristik von K ist aber auch $\neq q$ für alle Primzahlen $q \neq p$, denn wäre $\mathrm{char}(K) = q \neq p$, so wäre auch $\mathrm{char}(k_{\mathcal{O}}) = q \neq p$. Es gilt also: Ist K ein formal (p, n)-adischer Körper, so ist $\mathrm{char}(K) = 0$, und für alle (p, n)-Bewertungsringe $\mathcal{O}$ von K handelt es sich bei $\mathbb{F}_p$ um einen Unterkörper von $k_{\mathcal{O}}$.

Unter einem **$(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{f})$-Bewertungsring** eines Körpers K versteht man einen (p, n)-Bewertungsring von K, dessen Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}}$ eine (und daher jede) der folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(1) Der Körpergrad $[k_{\mathcal{O}} : \mathbb{F}_p]$ der Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \leq k_{\mathcal{O}}$ ist ein Teiler von f.

(2) $k_{\mathcal{O}}$ ist ein Unterkörper des aus genau p^f Elementen bestehenden Körpers $\mathbb{F}_{p^f}$.

(3) Jedes Element aus $k_{\mathcal{O}}$ ist eine Nullstelle des Polynoms $X^{p^f} - X$.

Ein Körper K heißt **formal $(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{f})$-adisch**, falls er mindestens einen (p, n, f)-Bewertungsring besitzt.

Satz 2.4.9 *Die Menge $W_{p,n,f}$ aller (p,n,f)-Bewertungsringe eines formal (p,n,f)-adischen Körpers K ist Boolesch.*

Beweis: Zunächst einmal ist klar, daß jeder formal (p,n,f)-adische Körper auch formal (p,n)-adisch ist und daß es sich bei $W_{p,n,f}$ um eine Teilmenge von $W_{p,n}$ handelt. Außerdem wissen wir aus dem vorigen Beispiel, daß $W_{p,n}$ eine Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K ist. Hieraus folgt mit Satz 2.3.3/Korollar 2.3.4, daß es sich bei $R_{p,n}$ um einen Prüfer-Ring von K sowie für jeden (p,n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein maximales Ideal von $R_{p,n}$ handelt. Nach Fakt 2.3.5 gilt daher für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus $W_{p,n}$ die Gleichheit $k_{\mathcal{O}} = R_{p,n}/\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Unter Benutzung dieser Gleichheit ergeben sich dann für einen beliebigen (p,n)-Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K die folgenden Äquivalenzen (wobei, wie üblich, für ein beliebiges Element a aus $\mathcal{O}$ mit $\bar{a}$ die zu a gehörende Restklasse $a + \mathcal{M}(\mathcal{O})$ aus $k_{\mathcal{O}}$ gemeint ist):

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} \in W_{p,n,f} \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{a}^{p^f} - \bar{a} = \bar{0} \;\forall\, a \in \mathcal{O} \\
&\Leftrightarrow \quad \bar{a}^{p^f} - \bar{a} = \bar{0} \;\forall\, a \in R_{p,n} \\
&\Leftrightarrow \quad a^{p^f} - a \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \;\forall\, a \in R_{p,n} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{O} \in \bigcap \{W_{p,n} \setminus V^{W_{p,n}}_{1/(a^{p^f}-a)} \mid a \in R_{p,n},\, a^{p^f} - a \neq 0\}
\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{V}_{W_{p,n}}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, handelt es sich bei den Mengen $W_{p,n} \setminus V^{W_{p,n}}_{1/(a^{p^f}-a)}$; $a \in R_{p,n}$, $a^{p^f} - a \neq 0$, um Mengen, die in $\mathcal{V}_{W_{p,n}}$ liegen und die daher insbesondere clopen Teilmengen von $W_{p,n}$ sind. Es handelt sich also bei $W_{p,n,f}$ um einen Durchschnitt von clopen Teilmengen von $W_{p,n}$ und daher insbesondere um eine abgeschlossene Teilmenge der Booleschen Menge $W_{p,n}$. Abgeschlossene Teilmengen Boolescher Mengen sind jedoch nach Lemma 2.3.2 ebenfalls Boolesch. □

Beispiel 2.4.10 (Unendliche Boolesche Mengen von Bewertungsringen) Man kann zeigen, daß die in den letzten beiden Beispielen betrachteten Booleschen Mengen von Bewertungsringen i. a. unendlich sind. Um weitere (explizitere) Beispiele für unendliche Boolesche Mengen von Bewertungsringen angeben zu können, müssen wir auf zwei Sätze zurückgreifen, von denen wir den ersten im sechsten Abschnitt dieses Kapitels beweisen, von denen wir den zweiten jedoch lediglich zitieren werden:

(1) Ist W eine Boolesche Menge von Bewertungsringen eines Körpers K, ist K_0 ein über dem Körper K algebraischer Oberkörper von K und ist W_0 die Menge aller Bewertungsringe des Körpers K_0, die einen Bewertungsring aus W fortsetzen, so handelt es sich nach Satz 2.6.12 aus Abschnitt 2.6 bei W_0 um eine Boolesche Menge von Bewertungsringen des Körpers K_0. Weil sich ein Bewertungsring $\mathcal{O}$ eines Körpers K i. a. auf unendlich viele verschiedene Arten und Weisen zu einem Bewertungsring eines über K algebraischen Oberkörpers K_0 von K fortsetzen läßt, ist W_0 i. a. unendlich.

(2) Aus dem in [Er8] bewiesenen und bereits in der Einleitung kurz erwähnten Theorem 3 ergibt sich insbesondere, daß zu jedem beliebigen (und also speziell auch zu jedem unendlichen) Booleschen topologischen Raum X ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper (K, W) existiert, für den die beiden topologischen Räume X und W homöomorph sind.

Es folgt ein Beispiel für eine (unendliche) quasi-Boolesche Menge von Bewertungsringen, die nicht Boolesch ist:

Beispiel 2.4.11 Es sei $K = \mathbb{Q}$, und es sei W die Menge aller nichttrivialen Bewertungsringe von $\mathbb{Q}$. Es ist wohlbekannt, daß es sich bei $\mathbb{Z}$ um einen Prüfer-Ring von $\mathbb{Q}$ handelt sowie daß $\mathrm{Max}(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ Primzahl}\}$ und $W = \{\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} \mid p \text{ Primzahl}\}$ gilt; W ist daher quasi-Boolesch. Darüberhinaus gilt:

(1) Es ist $\mathcal{V}_W = \mathcal{V}_W^* = Pot_{ce}(W)$, wobei mit $Pot_{ce}(W)$ die Menge der koendlichen Teilmengen von W gemeint ist.

(2) (a) Die offenen Teilmengen von W sind genau die Mengen aus $\mathcal{V}_W$.
    (b) W besitzt keine clopen Teilmengen.

(3) W ist nicht Hausdorffsch und folglich nicht Boolesch.

(1): Es sei W' eine beliebige koendliche Teilmenge von W. Falls W' gleich W ist, so ist $W = V_1 = V_{1/1}$ und falls W für eine positive natürliche Zahl k die Form $W' = W \setminus \{\mathbb{Z}_{p_0\mathbb{Z}}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_{k-1}\mathbb{Z}}\}$ besitzt, so ist $W' = V_{1/(p_0 \cdot \ldots \cdot p_{k-1})}$. Jede koendliche Teilmenge von W liegt somit in $\mathcal{V}_W^* \subseteq \mathcal{V}_W$.

Es sei a ein beliebiges Element aus $\mathbb{Q}$. Liegt a in $\mathbb{Z}$, so ist $V_a = W$. Liegt a in $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, sind z_0 aus $\mathbb{Z}$ und z_1 aus $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ zwei teilerfremde ganze Zahlen, für die $a = z_0/z_1$ ist und sind $p_0, \ldots, p_{k-1}$; $k \geq 1$ die endlich vielen (positiven) Primteiler von z_1, so ist $V_a = V_{1/(p_0 \cdot \ldots \cdot p_{k-1})} = W \setminus \{\mathbb{Z}_{p_0\mathbb{Z}}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_{k-1}\mathbb{Z}}\} \in Pot_{ce}(W)$. Jede Menge aus $\mathcal{V}_W$ ist somit koendlich.

(2): (a) folgt aus (1) und der Tatsache, daß für eine beliebige Menge X die Menge $Pot_{ce}(X)$ unter Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen ist. (b) folgt aus (a) und der Tatsache, daß im Falle einer unendlichen Menge X das Komplement einer Menge aus $Pot_{ce}(X)$ nicht in $Pot_{ce}(X)$ liegt.

(3) Weil es sich nach (2) bei den offenen Mengen von W genau um die koendlichen Teilmengen von W handelt und weil der Schnitt zweier koendlicher Teilmengen einer Menge stets wieder koendlich und somit im Falle einer unendlichen Menge insbesondere nicht leer ist, lassen sich je zwei Bewertungsringe aus W nicht durch offene Teilmengen von W voneinander trennen. $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel für eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K, deren zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ zwar unter Komplementbildung abgeschlossen ist, die aber nicht quasikompakt ist. Hierzu benötigen wir das folgende, dem Artikel [Er7] entnommene Resultat:

Fakt 2.4.12 *Es sei $K \leq K_0$ eine rein transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis T (sodaß also $K_0 = K(T)$ ist), es sei $<$ eine Wohlordnung auf T, und es sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K. Dann gibt es genau einen Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ des Körpers K_0, der $\mathcal{O}$ fortsetzt und der darüberhinaus die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(1) Es ist $T \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_0)$.

(2) Für je zwei Elemente $t < t'$ aus T gibt es eine konvexe[4] *Untergruppe Δ von $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$, für die $v_{\mathcal{O}_0}(t) \in \Delta$ und $\delta < v_{\mathcal{O}_0}(t') \; \forall \, \delta \in \Delta$ gilt.*

Beispiel 2.4.13 Es sei $K \leq K_0$ eine rein transzendente Körpererweiterung mit einer abzählbaren Transzendenzbasis $T = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$. Für jede natürliche Zahl n sei $T_n := (T \setminus \{t_n\}) \cup \{t_n - 1\}$ diejenige Transzendenzbasis der Erweiterung $K \leq K_0$, die entsteht, wenn man in T das Element t_n durch das Element $t_n - 1$ ersetzt. Für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist dann $K(T_n) = K_0$, und wenn wir den nach Fakt 2.4.12 erstens existierenden und zweitens eindeutig bestimmten Bewertungsring des Körpers K_0, der K umfaßt und der bezüglich der Transzendenzbasis T_n die in Fakt 2.4.12 genannten Eigenschaften (1) und (2) besitzt, von nun an mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnen, so gilt u. a.:

(1) $v_{\mathcal{O}_n}(t_n - 1) > 0$ und somit $v_{\mathcal{O}_n}(t_n) = 0$ für alle n aus $\mathbb{N}$.

(2) $v_{\mathcal{O}_n}(t_{n'}) > 0$ und somit $v_{\mathcal{O}_n}(t_{n'} - 1) = 0$ für alle n aus $\mathbb{N}$ und alle n' aus $\mathbb{N} \setminus \{n\}$.

(3) Sind n und n' aus $\mathbb{N}$ und ist $n' \geq n+1$, so ist $\mathcal{O}_{n'} \cap K(t_0, \dots, t_n) = \mathcal{O}_{n+1} \cap K(t_0, \dots, t_n)$, d. h. für jedes n aus $\mathbb{N}$ stimmen die Bewertungsringe $\mathcal{O}_{n'}$; $n' \geq n+1$ auf $K(t_0, \dots, t_n)$ überein.

Für die (unendliche) Menge $W := \{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt dann:

Behauptung:

(1) Die Bewertungsringe aus W sind paarweise nicht ineinander enthalten.

(2) (i) Jede endliche und jede koendliche Teilmenge von W liegt in $\mathcal{V}_W$.

(ii) Jede Menge aus $\mathcal{V}_W$ ist endlich oder koendlich.

Das Mengensystem $\mathcal{V}_W$ besteht also genau aus den endlichen/koendlichen Teilmengen von W und ist daher insbesondere unter Komplementbildung abgeschlossen.

(3) W ist nicht quasikompakt.

[4]Eine Untergruppe Δ einer angeordneten Gruppe $(\Gamma, <)$ heißt konvex, falls für je zwei positive Elemente $\delta' < \delta$ aus Γ mit δ auch δ' in Δ enthalten ist.

Beweis (1): Für zwei natürliche Zahlen $n < n'$ liegt das Element t_n^{-1} in $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_{n'}$ und das Element $t_{n'}^{-1}$ in $\mathcal{O}_{n'} \setminus \mathcal{O}_n$.

(2): (i): Für eine beliebige endliche/koendliche Teilmenge W' von W prüft man unter Benutzung der obigen Punkte (1) und (2) sowie des Punktes (1) aus Fakt 2.4.12 leicht folgendes nach:

(a) Ist $W' = \emptyset$, so ist $W' = V_{(1/t_0+1/t_1)}$.

(b) Ist $W' = \{\mathcal{O}_{n_0}, \ldots, \mathcal{O}_{n_{k-1}}\}$; $k > 0$, $n_0 < \ldots < n_{k-1}$, so ist $W' = V_{1/(t_{n_0}+\ldots+t_{n_{k-1}})}$.

(c) Ist $W' = W \setminus \{\mathcal{O}_{n_0}, \ldots, \mathcal{O}_{n_{k-1}}\}$; $k > 0$, $n_0 < \ldots < n_{k-1}$, so ist $W' = V_{1/((t_{n_0}-1)\cdot\ldots\cdot(t_{n_{k-1}}-1))}$.

(d) Ist $W' = W$, so ist $W' = V_1$.

(ii): Für ein beliebiges Element $x = f(t_0, \ldots, t_{n-1})/g(t_0, \ldots, t_{n-1})$ aus K_0 gilt wegen (3) entweder $\mathcal{O}_{n'} \in V_x \;\forall n' \geq n$ oder $\mathcal{O}_{n'} \notin V_x \;\forall n' \geq n$, und zwar je nachdem, ob x in $\mathcal{O}_n$ liegt oder nicht. Im ersten Fall ist V_x koendlich und im zweiten Fall endlich.

(3): Für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist $V_{1/t_n} = \{\mathcal{O}_n\}$; somit ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{1/t_n} = W$ und $\bigcup_{n\in N} V_{1/t_n} \subsetneq W$ für jede echte, und somit insbesondere für jede endliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$. Daher handelt es sich bei $(V_{1/t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ um eine offene Überdeckung von W, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. □

2.5 Approximationssätze für Boolesche mehrfach bewertete Körper

Das schwache Approximationstheorem für endlich viele, paarweise nicht ineinander enthaltene Bewertungsringe besagt, daß im Falle eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W), dessen zugehörige Menge W aus endlich vielen, paarweise nicht ineinander enthaltenen Bewertungsringen $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ besteht, für beliebige Elemente $a_0 \in \mathcal{O}_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{O}_{n-1}$ stets ein Element r aus R_W existiert, sodaß für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ das Element $r - a_i$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O}_i)$ liegt.

Dieses Approximationstheorem läßt sich folgendermaßen auf Boolesche mehrfach bewertete Körper verallgemeinern:

Satz 2.5.1 (sog. schwaches Block-Approximationstheorem für Boolesche mehrfach bewertete Körper) *Es sei (K, W) ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper.*
Dann gibt es zu jeder Partition $[V_0, \ldots, V_{n-1}]$ von W, die aus clopen Teilmengen von W [5] *besteht sowie zu beliebigen Elementen a_0 aus $R_{V_0}, \ldots, a_{n-1}$ aus $R_{V_{n-1}}$*[6] *stets ein Element r aus R_W, sodaß für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Aussage*

$$r - a_i \in \mathcal{M}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_i$$

gilt.

Bemerkung 2.5.2 (1) Für eine endliche Menge W von paarweise nicht ineinander enthaltenen, nichttrivialen Bewertungsringen $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ eines Körpers K handelt es sich wegen $\mathcal{V}_W = \text{Pot}(W)$ bei $[V_0 := \{\mathcal{O}_0\}, \ldots, V_{n-1} := \{\mathcal{O}_{n-1}\}]$ um eine Partition von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht sowie für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ bei R_{V_i} um den Bewertungsring $\mathcal{O}_i$. In diesem Fall fällt daher die Aussage von Satz 2.5.1 mit der Aussage des schwachen Approximationstheorems für endlich viele, paarweise nicht ineinander enthaltene Bewertungsringe zusammen.

(2) Anders als im Falle einer endlichen Menge W von Bewertungsringen kann im Falle einer i. a. unendlichen Booleschen Menge W von Bewertungsringen bei der Approximation nicht mehr auf jeden einzelnen Bewertungsring aus W, sondern lediglich noch auf ganze „Blöcke“ $V_0, \ldots, V_{n-1}$ Bezug genommen werden.

Beweis von Satz 2.5.1: Da die Behauptung des Satzes im Falle $W = \emptyset$ trivialerweise erfüllt ist, können wir im Folgenden davon ausgehen, daß es sich bei W um eine nichtleere Menge handelt.

[5] Zur Erinnerung: Die clopen Teilmengen einer Booleschen Menge W von Bewertungsringen sind genau die Mengen aus $\mathcal{V}_W$ (s. Lemma 2.3.2).

[6] Für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ ist mit R_{V_i} der Holomorphiering $\{a \in K \mid a \in \mathcal{O} \; \forall \, \mathcal{O} \in V_i\}$ der Menge V_i gemeint.

Wir beweisen zunächst einige Spezialfälle des Satzes und führen danach den allgemeinen Fall auf diese zuvor bewiesenen Spezialfälle zurück:

(1) Der Spezialfall ($\mathbf{n = 1;\ r_0 \in R_{V_0}}$ beliebig):

In diesem einfachen Fall ist $V_0 = W$ und $a_0 \in R_W$. Es ist klar, daß dann das Element $r := a_0$ die in Satz 2.5.1 geforderten Eigenschaften besitzt.

(2) Der Spezialfall ($\mathbf{n = 2;\ r_0 = 1,\ r_1 = 0}$):

Es sei $[V_0, V_1]$ eine Partition von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht. Wir haben zu zeigen, daß ein Element r aus R_W existiert, auf das sowohl die Aussage $(r - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_0)$ als auch die Aussage $(r \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_1)$ zutrifft.

Falls es sich bei einer der beiden Mengen V_0 und V_1 um die leere Menge handeln sollte, so ergibt sich die Existenz eines solchen Elementes r unmittelbar aus dem bereits bewiesenen Spezialfall (1), sodaß wir also im Folgenden davon ausgehen können, daß es sich bei V_0 und V_1 um nichtleere Teilmengen von W handelt.

Behauptung: Zu jedem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_0 existiert ein Element $r_{\mathcal{O}}$ aus R_W, für das $r_{\mathcal{O}} - 1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt und auf das die Aussage $(r_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}')\ \forall\, \mathcal{O}' \in V_1)$ zutrifft.

Beweis der Behauptung: Es sei also $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus V_0.

Ist dann $\mathcal{O}'$ ein beliebiger Bewertungsring aus V_1, so sind $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$, weil es sich bei V_0 und V_1 um zwei disjunkte Teilmengen von W handelt, verschieden. Weil nach Korollar 2.2.13 $\mathcal{O} = (R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O})}$ und $\mathcal{O}' = (R_W)_{\mathcal{P}(\mathcal{O}')}$ ist, folgt aus der Ungleichheit von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ die Ungleichheit der Ideale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$. Weil es sich nach Satz 2.3.11 darüberhinaus bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ um zwei maximale Ideale von R_W und somit insgesamt insbesondere um zwei verschiedene komaximale Ideale von R_W handelt, gibt es nach dem Chinesischen Restsatz (s. z. B. [La2]) ein Element $r_{\mathcal{O}'}$ aus R_W, für das $r_{\mathcal{O}'} - 1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ und $r_{\mathcal{O}'}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ liegt.

Weil $r_{\mathcal{O}'} - 1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt, ist $r_{\mathcal{O}'}$ ungleich 0. Weil $r_{\mathcal{O}'}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ liegt, ist $\mathcal{O}'$ nach (2) aus Lemma 2.1.8 in der (clopen) Teilmenge $W \setminus V_{1/r_{\mathcal{O}'}}$ von W enthalten. Es folgt, daß es sich bei $(V_{\mathcal{O}'})_{\mathcal{O}' \in V_1 \neq \emptyset}$ um eine Überdeckung von V_1 handelt, die aus clopen Teilmengen von W besteht. Weil V_1 als clopen Teilmenge des kompakten topologischen Raumes W kompakt ist, gibt es deshalb eine natürliche Zahl k sowie Bewertungsringe $\mathcal{O}'_0, \dots, \mathcal{O}'_{k-1}$ aus V_1, für die $V_1 \subseteq V_{\mathcal{O}'_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}'_{k-1}}$ gilt; weil V_1 nicht leer ist, ist k positiv.

Setzen wir nun $r_{\mathcal{O}} := r_{\mathcal{O}'_0} \cdot \ldots \cdot r_{\mathcal{O}'_{k-1}}$, so liegt $r_{\mathcal{O}}$ in R_W, und wir zeigen jetzt, daß $r_{\mathcal{O}}$ die in der obigen Behauptung geforderten Eigenschaften besitzt:

Ist $\mathcal{O}'$ ein beliebiger Bewertungsring aus V_1, so gibt es wegen $V_1 \subseteq V_{\mathcal{O}'_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}'_{k-1}}$ eine natürliche Zahl i aus $\{0, \dots, k-1\}$, für die $\mathcal{O}'$ in $V_{\mathcal{O}'_i} = W \setminus V_{1/r_{\mathcal{O}'_i}}$ enthalten ist bzw. für die das Element $r_{\mathcal{O}'_i}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ liegt (Lemma 2.1.8). Dann liegt aber auch $r_{\mathcal{O}} = r_{\mathcal{O}'_0} \cdot \ldots \cdot r_{\mathcal{O}'_{k-1}}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$.

Daß das Element $r_{\mathcal{O}} - 1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt, sieht man ein, wenn man $r_{\mathcal{O}} - 1$ zunächst in die Form

$$r_{\mathcal{O}} - 1 = (r_{\mathcal{O}'_0} - 1) + r_{\mathcal{O}'_0}(r_{\mathcal{O}'_1} - 1) + r_{\mathcal{O}'_0} r_{\mathcal{O}'_1}(r_{\mathcal{O}'_2} - 1) + \ldots + r_{\mathcal{O}'_0} \cdot \ldots \cdot r_{\mathcal{O}'_{k-2}}(r_{\mathcal{O}'_{k-1}} - 1)$$

bringt und sodann aus der Tatsache, daß für jedes i aus $\{0, \ldots, k-1\}$ das Element $(r_{\mathcal{O}'_i} - 1)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt, folgert, daß auch die obige Summe (und daher $r_{\mathcal{O}} - 1$ selbst) in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. $\diamond$

Ist nun $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus V_0 und ist $r_{\mathcal{O}}$ ein Element aus R_W, das die in der obigen Behauptung genannten Eigenschaften besitzt, so ist $r_{\mathcal{O}} - 1$ wegen $(r_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}') \; \forall \, \mathcal{O}' \in V_1)$ und wegen $V_1 \neq \emptyset$ ungleich 0. Aus $r_{\mathcal{O}} - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ folgt darüberhinaus (mit (2) aus Lemma 2.1.8), daß $\mathcal{O}$ in der (clopen!) Teilmenge $V_{\mathcal{O}} := W \setminus V_{1/(r_{\mathcal{O}}-1)}$ von W enthalten ist, weshalb es sich bei $(V_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in V_0 \neq \emptyset}$ um eine Überdeckung von V_0 handelt, die aus clopen Teilmengen von W besteht. Weil V_0 als clopen Teilmenge des kompakten topologischen Raumes W kompakt ist, gibt es daher eine natürliche Zahl k sowie Bewertungsringe $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{k-1}$ aus V_0, für die $V_0 \subseteq V_{\mathcal{O}_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}_{k-1}}$ gilt; weil V_0 nicht leer ist, ist k positiv, und es ist klar daß wir darüberhinaus annehmen können, daß k ungerade ist.

Setzen wir dann $r := (r_{\mathcal{O}_0} - 1)(r_{\mathcal{O}_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (r_{\mathcal{O}_{k-1}} - 1) + 1$, so liegt r in R_W, und wir zeigen jetzt, daß sowohl $(r - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_0)$ als auch $(r \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_1)$ gilt:

Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring aus V_0, so gibt es wegen $V_0 \subseteq V_{\mathcal{O}_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}_{k-1}}$ eine natürliche Zahl i aus $\{0, \ldots, k-1\}$, für die der Bewertungsring $\mathcal{O}$ in $V_{\mathcal{O}_i} = W \setminus V_{1/(r_{\mathcal{O}_i}-1)}$ enthalten ist und für die deshalb nach (2) aus Lemma 2.1.8 das Element $r_{\mathcal{O}_i} - 1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt. Es folgt, daß auch das Element $r - 1 = (r_{\mathcal{O}_0} - 1)(r_{\mathcal{O}_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (r_{\mathcal{O}_{k-1}} - 1)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt.

Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_1 liegen sämtliche Elemente $r_{\mathcal{O}_0}, \ldots, r_{\mathcal{O}_{k-1}}$ und folglich auch das Element $r = (r_{\mathcal{O}_0} - 1)(r_{\mathcal{O}_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (r_{\mathcal{O}_{k-1}} - 1) + 1 = \sum_{0 \leq i \leq k-1} r_{\mathcal{O}_i} - \sum_{0 \leq i < j \leq (k-1)} r_{\mathcal{O}_i} r_{\mathcal{O}_j} + \ldots + r_{\mathcal{O}_0} \cdot \ldots \cdot r_{\mathcal{O}_{k-1}}$ (man beachte: k ist ungerade!) in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

Der Spezialfall (2) ist damit vollständig bewiesen.

(3) Der Spezialfall ($\mathbf{n = 2}$; $\mathbf{r_0, r_1}$ aus $\mathbf{R_W}$ beliebig):

Dieser Fall läßt sich folgendermaßen auf den soeben bewiesenen Spezialfall (2) zurückführen:

Es sei $[V_0, V_1]$ eine Partition von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht, und es seien r_0 und r_1 beliebige Elemente aus R_W. Nach Spezialfall (2) gibt es dann ein Element s_0 aus R_W, auf das die Aussagen $(s_0 - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_0)$ und $(s_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_1)$ zutreffen sowie ein Element s_1 aus R_W, auf das die Aussagen $(s_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}))$ und $(s_1 - 1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_1)$ zutreffen. Setzen wir dann $r := r_0 s_0 + r_1 s_1$, so liegt r in R_W, und es läßt sich folgendermaßen zeigen, daß sowohl $(r - r_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_0)$ als auch $(r - r_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_1)$ gilt:

Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_0 schreiben wir das Element $r - r_0$ in der Form $r - r_0 = r_0 s_0 + r_1 s_1 - r_0 = r_0(s_0 - 1) + r_1 s_1$. Weil sowohl $s_0 - 1$ als auch s_1 in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegen (und weil r_0 und r_1 in R_W liegen), liegt auch die obige Summe, und daher $r - r_0$ selbst, in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

Für einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_1 zeigt man unter Vertauschung der Rollen von r_0 und r_1 bzw. s_0 und s_1 auf analoge Art und Weise, daß $r - r_1$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegt.

(4) Der Spezialfall ($\mathbf{n \geq 1}$ beliebig; $\mathbf{r_0, \ldots, r_{n-1}}$ aus $\mathbf{R_W}$ beliebig):

Wir führen eine vollständige Induktion über die Anzahl $n \geq 1$ der „Blöcke“ $V_0, \ldots, V_{n-1}$ durch, aus denen die Partition $[V_0, \ldots, V_{n-1}]$ besteht. Da der Induktionsanfang $n = 1$ bereits in Spezialfall (1) abgehandelt wurde, können wir sofort zum Induktionsschritt $n \to n+1$ übergehen:

Ist $[V_0, \ldots, V_{n-1}, V_n]$ eine Partition von W, die aus $(n+1)$ clopen Teilmengen von W besteht, so handelt es sich bei $[V_0, \ldots, V_{n-2}, V_{n-1} \cup V_n]$ um eine Partition von W, die aus n clopen Teilmengen von W besteht sowie bei $[V_0 \cup \ldots \cup V_{n-1}, V_n]$ um eine Partition von W, die aus zwei clopen Teilmengen von W besteht. Für beliebige Elemente $r_0, \ldots, r_{n-1}, r_n$ aus R_W gibt es deshalb nach Induktionvoraussetzung ein Element r' aus R_W, auf das für jede natürliche Zahl i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Aussage $(r' - r_i \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_i)$ zutrifft sowie außerdem nach Spezialfall (3) ein Element r aus R_W, für das $(r - r' \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_0 \cup \ldots \cup V_{n-1})$ und $(r - r_n \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_n)$ gilt.

Bei diesem Element r handelt es sich um das Element, das wir suchen, denn neben $(r - r_n \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_n)$ gilt auch für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Aussage $(r - r_i \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_i)$. Dies folgt aus den beiden Tatsachen, daß für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ sowie für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_i die Elemente $r - r'$ und $r' - r_i$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegen und daß $r - r_i = (r - r') + (r' - r_i)$ ist.

Mit Hilfe des Spezialfalls (4) läßt sich Satz 2.5.1 nun in seiner allgemeinen Form beweisen:

(5) Der allgemeine Fall: $\mathbf{n \geq 1}$ beliebig; $\mathbf{a_0 \in R_{V_0}, \ldots, a_{n-1} \in R_{V_{n-1}}}$ beliebig.

Es sei $[V_0, \ldots, V_{n-1}]$ eine Partition von W, und es sei für jede natürliche Zahl i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ a_i ein Element aus R_{V_i}.

Behauptung: Für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ gibt es ein Element r_i aus R_W, auf das die Aussage $(r_i - a_i \in \mathcal{M}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_i)$ zutrifft.

Beweis der Behauptung: Es sei i ein beliebiges Element aus $\{0, \ldots, n-1\}$.

Weil es sich nach Korollar 2.3.4 bei R_W um einen Prüfer-Ring von K handelt, der ungleich K ist und für den die Gleichheit $W = \{(R_W)_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \in \operatorname{Max}(R_W)\}$ gilt, gibt es nach Punkt (3) aus Fakt 2.3.5 zu jedem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_i ein Element $r_{\mathcal{O}}$ aus R_W, für das $r_{\mathcal{O}} - a_i$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ liegt und für das deshalb der Bewertungsring $\mathcal{O}$ in der (clopen) Teilmenge $V_{\mathcal{O}} := W \setminus V_{(r_{\mathcal{O}} - a_i)^{-1}}$ von W enthalten ist (s. Lemma 2.1.1). Es folgt, daß es sich bei $(V_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in V_i}$ um eine

Überdeckung von V_i handelt, die aus clopen Teilmengen von W besteht und daß es deshalb aus den üblichen Kompaktheitsgründen eine natürliche Zahl k sowie Bewertungsringe $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{k-1}$ aus V_i gibt, für die $V_i \subseteq V_{\mathcal{O}_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}_{k-1}}$ gilt. Wenn man dann für jedes j aus $\{0, \ldots, k-1\}$ $V'_j := V_{\mathcal{O}_j} \setminus (\bigcup_{j'<j} V'_{j'})$ setzt, so prüft man leicht nach, daß es sich bei $[V'_0, \ldots, V'_{k-1}, (W \setminus (\bigcup_{j \leq k-1} V'_j))]$ um eine Partition von W handelt, die aus $(k+1)$ clopen Teilmengen von W besteht und für die $V'_j \subseteq V_{\mathcal{O}_j}$; $j = 0, \ldots, k-1$ sowie $\bigcup_{j \leq (k-1)} V'_j = \bigcup_{j \leq (k-1)} V_{\mathcal{O}_j}$ gilt.

Der Spezialfall (4), angewandt auf diese Partition sowie auf die Elemente $r_{\mathcal{O}_0}, \ldots, r_{\mathcal{O}_{k-1}}$ und (z. B.) das Element $r_k := 1$, liefert die Existenz eines Elementes r aus R_W, auf welches für jedes j aus $\{0, \ldots, k-1\}$ die Aussage $(r - r_{\mathcal{O}_j} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V'_j)$ zutrifft.

Daß r die in der obigen Behauptung geforderte Eigenschaft besitzt, läßt sich nun folgendermaßen zeigen: Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_i gibt es wegen $V_i \subseteq V_{\mathcal{O}_0} \cup \ldots \cup V_{\mathcal{O}_{k-1}} = V'_0 \cup \ldots \cup V'_{k-1}$ eine natürliche Zahl l aus $\{0, \ldots, k-1\}$, für die der Bewertungsring $\mathcal{O}$ in $V'_l \subseteq V_{\mathcal{O}_l}$ enthalten ist. Wegen $\mathcal{O} \in V'_l$ liegt $r - r_{\mathcal{O}_l}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, und wegen $\mathcal{O} \in V_{\mathcal{O}_l}$ liegt $r_{\mathcal{O}_l} - a_i$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. Insgesamt liegt dann auch $r - a_i = (r - r_{\mathcal{O}_l}) + (r_{\mathcal{O}_l} - a_i)$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. $\diamond$

Für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ sei nun r_i ein Element aus R_W, das die in der obigen Behauptung angegebene Eigenschaft besitzt. Nach Spezialfall (4) gibt es dann ein Element r aus R_W, auf das für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Aussage $(r - r_i \in \mathcal{P}(\mathcal{O})\ \forall\, \mathcal{O} \in V_i)$ zutrifft. r hat die in Satz 2.5.1 geforderte Eigenschaft, denn für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ und für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus V_i liegt das Element $r - a_i = (r - r_i) + (r_i - a_i)$ wegen $r - r_i \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ und wegen $r_i - a_i \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. $\square$

Wir behandeln nun noch kurz ein weiteres interessantes Approximationstheorem für Boolesche mehrfach bewertete Körper:

Von zwei Bewertungsringen $\mathcal{O}_0$ und $\mathcal{O}_1$ eines Körpers K sagt man, sie seien voneinander unabhängig, wenn es keinen nichttrivialen Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K gibt, der sowohl $\mathcal{O}_0$ als auch $\mathcal{O}_1$ umfaßt. Wir wollen in Zukunft eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K **unabhängig** nennen, falls je zwei verschiedene Bewertungsringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ aus W voneinander unabhängig sind.

Es ist wohlbekannt (s. z.B. [En]), daß für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W), dessen zugehörige Menge W aus endlich vielen, paarweise verschiedenen Bewertungsringen $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ besteht, die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) W ist unabhängig.

(2) Für beliebige Elemente $a_0, \ldots, a_{n-1}$ aus K und für beliebige Elemente $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1}$ aus K^* gibt es stets ein Element a aus K, sodaß für alle i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ die Ungleichung $v_{\mathcal{O}_i}(a - a_i) \geq v_{\mathcal{O}_i}(\epsilon_i)$ gilt.

Ebenso wie das schwache Approximationstheorem läßt sich auch dieses sogenannte starke Approximationstheorem zu einem Block-Approximationstheorem für Boolesche mehrfach bewertete Körper verallgemeinern.

Satz 2.5.3 (Starkes Block-Approximationstheorem für Boolesche mehrfach bewertete Körper) *Für einen Booleschen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) W ist unabhängig.

(2) (K, W) besitzt die sogenannte Block-Approximationseigenschaft:
Ist $[V_0, \dots, V_{n-1}]$ eine Partition von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht, so gibt es für beliebige Elemente $a_0, \dots, a_{n-1}$ aus K und für beliebige Elemente $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}$ aus K^* stets ein Element a aus K, sodaß für jedes i aus $\{0, \dots, n-1\}$ die Aussage

$$v_{\mathcal{O}}(a - a_i) \geq v_{\mathcal{O}}(\epsilon_i) \; \forall \, \mathcal{O} \in V_i$$

gilt.

Der Beweis des interessanteren und schwierigeren Teiles (1)⇒(2) der obigen Äquivalenz verläuft zwar im Detail etwas anders, jedoch im Großen und Ganzen mehr oder weniger analog zum Beweis von Satz 2.5.1. Dies gilt insbesondere für die, uns in dieser Arbeit über Boolesche mehrfach bewertete Körper hauptsächlich interessierenden Kompaktheitsargumente, mit deren Hilfe man von Elementen $r_{\mathcal{O}}$; $\mathcal{O} \in W$ mit gewissen lokalen Eigenschaften zu einem Element r mit einer entsprechenden globalen Eigenschaft übergehen kann. Deshalb, und weil darüberhinaus der komplette Beweis ausreichend ausführlich in [Er8] wiedergegeben wird, wollen wir an dieser Stelle auf den Beweis von Satz 2.5.3 verzichten.

2.6 Fortsetzungen von Booleschen Mengen von Bewertungsringen auf Oberkörper

Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper und ist K_0 ein beliebiger Oberkörper von K, so bezeichnen wir die Menge aller Bewertungsringe $\mathcal{O}_0$ des Körpers K_0, die einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W fortsetzen mit W_0; wir setzen also

$$W_0 := \{\mathcal{O}_0 \mid \mathcal{O}_0 \text{ Bewertungsring von } K_0,\ \mathcal{O}_0 \cap K \in W\}.$$

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob und inwieweit sich die Eigenschaften „quasi-Boolesch" und „Boolesch" vom mehrfach bewerteten Körper (K, W) auf den mehrfach bewerteten Körper (K_0, W_0) übertragen.

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen Bemerkung, die Menge W_0 betreffend:

Bemerkung 2.6.1 Es sei W_0' eine Teilmenge von W_0, und es sei π diejenige Abbildung von W_0' nach W, die jedem Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus W_0' den Bewertungsring $\mathcal{O}_0 \cap K$ aus W, dessen Fortsetzung $\mathcal{O}_0$ ist, zuordnet.

(1) Für jedes Element a aus K ist $\pi^{-1}(V_a^W) = V_a^{W_0'}$. Es ist also $\pi^{-1}(\mathcal{V}_W) \subseteq \mathcal{V}_{W_0'}$ und $\pi^{-1}(\mathcal{V}_W^*) \subseteq \mathcal{V}_{W_0'}^*$.

(2) π ist eine bezüglich der kanonischen Topologien von W und W_0 stetige Abbildung.

(3) Falls π surjektiv ist, so ist $R_W = R_{W_0'} \cap K$ und $I_W = I_{W_0'} \cap R_W$.

(4) Für $W_0' = W_0$ ist π surjektiv.

Beweis: (1) ist klar.

(2): Nach (1) handelt es sich für jede Menge V aus $\mathcal{V}_W$ bei $\pi^{-1}(V)$ um eine Menge aus $V_{W_0'}$ und also insbesondere um eine offene Teilmenge von W_0'. Hieraus sowie aus der Tatsache, daß es sich bei $\mathcal{V}_W$ um eine Subbasis von W handelt, folgt die Stetigkeit von π.

(3) ist einfach; die Surjektivität von π wird für den Nachweis von $R_{W_0'} \cap K \subseteq R_W$ bzw. fur den Nachweis von $I_{W_0'} \cap R_W \subseteq I_W$ benötigt.

(4) ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß für einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ eines Körpers K zu jedem Oberkörper K_0 von K ein Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0 existiert, der $\mathcal{O}$ fortsetzt. $\square$

Satz 2.6.2 *Ist der mehrfach bewertete Körper (K, W) quasi-Boolesch, so handelt es sich bei R_{W_0} genau um den ganzen Abschluß $I_{K_0}(R_W)$ von R_W in K_0.*

Im Beweis des Satzes verwenden wir den folgenden wohlbekannten, den ganzen Abschluß $I_K(R)$ eines Unterringes R eines Körpers K betreffenden Sachverhalt:

Fakt 2.6.3 *Ist K ein Körper und ist R ein Unterring von K, so ist der ganze Abschluß $I_K(R)$ von R in K gleich dem Durchschnitt aller Bewertungsringe $\mathcal{O}$ von K, die R umfassen und für die es sich bei $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R$ um ein maximales Ideal von R handelt.*

Ein Beweis von Fakt 2.6.3 findet sich z. B. in [En].

Beweis von Satz 2.6.2: Wir zeigen, daß ein Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ des Körpers K_0 genau dann in W_0 liegt, wenn es sich bei R_W um einen Unterring von $\mathcal{O}_0$ sowie bei $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap R_W$ um ein maximales Ideal von R_W handelt. Hieraus ergibt sich dann unter Verwendung von Fakt 2.6.3:

$$
\begin{aligned}
R_{W_0} &= \bigcap \{\mathcal{O}_0 \mid \mathcal{O}_0 \in W_0\} \\
&= \bigcap \{\mathcal{O}_0 \mid \mathcal{O}_0 \text{ Bewertungsring von } K_0,\ R_W \subseteq \mathcal{O}_0,\ \mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap R_W \in \operatorname{Max}(R_W)\} \\
&= I_{K_0}(R_W).
\end{aligned}
$$

Ist $\mathcal{O}_0$ ein Bewertungsring aus W_0, so liegt der Bewertungsring $\mathcal{O} := \mathcal{O}_0 \cap K$ des Körpers K in W. Es ist dann $R_W \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_0$, und nach Satz 2.3.10 liegt $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap R_W = \mathcal{M}(\mathcal{O}) \cap R_W = \mathcal{P}(\mathcal{O})$ in $\operatorname{Max}(R_W)$.

Ist umgekehrt $\mathcal{O}_0$ ein Bewertungsring des Körpers K_0, der R_W umfaßt und für den das Ideal $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap R_W$ in $\operatorname{Max}(R_W)$ enthalten ist, so handelt es sich bei $\mathcal{O} := (R_W)_{\mathcal{M}}$ nach Satz 2.3.10 um einen Bewertungsring des Körpers K, der in W enthalten ist. Weil es sich (ebenfalls nach Satz 2.3.10) bei R_W um einen Prüfer-Ring des Körpers K handelt und weil die beiden (maximalen) Ideale $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0 \cap K) \cap R_W$ identisch sind, stimmen nach Punkt (2) aus Fakt 2.3.5 auch die beiden Bewertungsringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_0 \cap K$ überein. Es folgt, daß $\mathcal{O}_0 \cap K$ in W enthalten ist und es sich daher bei $\mathcal{O}_0$ um einen Bewertungsring aus W_0 handelt. □

Satz 2.6.4 *Ist (K, W) quasi-Boolesch, so handelt es sich beim Quotientenring $R_{W_0}(R_W \setminus \{0\})^{-1}$ um einen Körper, und zwar genau um den relativen algebraischen Abschluß von K in K_0.*

Der erste Teil des nun folgenden Faktes 2.6.5 (bzw. ein Spezialfall davon) wird im Beweis von Satz 2.6.4 benötigt. Den sich unmittelbar aus diesem ersten Teil ergebenden zweiten Teil von Fakt 2.6.4 werden wir im Beweis von Satz 2.6.9 verwenden.

Fakt 2.6.5 *Es sei R ein Unterring eines Körpers K, und es sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, für die $1 \in S$ und $0 \notin S$ gilt.*

(1) Der ganze Abschluß $I_K(RS^{-1})$ des Quotientenringes RS^{-1} ist gleich dem Quotientenring $I_K(R)S^{-1}$.

(2) Ist R in K ganz abgeschlossen, so ist auch RS^{-1} in K ganz abgeschlossen.

Einen Beweis von Fakt 2.6.5 findet man z. B. in [La2].

Weil es sich im Falle von $S = R\setminus\{0\}$ bei RS^{-1} um den Quotientenkörper $Q(R)$ von R sowie bei $I_K(RS^{-1}) = I_K(Q(R))$ genau um den relativen algebraischen Abschluß von $Q(R)$ in K handelt, ergibt sich aus der Aussage (1) von Fakt 2.6.5 insbesondere:

Korollar 2.6.6 (zu Fakt 2.6.5) *Ist R ein Unterring eines Körpers K, so handelt es sich beim Quotientenring $I_K(R)(R \setminus \{0\})^{-1}$ um einen Körper, und zwar genau um den relativen algebraischen Abschluß von $Q(R)$ in K.*

Beweis von Satz 2.6.4: Weil es sich bei R_W nach Satz 2.3.10 um einen Prüfer-Ring von K handelt, stimmt der Quotientenkörper $Q(R_W)$ von R_W nach Fakt 2.3.5 mit K überein. Hieraus folgt, zusammen mit Satz 2.6.2 und Korollar 2.6.6, daß es sich beim Quotientenring $R_{W_0}(R_W \setminus \{0\})^{-1} = I_{K_0}(R_W)(R_W \setminus \{0\})^{-1}$ um den relativen algebraischen Abschluß von K in K_0 handelt. $\square$

Korollar 2.6.7 *Ist (K, W) quasi-Boolesch, so ist der Quotientenkörper $Q(R_{W_0})$ von R_{W_0} in K_0 gleich dem relativen algebraischen Abschluß von K in K_0.* $\square$

Im Folgenden interessieren wir uns im Zusammenhang mit einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) und einem Oberkörper K_0 von K ganz besonders für den Fall, daß es sich bei der Körpererweiterung $K \leq K_0$ um eine algebraische Körpererweiterung handelt.

Ist $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring des Körpers K und ist $W_0[\mathcal{O}]$ die Menge aller Bewertungsringe von K_0, die $\mathcal{O}$ fortsetzen, so besagt das nun folgende, zum Standardrepertoire der klassischen Bewertungstheorie gehörende Theorem, daß es sich in diesem und nur in diesem Fall bei $I_{K_0}(\mathcal{O}) = R_{W_0[\mathcal{O}]}$ um einen Prüfer-Ring des Körpers K_0 handelt.

Fakt 2.6.8 *Ist $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, ist K_0 ein Oberkörper von K und bezeichnen wir die Menge aller Bewertungsringe des Körpers K_0, die $\mathcal{O}$ fortsetzen, mit $W_0[\mathcal{O}]$, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist algebraisch.

(2) $R_{W_0[\mathcal{O}]} = I_{K_0}(\mathcal{O})$ ist ein Prüfer-Ring des Körpers K_0.

Im Falle der Gültigkeit von (1)/(2) gelten darüberhinaus die beiden Gleichheiten $\mathrm{Max}(R_{W_0[\mathcal{O}]}) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \mid \mathcal{O}_0 \in W_0[\mathcal{O}]\}$ und $W_0[\mathcal{O}] = \{(R_{W_0[\mathcal{O}]})_{\mathcal{M}_0} \mid \mathcal{M}_0 \in \mathrm{Max}(R_{W_0[\mathcal{O}]})\}$.

Dieses Resultat läßt sich folgendermaßen auf quasi-Boolesche mehrfach bewertete Körper verallgemeinern:

Satz 2.6.9 *Ist (K, W) ein quasi-Boolescher mehrfach bewerteter Körper, ist K_0 ein beliebiger Oberkörper von K und ist W_0 die Menge aller Bewertungsringe des Körpers K_0, die einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W fortsetzen, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist algebraisch.

(2) $R_{W_0} = I_{K_0}(R_W)$ ist ein Prüfer-Ring des Körpers K_0.

Im Falle der Gültigkeit von (1)/(2) gelten darüberhinaus die beiden Gleichheiten $\mathrm{Max}(R_{W_0}) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \mid \mathcal{O}_0 \in W_0\}$ *und* $W_0 = \{(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0} \mid \mathcal{M}_0 \in \mathrm{Max}(R_{W_0})\}$.

Im nun folgenden Beweis werden wir neben dem zweiten Teil von Fakt 2.6.5 auch noch das folgende wohlbekannte Resultat über ganze Ringerweiterungen verwenden (müssen):

Fakt 2.6.10 *Es sei $R \leq S$ eine ganze Ringerweiterung. Für ein Primideal $\mathcal{P}$ des Ringes S sind dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{P}$ ist ein maximales Ideal von S.

(2) $\mathcal{P} \cap R$ ist ein maximales Ideal von R.

Einen Beweis von Fakt 2.6.10 findet man z. B. in [En].

Beweis von Satz 2.6.9: (1)$\Rightarrow$(2): Wir haben zu zeigen, daß es sich für jedes maximale Ideal $\mathcal{M}_0$ von R_{W_0} bei $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ um einen Bewertungsring von K_0 handelt. Für ein beliebiges maximales Ideal $\mathcal{M}_0$ von R_{W_0} betrachten wir hierzu zunächst das Ideal $\mathcal{M}_0 \cap R_W$ des Ringes R_W. $\mathcal{M}_0 \cap R_W$ ist ein Primideal und, weil es sich bei $R_W \leq R_{W_0}$ nach Satz 2.6.2 um eine ganze Ringerweiterung sowie bei $\mathcal{M}_0$ um ein maximales Ideal von R_{W_0} handelt, nach Fakt 2.6.10 sogar ein maximales Ideal des Ringes R_W, das wir von nun an mit $\mathcal{M}$ bezeichnen wollen. Weil (K, W) nach Voraussetzung quasi-Boolesch ist, handelt es sich nach Satz 2.3.10 bei $\mathcal{O} := (R_W)_{\mathcal{M}}$ um einen Bewertungsring von K (der in W enthalten ist). Weil $\mathcal{O}$ ein Unterring von $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ ist und weil es sich bei $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ um einen in K_0 ganz abgeschlossenen Unterring von K_0 handelt (letzteres ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten Teil von Fakt 2.6.5, angewandt auf den nach Satz 2.6.2 in K_0 ganz abgeschlossenen Unterring R_{W_0} von K_0 sowie auf die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $R_{W_0} \setminus \mathcal{M}_0$ von R_{W_0}), ist auch der ganze Abschluß $I_{K_0}(\mathcal{O})$ von $\mathcal{O}$ in K_0 ein Unterring von $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$.

Wir betrachten nun das Ideal $\mathcal{M}_0 \cdot (R_{W_0})_{\mathcal{M}_0} \cap I_{K_0}(\mathcal{O})$ des Ringes $I_{K_0}(\mathcal{O})$. Dieses Ideal ist ein Primideal und, weil es sich bei $\mathcal{O} \leq I_{K_0}(\mathcal{O})$ um eine ganze Ringerweiterung sowie bei $(\mathcal{M}_0 \cdot (R_{W_0})_{\mathcal{M}_0} \cap I_{K_0}(\mathcal{O})) \cap \mathcal{O} = \mathcal{M} \cdot R_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\mathcal{O})$ um das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ handelt, nach Fakt 2.6.10 sogar ein maximales Ideal von $I_{K_0}(\mathcal{O})$, das wir für den verbleibenden kurzen Rest des Beweises mit

$\mathcal{M}^0$ bezeichnen wollen. Aus Fakt 2.6.8 folgt dann, daß es sich bei der Lokalisierung $(I_{K_0}(\mathcal{O}))_{\mathcal{M}^0}$ von $I_{K_0}(\mathcal{O})$ nach $\mathcal{M}^0$ um einen Bewertungsring des Körpers K_0 handelt, der den Bewertungsring $\mathcal{O}$ fortsetzt. Weil $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ ein Oberring von $(I_{K_0}(\mathcal{O}))_{\mathcal{M}^0}$ ist und weil Oberringe von Bewertungsringen von Körpern K trivialerweise ebenfalls Bewertungsringe von K sind, handelt es sich folglich auch bei $(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ um einen Bewertungsring von K_0, und genau das wollten wir zeigen.

(2)⇒(1): Einerseits handelt es sich beim Quotientenkörper $Q(R_{W_0})$ von R_{W_0} nach Korollar 2.6.7 um den relativen algebraischen Abschluß von K in K_0. Andererseits handelt es sich bei $Q(R_{W_0})$, weil R_{W_0} nach Voraussetzung ein Prüfer-Ring von K_0 ist, nach Fakt 2.3.5 um den Körper K_0. Beides zusammen ergibt, daß der relative algebraische Abschluß von K in K_0 mit K_0 übereinstimmt, was gleichbedeutend damit ist, daß es sich bei $K \leq K_0$ um eine algebraische Körpererweiterung handelt.

Beweis des Zusatzes: Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus W_0 betrachten wir den zu $\mathcal{O}_0$ gehörenden, in W liegenden Bewertungsring $\mathcal{O} := \mathcal{O}_0 \cap K$ von K sowie die beiden Primideale $\mathcal{P}(\mathcal{O}_0)$ von R_{W_0} und $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ von R_W. Weil W quasi-Boolesch ist und weil $\mathcal{O}$ in W liegt, handelt es sich nach Satz 2.3.10 bei $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ um ein maximales Ideal von R_W. Weil die Ringerweiterung $R_W \leq R_{W_0}$ nach Satz 2.6.2 ganz ist, folgt aus der Maximalität von $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \cap R_W$ mit Fakt 2.6.10 die Maximalität von $\mathcal{P}(\mathcal{O}_0)$ in R_{W_0}.

Weil R_{W_0} ein Prüfer-Ring von K_0 ist und weil $\mathcal{P}(\mathcal{O}_0)$ in $\mathrm{Max}(R_{W_0})$ liegt, stimmen nach Fakt 2.3.5 die beiden Bewertungsringe $\mathcal{O}_0$ und $(R_{W_0})_{\mathcal{P}_{\mathcal{O}_0}}$ überein, sodaß also $\mathcal{O}_0$ in $\{(R_{W_0})_{\mathcal{M}_0} \mid \mathcal{M}_0 \in \mathrm{Max}(R_{W_0}\}$ enthalten ist.

Für ein beliebiges maximales Ideal $\mathcal{M}_0$ von R_{W_0} haben wir uns bereits im Beweis von (1)⇒(2) überlegt, daß es sich bei $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cap R_W$ um ein maximales Ideal von R_W sowie bei $\mathcal{O} = (R_W)_{\mathcal{M}}$ um einen in W liegenden Bewertungsring von K handelt. Für den zu $\mathcal{M}_0$ gehörenden Bewertungsring $\mathcal{O}_0 = (R_{W_0})_{\mathcal{M}_0}$ gilt die Gleichheit $\mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap \mathcal{O} = \mathcal{M}_0 \cdot (R_{W_0})_{\mathcal{M}_0} \cap (R_W)_{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cdot (R_W)_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\mathcal{O})$, welche, weil es sich bei $\mathcal{O}$ um einen Bewertungsring von K handelt, dasselbe bedeutet, wie die Gleichheit $\mathcal{O}_0 \cap K = \mathcal{O}$. Weil es sich also bei $\mathcal{O}_0$ um eine Fortsetzung des Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus W handelt, ist $\mathcal{O}_0$ in W_0 enthalten und liegt $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \cap R_{W_0}$ in $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \mid \mathcal{O}_0 \in W_0\}$. □

Korollar 2.6.11 *Ist (K, W) ein quasi-Boolescher mehrfach bewerteter Körper, ist K_0 ein Oberkörper von K und ist W_0 die Menge aller Bewertungsringe von K_0, die einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W fortsetzen, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist algebraisch.

(2) (K_0, W_0) ist quasi-Boolesch.

Beweis: (1)⇒(2): Nach Satz 2.6.9 ist R_{W_0} ein Prüfer-Ring von K_0 und ist $\mathrm{Max}(R_{W_0}) = \{\mathcal{P}(\mathcal{O}_0) \mid \mathcal{O}_0 \in W_0\}$. Nach Satz 2.3.10 ist W_0 daher quasi-Boolesch.

(2)⇒(1): Weil W_0 quasi-Boolesch ist, handelt es sich bei R_{W_0} nach Satz 2.3.10 um einen Prüfer-Ring des Körpers K_0. Aus Satz 2.6.9 folgt, daß die Körpererweiterung $K \leq K_0$ algebraisch ist. □

Satz 2.6.12 *Es sei (K, W) ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper mit nichtleerem W, es sei K_0 ein Oberkörper von K und es sei W_0 die Menge aller Bewertungsringe von K_0, die einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W fortsetzen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist algebraisch.

(2) (K_0, W_0) ist Boolesch.

Beweis: (1)⇒(2): Weil (K, W) nach Bemerkung 2.3.8 quasi-Boolesch ist, handelt es sich nach Korollar 2.6.11 bei (K_0, W_0) um einen quasi-Booleschen mehrfach bewerteten Körper. Nach Satz 2.3.6 bleibt zu zeigen, daß es sich bei den Mengen des zu (K_0, W_0) gehörenden Mengensystems $\mathcal{V}^*_{W_0}$ um clopen Teilmengen von W_0 handelt und daß $\emptyset$ in $\mathcal{V}^*_{W_0}$ enthalten ist.

Behauptung 1: Jede Menge aus $\mathcal{V}^*_{W_0}$ ist clopen in W_0.

Beweis der Behauptung: Wir haben zu zeigen, daß es sich für jedes Element r_0 aus $R_{W_0} \setminus \{0\}$ bei $W_0 \setminus V^{W_0}_{1/r_0}$ um eine offene Teilmenge von W_0 handelt, daß also zu jedem Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus $W_0 \setminus V^{W_0}_{1/r_0}$ eine offene Teilmenge V_0 von W_0 existiert, für die $\mathcal{O}_0 \in V_0 \subseteq W_0 \setminus V^{W_0}_{1/r_0}$ gilt.

Es sei also r_0 ein Element aus $R_{W_0} \setminus \{0\}$ sowie $\mathcal{O}_0$ ein beliebiger Bewertungsring aus W_0, der in $W_0 \setminus V^{W_0}_{1/r_0}$ enthalten ist (und für den daher $v_{\mathcal{O}_0}(r_0) > 0$ gilt), und es sei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_0 \cap K$ der in W enthaltene Bewertungsring von K, dessen Fortsetzung $\mathcal{O}_0$ ist. Weil die Körpererweiterung $K \leq K_0$ algebraisch ist, läßt sich die zu $\mathcal{O}_0$ gehörende Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$ über die zu $\mathcal{O}$ gehörende Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ in die divisible Hülle $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{O}_0}$ von $\Gamma_{\mathcal{O}}$ einbetten. (s. [En]). Es gibt deshalb eine positive natürliche Zahl n, für die das (positive) Element $n \cdot v_{\mathcal{O}_0}(r_0)$ der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}_0}$ in der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ enthalten ist. Ist dann a ein beliebiges Element aus $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$, für das $v_{\mathcal{O}}(a) = n \cdot v_{\mathcal{O}_0}(r_0)$ gilt, so ist $v_{\mathcal{O}_0}(ar_0^{-n}) = 0$. Wenn wir dann

$$V_0 := (W_0 \setminus V^{W_0}_{1/a}) \cap V^{W_0}_{1/(ar_0^{-n})}$$

setzen, so liegt $\mathcal{O}_0$ wegen $a \in \mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}_0) \setminus \{0\}$ und wegen $v_{\mathcal{O}_0}(ar_0^{-n}) = 0$ in V_0, und es gilt darüberhinaus:

(a): V_0 ist eine offene Teilmenge von W_0.
(b): V_0 ist eine Teilmenge von $W_0 \setminus V^{W_0}_{1/r_0}$.

Beweis von (a): Weil es sich bei (K, W) um einen Booleschen mehrfach bewerteten Körper handelt, ist das zu (K, W) gehörende Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen. Deshalb handelt es sich bei $W \setminus V^W_{1/a}$ um eine Menge

aus $\mathcal{V}_W$ und daher nach Bemerkung 2.6.1 bei $\pi^{-1}(W \setminus V_{1/a}^W) = W_0 \setminus V_{1/a}^{W_0}$ um eine Menge aus $\mathcal{V}_{W_0}$. Weil $V_{1/(ar_0^{-n})}^{W_0}$ ebenfalls in $\mathcal{V}_{W_0}$ enthalten ist, handelt es sich bei V_0 insgesamt um einen Schnitt zweier Mengen aus $\mathcal{V}_{W_0}$ und damit insbesondere um eine offene Teilmenge von W_0.
Beweis von (b): Für einen beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}_0'$ aus V_0 ist nach Lemma 2.1.1 $v_{\mathcal{O}_0'}(a) > 0$ sowie $v_{\mathcal{O}_0'}(ar_0^{-n}) \leq 0$. Es folgt, daß $n \cdot v_{\mathcal{O}_0'}(r_0) = v_{\mathcal{O}_0'}(r_0^n) \geq v_{\mathcal{O}_0'}(a) > 0$ und daher auch $v_{\mathcal{O}_0'}(r_0) > 0$ ist. Letzteres ist nach (2) aus Lemma 2.1.8 gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{O}_0'$ in $W_0 \setminus V_{1/r_0}^{W_0}$ enthalten ist. $\diamond$

Behauptung 2: $\emptyset$ ist in $\mathcal{V}_{W_0}^*$ enthalten.

Beweis der Behauptung: Weil $\mathcal{V}_W = \mathcal{V}_W^*$ nach Voraussetzung unter Komplementbildung abgeschlossen ist und weil W in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten ist, ist auch $\emptyset$ in $\mathcal{V}_W^*$ enthalten. Nach Punkt (1) der Bemerkung 2.6.1 ist dann $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ in $\mathcal{V}_{W_0}^*$ enthalten. $\diamond$

(2)$\Rightarrow$(1) ergibt sich, weil (K, W) als Boolescher mehrfach bewerteter Körper mit nichtleerem W nach Bemerkung 2.3.8 insbesondere quasi-Boolesch ist, aus der Richtung (2)$\Rightarrow$(1) des Korollars 2.6.11. $\square$

2.7 Anmerkungen zu Kapitel 2

Die erste Arbeit, in der die kanonische Topologie einer Menge von Bewertungsringen nachdrücklich und umfassend thematisiert wird, scheint mir [Er4] zu sein, und ein Großteil der in diesem Kapitel behandelten Konzepte und Resultate stammt aus eben dieser Arbeit. Darüberhinaus enthält das Kapitel Material aus den Artikeln [Er5] und [Er8] sowie einige kleinere Ergebnisse, die ganz oder teilweise von mir stammen.

Abschnitt 2.1: Satz 2.1.3 stammt von mir.

Bei Lemma 2.1.8 handelt es sich um eine zusammenhängende Auflistung von einigen, in [Er4] lediglich verstreut und oft auch eher implizit angegebenen Eigenschaften des zu einem mehrfach bewerteten Körper (K, W) gehörenden Mengensystems $\mathcal{V}_W^*$.

Abschnitt 2.2: Einige der in diesem Abschnitt behandelten Resultate, etwa Lemma 2.2.3, Satz 2.2.4, Satz 2.2.6, Satz 2.2.8, stammen zwar, was ihre konkrete Formulierung als Ergebnisse über mehrfach bewertete Körper (K, W), deren zugehörige Mengensysteme $\mathcal{V}_W^*$ und $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen sind, anbelangt, von mir, sie sind jedoch allesamt mehr oder weniger implizit in [Er4] enthalten.

Satz 2.2.12 entspricht genau Lemma 3 in [Er4].

Abschnitt 2.3 Für die Sätze dieses Abschnittes gilt im Prinzip ähnliches wie für die Sätze aus Abschnitt 2: sie stammen in ihrer expliziten Form von mir, sind aber implizit in [Er4] enthalten. Bei Satz 2.3.6, einem der Hauptsätze dieses Abschnittes, handelt es sich um eine Kombination der Propositionen 4 und 5 aus [Er4].

Abschnitt 2.4: Beispiel 2.4.3 wird in [Er4] durchgerechnet.

(p, n, f)-Bewertungsringe werden in [Pr-Ro] eingeführt und studiert; sie werden dort als „p-Bewertungsringe vom Typ (n, f)“ bezeichnet. Die Beobachtung, daß es sich bei der Menge aller (p, n, f)-Bewertungsringe eines formal (p, n, f)-adischen Körpers um eine Boolesche Menge von Bewertungsringen handelt, stammt ebenso wie Beispiel 2.4.13, in dem eine nicht-quasikompakte Menge W von Bewertungsringen, deren Mengensystem $\mathcal{V}_W$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, vorgestellt wird, von mir.

Abschnitt 2.5: Das schwache Block-Approximationstheorem für Boolesche Mengen von Bewertungsringen (Satz 2.5.1) ist von mir; die Beweise der Spezialfälle (2) und (3) orientieren sich allerdings sehr stark am Beweis von Proposition 3 aus [Er8]. Proposition 3 aus [Er8] ist genau Satz 2.5.3.

Abschnitt 2.6: Satz 2.6.2 sowie die Richtung (1)$\Rightarrow$(2) der Sätze 2.6.9 und 2.6.12 stammen aus [Er4]. Bei Satz 2.6.4 sowie bei der Richtung (2)$\Rightarrow$(1) der Sätze 2.6.9 und 2.6.12 handelt es sich um kleine Ergänzungen zu den obigen Resultaten, die von mir stammen.

Kapitel 3

Regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper

Wenn wir im Verlauf dieses Kapitels im Zusammenhang mit einem Körper K algebraisch-geometrisch argumentieren, so vollzieht sich dies stets vor dem Hintergrund eines Oberkörpers Ω von K, der algebraisch abgeschlossen ist und dessen Transzendenzgrad über K unendlich ist; diese beiden Eigenschaften von Ω haben, wie in Abschnitt 1.2 dargelegt wurde, insbesondere zur Konsequenz, daß für jede natürliche Zahl n jede K-Varietät V des Ω^n einen generischen Punkt besitzt. Mit Oberkörpern von K sind dann in aller Regel Zwischenkörper von K und Ω gemeint. Den algebraischen Abschluß von K in Ω bezeichnen wir mit $\tilde{K}$, und den separablen Abschluß von K in $\tilde{K}$ bezeichnen wir mit K_s. Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K, so bezeichnen wir die Henselsche(n) Hülle(n) von $(K, \mathcal{O})$ in Ω mit $(K, \mathcal{O})^H$ oder auch mit $(H_{\mathcal{O}}(K), \mathcal{O}^H)$; nach Fakt 1.1.4 handelt es sich für jede Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ bei $H_{\mathcal{O}}(K)$ um einen Zwischenkörper von K und K_s.

3.1 Definition und äquivalente Eigenschaften

Es sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper. Weil je zwei Henselsche Hüllen von $(K, \mathcal{O})$ über $(K, \mathcal{O})$ isomorph sind, sind für jede natürliche Zahl n die folgenden beiden Aussagen (1) und (2) über eine Boolesche Kombination B von K-algebraischen Teilmengen des Ω^n sowie die darauffolgenden beiden Aussagen $(1)'$ und $(2)'$ über eine über K definierte Varietät V des Ω^n äquivalent:

(1) Es gibt eine Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ von $(K, \mathcal{O})$, für die B einen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt.

(2) B besitzt für jede Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ von $(K, \mathcal{O})$ einen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

(1)′ Es gibt eine Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ von $(K, \mathcal{O})$, für die V einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt.

(2)′ V besitzt für jede Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ von $(K, \mathcal{O})$ einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

Von einer Booleschen Kombination B von K-algebraischen Mengen, auf die die Aussagen (1)/(2) zutreffen, sagen wir von nun an kurz, sie besitze einen **$\mathbf{H}_{\mathcal{O}}(\mathbf{K})$-rationalen Punkt**. Von einer über K definierten Varietät V, auf die die Aussagen (1)′/(2)′ zutreffen, sagen wir entsprechend, sie besitze einen **einfachen $\mathbf{H}_{\mathcal{O}}(\mathbf{K})$-rationalen Punkt**.

Man nennt einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) **regulär abgeschlossen** bzw. man sagt vom Körper K, er sei bezüglich der Menge W von Bewertungsringen von K regulär abgeschlossen, falls (K, W) dem folgenden Lokal-Global-Prinzip genügt:

> Für jede über dem Körper K definierte Varietät V ist folgendes erfüllt: Falls V für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so besitzt V einen K-rationalen Punkt.

Bemerkung 3.1.1 (1) Ist K ein Körper, so ist der mehrfach bewertete Körper $(K, \emptyset)$ genau dann regulär abgeschlossen, wenn jede über dem Körper K definierte Varietät einen K-rationalen Punkt besitzt. Körper K, die diese Eigenschaft besitzen, werden auch als **pseudo algebraisch abgeschlossene Körper** bezeichnet.

Bei einigen der in diesem Kapitel behandelten Sätze über regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper (K, W) ist es nicht uninteressant, sich zu vergegenwärtigen, was diese im Falle $W = \emptyset$ über pseudo algebraisch abgeschlossene Körper aussagen.

(2) Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehörige Menge W einen Henselschen Bewertungsring $\mathcal{O}^H$ von K enthält, so besitzt jede über K definierte Varietät V, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, trivialerweise einen einfachen K-rationalen Punkt; mehrfach bewertete Körper (K, W), für die gilt, daß W einen Henselschen Bewertungsring von K enthält, sind also stets regulär abgeschlossen. Weil es sich für jeden Körper K beim trivialen Bewertungsring $\mathcal{O} = K$ um einen Henselschen Bewertungsring von K handelt, ist insbesondere jeder mehrfach bewertete Körper (K, W), für den K in W enthalten ist, regulär abgeschlossen.

Ist (K, W) ein regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehörige Menge W lediglich aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht und ist V eine über K definierte Varietät, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$

aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so besitzt V in einem gewissen Sinn sehr viele, und insbesondere auch einfache K-rationale Punkte. Dies ergibt sich unmittelbar aus der in Satz 3.1.4 angegebenen modelltheoretischen Charakterisierung regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper, der wir uns nun zuwenden wollen. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen:

Unter Verwendung der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle läßt sich leicht beweisen, daß für eine Erweiterung $(K,\mathcal{O}) \leq (K_0,\mathcal{O}_0)$ bewerteter Körper die folgenden beiden Aussagen (1) und (2) sowie die darauffolgenden Aussagen $(1)'$ und $(2)'$ äquivalent sind:

(1) Es gibt eine Henselsche Hülle $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ von $(K_0,\mathcal{O}_0)$, sodaß für diejenige Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die $(K,\mathcal{O})^H \leq (K_0,\mathcal{O}_0)^H$ ist, $(K,\mathcal{O})^H$ als bewerteter Körper in $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ existenziell abgeschlossen ist.

(2) Für jede Henselsche Hülle $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ von $(K_0,\mathcal{O}_0)$ ist diejenige Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die $(K,\mathcal{O})^H \leq (K_0,\mathcal{O}_0)^H$ ist, als bewerteter Körper in $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ existenziell abgeschlossen.

$(1)'$ Es gibt eine Henselsche Hülle $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ von $(K_0,\mathcal{O}_0)$, sodaß für diejenige Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die $(K,\mathcal{O})^H \leq (K_0,\mathcal{O}_0)^H$ ist, der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$ existenziell abgeschlossen ist.

$(2)''$ Für jede Henselsche Hülle $(K_0,\mathcal{O}_0)^H$ ist für diejenige Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die $(K,\mathcal{O})^H \leq (K_0,\mathcal{O}_0)^H$ ist, der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$ existenziell abgeschlossen.

Darüberhinaus sind für einen bewerteten Körper $(K,\mathcal{O})$ und einen beliebigen Oberkörper K_0 von K die folgenden beiden Aussagen $(1)''$ und $(2)''$ äquivalent:

$(1)''$ Es gibt eine Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen ist.

$(2)''$ Für jede Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$ ist der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen.

(Für den Beweis von $(1)''\Rightarrow(2)''$ beachte man, daß es sich für eine Henselsche Hülle $(K,\mathcal{O})^H$ von $(K,\mathcal{O})$, für die der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen ist, bei $H_{\mathcal{O}}(K) \leq H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ um eine reguläre Körpererweiterung handelt[1] und daß sich deshalb für jede weitere Henselsche Hülle $(K_*,\mathcal{O}_*)$ von $(K,\mathcal{O})$ der aufgrund der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle existierende und eindeutig bestimmte $(K,\mathcal{O})$-Isomorphismus μ von $(K,\mathcal{O})^H$ nach

[1] Es gilt ganz allgemein, daß es sich im Falle eines Körpers K, der in einem Oberkörper K_0 von K existenziell abgeschlossen ist, bei $K \leq K_0$ um eine reguläre Körpererweiterung handelt (s. z. B. Lemma 13.37 in [Ku]).

$(K_*, \mathcal{O}_*)$ zu einem K_0-Isomorphismus der Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ und $K_* \cdot K_0$ fortsetzen läßt.)

Wir sagen im Zusammenhang mit einer Erweiterung $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ bewerteter Körper kurz, daß $\mathbf{(K, \mathcal{O})^H}$ **in** $\mathbf{(K_0, \mathcal{O}_0)^H}$ **existenziell abgeschlossen** sei bzw. daß $\mathbf{H_{\mathcal{O}}(K)}$ **in** $\mathbf{H_{\mathcal{O}_0}(K_0)}$ **existenziell abgeschlossen** sei, falls auf die Erweiterung $(K, \mathcal{O}) \leq (K_0, \mathcal{O}_0)$ die beiden Aussagen (1)/(2) bzw. die beiden Aussagen $(1)'/(2)'$ zutreffen. Gelten für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ und einen Oberkörper K_0 von K die beiden Aussagen $(1)''/(2)''$, so sagen wir kurz $\mathbf{H_{\mathcal{O}}(K)}$ sei **in** $\mathbf{H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0}$ **existenziell abgeschlossen**.

Lemma 3.1.2 *Für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ und einen beliebigen Oberkörper K_0 von K sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) Es gibt einen Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0, für den $(K, \mathcal{O})^H$ in $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ existenziell abgeschlossen ist.

(2) Es gibt einen Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0, für den $H_{\mathcal{O}}(K)$ in $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$ existenziell abgeschlossen ist.

(3) $H_{\mathcal{O}}(K)$ ist in $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen.

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2) und (2)$\Rightarrow$(3) sind klar.

(3)$\Rightarrow$(1): Es sei $(K, \mathcal{O})^H$ eine beliebige Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$ und es sei $(K_*, \mathcal{O}_*)$ eine $|H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0|^+$-saturierte elementare Erweiterung von $(K, \mathcal{O})^H$. Weil es sich dann insbesondere bei K_* um eine $|H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0|^+$-saturierte elementare Erweiterung von $H_{\mathcal{O}}(K)$ handelt und weil nach (3) der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen ist, gibt es eine $H_{\mathcal{O}}(K)$-Einbettung von $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ in K_* und somit insbesondere eine K-Einbettung μ von K_0 in K^*. Wenn wir dann zunächst, indem wir K_0 mit $\mu(K_0)$ identifizieren, K_0 als Unterkörper von K_* auffassen und sodann $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_* \cap K_0$ setzen, so läßt sich folgendermaßen zeigen, daß es sich bei $\mathcal{O}_0$ um einen Bewertungsring von K_0 handelt, der die in (1) geforderte Eigenschaft besitzt:

Weil $(K, \mathcal{O})^H$ Henselsch ist, weil Henselsch zu sein eine durch (unendlich viele) Sätze der Sprache der bewerteten Körper formalisierbare Eigenschaft eines bewerteten Körpers ist und weil es sich bei $(K, \mathcal{O})^H \leq (K_*, \mathcal{O}_*)$ um eine elementare Erweiterung bewerteter Körper handelt, ist $(K_*, \mathcal{O}_*)$ ebenfalls Henselsch. Ist dann $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ diejenige Henselsche Hülle von $(K_0, \mathcal{O}_0)$, für die $(K_0, \mathcal{O}_0)^H \leq (K_*, \mathcal{O}_*)$ gilt und ist $(K', \mathcal{O}')$ diejenige Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$, für die $(K', \mathcal{O}') \leq (K_0, \mathcal{O}_0)^H$ gilt, so stimmt $(K', \mathcal{O}')$ mit $(K, \mathcal{O})^H$ (der Henselschen Hülle von $(K, \mathcal{O})$, mit der wir gestartet sind) überein. Andernfalls gäbe es nämlich mit $(K', \mathcal{O}')$ und $(K, \mathcal{O})^H$ zwei verschiedene Henselsche Hüllen $(K'', \mathcal{O}'')$ von $(K, \mathcal{O})$, für die $(K'', \mathcal{O}'') \leq (K_*, \mathcal{O}_*)$ gelten würde, was jedoch, wie in Abschnitt 1.1 dargelegt wurde, nicht der Fall sein kann. Es folgt, daß $(K, \mathcal{O})^H \leq (K_0, \mathcal{O}_0)^H \leq (K_*, \mathcal{O}_*)$ ist, und weil die Erweiterung $(K, \mathcal{O})^H \leq (K_*, \mathcal{O}_*)$ elementar ist, ist $(K, \mathcal{O})^H$ in $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ existenziell abgeschlossen. $\square$

Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper und ist K_0 ein beliebiger Oberkörper von K, so nennen wir die Körpererweiterung $K \leq K_0$ **W-total**, falls auf jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W eine (und damit jede) der Aussagen (1) bis (3) aus Lemma 3.1.2 zutrifft.

Bemerkung 3.1.3 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, und es sei K_0 ein beliebiger Oberkörper von K.*

(1) Ist $W = \emptyset$, so ist die Körpererweiterung $K \leq K_0$ W-total.

(2) Enthält W einen Henselschen Bewertungsring $\mathcal{O}^H$ von K, und ist die Körpererweiterung $K \leq K_0$ W-total, so ist K in K_0 existenziell abgeschlossen; insbesondere ist dann die Körper erweiterung $K \leq K_0$ regulär (s. die Fußnote auf Seite 75).

(3) Ist K in K_0 existenziell abgeschlossen, so ist die Körpererweiterung $K \leq K_0$ W-total.

Beweis: (1) ist klar.

(2): Weil die Erweiterung $K \leq K_0$ W-total ist, ist der Körper $H_{\mathcal{O}^H}(K) = K$ im Körper $H_{\mathcal{O}^H}(K) \cdot K_0 = K \cdot K_0 = K_0$ existenziell abgeschlossen.

(3): Es ist ganz allgemein so, daß im Falle einer Körpererweiterung $K \leq K_0$, für die K in K_0 existenziell abgeschlossen ist, für jeden über K algebraischen Oberkörper L von K der Körper L im Körper $K_0 \cdot L$ existenziell abgeschlossen ist (s. z. B. Korollar 3 aus Abschnitt 1 in [Er5]). Demnach ist in unserer Situation für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W der über K (separabel) algebraische Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K) \cdot K_0$ existenziell abgeschlossen. Dies bedeutet aber gerade, daß es sich bei $K \leq K_0$ um eine W-totale Körpererweiterung handelt. $\square$

Satz 3.1.4 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) (K, W) ist regulär abgeschlossen.

(2) Der Körper K ist in jeder regulären W-totalen Körpererweiterung existenziell abgeschlossen; d. h., ist K_0 ein Oberkörper von K, für den die Körpererweiterung $K \leq K_0$ regulär und W-total ist, so ist der Körper K im Körper K_0 existenziell abgeschlossen.

Um Satz 3.1.4 beweisen zu können, benötigen wir neben dem in Fakt 1.2.1 angegebenen Zusammenhang zwischen regulären Körpererweiterungen $K \leq K_0$ und Varietäten V, die über K definiert sind, auch noch das folgende Resultat aus der Modelltheorie bewerteter Körper:

Fakt 3.1.5 *Es sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, es sei V eine über K definierte Varietät, und es sei $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V.*

(1) Falls $H_{\mathcal{O}}(K)$ in $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen ist, so besitzt V einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

(2) Falls $\mathcal{O}$ nichttrivial ist und falls V einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so ist $H_{\mathcal{O}}(K)$ in $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen.

Punkt (1) des Faktes 3.1.5 ergibt sich, wenn man beachtet, daß es sich für eine über dem Körper K definierte Varietät V bei der Menge aller nicht-einfachen Punkte von V um eine echte K-algebraische Teilmenge von V handelt, unmittelbar aus der Richtung (1)$\Rightarrow$(2) des Faktes 1.4.1.

Beweise des Punktes (2) des obigen Faktes findet man z. B. in [Er1], in [Er5] oder in [Gr].

Korollar 3.1.6 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, es sei V eine über K definierte Varietät, und es sei $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V.*

(1) Falls die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ W-total ist, so besitzt V für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

(2) Falls W lediglich aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht und falls V für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so ist die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ W-total.

Die zu Fakt 3.1.5 und Korollar 3.1.6 gehörenden dualen Aussagen lauten:

Fakt 3.1.7 *Es sei $K \leq K(\bar{x})$ eine endlich erzeugte, reguläre Körpererweiterung, und es sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K.*

(1) Falls $H_{\mathcal{O}}(K)$ in $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen ist, so besitzt $V_{(\bar{x})}$ einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

(2) Falls $\mathcal{O}$ nichttrivial ist und falls $V_{(\bar{x})}$ einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so ist $H_{\mathcal{O}}(K)$ in $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen.

Korollar 3.1.8 *Es sei $K \leq K(\bar{x})$ eine endlich erzeugte, reguläre Körpererweiterung, und es sei W eine Menge von Bewertungsringen des Körpers K.*

(1) Falls die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ W-total ist, so besitzt $V_{(\bar{x})}$ für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt.

(2) Falls W lediglich aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht und falls $V_{(\bar{x})}$ für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so ist die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ W-total.

Beweis von Satz 3.1.4: (1)$\Rightarrow$(2): Es sei K_0 ein Oberkörper von K, für den die Körpererweiterung $K \leq K_0$ regulär und W-total ist. Um zu zeigen, daß K in K_0 existenziell abgeschlossen ist, genügt es nach Fakt 1.4.1 nachzuweisen, daß jede K-Varietät V, die einen K_0-rationalen Punkt besitzt, auch einen K-rationalen Punkt besitzt. Es sei also V eine K-Varietät, die einen K_0-rationalen Punkt besitzt, und es sei $(\bar{x})$ ein solcher K_0-rationaler Punkt von V. Mit der Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist auch die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ regulär, weshalb es sich bei der vom Punkt $(\bar{x})$ erzeugten K-Varietät $V_{(\bar{x})}$ nach Fakt 1.2.2 um eine über K definierte Varietät handelt. Mit der Körpererweiterung $K \leq K_0$ ist auch die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ W-total, weshalb $V_{(\bar{x})}$ nach Korollar 3.1.8 für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt. Wegen der regulären Abgeschlossenheit von (K, W) besitzt $V_{(\bar{x})}$ daher auch einen K-rationalen Punkt $(\bar{a})$. Weil $V_{(\bar{x})}$ in V enthalten ist, handelt es sich bei $(\bar{a})$ auch um einen K-rationalen Punkt von V, und genau solch einen Punkt haben wir gesucht.

(2)$\Rightarrow$(1): Falls K in W enthalten ist, so ist (K, W) nach Bemerkung 3.1.1 regulär abgeschlossen.

Ist K nicht in W enthalten und ist V eine über K definierte Varietät, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so läßt sich folgendermaßen zeigen, daß V einen K-rationalen Punkt besitzt:

Ist $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V, so ist die Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$ nach Fakt 1.2.1 regulär und nach Korollar 3.1.6 zu Fakt 3.1.5 W-total. Nach (2) ist dann der Körper K im Körper $K(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen, woraus mit Fakt 1.4.1 insbesondere folgt, daß die Varietät V (die mit $(\bar{x})$ einen $K(\bar{x})$-rationalen Punkt besitzt) auch einen K-rationalen Punkt besitzt. $\square$

Mit Hilfe von Satz 3.1.4 und Fakt 3.1.5/Korollar 3.1.6 läßt sich nun leicht zeigen, daß im Falle eines regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körpers (K, W), dessen zugehörige Menge W lediglich aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht, eine über K definierte Varietät V, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, in folgendem Sinne sehr viele K-rationale Punkte besitzt:

Satz 3.1.9 *Es sei (K, W) ein regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehörige Menge W lediglich aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht, und es sei $V \subseteq \Omega^n$ eine über K definierte Varietät, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt. Dann gibt es zu jeder K-algebraischen Teilmenge A des Ω^n, die V nicht umfaßt, einen K-rationalen Punkt von V, der nicht in A liegt.*

Beweis: Es sei also V eine über K definierte Varietät, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt. Ist dann $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V, so ist $(\bar{x})$ nicht in A enthalten, denn aus $(\bar{x}) \in A$

würde $V = V_{(\bar{x})} \subseteq A$ folgen. Außerdem handelt es sich bei $K \leq K(\bar{x})$ nach Fakt 1.2.1 um eine reguläre sowie darüberhinaus nach Korollar 3.1.6 um eine W-totale Körpererweiterung, woraus mit Satz 3.1.4 folgt, daß der Körper K im Körper $K(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen ist. Weil V mit $(\bar{x})$ einen $K(\bar{x})$-rationalen Punkt besitzt, der nicht in A liegt, besitzt V daher nach Fakt 1.4.1 auch einen K-rationalen Punkt, der nicht in A liegt. □

Korollar 3.1.10 *Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.9 gilt:*

(1) V besitzt einfache K-rationale Punkte.

(2) Ist A eine K-algebraische Teilmenge des Ω^n, die die Menge $V(K)$ aller K-rationalen Punkte von V umfaßt, so umfaßt A auch V.

(3) $V(K)$ liegt bezüglich der Zariski-Topologie auf V dicht in V.

Beweis: (1) folgt, unter Verwendung der Tatsache, daß es sich für eine über K definierte Varietät V bei der Menge A aller nicht-einfachen Punkte von V um eine echte K-algebraische Teilmenge von V handelt (s. Punkt 5 aus Abschnitt 1.2), aus Satz 3.1.9.

(2) Würde A die Varietät V nicht umfassen, so gäbe es nach Satz 3.1.9 einen Punkt aus $V(K)$, der nicht in A liegen würde.

(3) Beim topologischen Abschluß von $V(K)$ in V handelt es sich einerseits um eine Teilmenge von V, andererseits um eine K-algebraische Menge, die $V(K)$, und damit nach (2) auch V umfaßt. Es folgt, daß der Abschluß von $V(K)$ in V gleich V ist. □

Wir wollen uns nun als eine weitere Anwendung von Fakt 3.1.5 überlegen, daß es zum Nachweis der regulären Abgeschlossenheit eines mehrfach bewerteten Körpers (K, W) genügt, die Gültigkeit des der Definition zugrundeliegenden Lokal-Global-Prinzips lediglich für über K definierte Hyperflächen zu beweisen.

Satz 3.1.11 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) (K, W) ist regulär abgeschlossen.

(2) Für jede natürliche Zahl n und für jede über K definierte Hyperfläche H des Ω^n ist folgendes erfüllt: Besitzt H für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt, so besitzt H einen K-rationalen Punkt.

Beweis: Weil es sich bei über K definierten Hyperflächen um spezielle über K definierte Varietäten handelt, ist (1)$\Rightarrow$(2) klar.

(2)$\Rightarrow$(1): Falls W den trivialen Bewertungsring K enthält, so ist (K, W) nach Punkt (2) der Bemerkung 3.1.1 regulär abgeschlossen.

Ist K nicht in W enthalten und ist V eine über K definierte Varietät des Ω^n, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, so läßt sich folgendermaßen zeigen, daß V einen K-rationalen Punkt besitzt:

Ist $(\bar{x})$ ein generischer Punkt von V, so handelt es sich bei $K \leq K(\bar{x})$ nach Fakt 1.2.1 um eine reguläre Körpererweiterung.

Lemma 3.1.12 *Es sei $K \leq K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ eine endlich erzeugte, reguläre Körpererweiterung. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, die kleiner oder gleich n ist sowie ein Erzeugendensystem $\{y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k\}$ von $K \leq K(x_0, \ldots, x_{n-1})$, welches die folgenden drei Eigenschaften besitzt:*

(1) Die Elemente $y_0, \ldots, y_{k-1}$ sind über K algebraisch unabhängig.

(2) Das Element y_k ist über $K(y_0, \ldots, y_{k-1})$ (separabel) algebraisch.

(3) Die Elemente $x_0, \ldots, x_{n-1}$ liegen in $K[y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k]$.

Beweis des Lemmas: Als endlich erzeugte, reguläre Körpererweiterung besitzt $K \leq K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ eine sogenannte separierende Transzendenzbasis (s. z. B. [La2]), also eine Transzendenzbasis $y_0, \ldots, y_{k-1}$; $k \leq n$, für welche die Körpererweiterung $K(y_0, \ldots, y_{k-1}) \leq K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ endlich und separabel algebraisch ist. Ist dann z_k ein primitives Element der (nach dem Satz vom primitiven Element) einfachen Körpererweiterung $K(y_0, \ldots, y_{k-1}) \leq K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ und ist l der Körpergrad dieser Erweiterung, so handelt es sich bei $\{z_k, z_k^2, \ldots, z_k^l\}$ um eine Basis von $K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ über $K(y_0, \ldots, y_{k-1})$. Deshalb läßt sich für jedes i aus $\{0, \ldots n-1\}$ das Element x_i in der Form $x_i = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} z_k^j$ schreiben, wobei die Elemente x_{ij}; $i \in \{0, \ldots n-1\}$, $j \in \{1, \ldots l\}$ in $K(y_0, \ldots, y_{k-1})$ enthalten sind. Schreiben wir dann für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ und für jedes j aus $\{1, \ldots, l\}$ das Element x_{ij} in der Form $x_{ij} = r_{ij}/s_{ij}$ mit r_{ij} aus $K[y_0, \ldots, y_{k-1}]$ und s_{ij} aus $K[y_0, \ldots, y_{k-1}] \setminus \{0\}$ und setzen wir s gleich dem Produkt sämtlicher Elemente s_{ij}; $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots l\}$, so ist $s \neq 0$, und die Elemente $r_{ij} s^j / s_{ij}$; $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots l\}$ liegen allesamt in $K[y_0, \ldots, y_{k-1}]$. Wenn wir schließlich noch $y_k := z_k/s$ setzen, so ist y_k über $K(y_0, \ldots, y_{k-1})$ separabel algebraisch, und für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ liegt das Element

$$x_i = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} z_k^j = \sum_{j=1}^{l} (r_{ij}/s_{ij}) z_k^j = \sum_{j=1}^{l} (r_{ij} s^j / s_{ij})(z_K/s)^j = \sum_{j=1}^{l} (r_{ij} s^j / s_{ij}) y_k^j$$

in $K[y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k]$. ◇

Es sei nun $\{y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k\}$ ein Erzeugendensystem der regulären Körpererweiterung $K \leq K(\bar{x})$, das die im obigen Lemma angegebenen Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt. Wegen (1) und (2) ist dann der Transzendenzgrad der Körpererweiterung $K \leq K(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ gleich k. Es folgt, daß die vom Punkt $(y_0 \ldots, y_{k-1}, y_k)$ aus $K(\bar{x})^{k+1}$ erzeugte K-Varietät $V' \subseteq \Omega^{k+1}$ (für die gilt, daß es sich bei $(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ um einen generischen Punkt von V' handelt) eine K-Hyperfläche des Ω^{k+1} ist. Weil es sich bei $K \leq K(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k) = K(x_0, \ldots, x_{n-1})$ um eine reguläre Körpererweiterung handelt, ist V' darüberhinaus nach Fakt 1.2.2 absolut irreduzibel sowie über K definiert.

Weil V nach Voraussetzung für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, ist nach Fakt 3.1.5 für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W der Körper $H_{\mathcal{O}}(K)$ im Körper $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$ existenziell abgeschlossen. Hieraus sowie aus der Tatsache, daß V' für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W mit $(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)(\bar{x})$-rationalen Punkt besitzt, folgt mit Fakt 1.4.1, daß V' für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt. Weil der mehrfach bewertete Körper (K, W) nach Voraussetzung bezüglich über K definierter Hyperflächen regulär abgeschlossen ist, gibt es somit einen Punkt $(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ aus V', dessen Koordinaten $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k$ allesamt in K enthalten sind.

Aufgrund der Eigenschaft (3) des Erzeugendensystems $\{y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k\}$ gibt es zu jedem i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ ein Polynom g_i aus $K[Y_0, \ldots, Y_{k-1}, Y_k]$, für welches $x_i = g_i(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ gilt. Wenn wir dann für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ $b_i := g_i(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ setzen, so liegen die Elemente $b_0, \ldots, b_{n-1}$ in K, und wir beweisen jetzt, daß es sich für jedes Polynom f aus dem Verschwindungsideal $I_K(V)$ von V in $K[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ bei $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ um eine Nullstelle von f handelt, was gleichbedeutend damit ist, daß der Punkt $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ in $A(I_K(V)) = V$ liegt.

Es sei also f ein beliebiges Polynom aus $I_K(V)$. Wir betrachten das Polynom $g := f(g_0, \ldots, g_{n-1})$ aus $K[Y_0, \ldots, Y_{k-1}, Y_k]$ und stellen fest, daß $g(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k) = f(g_0(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k), \ldots, g_{n-1}(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)) = f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$ ist, sodaß also das Polynom g im Verschwindungsideal $I_K(\{(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)\})$ des Punktes $(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ in $K[Y_0, \ldots, Y_{k-1}, Y_k]$, und somit im Verschwindungsideal $I_K(V')$ von V' in $K[Y_0, \ldots, Y_{k-1}, Y_k]$ enthalten ist (man beachte hierbei: Weil es sich bei $(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ um einen generischen Punkt von V' handelt, stimmen die beiden Verschwindungsideale $I_K(\{(y_0, \ldots, y_{k-1}, y_k)\})$ und $I_K(V)$ überein.). Weil der Punkt $(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ in V' liegt, ist daher $f(b_0, \ldots, b_{n-1}) = f(g_0(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k), \ldots, g_{n-1}(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k)) = g(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k) = 0$. □

Nach Abschnitt 1.2 ist eine Menge $B \subseteq \Omega^n$ genau dann eine über K definierte Hyperfläche des Ω^n, wenn es ein absolut irreduzibles Polynom f aus $K[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ gibt, für das $B = A(\{f\})$ gilt.

Deshalb ergibt sich aus Satz 3.1.11 das folgende Korollar:

Korollar 3.1.13 *Für einen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) (K, W) *ist regulär abgeschlossen.*

(2) Jedes absolut irreduzible Polynom f mit Koeffizienten aus K, das für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W in $H_{\mathcal{O}}(K)$ eine einfache Nullstelle besitzt, besitzt eine Nullstelle in K. □

3.2 Algebraische Oberkörper regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns in der Hauptsache mit den Beweisen der folgenden beiden Sätze:

Satz 3.2.1 *Ist (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, ist K_0 ein Oberkörper von K, für den die Körpererweiterung $K \leq K_0$ endlich und separabel ist und ist W_0 die Menge aller Bewertungsringe des Körpers K_0, die einen Bewertungsring aus W fortsetzen, so ist mit dem mehrfach bewerteten Körper (K, W) auch der mehrfach bewertete Körper (K_0, W_0) regulär abgeschlossen.*

Satz 3.2.2 *Ist (K, W) ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper, ist K_0 ein Oberkörper von K, für den die Körpererweiterung $K \leq K_0$ separabel algebraisch ist und ist W_0 die Menge aller Bewertungsringe des Körpers K_0, die einen Bewertungsring aus W fortsetzen, so ist mit dem mehrfach bewerteten Körper (K, W) auch der mehrfach bewertete Körper (K_0, W_0) regulär abgeschlossen.*

Im Beweis des Satzes 3.2.1 spielt die sogenannte Weilsche Descent-Methode eine zentrale Rolle, die wir deshalb hier an dieser Stelle kurz skizzieren wollen. Es handelt sich dabei um eine „Methode“, die für eine endliche, separable Körpererweiterung $K \leq K_0$ zu jeder über dem Körper K_0 definierten Varietät V_0 eine über dem Körper K definierte Varietät V liefert, sodaß jeder K-rationale Punkt von V einen K_0-rationalen Punkt von V_0 induziert.

Es sei also $K \leq K_0$ eine endliche, separable Körpererweiterung vom Körpergrad $[K_0 : K] = l$. Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es dann ein Element α aus K_0, für das $K_0 = K(\alpha)$ ist. Desweiteren gibt es, entsprechend den l verschiedenen Nullstellen des Minimalpolynoms von α über K, genau l verschiedene K-Einbettungen $\mu_0 := id_{K_0}, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}$ von K_0 in den separablen Abschluß K_s von K. Für jedes i aus $\{0, \ldots, l-1\}$ handelt es sich bei $\{1, \mu_i(\alpha), \ldots, \mu_i(\alpha)^{l-1}\}$ um eine Basis der Körpererweiterung $K \leq K(\mu_i(\alpha))$ sowie bei der $(l \times l)$-Matrix $(\mu_i(\alpha)^j)_{0 \leq i,j \leq l-1}$ um eine Matrix aus $GL(l, K_s)$ (letzteres wird z. B. in [La2] bewiesen).

Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so wird für jedes i aus $\{0, \ldots, l-1\}$ durch die Festsetzung

$$\rho_i((y_{00}, \ldots, y_{0(n-1)}, \ldots, y_{(l-1)0}, \ldots, y_{(l-1)(n-1)})) := (x_{i0}, \ldots, x_{i(n-1)}),$$

wobei für jedes k aus $\{0, \ldots, n-1\}$

$$x_{ik} = \sum_{j=0}^{l-1} \mu_i(\alpha)^j y_{jk}$$

ist, eine lineare Abbildung ρ_i von $\Omega^{l \cdot n}$ nach Ω^n mit Koeffizienten aus $\mu_i(K_0) = K(\mu_i(\alpha)) \leq K_s$ definiert.

Fakt 3.2.3 *Die lineare Abbildung $\rho := (\rho_0, \ldots, \rho_{l-1})$, die den $\Omega^{l\cdot n}$ in das l-fache karthesische Produkt des Ω^n abbildet, besitzt die folgenden beiden Eigenschaften:*

(1) ρ ist eine Bijektion von $\Omega^{l\cdot n}$ auf das l-fache karthesische Produkt des Ω^n.

(2) Zu jeder über dem Körper K_0 definierten Varietät V_0 des Ω^n gibt es eine über dem Körper K definierte Varietät V des $\Omega^{l\cdot n}$, für die $\rho(V) = \mu_0(V_0) \times \mu_1(V_0) \times \ldots \times \mu_{l-1}(V_0)$ gilt. Darüberhinaus bildet ρ die Menge der einfachen Punkte von V genau auf die Menge der einfachen Punkte von $\mu_0(V_0) \times \mu_1(V_0) \times \ldots \times \mu_{l-1}(V_0)$ ab.

Beweise von Fakt 3.2.3 findet man z. B. in [Fr-Ja], [Ja] oder [Pr1].

Das nun folgende Lemma wird im Beweis von Satz 3.2.1 benötigt.

Lemma 3.2.4 *Wie bisher sei $K \leq K_0$ eine endliche separable Körpererweiterung vom Körpergrad l mit primitivem Element α und seien $\mu_0 = id_{K_0}, \ldots, \mu_{l-1}$ die l verschiedenen K-Einbettungen von K_0 in K_s. Außerdem sei $K_1 \leq K_s$ ein beliebiger separabel algebraischer Oberkörper von K sowie V_0 eine über dem Körper K_0 definierte Varietät.*

Ist dann $(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_{l-1}) = (\alpha_{00}, \ldots, \alpha_{0(n-1)}, \ldots, \alpha_{(l-1)0}, \ldots, \alpha_{(l-1)(n-1)})$ ein K_s-rationaler Punkt von $\mu_0(V_0) \times \ldots \times \mu_{l-1}(V_0)$, der die folgende Eigenschaft (*)

> *Sind für beliebige zwei natürliche Zahlen i und j aus $\{0, \ldots, l-1\}$ die K-Einbettungen μ_i und μ_j durch einen K_1-Automorphismus σ von K_s zueinander konjugiert, d.h gibt es einen K_1-Automorphismus σ von K_s, für den $\mu_i = \sigma\mu_j$ ist, so sind auch die Punkte $(\bar{\alpha}_i)$ aus $\mu_i(V_0)$ und $(\bar{\alpha}_j)$ aus $\mu_j(V_0)$ bezüglich σ zueinander konjugiert, d. h. dann ist auch $(\bar{\alpha}_i) = \sigma((\bar{\alpha}_j))$.*

besitzt, so ist $(\bar{\beta}) := \rho^{-1}((\bar{\alpha}))$ ein K_1-rationaler Punkt von V. Dabei ist mit ρ die lineare Abbildung aus Fakt 3.2.3 und mit V die nach Punkt (2) aus Fakt 3.2.3 zu V_0 gehörende über K definierte Varietät des $\Omega^{l\cdot n}$ gemeint.

Beweis: Weil es sich bei $K \leq K_1$ um eine separabel algebraische Körpererweiterung handelt, ist der Fixkörper der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(K_s/K_1)$ mit dem Körper K_1 identisch. Um einzusehen, daß der Punkt $(\bar{\beta}) := \rho^{-1}((\bar{\alpha}))$ aus $V \cap K_s^{l\cdot n}$ in $K_1^{l\cdot n}$ enthalten ist, genügt es daher, sich klarzumachen, daß seine Koordinaten unter allen K_1-Automorphismen von K_s invariant sind, daß also für jedes σ aus $\mathrm{Aut}(K_s/K_1)$ die Gleichheit $\sigma(\bar{\beta}) = (\bar{\beta})$ gilt.

Es sei also σ ein beliebiger K_1-Automorphismus von K_s, und es sei k eine natürliche Zahl aus $\{0, \ldots, n-1\}$; wir zeigen, daß $\sigma((\beta_{0k}, \ldots, \beta_{(l-1)k})) = (\beta_{0k}, \ldots, \beta_{(l-1)k})$ ist.

Für die Koordinaten der Punkte $(\alpha_{0k},\dots,\alpha_{(l-1)k})$ und $(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$ gelten nach Definition von ρ die folgenden Beziehungen:

$$\alpha_{ik}=\sum_{j=0}^{l-1}\mu_i(\alpha)^j\beta_{jk};\;\; 0\le i\le l-1.$$

Mit anderen Worten: Bei $(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$ handelt es sich um eine Lösung des inhomogenen linearen $(l\times l)$- Gleichungssystems (+):

$$\alpha_{ik}=\sum_{j=0}^{l-1}\mu_i(\alpha)^j x_{jk};\;\; 0\le i\le l-1,$$

dessen erweiterte Koeffizientenmatrix in $M(l\times(l+1);K_s)$ liegt. Wie wir bereits weiter oben angemerkt haben, ist die Koeffizientenmatrix $(\mu_i(\alpha)^j)_{0\le i,j\le(l-1)}\in M(l\times l,K_s)$ von (+) invertierbar, weshalb es sich bei (+) um ein eindeutig lösbares LGS und bei $(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$ um seine einzige Lösung handelt.

Wir betrachten nun das LGS $\sigma(+)$, das aus dem LGS (+) hervorgeht, wenn man auf die erweiterten Koeffizienten $\mu_i(\alpha)^j$; $0\le i,j\le(l-1)$ und $\alpha_{0k},\dots,\alpha_{(l-1)k}$ von (+), die in K_s liegen, den Automorphismus σ anwendet und stellen fest:

Behauptung: Die Gleichungssysteme (+) und $\sigma(+)$ sind äquivalent.

Beweis der Behauptung: $\sigma(+)$ geht durch Zeilenvertauschung aus (+) hervor: Ist nämlich π eine Permutation von $\{0,\dots l-1\}$, für die $(\sigma\mu_0,\dots,\sigma\mu_{l-1})=(\mu_{\pi(0)},\dots,\mu_{\pi(l-1)})$ gilt, so wird für jedes i aus $\{0,\dots,l-1\}$ die i-te Zeile

$$\alpha_{ik}=\sum_{j=0}^{l-1}\mu_i(\alpha)^j x_{jk}$$

von (+) in die $\pi(i)$-te Zeile

$$\alpha_{\pi(i)k}=\sum_{j=0}^{l-1}\mu_{\pi(i)}(\alpha)^j x_{jk}$$

von (+) überführt, denn es ist $\sigma\mu_i=\mu_{\pi(i)}$ und, wegen der Bedingung (*), $\sigma(\alpha_{ik})=\alpha_{\pi(i)k}$. $\diamond$

Weil $(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$ eine Lösung von (+) ist, ist $\sigma((\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k}))$ eine Lösung von $\sigma(+)$. Weil (+) und $\sigma(+)$ äquivalent sind, ist $\sigma((\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k}))$ daher eine Lösung von (+). Weil $(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$ die einzige Lösung von (+) ist, ist $\sigma((\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k}))=(\beta_{0k},\dots,\beta_{(l-1)k})$, und genau das sollte gezeigt werden. $\square$

Für den Beweis von Satz 3.2.1 sind neben den soeben vermittelten Kenntnissen aus dem Umfeld der Weilschen Descent-Methode auch noch zwei bewertungstheoretische Ergebnisse von Bedeutung. Das erste dieser beiden Resultate liefert für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ und einen über K algebraischen Oberkörper K_0 von K eine bijektive Entsprechung zwischen den Bewertungsringen von K_0, die $\mathcal{O}$ fortsetzen und den Äquivalenzklassen einer gewissen Äquivalenzrelation auf der Menge der K-Einbettungen von K_0 in $\tilde{K}$.

Fakt 3.2.5 *Es sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, es sei $(K, \mathcal{O})^H$ eine beliebige Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$, und es sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der (eindeutig bestimmte) Bewertungsring von $\tilde{K}$, der den Bewertungsring $\mathcal{O}^H$ von $(K, \mathcal{O})^H$ fortsetzt. Desweiteren sei K_0 ein Oberkörper von K, der über K algebraisch ist.*

(1) Für jede K-Einbettung μ von K_0 in $\tilde{K}$ handelt es sich bei $\mu^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$ um einen Bewertungsring von K_0, der $\mathcal{O}$ fortsetzt.

(2) Für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ von K_0 gibt es eine K-Einbettung μ von K_0 in $\tilde{K}$, für die $\mathcal{O}_0 = \mu^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$ ist.

(3) Für je zwei K-Einbettungen μ und ν von K_0 in $\tilde{K}$ stimmen $\mu^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$ und $\nu^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$ genau dann überein, wenn μ und ν über $H_{\mathcal{O}}(K)$ konjugiert sind, wenn es also ein σ aus $\mathrm{Aut}(\tilde{K}/H_{\mathcal{O}}(K))$ gibt, für das $\mu = \sigma\nu$ gilt.

Beim zweiten der oben angekündigten bewertungstheoretischen Resultate handelt es sich um folgende Ergänzung zu Fakt 3.2.5:

Fakt 3.2.6 *Wie in Fakt 3.2.5 sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, $(K, \mathcal{O})^H$ eine Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$ und $\tilde{\mathcal{O}}$ der Bewertungsring von $\tilde{K}$, der den Bewertungsring $\mathcal{O}^H$ von $(K, \mathcal{O})^H$ fortsetzt. Ist dann $K_0 \leq K_s$ ein Oberkörper von K, der über K separabel algebraisch ist, so handelt es sich für jede K-Einbettung μ von K_0 in $K_s \leq \tilde{K}$ beim bewerteten Körper $(H_{\mathcal{O}}(K) \cdot \mu(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap H_{\mathcal{O}}(K) \cdot \mu(K_0))$ um eine Henselsche Hülle des bewerteten Körpers $(\mu(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap \mu(K_0))$.*

Beide Resultate werden z.B. in [En] oder in [Er2] bewiesen.

Wir sind nun in der Lage Satz 3.2.1 zu beweisen:

Beweis von Satz 3.2.1: Es sei V_0 eine über dem Körper K_0 definierte Varietät, die für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus W_0 einen einfachen $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$-rationalen Punkt besitzt. Wir haben zu zeigen, daß V_0 dann auch einen K_0-rationalen Punkt besitzt.

Es sei l der Körpergrad der Erweiterung $K \leq K_0$, und es seien $\mu_0 = id_{K_0}, \dots,$ μ_{l-1} die l verschiedenen K-Einbettungen von K_0 in $K_s \leq \tilde{K}$.

Behauptung: Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring aus W und ist $(K, \mathcal{O})^H$ eine Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$, so besitzt $\mu_0(V_0) \times \ldots \times \mu_{l-1}(V_0)$ einen einfachen K_s-rationalen

Punkt, der bezüglich des Körpers $K_1 := H_{\mathcal{O}}(K) \leq K_s$ die Eigenschaft (*) aus Lemma 3.2.4 besitzt.

Beweis der Behauptung: Es sei also $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W, und es sei $(K,\mathcal{O})^H$ eine Henselsche Hülle von $(K,\mathcal{O})$. Es sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der Bewertungsring von $\tilde{K}$, der $\mathcal{O}^H$ fortsetzt, und es sei $W_0[\mathcal{O}] \subseteq W_0$ die Menge aller Bewertungsringe von K_0, die $\mathcal{O}$ fortsetzen. Nach Fakt 3.2.5 besteht $W_0[\mathcal{O}]$ genau aus den Bewertungsringen $\mathcal{O}_0 := \mu_0^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}), \ldots, \mathcal{O}_{l-1} := \mu_{l-1}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$.

Für jedes i aus $\{0,\ldots,l-1\}$ sei nun $(K_0,\mathcal{O}_i)^H$ eine Henselsche Hülle von $(K_0,\mathcal{O}_i)$ sowie $(\bar{\alpha}_i)$ ein einfacher $H_{\mathcal{O}_i}(K_0)$-rationaler Punkt von V_0, wobei zusätzlich noch $(K_0,\mathcal{O}_i)^H = (K_0,\mathcal{O}_j)^H$ und $(\bar{\alpha}_i) = (\bar{\alpha}_j)$ gelten soll, falls $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$ ist.

Für jedes i aus $\{0,\ldots,l-1\}$ handelt es sich dann nach Fakt 3.2.6 bei dem bewerteten Körper $(H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0))$ um eine Henselsche Hülle des bewerteten Körpers $(\mu_i(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap \mu_i(K_0))$, und ist $\tilde{\mu}_i$ der aufgrund der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle existierende und eindeutig bestimmte Isomorphismus von $(K_0,\mathcal{O}_i)^H$ und $(H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0))$, der μ_i fortsetzt, so ist $(\bar{\beta}_i) := \tilde{\mu}_i((\bar{\alpha}_i))$ ein einfacher Punkt von $\mu_i(V_0)$, der in $H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0)$ enthalten ist.

Setzen wir nun $(\bar{\beta}) := (\bar{\beta}_0,\ldots,\bar{\beta}_{l-1}) = (\tilde{\mu}_0((\bar{\alpha}_0)),\ldots,\tilde{\mu}_{l-1}((\bar{\alpha}_{l-1})))$, so handelt es sich bei $(\bar{\beta})$ um einen einfachen Punkt von $\mu_0(V_0)\times\ldots\times\mu_{l-1}(V_0)$, und wir zeigen jetzt, daß $(\bar{\beta})$ bezüglich $K_1 = H_{\mathcal{O}}(K)$ die Eigenschaft (*) besitzt:

Es seien also i und j natürliche Zahlen aus $\{0,\ldots,l-1\}$, für die ein $H_{\mathcal{O}}(K)$-Automorphismus σ von K_s mit $\mu_i = \sigma\mu_j$ existiert; wir haben zu zeigen, daß $(\bar{\beta}_i) = \sigma((\bar{\beta}_j))$ ist. Wegen $\mu_i = \sigma\mu_j$ stimmen nach Fakt 3.2.5 die Bewertungsringe $\mathcal{O}_i$ und $\mathcal{O}_j$, und folglich auch die Henselschen Hüllen $(K_0,\mathcal{O}_i)^H$ und $(K_0,\mathcal{O}_j)^H$ sowie die Punkte $(\bar{\alpha}_i)$ und $(\bar{\alpha}_j)$ überein. Da es sich sowohl bei $\tilde{\mu}_i$ als auch bei $\sigma\tilde{\mu}_j$ um Isomorphismen von $(K_0,\mathcal{O}_i)^H$ auf den (Henselsch) bewerteten Körper $(H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0), \tilde{\mathcal{O}} \cap H_{\mathcal{O}}(K)\cdot\mu_i(K_0))$ handelt, die μ_i fortsetzen und da es aufgrund der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle genau einen solchen Isomorphismus gibt, ist $\tilde{\mu}_i = \sigma\tilde{\mu}_j$. Folglich ist $\sigma((\bar{\beta}_j)) = \sigma(\tilde{\mu}_j((\bar{\alpha}_j))) = \tilde{\mu}_i((\bar{\alpha}_j)) = \tilde{\mu}_i((\bar{\alpha}_i)) = (\bar{\beta}_i)$. $\diamond$

Ist ρ die lineare Abbildung aus Fakt 3.2.3 und bezeichnen wir mit V die nach Fakt 3.2.3 existierende über K definierte Varietät, für die $\rho(V) = \mu_0(V_0)\times\ldots\times\mu_{l-1}(V_0)$ gilt, so folgt aus der obigen Behauptung mit Lemma 3.2.4 und Punkt (2) aus Fakt 3.2.3, daß V für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W einen einfachen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt.

Weil der mehrfach bewertete Körper (K,W) regulär abgeschlossen ist, folgt hieraus, daß V einen K-rationalen Punkt $(\bar{a})$ besitzt. Nach Punkt (2) aus Fakt 3.2.3 handelt es sich dann bei $\rho_0((\bar{a}))$ um einen $(\mu_0(K_0) = K)$-rationalen Punkt von $\mu_0(V_0) = V_0$, und genau solch einen Punkt haben wir gesucht. $\square$

Um Satz 3.2.2 beweisen zu können, benötigen wir den nun folgenden

Satz 3.2.7 *Es sei* (K, W) *ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem* $\mathcal{V}_W$ *aus clopen Teilmengen von* W *besteht, und es seien* A *und* B *zwei* K*-algebraische Teilmengen des* Ω^n*. Dann handelt es sich bei der Menge*

$$W(A \setminus B) := \{\mathcal{O} \in W \mid A \setminus B \text{ besitzt einen } H_{\mathcal{O}}(K)\text{-rationalen Punkt}\}$$

um eine offene Teilmenge von W*.*

Beweis: Es seien $f_0, \ldots, f_{k-1}$ Polynome aus $K[X_0, \ldots, X_{n-1}] = K[\bar{X}]$, für die $A = A(\{f_0, \ldots, f_{k-1}\})$ gilt, es seien $g_0, \ldots, g_{l-1}$ Polynome aus $K[\bar{X}]$, für die $B = A(\{g_0, \ldots, g_{l-1}\})$ gilt, und es sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus $W(A \setminus B)$.

Wir zeigen, daß es eine offene Teilmenge W' von W gibt, für die $\mathcal{O} \in W' \subseteq W(A \setminus B)$ gilt. Wir nehmen hierzu an, daß es für $\mathcal{O}$ keine offene Teilmenge W' von W mit $\mathcal{O} \in W' \subseteq W(A \setminus B)$ gibt, daß also für jede offene Teilmenge W' von W, die $\mathcal{O}$ enthält, $W' \not\subseteq W(A \setminus B)$ bzw. $W' \cap (W \setminus W(A \setminus B)) \neq \emptyset$ gilt. Unser Ziel besteht nun darin, auf der Basis dieser Annahme nachzuweisen, daß $A \setminus B$ keinen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzen kann bzw. daß $\mathcal{O}$ nicht in $W(A \setminus B)$ enthalten ist und auf diese Art und Weise einen Widerspruch zur obigen Annahme zu erhalten.

Dem nun folgenden modelltheoretischen Argument liegt die in Abschnitt 1.4 eingeführte Sprache $\mathcal{L}_1 := \{+, \cdot, 0, 1, R\}$ zugrunde; wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß sich jeder bewertete Körper auf natürliche Art und Weise als $\mathcal{L}_1$-Struktur auffassen läßt sowie daran, daß es sich bei der Klasse der Henselsch bewerteten Körper um eine $\mathcal{L}_1$-axiomatisierbare Klasse von $\mathcal{L}_1$-Strukturen handelt (s. Abschnitt 1.4).

Ist dann Σ_H ein $\mathcal{L}_1$-Axiomensystem der Klasse der Henselsch bewerteten Körper, ist ϕ die $\mathcal{L}_1(K)$-Aussage

$$\neg \exists \bar{X} (\bigwedge_{i=0}^{k-1} f_i(\bar{X}) = 0 \wedge \bigvee_{i=0}^{l-1} g_i(\bar{X}) \neq 0),$$

die besagt, daß die Menge $A \setminus B$ leer ist und ist $D(K, \mathcal{O})$ das sogenannte algebraische Diagramm des bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$, also die Menge aller atomaren und negiert atomaren $\mathcal{L}_1(K)$-Aussagen, die im bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ gelten, so handelt es sich bei der Menge $\Sigma := \Sigma_H \cup \{\phi\} \cup D(K, \mathcal{O})$ um eine Menge von $\mathcal{L}_1(K)$-Aussagen, von der wir nun nachweisen werden, daß sie ein Modell besitzt:

Behauptung: Σ ist erfüllbar.

Beweis der Behauptung: Nach dem Kompaktheitssatz der Modelltheorie genügt es, zu beweisen, daß jede endliche Teilmenge Σ_0 von Σ erfüllbar ist.

Ist Σ_0 eine endliche Teilmenge von Σ, so gibt es eine endliche Teilmenge Φ_0 von $D(K, \mathcal{O})$, sodaß Σ_0 in $\Sigma_H \cup \{\phi\} \cup \Phi_0$ enthalten ist. Es seien dann $a_0, \ldots, a_{r-1}$ sämtliche Elemente des Bewertungsringes $\mathcal{O}$, für welche die $\mathcal{L}_1(K)$-Aussagen $c_{a_0} \in R, \ldots, c_{a_{r-1}} \in R$ in Φ_0 liegen, und es seien $b_0, \ldots, b_{s-1}$ sämtliche Elemente aus

$K \setminus \mathcal{O}$, für welche die $\mathcal{L}_1(K)$-Aussagen $c_{b_0} \notin R, \ldots, c_{b_{s-1}} \notin R$ in Φ_0 liegen. Wenn wir dann

$$W' := V_{a_0} \cap \ldots \cap V_{a_{r-1}} \cap (W \setminus V_{b_0}) \cap \ldots \cap (W \setminus V_{b_{s-1}})$$

setzen, so liegt $\mathcal{O}$ in W'. Außerdem ist W' clopen. Dies gilt, weil die Mengen $V_{a_0}, \ldots, V_{a_{r-1}}, V_{b_0}, \ldots, V_{b_{s-1}}$ in $\mathcal{V}_W$ liegen und weil $\mathcal{V}_W$ nach Voraussetzung aus clopen Teilmengen von W besteht. Aufgrund unserer Annahme ist daher $W' \cap (W \setminus W(A \setminus B)) \neq \emptyset$; es gibt also einen Bewertungsring $\mathcal{O}'$ aus W' für den die Menge $A \setminus B$ keinen $H_{\mathcal{O}'}(K)$-rationalen Punkt besitzt.

Weil $(K, \mathcal{O}')^H$ Henselsch ist und weil $A \setminus B$ keinen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt, ist $(K, \mathcal{O}')^H$ ein Modell von $\Sigma_H \cup \{\phi\}$. Weil der Bewertungsring $\mathcal{O}'$ in der Menge W' enthalten ist, ist $(K, \mathcal{O}')$ ein Modell von Φ_0 und weil es sich bei $(K, \mathcal{O}')$ um eine $\mathcal{L}_1$-Substruktur von $(K, \mathcal{O}')^H$ sowie bei Φ_0 um eine Menge von quantorenfreien $\mathcal{L}_1(K)$-Formeln handelt, ist auch $(K, \mathcal{O}')^H$ ein Modell von Φ_0. Es handelt sich also insgesamt bei $(K, \mathcal{O}')^H$ um ein Modell von $\Sigma_H \cup \{\phi\} \cup \Phi_0$ und daher wegen $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_H \cup \{\phi\} \cup \Phi_0$ insbesondere auch um ein Modell von Σ_0. $\diamond$

Es sei nun $\mathcal{K}_0 := (K_0, +^{K_0}, \cdot^{K_0}, 0^{K_0}, 1^{K_0}, \mathcal{O}_0, (c_a^{K_0})_{a \in K})$ ein Modell von Σ. Wegen $\Sigma_H \subseteq \Sigma$ handelt es sich dann bei $(K_0, \mathcal{O}_0)$ um einen Henselsch bewerteten Körper. Weil $D(K, \mathcal{O})$ in Σ enthalten ist, handelt es sich bei der durch die Vorschrift $\mu(a) := c_a^{K_0}$ definierten Abbildung μ von K nach K_0 um eine Einbettung des bewerteten Körpers $(K, \mathcal{O})$ in den Henselsch bewerteten Körper $(K_0, \mathcal{O}_0)$.

Ist dann $(K, \mathcal{O})^H$ eine beliebige Henselsche Hülle von $(K, \mathcal{O})$ (in Ω), so läßt sich die obige Einbettung μ aufgrund der universellen Eigenschaft der Henselschen Hülle zu einer Einbettung $\tilde{\mu}$ von $(K, \mathcal{O})^H$ in $(K_0, \mathcal{O}_0)$ fortsetzen. Weil ϕ in $(K_0, (c_a^{K_0})_{a \in K})$ gilt, gilt ϕ (weil es sich bei $(\tilde{\mu}(H_{\mathcal{O}}(K)), (c_a^{K_0})_{a \in K})$ um eine Substruktur von $(K_0, (c_a^{K_0})_{a \in K})$ handelt und weil ϕ zu einer $\forall$-Aussage äquivalent ist) auch in $(\tilde{\mu}(H_{\mathcal{O}}(K)), (c_a^{K_0})_{a \in K})$ und folglich (wegen Isomorphie) auch in $(H_{\mathcal{O}}(K), (a)_{a \in K})$; daß ϕ in $(H_{\mathcal{O}}(K), (a)_{a \in K})$ gilt, ist aber gleichbedeutend damit, daß $A \setminus B$ keinen $H_{\mathcal{O}}(K)$-rationalen Punkt besitzt. $\square$

Korollar 3.2.8 *Es sei (K, W) ein mehrfach bewerteter Körper, dessen zugehöriges Mengensystem $\mathcal{V}_W$ aus clopen Teilmengen von W besteht.*

(1) Für jede K-algebraische Menge A handelt es sich bei $W(A) := \{\mathcal{O} \in W \mid A \text{ besitzt einen } H_{\mathcal{O}}(K)\text{-rationalen Punkt}\}$ um eine offene Teilmenge von W.

(2) Für jede über K definierte Varietät handelt es sich bei $W[V] := \{\mathcal{O} \in W \mid V \text{ besitzt einen einfachen } H_{\mathcal{O}}(K)\text{-rationalen Punkt}\}$ um eine offene Teilmenge von W.

Beweis: (1) folgt, weil $\emptyset$ K-algebraisch ist und weil $W(A) = W(A \setminus \emptyset)$ ist, aus Satz 3.2.7.

(2) folgt, weil die nicht-einfachen (=singulären) Punkte einer über K definierten Varietät V eine K-algebraische Menge A_{sing} bilden und weil $W[V] = W(V \setminus A_{sing})$ ist, aus Satz 3.2.7. $\square$

Wir sind nun in der Lage Satz 3.2.2 zu beweisen.

Beweis von Satz 3.2.2: Es sei also (K, W) ein Boolescher regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper, und es sei K_0 ein über dem Körper K separabel algebraischer Oberkörper von K. Wir haben zu zeigen, daß es sich für die Menge W_0 aller Bewertungsringe von K_0, die einen Bewertungsring aus W fortsetzen, bei (K_0, W_0) um einen regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körper handelt. Wir tun dies, indem wir nachweisen, daß zu jeder über dem Körper K_0 definierten Varietät V_0, die keinen K_0-rationalen Punkt besitzt, ein Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus W_0 existiert, für den V_0 keinen einfachen $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$-rationalen Punkt besitzt.

Es sei also V_0 eine über K_0 definierte Varietät des Ω^n, die keinen K_0-rationalen Punkt besitzt. Es seien $f_0, \ldots, f_{k-1}$ Polynome aus $K_0[X_0, \ldots, X_{n-1}]$, die das Verschwindungsideal $I_{K_0}(V_0)$ von V_0 in $K_0[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ erzeugen. Es sei $(L_i)_{i \in I}$ eine Aufzählung aller Zwischenkörper L von K und K_0, die sämtliche Koeffizienten der Polynome $f_0, \ldots, f_{k-1}$ enthalten und für die der Körpergrad der Erweiterung $K \leq L$ endlich ist; ein Zwischenkörper L von K und K_0, der diese Eigenschaften besitzt, ist z. B. derjenige Körper, der entsteht, wenn man die endlich vielen Koeffizienten der Polynome $f_0, \ldots, f_{k-1}$ zum Körper K hinzuadjungiert.

Es ist klar, daß es sich für jedes i aus I bei V_0 um eine absolut irreduzible L_i-Varietät handelt. Darüberhinaus ist die Varietät V_0 für jedes i aus I über dem Körper L_i definiert, denn wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, ist es ganz allgemein so, daß es sich im Falle einer über einem Körper K definierten Varietät V für jeden Unterkörper K' von K, der die Koeffizienten eines Erzeugendensystems von $I_K(V)$ enthält, bei V um eine über K' definierte Varietät handelt.

Durch die Festsetzung

$$i \leq j :\Leftrightarrow L_i \text{ ist ein Unterkörper von } L_j;\ \ i, j \in I$$

wird auf I eine partielle Ordnung definiert, von der wir uns im Hinblick auf spätere Zwecke an dieser Stelle kurz überlegen wollen, daß es für je zwei beliebige Elemente i und j aus I stets Elemente k und l aus I gibt, für die $k \leq i, j \leq l$ gilt: Sind i und j zwei Elemente aus I, so handelt es sich bei $L_i \cap L_j$ und bei $L_i \cdot L_j$ um Zwischenkörper L' und L'' von K und K_0, die sämtliche Koeffizienten der Polynome $f_0, \ldots, f_{k-1}$ enthalten, deren Körpergrad über K endlich ist und für die $L' \leq L_i, L_j \leq L''$ gilt. Sind dann k und l Elemente aus I, für die $L_k = L_i \cap L_j$ und $L_l = L_i \cdot L_j$ gilt, so ist $k \leq i, j \leq l$.

Wenn wir nun für jedes i aus I

$$W_0^i := \{\mathcal{O}_0 \mid \mathcal{O}_0 \text{ Bewertungsring von } L_i,\ \mathcal{O}_0 \cap K \in W\}$$

und

$$W_0^i[V_0] := \{\mathcal{O}_0 \in W_0^i \mid V_0 \text{ besitzt einen einfachen } H_{\mathcal{O}_0}(L_i)\text{-rationalen Punkt}\}$$

setzen und wenn wir darüberhinaus für beliebige Elemente $i \leq j$ aus I diejenige Abbildung von $W_0^j \setminus W_0^j[V_0]$ nach $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$, die jedem Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus $W_0^j \setminus W_o^j[V_0]$ den in $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$ liegenden Bewertungsring $\mathcal{O}_0 \cap L_i$ zuordnet, mit π_{ji} bezeichnen, so gilt, wenn wir uns die Mengen $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$; $i \in I$ jeweils mit der kanonischen Topologie versehen denken:

Behauptung: Bei der Familie $(W_0^i \setminus W_0^i[V_0], \pi_{ji} \mid i, j \in I, i \leq j)$ handelt es sich um ein projektives System, das aus nichtleeren Booleschen topologischen Räumen besteht.

Beweis der Behauptung: Daß es sich bei der obigen Familie um ein projektives System von topologischen Räumen handelt, läßt sich leicht nachprüfen. Es bleibt zu zeigen, daß es sich für jedes i aus I bei $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$, versehen mit der kanonischen Topologie, um einen nichtleeren Booleschen topologischen Raum handelt.

Es sei also i ein beliebiges Element aus I. Weil der mehrfach bewertete Körper (K, W) regulär abgeschlossen ist und weil es sich bei $K \leq L_i$ um eine endliche, separable Körpererweiterung handelt, ist der mehrfach bewertete Körper (L_i, W_0^i) nach Satz 3.2.1 ebenfalls regulär abgeschlossen. Wäre $W_0^i \setminus W_0^i[V_0] = \emptyset$, d.h. besäße die über L_i definierte Varietät V_0 für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}_0$ aus W_0^i einen einfachen $H_{\mathcal{O}_0}(L_i)$-rationalen Punkt, so besäße V_0 wegen der regulären Abgeschlossenheit von (L_i, W_0^i) auch einen L_i-rationalen- und somit wegen $L_i \leq K_0$ einen K_0-rationalen Punkt. Dies trifft aber auf V_0 nach Voraussetzung gerade nicht zu.

Weil es sich bei (K, W) um einen Booleschen mehrfach bewerteten Körper sowie bei $K \leq L_i$ um eine algebraische Körpererweiterung handelt, ist (L_i, W_0^i) nach Satz 2.6.12 ebenfalls ein Boolescher mehrfach bewerteter Körper. Darüberhinaus ergibt sich aus Punkt (2) des Korollars 3.2.8, angewandt auf den Booleschen mehrfach bewerteten Körper (L_i, W_0^i) und die über L_i definierte Varietät V_0, daß es sich bei $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$ um eine abgeschlossene Teilmenge von W_0^i, und somit nach Lemma 2.3.2 bei $W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$, zusammen mit der kanonischen Topologie, um einen Booleschen topologischen Raum handelt. $\diamond$

Da es sich also bei $(W_0^i \setminus W_0^i[V_0], \pi_{ji} \mid i, j \in I, i \leq j)$ um ein projektives System nichtleerer Boolescher topologischer Räume handelt, ist der zugehörige projektive Limes dieses Systems nach Satz 1.3.1 ebenfalls nicht leer; es gibt also ein Element $(\mathcal{O}_0^i)_{i \in I}$ aus $\prod_{i \in I}(W_0^i \setminus W_0^i[V_0])$, sodaß für beliebige Elemente $i \leq j$ aus I die Gleichheit $\pi_{ji}(\mathcal{O}_0^j) = \mathcal{O}_0^j \cap L_i = \mathcal{O}_0^i$ gilt.

Um an dieser Stelle weiter argumentieren zu können, benötigen wir das nun folgende Lemma über gerichtete Systeme bewerteter Körper, dessen Beweis nicht schwierig ist und den wir deshalb getrost dem Leser überlassen können:

Lemma 3.2.9 *Es sei I eine Menge, und es sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf I, für die gilt, daß zu je zwei beliebigen Elementen i und j aus I Elemente k und l aus I existieren, für die $k \leq i, j \leq l$ gilt. Weiter sei $((K_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ eine Familie bewerteter Körper, für die gilt, daß es sich für je zwei beliebige Elemente $i \leq j$ aus I bei $(K_j, \mathcal{O}_j)$ um eine Erweiterung von $(K_i, \mathcal{O}_i)$ handelt. Ist dann K_* der Körper $\bigcup_{i\in I} K_i$ und ist $\mathcal{O}_*$ der Unterring $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ von K_*, so gilt:*

(1) $\mathcal{O}_*$ ist ein Bewertungsring von K_*.

(2) Für jedes i aus I ist $\mathcal{O}_*$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_i$.

(3) Ist $(K_*, \mathcal{O}_*)^H$ eine Henselsche Hülle von $(K_*, \mathcal{O}_*)$ und ist für jedes i aus I $(K_i, \mathcal{O}_i)^H$ diejenige Henselsche Hülle von $(K_i, \mathcal{O}_i)$, für die $(K_i, \mathcal{O}_i)^H \leq (K_*, \mathcal{O}_*)^H$ gilt, so ist für beliebige Elemente $i \leq j$ aus I $(K_j, \mathcal{O}_j)^H$ eine Erweiterung von $(K_i, \mathcal{O}_i)^H$. Darüberhinaus gilt die Gleichheit $(K_*, \mathcal{O}_*)^H = (\bigcup_{i\in I} H_{\mathcal{O}_i}(K_i), \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i^H)$. □

Aus Punkt (1) dieses Lemmas ergibt sich, daß es sich bei $\mathcal{O}_0 := \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_0^i$ um einen Bewertungsring des Körpers $\bigcup_{i\in I} L_i = K_0$ handelt. Darüberhinaus gilt:

Behauptung:

(1) $\mathcal{O}_0$ liegt in W_0.

(2) V_0 besitzt keinen einfachen $H_{\mathcal{O}_0}(K_0)$-rationalen Punkt.

Beweis der Behauptung: (1) Es sei i ein beliebiges Element aus I (wie wir schon weiter oben angemerkt haben, ist $I \neq \emptyset$). Bei $\mathcal{O}_0^i$ handelt es sich um eine Fortsetzung eines Bewertungsringes $\mathcal{O}$ aus W auf den Körper L_i, und bei $\mathcal{O}_0$ handelt es sich nach Punkt (2) aus Lemma 3.2.9 um eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_0^i$ auf K_0. Es folgt, daß $\mathcal{O}_0$ den Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W fortsetzt und deshalb in W_0 liegt.

(2) Es sei $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ eine Henselsche Hülle von $(K_0, \mathcal{O}_0)$. Ist dann für jedes Element i aus I $(L_i, \mathcal{O}_0^i)^H$ diejenige Henselsche Hülle von $(L_i, \mathcal{O}_0^i)$, für die $(L_i, \mathcal{O}_0^i)^H \leq (K_0, \mathcal{O}_0)^H$ gilt, so besitzt V_0 wegen $\mathcal{O}_0^i \in W_0^i \setminus W_0^i[V_0]$ in $(L_i, \mathcal{O}_0^i)^H$ keinen einfachen Punkt. Weil nach Punkt (3) des obigen Lemmas die Gleichheit $(K_0, \mathcal{O}_0)^H = (\bigcup_{i\in I} H_{\mathcal{O}_0^i}(L_i), \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_0^{iH})$ gilt, besitzt V_0 somit auch in $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ keinen einfachen Punkt. ◇

Satz 3.2.2 ist damit vollständig bewiesen. □

Bemerkung 3.2.10 Ob die Aussagen der Sätze 3.2.1 und 3.2.2 auch für über K endliche, rein inseparable (Satz 3.2.1) bzw. für beliebige über K rein inseparable (Satz 3.2.2) und damit insgesamt für beliebige über K endliche (Satz 3.2.1) bzw. für beliebige über K algebraische (Satz 3.2.2) Oberkörper K_0 von K gelten, habe ich im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht.

3.3 Formal reelle Boolesche regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper

Dieser kurze Abschnitt beinhaltet als eine weitere Anwendung von Satz 3.2.7 eine Charakterisierung derjenigen regulär abgeschlossenen Booleschen mehrfach bewerteten Körper (K, W), die formal reell sind.

Wenn im weiteren Verlauf dieses Abschnittes von **Ordnungen** $<$ eines Körpers K die Rede ist, so sind damit stets lineare Ordnungen von K gemeint, die auf die übliche Art und Weise mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ des Körpers K verträglich sind, für die also mit $x < y$ stets auch $(x + z < y + z \ \forall z \in K)$ gilt und für die aus $x < y$ und $0 < z$ stets $x \cdot z < y \cdot z$ folgt.

Ein Paar $(K, <)$, bestehend aus einem Körper K und einer Ordnung $<$ von K, bezeichnet man als einen **angeordneten Körper**. Ist $(K, <)$ ein angeordneter Körper, so bezeichnen wir die Menge der Elemente a aus K, die bezüglich der Ordnung $<$ positiv sind, mit $P_<$.

Ein Körper K heißt **formal reell**, falls K mindestens eine Ordnung $<$ besitzt. Aus der Tatsache, daß für jede Ordnung $<$ eines Körpers K die Ungleichungskette $0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \dots$ gilt, folgt, daß die Charakteristik eines formal reellen Körpers K stets gleich 0 ist.

Ist $(K, <_K)$ ein angeordneter Körper, ist K_0 ein Oberkörper von K und ist $<_{K_0}$ eine Ordnung von K_0, die auf K mit $<_K$ übereinstimmt, so spricht man im Zusammenhang mit $<_{K_0}$ von einer **Fortsetzung** von $<_K$ auf K_0. Man sagt, daß sich die Ordnung $<_K$ von K auf K_0 fortsetzen läßt, wenn es eine Ordnung $<_{K_0}$ von K_0 gibt, die eine Fortsetzung von $<_K$ ist.

Was die Fortsetzbarkeit von Ordnungen von Körpern auf Oberkörper anbelangt, so gilt der folgende Sachverhalt:

Fakt 3.3.1 *Es sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper, und es sei K_0 ein Oberkörper von K. Dann läßt sich die Ordnung $<$ genau dann zu einer Ordnung $<_{K_0}$ von K_0 fortsetzen, wenn für alle natürlichen Zahlen n sowie für alle Elemente $a_0, \dots, a_{n-1}$ aus $P_<$ das Polynom $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X_i^2 + 1$ keine Nullstelle in K_0 besitzt.*

Einen Beweis von Fakt 3.3.1 findet man z. B. in [La2].

Satz 3.3.2 *Es sei (K, W) ein Boolescher regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper, und es sei $<$ eine Ordnung von K. Dann gibt es einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, auf dessen Henselsche Hülle $H_{\mathcal{O}}(K)$ sich die Ordnung $<$ fortsetzen läßt.*

Um Satz 3.3.2 beweisen zu können, müssen wir uns zunächst überlegen, daß es sich bei dem in Fakt 3.3.1 im Zusammenhang mit einem angeordneten Körper $(K, <)$ erwähnten Polynom $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X_i^2 + 1$ (im Falle von $n \geq 2$) um ein absolut irreduzibles Polynom handelt, dessen Nullstellen allesamt einfach sind.

Lemma 3.3.3 *Es sei n eine natürliche Zahl, die größer oder gleich 2 ist, es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, es sei $(\bar{a}) = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ ein n-Tupel von Elementen $a_0, \ldots, a_{n-1}$ aus K^*, es sei b ein beliebiges Element aus K, und es sei $f_{\bar{a};b}$ das Polynom $a_0X_0^2 + \ldots + a_{n-1}X_{n-1}^2 + b$ aus $K[X_0, \ldots, X_{n-1}]$. Dann gilt:*

(1) $f_{\bar{a};b}$ ist absolut irreduzibel.

(2) Für $b \in K^*$ sind sämtliche Nullstellen von $f_{\bar{a};b}$ (in Ω^n) einfach.

Beweis: (1): Es sei L ein beliebiger Oberkörper von K. Wir beweisen durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Unbestimmten $X_0, \ldots, X_{n-1}$ von $f_{\bar{a};b}$, daß $f_{\bar{a};b}$ über $\tilde{L}$ irreduzibel ist und verwenden hierzu das folgende, seinerseits leicht einzusehende Kriterium für Irreduzibilität von Polynomen:

Fakt 3.3.4 *Ist K ein Körper, ist f ein Polynom aus $K[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ mit $deg_{X_{n-1}} f \geq 1$ und ist f^* das Polynom aus $K[X_0, \ldots, X_{n-2}][X_{n-1}]$, das entsteht, wenn man f als Polynom in der Unbestimmten X_{n-1} mit Koeffizienten aus $K[X_0, \ldots, X_{n-2}]$ auffaßt, so ist f genau dann über K irreduzibel, wenn f^* über $K[X_0, \ldots, X_{n-2}]$ sowohl irreduzibel als auch primitiv ist.*

Der Induktionsanfang $n = 2$: Dann ist $f_{\bar{a};b} = a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + b$, und es ist $f^*_{\bar{a};b} = cX_1^2 + d$, wobei $c = a_1$ und $d = (a_0X_0^2 + b)$ ist.

Weil c und d in $\tilde{L}[X_0]$ teilerfremd sind, ist $f^*_{\bar{a};b}$ ein über $\tilde{L}[X_0]$ primitives Polynom und weil es sich bei $p := (\sqrt{a_0}X_0 - \sqrt{-b})$ um ein Primelement von $\tilde{L}[X_0]$ handelt, für das $p \nmid c$, $p \mid d$ und (wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$) $p^2 \nmid d$ gilt, ist $f^*_{\bar{a};b}$ nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium über $\tilde{L}[X_0]$ irreduzibel.

Aus diesen beiden Feststellungen folgt mit Fakt 3.3.4, daß $f_{\bar{a};b}$ über $\tilde{L}$ irreduzibel ist.

Der Induktionsschritt $n \to (n+1)$: Es ist $f_{\bar{a};b} = a_0X_0^2 + \ldots + a_{n-1}X_{n-1}^2 + a_nX_n^2 + b$, und es ist $f^*_{\bar{a};b} = cX_n^2 + d$, wobei $c = a_n$ und $d = (a_0X_0^2 + \ldots + a_{n-1}X_{n-1}^2 + b)$ ist.

Weil c und d in $\tilde{L}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ teilerfremd sind, ist $f^*_{\bar{a};b}$ über $\tilde{L}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ primitiv. Nach Induktionsvoraussetzung handelt es sich bei d um ein Primelement von $\tilde{L}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$. Weil für d darüberhinaus trivialerweise $d \nmid c$, $d \mid d$ und $d^2 \nmid d$ gilt, handelt es sich nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium bei $f^*_{\bar{a};b}$ um ein über $\tilde{L}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ irreduzibles Polynom.

Aus der Primitivität und der Irreduzibilität von $f^*_{\bar{a};b}$ über $\tilde{L}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ ergibt sich zusammen mit Fakt 3.3.4 die Irreduzibilität von $f_{\bar{a};b}$ über $\tilde{L}$.

(2): Ist $b \in K^*$ und ist $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ eine Nullstelle von $f_{\bar{a};b}$, so gibt es ein i aus $\{0, \ldots n-1\}$, für das $x_i \neq 0$ ist; für dieses i ist dann (wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$) $f'_{\bar{a};b;X_i}(\bar{x}) = 2a_ix_i \neq 0$. □

Bemerkung 3.3.5 Falls $\mathrm{char}(K) = 2$ ist, so handelt es sich bei $f_{\bar{a};b} = (\sqrt{a_0}X_0 + \ldots + \sqrt{a_{n-1}}X_{n-1} + \sqrt{b})^2$ um eine nichttriviale Zerlegung von $f_{\bar{a};b}$ in $\tilde{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$, sodaß $f_{\bar{a};b}$ in diesem Fall nicht absolut irreduzibel ist.

Wir sind nun in der Lage, Satz 3.3.2 zu beweisen:

Beweis von Satz 3.3.2: Wir nehmen an, daß sich die Ordnung $<$ für keinen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W auf $H_{\mathcal{O}}(K)$ fortsetzen läßt. Nach Fakt 3.3.1 gibt es dann für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W eine (positive) natürliche Zahl $n_{\mathcal{O}}$, ein $n_{\mathcal{O}}$-Tupel $(\bar{a}^{\mathcal{O}}) = (a_0^{\mathcal{O}}, \ldots, a_{n_{\mathcal{O}}-1}^{\mathcal{O}})$ aus $P_<^{n_{\mathcal{O}}}$ und ein $n_{\mathcal{O}}$-Tupel $(\bar{\alpha}^{\mathcal{O}^H}) = (\alpha_0^{\mathcal{O}^H}, \ldots, \alpha_{n_{\mathcal{O}}-1}^{\mathcal{O}^H})$ aus $H_{\mathcal{O}}(K)^{n_{\mathcal{O}}}$, sodaß es sich bei $(\bar{\alpha}^{\mathcal{O}^H})$ um eine Nullstelle des Polynoms $f_{\bar{a}^{\mathcal{O}};1}$ in $H_{\mathcal{O}}(K)$ handelt.

Bezeichnen wir für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W das Polynom $f_{\bar{a}^{\mathcal{O}};1}$ von nun an kurz mit $f_{\mathcal{O}}$, und setzen wir für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W

$$W(f_{\mathcal{O}}) := \{\mathcal{O}' \in W \mid f_{\mathcal{O}} \text{ besitzt in } H_{\mathcal{O}'}(K) \text{ eine Nullstelle}\},$$

so liegt $\mathcal{O}$ in $W(f_{\mathcal{O}})$, und wir wissen darüberhinaus, daß es sich bei $W(f_{\mathcal{O}})$ um eine offene Teilmenge von W handelt (s. Korollar 3.2.8). Es folgt, daß es sich bei $(W(f_{\mathcal{O}}))_{\mathcal{O}\in W}$ um eine Überdeckung von W handelt, die aus offenen Teilmengen von W besteht. Wegen der Kompaktheit von W gibt es dann eine natürliche Zahl k und Bewertungsringe $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{k-1}$ aus W, für die $W = W(f_{\mathcal{O}_0}) \cup \ldots \cup W(f_{\mathcal{O}_{k-1}})$ gilt. Setzen wir nun $n := n_{\mathcal{O}_0} + \ldots + n_{\mathcal{O}_{k-1}} + 2$ und bezeichnen wir das n-Tupel

$$(a_0^{\mathcal{O}_0}, \ldots, a_{n_{\mathcal{O}_0}-1}^{\mathcal{O}_0}, \ldots, a_0^{\mathcal{O}_{k-1}}, \ldots, a_{n_{\mathcal{O}_{k-1}}}^{\mathcal{O}_{k-1}}, 1, 1)$$

aus $P_<^n$ kurz mit $(\bar{a})$, so sieht man leicht, daß es sich für jedes i aus $\{0, \ldots, k-1\}$ sowie für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus $W(f_{\mathcal{O}_i})$ bei demjenigen n-Tupel aus $H_{\mathcal{O}}(K)^n$, das auf den Positionen $n_{\mathcal{O}_0}+\ldots+n_{\mathcal{O}_{i-1}}$ bis $n_{\mathcal{O}_0}+\ldots+n_{\mathcal{O}_{i-1}}+n_{\mathcal{O}_i}-1$ mit dem $n_{\mathcal{O}_i}$-Tupel $(\alpha_0^{\mathcal{O}_i^H}, \ldots, \alpha_{n_{\mathcal{O}_i}-1}^{\mathcal{O}_i^H})$ übereinstimmt und dessen sonstige Einträge allesamt gleich 0 sind, um eine Nullstelle des Polynoms $f_{\bar{a};1}$ handelt.

Weil W von den Mengen $W(f_{\mathcal{O}_0}), \ldots, W(f_{\mathcal{O}_{k-1}})$ überdeckt wird, gilt daher, daß das wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ und $n \geq 2$ nach (1) aus Lemma 3.3.3 absolut irreduzible Polynom $f_{\bar{a};1}$ für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W eine nach (2) aus Lemma 3.3.3 einfache Nullstelle in $H_{\mathcal{O}}(K)$ besitzt.

Weil der mehrfach bewertete Körper (K, W) regulär abgeschlossen ist, folgt hieraus mit Korollar 3.1.13, daß $f_{\bar{a};1}$ eine Nullstelle in K besitzt. Dies widerspricht jedoch Fakt 3.3.1, angewandt auf den Spezialfall $K_0 = K$.

Unsere Anfangsannahme war also falsch, und demnach gibt es einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, auf dessen Henselsche Hülle $H_{\mathcal{O}}(K)$ sich die Ordnung $<$ fortsetzen läßt. □

Korollar 3.3.6 *Für einen Booleschen regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körper (K, W) sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) K ist formal reell.

(2) Es gibt einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, dessen Henselsche Hülle $H_{\mathcal{O}}(K)$ formal reell ist.

(3) *Es gibt einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W, dessen Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}}$ formal reell ist.*

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2) ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.3.2.

(2)$\Rightarrow$(1): Ist $<$ eine Ordnung auf $H_{\mathcal{O}}(K)$, so handelt es sich bei der Einschränkung von $<$ auf K um eine Ordnung auf K.

In [Pr2] wird bewiesen, daß ein Henselsch bewerteter Körper $(K, \mathcal{O})$ genau dann formal reell ist, wenn sein Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}}$ es ist. Hieraus ergibt sich, unter Verwendung der Tatsache, daß für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ und dessen Henselscher Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ die beiden Restklassenkörper $k_{\mathcal{O}}$ und $k_{\mathcal{O}^H}$ übereinstimmen (s. Fakt 1.1.4), die Äquivalenz von (2) und (3). $\square$

3.4 Boolesche regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper mit BAP

In diesem Abschnitt beweisen wir eine vielleicht interessante Eigenschaft solcher Körper K, die bezüglich einer unabhängigen Booleschen Menge von Bewertungsringen von K regulär abgeschlossen sind. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß wir eine Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K unabhängig nannten, falls je zwei verschiedene Bewertungsringe aus W unabhängig sind und daß eine Boolesche Menge W von Bewertungsringen eines Körpers K nach Satz 2.5.3 genau dann unabhängig ist, wenn der mehrfach bewertete Körper (K, W) die in diesem Satz angegebene sog. Block-Approximationseigenschaft (BAP) besitzt.

Ist $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, so sagt man, K liege **dicht** in $(K, \mathcal{O})^H$, falls es sich für eine bzw. für jede Henselsche Hülle $(K, \mathcal{O})^H$ von $(K, \mathcal{O})$ bei K um eine bezüglich der von $\mathcal{O}^H$ auf $H_{\mathcal{O}}(K)$ induzierten Topologie (s. [En]) dichte Teilmenge von $H_{\mathcal{O}}(K)$ handelt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß zu jedem Element α aus $H_{\mathcal{O}}(K)$ sowie zu jedem Element γ der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}^H} = \Gamma_{\mathcal{O}}$ ein Element a aus K existiert, für das $v_{\mathcal{O}^H}(a - \alpha) > \gamma$ ist.

Diejenigen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$, für die K dicht in $(K, \mathcal{O})^H$ liegt, lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

Fakt 3.4.1 *Für einen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) K liegt dicht in $(K, \mathcal{O})^H$.

(2) Für jedes normierte Polynom f aus $\mathcal{O}[X]$ ohne mehrfache Nullstellen, für das ein Element a aus $\mathcal{O}$ mit $f(a) \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ und $f'(a) \in \mathcal{O}^*$ existiert, gibt es zu jedem Element γ aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ein Element b aus K, für das $v_{\mathcal{O}}(f(b)) > \gamma$ ist.

Beweise der obigen sowie einiger weiterer ähnlicher Charakterisierungen derjenigen bewerteten Körper $(K, \mathcal{O})$, für die K in $(K, \mathcal{O})^H$ dicht liegt, findet man in [Er2], in [Er3] und in [Er5].

Satz 3.4.2 *Ist K ein Körper, der bezüglich einer unabhängigen Booleschen Menge W von Bewertungsringen von K regulär abgeschlossen ist, so liegt K für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}$ aus W dicht in $(K, \mathcal{O})^H$.*

Es erweist sich aus Gründen der Übersichtlichkeit als zweckmäßig, den Beweis von Satz 3.4.2 in die Beweise der folgenden beiden Lemmata aufzuspalten:

Lemma 3.4.3 *Jeder regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper (K, W) besitzt die folgende Eigenschaft (*):*

Ist $g \in R_W[X]$ ein normiertes Polynom, ist r ein Element aus R_W, für das $g(r)$ in I_W und $g'(r)$ in R_W^* liegt und ist s ein beliebiges Element aus $I_W \setminus \{0\}$, so besitzt das Polynom $g(X)g(Y) - s^2 \in R_W[X,Y]$ eine Nullstelle in K.

Lemma 3.4.4 *Ist W eine unabhängige Boolesche Menge von Bewertungsringen eines Körpers K und besitzt (K,W) die Eigenschaft (*), so liegt K für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}$ aus W dicht in $(K,\mathcal{O})^H$.*

Beweis von Lemma 3.4.3: Ist g aus $R_W[X]$ ein normiertes Polynom, ist r ein Element aus R_W, für das $g(r)$ in I_W und $g'(r)$ in R_W^* liegt, ist s ein beliebiges Element aus $I_W \setminus \{0\}$ und bezeichnen wir das Polynom $g(X)g(Y) - s^2$ aus $R_W[X,Y]$ von nun an mit f, so gilt:

Behauptung 1; f ist absolut irreduzibel.

Beweis von Behauptung 1: Weil $g'(r) \neq 0$ ist, handelt es sich bei r um eine einfache Nullstelle von g. Die absolute Irreduzibilität von f ergibt sich deshalb unmittelbar aus folgendem wohlbekannten Kriterium für absolute Irreduzibilität von Polynomen:

Fakt 3.4.5 *Ist K ein Körper, sind f_0 aus $K[X]$ und f_1 aus $K[Y]$ zwei nichtkonstante Polynome, ist a ein beliebiges Element aus K^* und besitzt f_0 mindestens eine einfache Nullstelle, so ist das Polynom $f_0(X)f_1(Y) - a$ aus $K[X,Y]$ absolut irreduzibel.*

Einen Beweis dieses Kriteriums findet man z.B. in [Er3] oder auch in [He-Pr]. $\diamond$

Behauptung 2: Für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W besitzt f in $H_{\mathcal{O}}(K)$ eine einfache Nullstelle.

Beweis von Behauptung 2: Es sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W, und es sei $h(X)$ das Polynom $g(X) + s$ aus $R_W[X]$. Wegen $R_W \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^H$, $I_W \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$ und $R_W^* \subseteq \mathcal{O}^* \subseteq (\mathcal{O}^H)^*$ handelt es sich bei s und $g(r)$ um Elemente aus $\mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$, bei $g'(r)$ um ein Element aus $(\mathcal{O}^H)^*$ sowie bei g und h um Polynome aus $\mathcal{O}^H[X]$. Weil $g(r)$ und s in $\mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$ liegen, ist auch $h(r) = g(r) + s$ in $\mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$ enthalten und weil $g'(r)$ nicht in $\mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$ liegt, ist auch $h'(r) = g'(r)$ nicht in $\mathcal{M}(\mathcal{O}^H)$ enthalten. Das Polynom h aus $\mathcal{O}^H[X]$ und das Element r aus $\mathcal{O}^H$ erfüllen somit die Voraussetzungen von Hensels Lemma (Fakt 1.1.2), sodaß also h in $\mathcal{O}^H$ eine Nullstelle α besitzt, für die $\bar{\alpha} = \bar{r}$ gilt. Aus $\bar{\alpha} = \bar{r}$ folgt, daß $\bar{h}'(\bar{\alpha}) = \bar{h}'(\bar{r}) \neq 0$ und daher insbesondere auch $h'(\alpha) \neq 0$ gilt. Es ist dann

$$f(\alpha,\alpha) = g(\alpha)g(\alpha) - s^2 = (g(\alpha) - s)(g(\alpha) + s) = (g(\alpha) - s)h(\alpha) = (g(\alpha) - s) \cdot 0 = 0,$$

und es ist (wegen $g(\alpha) = -s \neq 0$ und wegen $g'(\alpha) = h'(\alpha) \neq 0$)

$$f'_Y(\alpha,\alpha) = g(\alpha)g'(\alpha) \neq 0. \diamond$$

Weil f nach Behauptung 1 absolut irreduzibel ist und nach Behauptung 2 für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W in $H_{\mathcal{O}}(K)$ eine einfache Nullstelle besitzt, besitzt f wegen der regulären Abgeschlossenheit von (K, W) eine Nullstelle in K (s. Korollar 3.1.13). $\square$

Für den Beweis von Lemma 3.4.4 benötigen wir die folgende Stetigkeitsaussage für Polynome über bewerteten Körpern:

Lemma 3.4.6 *Es sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, es seien $f = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i X^i$ zwei Polynome aus $\mathcal{O}[X]$, es seien a und b Elemente aus $\mathcal{O}$, und es sei γ ein Element aus $\Gamma_{\mathcal{O}}$, für das $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) > \gamma$; $i = 0, \ldots, n$ und $v_{\mathcal{O}}(b - a) > \gamma$ gilt.*

(1) Falls $v_{\mathcal{O}}(f(a)) > \gamma$ ist, so ist auch $v_{\mathcal{O}}(g(b)) > \gamma$.

(2) Falls $v_{\mathcal{O}}(f(a)) = \gamma$ ist, so ist auch $v_{\mathcal{O}}(g(b)) = \gamma$.

Beweis: Es ist $v_{\mathcal{O}}(g(b)) = v_{\mathcal{O}}((g(b) - g(a)) + (g(a) - f(a)) + f(a))$, und wir zeigen jetzt, daß sowohl $v_{\mathcal{O}}(g(b) - g(a))$ als auch $v_{\mathcal{O}}(g(a) - f(a))$ größer als γ ist:

Um einzusehen, daß $v_{\mathcal{O}}(g(b) - g(a))$ größer als γ ist, betrachten wir das Polynom $g(X) - g(Y)$ aus $\mathcal{O}[X, Y]$ und schreiben dieses in der Form $(X - Y)h(X, Y)$ als Produkt des Polynoms $(X - Y)$ aus $\mathcal{O}[X, Y]$ und eines gewissen Polynoms h aus $\mathcal{O}[X, Y]$. Weil h in $\mathcal{O}[X, Y]$ liegt und weil die Elemente a, b nach Voraussetzung in $\mathcal{O}$ liegen, liegt $h(a, b)$ in $\mathcal{O}$ bzw. ist $v_{\mathcal{O}}(h(a, b)) \geq 0$. Weil darüberhinaus nach Voraussetzung $v_{\mathcal{O}}(b - a) > \gamma$ ist, ist insgesamt $v_{\mathcal{O}}(g(b) - g(a)) = v_{\mathcal{O}}((b - a)h(a, b)) = v_{\mathcal{O}}(b - a) + v_{\mathcal{O}}(h(a, b)) > \gamma$.

Daß das Element $v_{\mathcal{O}}(g(a) - f(a))$ größer als γ ist, ergibt sich aus der Ungleichungskette $v_{\mathcal{O}}(g(a) - f(a)) = v_{\mathcal{O}}(\sum_{i=0}^{n}(g_i - f_i)a^i) \geq \min\{v_{\mathcal{O}}((g_i - f_i)a^i) \mid i = 0, \ldots n\}$ und der Tatsache, daß für jedes i aus $\{0, \ldots, n\}$ wegen $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) > \gamma$ und wegen $v_{\mathcal{O}}(a) \geq 0$ das Element $v_{\mathcal{O}}((g_i - f_i)a^i) = v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) + i v_{\mathcal{O}}(a)$ größer als γ ist.

(1): Falls $v_{\mathcal{O}}(f(a)) > \gamma$ ist, so ist $v_{\mathcal{O}}(g(b)) = v_{\mathcal{O}}((g(b) - g(a)) + (g(a) - f(a)) + f(a)) \geq \min\{v_{\mathcal{O}}(g(b) - g(a)), v_{\mathcal{O}}(g(a) - f(a)), v_{\mathcal{O}}(f(a))\} > \gamma$.

(2): Falls $v_{\mathcal{O}}(f(a)) = \gamma$ ist, so ist $v_{\mathcal{O}}(g(b)) = v_{\mathcal{O}}((g(b) - g(a)) + (g(a) - f(a)) + f(a)) = \min\{v_{\mathcal{O}}(g(b) - g(a)), v_{\mathcal{O}}(g(a) - f(a)), v_{\mathcal{O}}(f(a))\} = \gamma$. $\square$

Beweis von Lemma 3.4.4: Es sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Bewertungsring aus W. Nach Fakt 3.4.1 haben wir zu zeigen, daß für jedes normierte Polynom $f = X^n + f_{n-1}X^{n-1} + \ldots + f_0$ aus $\mathcal{O}[X]$, das keine mehrfachen Nullstellen besitzt und für welches ein Element a aus $\mathcal{O}$ mit $f(a) \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ und $f'(a) \in \mathcal{O}^*$ existiert, zu jedem Element γ der Wertegruppe $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ein Element b_γ aus K existiert, für das $v_{\mathcal{O}}(f(b_\gamma)) > \gamma$ ist.

Wir können und werden im Folgenden annehmen, daß $\gamma \geq 0$ ist.

Besitzt f eine Nullstelle b in K, so ist $v_{\mathcal{O}}(f(b)) = v_{\mathcal{O}}(0) = \infty > \gamma$, und wir sind fertig.

Besitzt f keine Nullstelle in K, so zeigen wir zunächst die folgende

Behauptung: Es gibt ein normiertes Polynom $g = X^n + g_{n-1}X^{n-1} + \ldots + g_0$ aus $R_W[X]$, ein Element r aus R_W und ein Element s aus $I_W \setminus \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $g(r)$ liegt in I_W, und $g'(r)$ liegt in R_W^*.

(2) Für alle i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ ist $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) > \gamma$.

(3) Es ist $v_{\mathcal{O}}(s) > \gamma$.

Beweis der Behauptung: Es sei b ein beliebiges Element aus $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$, für das $v_{\mathcal{O}}(b) > \gamma$ ist.[2]

Weil die Koeffizienten $f_0, \ldots, f_{n-1}$ des Polynoms f und das Element a in $\mathcal{O}$ liegen, weil $f(a)$ und b in $\mathcal{M}(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$ liegen und weil $f'(a)$ in $\mathcal{O}^*$ liegt, ist der Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W in der Teilmenge

$$V_0 := (\bigcap_{i=0}^{n-1} V_{f_i}) \cap V_a \cap (W \setminus V_{1/f(a)}) \cap (W \setminus V_{1/b}) \cap V_{f'(a)} \cap V_{1/f'(a)}$$

von W enthalten. Weil W Boolesch ist, handelt es sich bei V_0 um eine Menge aus $\mathcal{V}_W$und daher um eine clopen Teilmenge von W; somit ist $[V_0, W \setminus V_0]$ eine Partition von W, die aus clopen Teilmengen von W besteht. Setzen wir dann $\epsilon_0 := f(a) \cdot b \neq 0$ und setzen wir ϵ_1 gleich einem beliebigen Element aus $I_W \setminus \{0\}$[3], so gibt es, weil (K, W) die BAP-Eigenschaft besitzt, Elemente $g_0, \ldots, g_{n-1},\ r, s$ aus K, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) Für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}'$ aus V_0 ist

   (a) $v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0);\ i = 0, \ldots, n-1$

   (b) $v_{\mathcal{O}'}(r - a) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0)$

   (c) $v_{\mathcal{O}'}(s - b) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0)$

(2) Für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}'$ aus $W \setminus V_0$ ist

   (a) $v_{\mathcal{O}'}(g_0) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1)$

   (b) $v_{\mathcal{O}'}(g_i - 1) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1);\ i = 1, \ldots .n-1$

   (c) $v_{\mathcal{O}'}(r) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1)$

[2] Man beachte: Weil W Boolesch ist, ist $\mathcal{O}$ nach Korollar 2.2.13 ein nichttrivialer Bewertungsring von K.

[3] Man beachte: Weil W Boolesch ist, ist I_W nach Korollar 2.2.13 ungleich $\{0\}$.

(d) $v_{\mathcal{O}'}(s) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1)$

Wir zeigen nun in einer Serie von kleinen Behauptungen, daß das Polynom $g = X^n + g_{n-1}X^{n-1} + \ldots + g_0$ sowie die Elemente r und s die in der obigen Behauptung geforderten Eigenschaften besitzen:

Behauptung 1: Für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}'$ aus W liegen die Elemente $g_0, \ldots,$ g_{n-1}, r in $\mathcal{O}'$ und liegt das Element s in $\mathcal{M}(\mathcal{O}')$; mit anderen Worten: g ist ein Polynom aus $R_W[X]$, r ist ein Element aus R_W, und s ist ein Element aus I_W.

Beweis von Behauptung 1: Es sei i aus $\{0, \ldots, n-1\}$, und es sei $\mathcal{O}'$ ein beliebiger Bewertungsring aus W.
Falls $\mathcal{O}'$ in V_0 enthalten ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

(1) $v_{\mathcal{O}'}(f_i) \geq 0$

(2) $v_{\mathcal{O}'}(a) \geq 0$

(3) $v_{\mathcal{O}'}(b) > 0$

(4) $v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0$

(5) $v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0$

(6) $v_{\mathcal{O}'}(r - a) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0$

(7) $v_{\mathcal{O}'}(s - b) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0$

Aus (1) und (5) folgt

$$v_{\mathcal{O}'}(g_i) = v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i + f_i) \geq \min\{v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i), v_{\mathcal{O}'}(f_i)\} \geq 0,$$

aus (2) und (6) folgt

$$v_{\mathcal{O}'}(r) = v_{\mathcal{O}'}(r - a + a) \geq \min\{v_{\mathcal{O}'}(r - a), v_{\mathcal{O}'}(a)\} \geq 0,$$

und aus (3) und (7) folgt

$$v_{\mathcal{O}'}(s) = v_{\mathcal{O}'}(s - b + b) \geq \min\{v_{\mathcal{O}'}(s - b), v_{\mathcal{O}'}(b)\} > 0,$$

sodaß also die Elemente g_i und r in $\mathcal{O}'$ liegen und das Element s in $\mathcal{M}(\mathcal{O}')$ enthalten ist.
Falls $\mathcal{O}'$ in $W \setminus V_0$ enthalten ist, so ergibt sich $g_i, r \in \mathcal{O}'$ und $s \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ unmittelbar aus der Definition der Elemente g_i, r, s und ϵ_1. $\dashv$

Behauptung 2: Für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}'$ aus W liegt $g(r)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$; mit anderen Worten: $g(r)$ liegt in I_W.

Beweis von Behauptung 2: Es sei $\mathcal{O}'$ ein beliebiger Bewertungsring aus W.
Falls $\mathcal{O}'$ in V_0 enthalten ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

(1) $v_{\mathcal{O}'}(a), v_{\mathcal{O}'}(r) \geq 0;\ v_{\mathcal{O}'}(f_i), v_{\mathcal{O}'}(g_i) \geq 0\ \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\}$

(2) $v_{\mathcal{O}'}(f(a)) > 0$

(3) $v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > v_{\mathcal{O}'}(f(a))$

(4) $v_{\mathcal{O}'}(r-a) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > v_{\mathcal{O}'}(f(a))$

(5) $v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > v_{\mathcal{O}'}(f(a));\ i = 0, \ldots, n-1$

Aus (1), (4) und (5) folgt mit Lemma 3.4.6, daß $v_{\mathcal{O}'}(g(r)) = v_{\mathcal{O}'}(f(a))$ ist. Hieraus folgt zusammen mit (2), daß $v_{\mathcal{O}'}(g(r)) > 0$ ist bzw. daß $g(r)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ liegt.
Falls $\mathcal{O}'$ in $W \setminus V_0$ enthalten ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

(1) $v_{\mathcal{O}'}(r) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1) > 0$

(2) $v_{\mathcal{O}'}(g_0) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1) > 0$

(3) $v_{\mathcal{O}'}(g_i) = 0;\ i = 1, \ldots, n-1$

Aus (1) und (3) folgt, daß $v_{\mathcal{O}'}(r^n + g_{n-1}r^{n-1} + \ldots + g_1 r) > 0$ ist, woraus sich zusammen mit (2) $v_{\mathcal{O}'}(g(r)) = v_{\mathcal{O}'}((r^n + \ldots + g_1 r) + g_0) \geq \min\{v_{\mathcal{O}'}(r^n + \ldots + g_1 r), v_{\mathcal{O}'}(g_0)\} > 0$ ergibt. $\dashv$

Behauptung 3: Für alle Bewertungsringe $\mathcal{O}'$ aus W liegt $g'(r)$ in $(\mathcal{O}')^*$; mit anderen Worten: $g'(r)$ liegt in R_W^*.

Beweis von Behauptung 3: Es ist $f'(X) = nX^{n-1} + (n-1)f_{n-1}X^{n-2} + \ldots + f_1$ und es ist $g'(X) = nX^{n-1} + (n-1)g_{n-1}X^{n-2} + \ldots + g_1$.
Es sei $\mathcal{O}'$ ein beliebiger Bewertungsring aus W.
Falls $\mathcal{O}'$ in V_0 enthalten ist, so gelten die Ungleichungen

(1) $v_{\mathcal{O}'}(a), v_{\mathcal{O}'}(r) \geq 0;\ v_{\mathcal{O}'}(if_i), v_{\mathcal{O}'}(ig_i) \geq 0\ \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\}$

(2) $v_{\mathcal{O}'}(f'(a)) = 0$

(3) $v_{\mathcal{O}'}(r-a) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0 = v_{\mathcal{O}'}(f'(a))$

(4) $v_{\mathcal{O}'}(ig_i - if_i) = v_{\mathcal{O}'}(i(g_i - f_i)) \geq v_{\mathcal{O}'}(g_i - f_i) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_0) > 0 = v_{\mathcal{O}}(f'(a));\ i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Aus (1), (3) und (4) folgt zusammen mit Lemma 3.4.6, daß $v_{\mathcal{O}'}(g'(r)) = v_{\mathcal{O}'}(f'(a))$ ist. Hieraus folgt zusammen mit (2), daß $v_{\mathcal{O}'}(g'(r)) = 0$ ist bzw. daß $g'(r)$ in $(\mathcal{O}')^*$ liegt.

Falls $\mathcal{O}'$ in $W \setminus V_0$ enthalten ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

(1) $v_{\mathcal{O}'}(r) \geq v_{\mathcal{O}'}(\epsilon_1) > 0$

(2) $v_{\mathcal{O}'}(g_i) = 0;\ i = 1, \ldots, n-1$

Aus (1) und (2) folgt, daß $v_{\mathcal{O}'}(nr^{n-1} + (n-1)g_{n-1}r^{n-2} + \ldots + g_2 r) > 0$ ist. Hieraus ergibt sich mit (2), daß $v_{\mathcal{O}'}(g'(r)) = v_{\mathcal{O}'}(nr^{n-1} + \ldots + g_2 r + g_1) = \min\{v_{\mathcal{O}'}(nr^{n-1} + \ldots + g_2 r), v_{\mathcal{O}'}(g_1)\} = v_{\mathcal{O}'}(g_1) = 0$ ist bzw. daß $g'(r)$ in $(\mathcal{O}')^*$ liegt. $\dashv$

Behauptung 4:

(1) Für jedes i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ ist $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) > \gamma$.

(2) Es ist $s \neq 0$, und es ist $v_{\mathcal{O}}(s) > \gamma$.

Beweis von Behauptung 4: (1): Weil $\mathcal{O}$ in V_0 enthalten ist, ist $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) \geq v_{\mathcal{O}}(\epsilon_0) > v_{\mathcal{O}}(b) > \gamma$.

(2): Weil $\mathcal{O}$ in V_0 enthalten ist, ist $v_{\mathcal{O}}(s - b) \geq v_{\mathcal{O}}(\epsilon_0) > v_{\mathcal{O}}(b)$. Hieraus folgt, daß $v_{\mathcal{O}}(s) = v_{\mathcal{O}}(s - b + b) = v_{\mathcal{O}}(b)$ ist. Weil darüberhinaus $\gamma < v_{\mathcal{O}}(b) < \infty$ ist, gilt (2). $\dashv$

Die obige Behauptung ist damit vollständig bewiesen. $\diamond$

Es seien nun g, r und s Objekte mit den in der obigen Behauptung angegebenen Eigenschaften.

Weil (K, W) nach Voraussetzung die Eigenschaft (*) besitzt, besitzt das Polynom $g(X)g(Y) - s^2$ aus $R_W[X, Y]$ eine Nullstelle in K; es gibt also Elemente c und d aus K, für die $g(c)g(d) - s^2 = 0$ bzw. für die $g(c)g(d) = s^2$ ist.

Wenden wir uns nun wieder unserem Ausgangsbewertungsring $\mathcal{O}$ zu, so folgt aus $g(c)g(d) = s^2$, daß $v_{\mathcal{O}}(g(c)) + v_{\mathcal{O}}(g(d)) = v_{\mathcal{O}}(g(c)g(d)) = v_{\mathcal{O}}(s^2) = 2v_{\mathcal{O}}(s) > 2\gamma$ ist, woraus sich ergibt, daß mindestens eines der beiden Elemente $v_{\mathcal{O}}(g(c))$ und $v_{\mathcal{O}}(g(d))$ aus $\Gamma_{\mathcal{O}} \cup \{\infty\}$ größer als γ ist. Je nachdem, ob dies auf $v_{\mathcal{O}}(g(c))$ oder auf $v_{\mathcal{O}}(g(d))$ zutrifft, liegt dann c oder d in $\mathcal{O}$[4] und ist somit wegen $v_{\mathcal{O}}(g_i - f_i) > \gamma$; $i = 0, \ldots, n-1$ nach Lemma 3.4.6 $v_{\mathcal{O}}(f(c))$ oder $v_{\mathcal{O}}(f(d)) > \gamma$, und wir haben in jedem Fall ein Element b_γ aus K bzw. aus $\mathcal{O}$ gefunden, für das $v_{\mathcal{O}}(f(b_\gamma)) > \gamma$ ist. $\square$

[4]Würde c bzw. d nicht in $\mathcal{O}$ liegen, d.h wäre $v_{\mathcal{O}}(c)$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(d) < 0$, so wäre, weil es sich bei g um ein normiertes Polynom aus $\mathcal{O}[X]$ handelt, auch $v_{\mathcal{O}}(g(c))$ bzw. $v_{\mathcal{O}}(g(d)) < 0$. Tatsächlich ist aber $v_{\mathcal{O}}(g(c))/v_{\mathcal{O}}(g(d)) > \gamma \geq 0$.

3.5 Existenz regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper

In diesem letzten Abschnitt der Arbeit beschäftigen wir uns mit zwei Existenzsätzen für regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper.

Wir bezeichnen den mehrfach bewerteten Körper (K_*, W_*) als eine **Erweiterung** des mehrfach bewerteten Körpers (K, W), falls gilt:

(1) K_* ist ein Oberkörper von K.

(2) W_* besteht aus Fortsetzungen von Bewertungsringen aus W.

(3) Die Abbildung $\pi : W_* \to W$, die jedem Bewertungsring $\mathcal{O}_*$ aus W_* den Bewertungsring $\mathcal{O}_* \cap K$, dessen Fortsetzung $\mathcal{O}_*$ ist, zuordnet, ist surjektiv.

(3) bedeutet hierbei nichts anderes, als daß W_* für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W mindestens einen Bewertungsring $\mathcal{O}_*$ von K_* enthält, der $\mathcal{O}$ fortsetzt.

Satz 3.5.1 *Zu jedem mehrfach bewerteten Körper (K, W), dessen zugehörige Menge W aus nichttrivialen Bewertungsringen von K besteht, gibt es eine Erweiterung $(\bar{K}, \bar{W})$, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq \bar{K}$ ist regulär.

(2) Die Abbildung $\pi : \bar{W} \to W$, die jedem Bewertunsring $\bar{\mathcal{O}}$ aus $\bar{W}$ den Bewertungsring $\bar{\mathcal{O}} \cap K$ aus W zuordnet, ist bijektiv.

(3) Für jeden Bewertungsring $\bar{\mathcal{O}}$ aus $\bar{W}$ ist $(K, \bar{\mathcal{O}} \cap K)^H$ in $(\bar{K}, \bar{\mathcal{O}})^H$ existenziell abgeschlossen.

(4) $\bar{W}$ ist unabhängig.

(5) $(\bar{K}, \bar{W})$ ist regulär abgeschlossen.

Beweis: Es sei also (K, W) ein beliebiger mehrfach bewerteter Körper, und es sei $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Aufzählung von W, in der jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W genau einmal vorkommt. Es sei $\mathcal{L}$ diejenige Sprache, die neben den Symbolen $+, \cdot, 0$ und 1 der Sprache $\mathcal{L}_0$ der Körper zusätzlich für jedes i aus I ein einstelliges Relationssymbol R_i enthält, und es sei $\mathfrak{K}$ die Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen

$$\mathcal{K}' = (K', +^{K'}, \cdot^{K'}, 0^{K'}, 1^{K'}, (\mathcal{O}'_i)_{i \in I}),$$

für die gilt, daß es sich bei $(K', +^{K'}, \cdot^{K'}, 0^{K'}, 1^{K'})$ um einen über K regulären Oberkörper von K sowie für jedes i aus I bei $\mathcal{O}'_i$ um einen Bewertungsring von K' handelt, der $\mathcal{O}_i$ fortsetzt und für den $(K_i, \mathcal{O}_i)^H$ in $(K', \mathcal{O}'_i)^H$ existenziell abgeschlossen ist. Dann ist $\mathfrak{K}$, wie sich leicht nachprüfen läßt, (nichtleer und) induktiv.

Weil $\mathfrak{K}$ nichtleer und induktiv ist, gibt es eine $\mathcal{L}$-Struktur

$$\bar{\mathcal{K}} := (\bar{K}, +^{\bar{K}}, \cdot^{\bar{K}}, 0^{\bar{K}}, 1^{\bar{K}}, (\bar{\mathcal{O}}_i)_{i\in I})$$

aus $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{K}$ existenziell abgeschlossen ist (s. Abschnitt 1.4). Aus der Tatsache, daß $\bar{\mathcal{K}}$ in $\mathfrak{K}$ liegt, folgt insbesondere, daß es sich bei $\bar{K}$ um einen Oberkörper von K sowie für jedes i aus I bei $\bar{\mathcal{O}}_i$ um einen Bewertungsring von $\bar{K}$, der $\mathcal{O}_i$ fortsetzt, handelt. Hieraus ergibt sich, daß es sich, wenn wir $\bar{W} := \{\bar{\mathcal{O}}_i \mid i \in I\}$ setzen, beim mehrfach bewerteten Körper $(\bar{K}, \bar{W})$ um eine Erweiterung von (K, W) handelt. Von dieser Erweiterung $(\bar{K}, \bar{W})$ werden wir nun zeigen, daß sie die oben angegebenen Eigenschaften (1) bis (5) besitzt:

(1): Daß $\bar{K}$ über K regulär ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß $\bar{\mathcal{K}}$ in $\mathfrak{K}$ liegt.

(2): Weil es sich bei $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ um eine Aufzählung von W handelt, ist π surjektiv, und weil in dieser Aufzählung jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus W nur einmal vorkommt, ist π injektiv.

(3) folgt genau wie (1) unmittelbar aus der Tatsache, daß $\bar{\mathcal{K}}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

(4): Um die Unabhängigkeit von $\bar{W}$ nachweisen zu können, benötigen wir den folgenden

Fakt 3.5.2 *Ist $K \leq K_0$ eine rein transzendente Körpererweiterung, ist T eine Transzendenzbasis von K_0 über K, ist $\mathcal{O}$ ein nichttrivialer Bewertungsring von K und ist $\mathcal{O}_0$ die in Satz 2.4.12 beschriebene, zu T gehörende Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf K_0, so ist $(K, \mathcal{O})^H$ in $(K_0, \mathcal{O}_0)^H$ existenziell abgeschlossen.*

Fakt 3.5.2 wird z. B. in [Ku], oder auch in [Er1] bewiesen.

Wir zeigen, daß für je zwei verschiedene Elemente j und k aus I die Bewertungsringe $\bar{\mathcal{O}}_j$ und $\bar{\mathcal{O}}_k$, die wegen $\bar{\mathcal{O}}_j \cap K = \mathcal{O}_j \neq \mathcal{O}_k = \bar{\mathcal{O}}_k \cap K$ verschieden sind, voneinander unabhängig sind. Hierzu genügt es zu beweisen, daß es zu je zwei Elementen ϵ_0 und ϵ_1 aus $\bar{K}^*$ sowie zu je zwei Elementen a_0 und a_1 aus $\bar{K}$ ein Element b aus $\bar{K}$ gibt, für das $v_{\bar{\mathcal{O}}_j}(b - a_0) \geq v_{\bar{\mathcal{O}}_j}(\epsilon_0)$ und $v_{\bar{\mathcal{O}}_k}(b - a_1) \geq v_{\bar{\mathcal{O}}_k}(\epsilon_1)$ gilt (s. S. 62).

Es seien also ϵ_0 und ϵ_1 Elemente aus $\bar{K}^*$ sowie a_0 und a_1 Elemente aus $\bar{K}$. Es sei t ein über $\bar{K}$ transzendentes Element, es sei $\bar{\bar{K}}$ der Körper $\bar{K}(t)$, es sei $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_j$ die in Satz 2.4.12 beschriebene, zur Transzendenzbasis $T_0 := \{(t - a_0)/\epsilon_0\}$ gehörende Fortsetzung von $\bar{\mathcal{O}}_j$ auf $\bar{\bar{K}}$, es sei $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_k$ die in Satz 2.4.12 beschriebene, zur Transzendenzbasis $T_1 := \{(t - a_1)/\epsilon_1\}$ gehörende Fortsetzung von $\bar{\mathcal{O}}_k$ auf $\bar{\bar{K}}$, und es sei schließlich für jedes i aus $I \setminus \{j, k\}$ $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_i$ die in Satz 2.4.12 beschriebene, zur Transzendenzbasis $T := \{t\}$ gehörende Fortsetzung von $\bar{\mathcal{O}}_i$ auf $\bar{\bar{K}}$. Dann ist die $\mathcal{L}$-Struktur

$$\bar{\bar{\mathcal{K}}} := (\bar{\bar{K}}, +^{\bar{\bar{K}}}, \cdot^{\bar{\bar{K}}}, 0^{\bar{\bar{K}}}, 1^{\bar{\bar{K}}}, (\bar{\bar{\mathcal{O}}}_i)_{i\in I})$$

eine $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\bar{\mathcal{K}}$. Darüberhinaus läßt sich unter Verwendung von Fakt 3.5.2 leicht nachprüfen, daß $\bar{\bar{\mathcal{K}}}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

Weil das Element $(t-a_0)/\epsilon_0$ aus $\bar{\bar{K}}$ in $\mathcal{M}(\bar{\bar{\mathcal{O}}}_j)$ und damit insbesondere in $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_j$ liegt und weil das Element $(t-a_1)/\epsilon_1$ aus $\bar{\bar{K}}$ in $\mathcal{M}(\bar{\bar{\mathcal{O}}}_k)$ und damit insbesondere in $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_k$ liegt, wird die quantorenfreie $\mathcal{L}(\bar{K})$-Formel

$$\delta(X) := ((X-a_0)/\epsilon_0 \in R_j \wedge (X-a_1)/\epsilon_1 \in R_k)$$

in $\bar{\bar{\mathcal{K}}}$ durch das Element t aus $\bar{\bar{K}}$ realisiert. Weil $\bar{\mathcal{K}}$ aus $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}$ existenziell abgeschlossen ist und weil es sich bei $\bar{\bar{\mathcal{K}}}$ um eine $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\bar{\mathcal{K}}$ handelt, die in $\mathfrak{K}$ liegt, wird $\delta(X)$ auch in $\bar{\mathcal{K}}$ realisiert; es gibt also in $\bar{K}$ ein Element b, für das $(b-a_0)/\epsilon_0$ in $\bar{\mathcal{O}}_j$ und $(b-a_1)/\epsilon_1$ in $\bar{\mathcal{O}}_k$ liegt bzw. für das $v_{\bar{\mathcal{O}}_j}(b-a_0) \geq v_{\bar{\mathcal{O}}_j}(\epsilon_0)$ und $v_{\bar{\mathcal{O}}_k}(b-a_1) \geq v_{\bar{\mathcal{O}}_k}(\epsilon_1)$ gilt, und nach genau solch einem b aus $\bar{K}$ haben wir gesucht.

(5): Wir zeigen, daß der Körper $\bar{K}$ in jedem Oberkörper $\bar{\bar{K}}$, für den die Körpererweiterung $\bar{K} \leq \bar{\bar{K}}$ regulär und $\bar{W}$-total ist, existenziell abgeschlossen ist; dies ist nach Satz 3.1.4 gleichbedeutend damit, daß es sich bei $(\bar{K}, \bar{W})$ um einen regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körper handelt.

Es sei $\bar{\bar{K}}$ ein Oberkörper von $\bar{K}$, für den die Körpererweiterung $\bar{K} \leq \bar{\bar{K}}$ regulär und $\bar{W}$-total ist. Für jedes i aus I sei $\bar{\bar{\mathcal{O}}}_i$ ein (aufgrund der $\bar{W}$-Totalität der Erweiterung $\bar{K} \leq \bar{\bar{K}}$ existierender) Bewertungsring von $\bar{\bar{K}}$, der $\bar{\mathcal{O}}_i$ fortsetzt und für den $(\bar{K}, \bar{\mathcal{O}}_i)^H$ in $(\bar{\bar{K}}, \bar{\bar{\mathcal{O}}}_i)^H$ existenziell abgeschlossen ist. Dann handelt es sich bei der $\mathcal{L}$-Struktur $\bar{\bar{\mathcal{K}}} := (\bar{\bar{K}}, +^{\bar{\bar{K}}}, \cdot^{\bar{\bar{K}}}, o^{\bar{\bar{K}}}, 1^{\bar{\bar{K}}}, (\bar{\bar{\mathcal{O}}}_i)_{i \in I})$ um eine $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\bar{\mathcal{K}}$, von der sich darüberhinaus leicht nachweisen läßt, daß sie in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Aus der existenziellen Abgeschlossenheit von $\bar{\mathcal{K}}$ in $\mathfrak{K}$ folgt, daß $\bar{\mathcal{K}}$ in $\bar{\bar{\mathcal{K}}}$ existenziell abgeschlossen ist und somit insbesondere, daß $\bar{K}$ in $\bar{\bar{K}}$ existenziell abgeschlossen ist. $\square$

Satz 3.5.3 *Zu jedem Booleschen mehrfach bewerteten Körper (K, W) gibt es eine Erweiterung $(\bar{K}, \bar{W})$ von (K, W), die folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) Die Körpererweiterung $K \leq \bar{K}$ ist regulär.

(2) $(\bar{K}, \bar{W})$ ist Boolesch, und die Abbildung $\pi : \bar{W} \to W$, die jedem Bewertungsring $\bar{\mathcal{O}}$ aus $\bar{W}$ den Bewertungsring $\bar{\mathcal{O}} \cap K$ aus W zuordnet, ist ein Homöomorphismus der Booleschen topologischen Räume $\bar{W}$ und W.

(3) Für jeden Bewertungsring $\bar{\mathcal{O}}$ aus $\bar{W}$ ist $(K, \bar{\mathcal{O}} \cap K)^H$ in $(\bar{K}, \bar{\mathcal{O}})^H$ existenziell abgeschlossen.

(4) $\bar{W}$ ist unabhängig.

(5) $(\bar{K}, \bar{W})$ ist regulär abgeschlossen.

Was den Beweis von Satz 3.5.3 anbelangt, so geht man hierbei prinzipiell genauso vor, wie im Beweis von Satz 3.5.1: Für einen Booleschen mehrfach bewerteten Körper (K, W) betrachtet man die Klasse $\mathfrak{K}$ aller Booleschen Erweiterungen (K', W') von (K, W), auf welche die in Satz 3.5.3 angegebenen Eigenschaften (1) bis (3) zutreffen. Man weist ohne Probleme nach, daß $\mathfrak{K}$ (nichtleer und) induktiv ist und wählt sich dann ein existenziell abgeschlossenes Element $(\bar{K}, \bar{W})$ von $\mathfrak{K}$. Von diesem ist klar, daß es die oben genannten Eigenschaften (1) bis (3) besitzt. Probleme bereitet hingegen der Nachweis der Eigenschaften (4) und (5), denn es erweist sich in beiden Fällen als schwierig die jeweiligen Erweiterungen $(\bar{\bar{K}}, \bar{\bar{W}})$ von $(\bar{K}, \bar{W})$ so zu konstruieren, daß es sich bei $\bar{\bar{W}}$ um eine Boolesche Menge von Bewertungsringen und bei π um einen Homöomorphismus handelt.

Auf eine genaue Darstellung des Beweises von Satz 3.5.3 müssen wir an dieser Stelle aus Zeit- und Platzgründen leider verzichten. Der Beweis ist jedoch in [Er7] vollständig abgedruckt.

3.6 Anmerkungen zu Kapitel 3

Zunächst sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß das Konzept des regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körpers eine Reihe von Vorläufern besitzt. Zu nennen wären hierbei in erster Linie aus dem Bereich der formal reellen Körper die Klasse der sogenannten pseudo reell abgeschlossenen Körper (s. z. B. [Pr1]) und aus dem Bereich der formal $(p, 1, 1)$-adischen Körper die Klasse der sogenannten pseudo p-adisch abgeschlossenen Körper (s. z. B. [Gr]). Beide Körperklassen sind durch dasselbe algebraisch-geometrische Lokal-Global-Prinzip wie regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper definiert, mit dem einzigen Unterschied, daß statt von Bewertungsringen und deren Henselschen Hüllen im Falle der pseudo reell abgeschlossenen Körper von Positivbereichen und deren reellen Abschlüssen und im Falle von pseudo p-adisch abgeschlossenen Körpern von $(p, 1, 1)$-Bewertungsringen und deren sogenannten p-adischen Abschlüssen die Rede ist. Bei der Klasse der pseudo p-adisch abgeschlossenen Körper handelt es sich im übrigen, ohne daß wir dies hier im Detail begründen wollen, genau wie bei der Klasse der pseudo algebraisch abgeschlossenen Körper und der Klasse der Henselsch bewerteten Körper um eine (echte) Teilklasse der Klasse aller (Booleschen) regulär abgeschlossenen mehrfach bewerteten Körper.

Bei einigen der in diesem Kapitel besprochenen Sätze über regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper handelt es sich um Übertragungen bzw. Verallgemeinerungen entsprechender Resultate über pseudo reell abgeschlossene bzw. pseudo p-adisch abgeschlossene Körper.

Regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper, so wie wir sie in dieser Arbeit verstehen, werden, soweit ich weiß, zum ersten Mal in [He-Pr] studiert. Allgemeiner werden dort solche Körper K betrachtet, die bezüglich einer aus Positivbereichen und Bewertungsringen von K bestehenden Menge W regulär abgeschlossen sind, wobei sich der Hauptteil der Arbeit mit solchen regulär abgeschlossenen Körpern (K, W) beschäftigt, deren zugehörige Menge W endlich ist.

Bei einem Großteil der Sätze dieses Kapitels handelt es sich um Verallgemeinerungen von aus dieser Arbeit stammenden Sätzen über regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper (K, W) mit endlichem W auf Boolesche mehrfach bewertete Körper.

Abschnitt 3.1: Der Begriff der W-totalen Körpererweiterung und die damit zusammenhängende modelltheoretische Charakterisierung regulär abgeschlossener mehrfach bewerteter Körper (Satz 3.1.4) stammen von mir und stellen relativ naheliegende Übertragungen wohlbekannter ähnlicher Begriffe und Resultate aus dem Bereich der pseudo reell abgeschlossenen/pseudo p-adisch abgeschlossen Körper dar (s. Theorem 1.2 in [Pr1] und Proposition 4.04 in [Gr]).

Satz 3.1.9 wird in [Fr-Ja] für pseudo algebraisch abgeschlossene Körper bewiesen, und Satz 3.1.11 wird in [Gr] für pseudo p-adisch abgeschlossene Körper gezeigt.

Abschnitt 3.2: Satz 3.2.1 entspricht Theorem 2.1 aus [He-Pr]. Satz 3.2.2 wird in [He-Pr] für regulär abgeschlossene mehrfach bewertete Körper (K, W) mit endlichem W bewiesen.

Der für den Beweis von Satz 3.2.2 benötigte Satz 3.2.7 stammt von mir.

Abschnitt 3.3: Der in diesem Abschnitt behandelte Satz 3.3.2 stammt von mir.

Abschnitt 3.4: Satz 3.4.2 wird in [He-Pr] für mehrfach bewertete Körper (K, W) mit endlichem W und in [Gr] für pseudo p-adisch abgeschlossene Körper bewiesen. Der hier präsentierte Beweis von Satz 3.4.2 stammt aus [Er5] bzw. aus [Er8].

Abschnitt 3.5: Satz 3.5.1 stammt, was seine konkrete Formulierung anbelangt von mir, die Beweise orientieren sich aber stark an den Beweisen einer Reihe ähnlicher Existenzsätze aus [He-Pr] und [Er7].

Einen Beweis von Satz 3.5.3 findet man in [Er7].

Literaturverzeichnis

[Bu-Sa] S. Burris, H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1981.

[Ch-Ke] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, 3rd edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **73**, Elsevier Science Publishers (North Holland), 1990.

[Eb-Fl-Th] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Auflage, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, 1996.

[En] O. Endler, *Valuation Theory*, Universitext, Springer, 1972.

[Er1] Yu.L. Ershov, *On rational points over henselian fields*, Algebra i Logika **6**;3 (1967), 39-49, auf Russisch.

[Er2] Yu.L. Ershov, *Multiply valued fields*, Russ. Math. Surv. **37**;3 (1982), 63-107.

[Er3] Yu.L. Ershov, *Absolute irreducibility and henselizations*, Algebra and Logic **21**;5 (1982), 353-357.

[Er4] Yu.L. Ershov, *Boolean families of valuation rings*, Algebra and Logic **31**;3 (1992), 170-181.

[Er5] Yu.L. Ershov, *Relative regular closedness and π-valuations*, Algebra and Logic **31**;6 (1992), 342-359.

[Er6] Yu.L. Ershov, *Boolean families of valuation rings II*, Algebra and Logic **32**;3 (1993), 139-142.

[Er7] Yu.L.Ershov, *Relatively regularly closed fields*, Russ. Acad. Sci. Dokl. Math. **48**;2 (1994), 300-303.

[Er8] Yu.L. Ershov, *RC^*-fields*, Algebra and Logic **33**;4 (1994), 205-215.

[Er9] Yu.L. Ershov, *On the Galois groups of RC^*_ξ-fields*, Russ. Acad. Sci. Dokl. Math. **49**;1 (1994), 79-82.

[Er10] Yu.L. Ershov, *Fields with continuous local elementary properties I*, Algebra and Logic **33**;6 (1994), 351-365.

[Er11] Yu.L. Ershov, *Fields with continuous local elementary properties II*, Algebra and Logic **34**;3 (1995), 140-146.

[Er12] Yu.L. Ershov, *Nice local-global fields I*, Algebra and Logic **35**;4 (1996), 229-235.

[Er13] Yu.L. Ershov, *Nice local-global fields II*, Algebra and Logic **35**;5 (1996), 281-295.

[Er14] Yu.L. Ershov, *Fields with continuous local elementary properties III*, Algebra and Logic **36**;6 (1997), 370-377.

[Fr-Ja] M.D. Fried, M. Jarden, *Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik, Folge **3**, Band **11**, Springer, 1986.

[Gr] C. Grob, *Die Entscheidbarkeit der Theorie der maximalen pseudo p-adisch abgeschlossenen Körper*, Konstanzer Dissertationen **202**, 1988.

[He-Pr] B. Heinemann, A. Prestel, *Fields regularly closed with respect to finitely many valuations and orderings*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **4** (1984), 297-336.

[Ja] M. Jarden, *Algebraic realization of p-adically projective groups*, Comp. Math. **79**;1 (1991), 21-62.

[Ku] F.-V. Kuhlmann, *Valuation Theory of Fields, Abelian Groups and Modules*, Habilitationsschrift, Fakultät für Mathematik der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1994.

[La1] S. Lang, *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **5**, Whiley, 1958.

[La2] S. Lang, *Algebra*, 3rd edition, Addisson Wesley, 1993.

[Pr1] A. Prestel, *Pseudo real closed fields*, in *Set Theory and Model Theory*, Lecture Notes in Mathematics **872**, Springer, 1981, 127-156.

[Pr2] A. Prestel, *Lectures on Formally Real Fields*, Lecture Notes in Mathematics **1093**, Springer, 1984.

[Pr3] A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1986.

[Pr-Ro] A. Prestel, P. Roquette, *Formally p-adic Fields*, Lecture Notes in Mathematics **1050**, Springer, 1984.

[Qu] B. v.Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 2. Auflage, Hochschultext, Springer, 1979.

[Ro] P. Roquette, *Principal ideal theorems for holomorphy rings in fields*, J. reine, angew. Math. **262/263** (1973), 361-374.

[We] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, AMS Colloquium Publications **XXIV**, 1962.

Ich versichere hiermit, daß ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen angefertigt habe.

Freiburg, den 31. Juli 2001