# Die Geometrie lokal modularer Typen

Diplomarbeit von Ingo Kraus
geschrieben unter der Betreuung von
Professor Dr. Martin Ziegler
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Freiburg, Juni 1995

Überarbeitete Fassung vom 10. Dezember 1996

# Einleitung

In seinem bald erscheinenden Buch stellt Anand Pillay Ergebnisse der geometrischen Stabilitätstheorie vor, in der die Geometrien von regulären Typen untersucht werden. Dabei stellen sich sofort die Fragen, welche Konsequenzen es für eine solche Geometrie hat, daß sie von einem regulären Typ stammt und wie sich die Geometrie bei nichtforkender Fortsetzung verändert. Eine kombinatorische Geometrie heißt modular, wenn für je zwei abgeschlossene Unterräume $X, Y$ gilt:

$$dim(X \cup Y) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y)$$

sie heißt lokal modular, wenn diese Formel noch gilt, solange der Schnitt der Räume eine positive Dimension hat; ein regulärer Typ heißt (lokal) modular, wenn seine Geometrie es ist. Die Standardbeispiele für modulare Geometrien sind projektive Räume und man weiß, daß im wesentlichen alle modularen Geometrien so aussehen. Die Standardbeispiele für lokal modulare nicht modulare Geometrien sind affine Räume, aber in diesem Fall hat man keinen entsprechenden Darstellungssatz. Ist diese Situation vielleicht besser, wenn die Geometrie von einem regulären Typ stammt ?

> Ist die Geometrie eines lokal modularen nicht modularen Typs die eines affinen Raumes ?

Die kanonischen Arten, die Geometrie eines affinen Raumes zu verändern, sind Lokalisierungen nach Teilmengen des affinen Raumes und nach Teilmengen des zugehörigen Vektorraums. Dabei wird die lokalisierte Geometrie genau dann modular, wenn die Lokalisierungsmenge einen affinen Punkt enthält. Wie verhält sich das in der Modelltheorie ?

> Wenn eine nichtforkende Fortsetzung eines lokal modularen nicht modularen Typs $p$ modular ist, enthalten dann die neuen Parameter (modulo eines geeigneten Abschlusses) eine Realisierung von $p$ ?

Diese zwei Fragen liegen dem hier zu behandelnden Gebiet zugrunde. Im fünften Kapitel seines Buches zeigt Pillay, daß beide Fragen für Typen von $U$-Rang 1 eine positive Antwort haben. Im siebten Kapitel stellt er dann Begriffe und Techniken vor, mit denen die alten Beweise auf beliebige reguläre Typen übertragen werden können. Ich führe die Übertragung in dieser Arbeit durch.

Meine Arbeit besteht aus vier Kapiteln. Im ersten Kapitel stelle ich einige Grundlagen aus der Stabilitätstheorie und aus der kombinatorischen Geometrie bereit. Dabei habe ich besonders im Kapitel über Funktionen auf Ausführlichkeit Wert gelegt, unter anderem deshalb, weil ich die Ergebnisse nirgends systematisch zusammengestellt gefunden habe.
Im zweiten Kapitel werde ich die beiden wichtigsten Begriffe dieser Arbeit vorstellen, nämlich $p$-Einfachheit und $p$-Gewicht, das $p$-Gewicht übernimmt dann die Rolle des $U$-Rangs. Mit Hilfe dieser Begriffe kann man geometrische Strukturen auf dem Modell einführen, welche bei der Analyse lokal modularer Typen zur Geltung kommen. Als kleine Ermunterung zwischendurch wende ich diese Theorie dann an, um die Struktur modularer Typen genauer zu beleuchten.
Da mein Ziel die Konstruktion eines Vektorraumes beinhaltet, komme ich um die Theorie stabiler Gruppen nicht herum, einer knappen Darstellung der allgemeinen Theorie dienen die ersten beiden Teile des dritten Kapitels; diese Theorie läßt sich dann kanonisch auf $p$-einfache Gruppen übertragen. Außerdem beweise ich verschiedene Gruppenexistenzsätze, die alle im Verlauf der Arbeit zur Anwendung kommen.
Im letzten Kapitel wende ich mich dann endlich den lokal modularen Typen zu. Ich werde erst zeigen, wie man Schiefkörper schon aus regulären Gruppen konstruieren kann, wobei ein geeigneter Quotient der Gruppe zu einem Vektorraum wird. Falls die Gruppe sogar lokal modular ist, so ist die zu diesem Vektorraum gehörende Geometrie gerade die Geometrie des generischen Typs. Mit diesem Ergebnis kann ich dann im letzten Teil zeigen, daß die Geometrie eines lokal modularen nicht modularen Typs eine affine Geometrie über dem Vektorraum einer geeigneten modularen Gruppe ist und daß eine nichtforkende Fortsetzung des Typs nur dadurch modular werden kann, daß man eine seiner Realisierung zu den Parametern (modulo $p$-Abschluß) hinzunimmt. Die meiste Arbeit macht dabei die Konstruktion der modularen Gruppe.

Ich habe mir zum Ziel gesetzt, daß diese Arbeit für Leserinnen und Leser verständlich ist mit etwa dem Wissensstand, den ich am Anfang der Arbeit hatte. Ich hoffe sehr, daß ich einen guten Mittelweg zwischen Ausführlichkeit und Fokussierung auf das Wesentliche gefunden habe. Bedanken möchte ich mich bei Martin Erkens, der mir viel Zeit und Hilfestellung gab. Viel Spaß beim Lesen !

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Verschiedenes aus der Stabilitätstheorie

Theorien seien stets vollständig und mit unendlichem Modell. Die zugrundeliegende Theorie $T$ sei stets stabil, deshalb gibt es beliebig große saturierte Modelle von $T$. Ist $\mathcal{M}$ ein saturiertes Modell von $T$, so sei der Begriff "Menge" für die Teilklassen von $\mathcal{M}$ reserviert, die eine kleinere Kardinalität als $\mathcal{M}$ haben und (partielle) Mengentypen seien (partielle) Typen über mengenvielen Parametern. $\mathcal{M}$ realisiert also alle Mengentypen. Außerdem sind je zwei Tupel, die den gleichen Typ (über $\emptyset$) haben, durch einen Automorphismus von $\mathcal{M}$ konjugiert. Die gleiche Konvention gilt für das Monstermodell $\mathcal{C}$, in dem ich i.a. arbeiten werde. Außerdem arbeite ich in $T^{eq}$. Sollte ich dann ausnahmsweise mal die verwendete Sorte benennen, so bezeichne "$\mathcal{C}_x$" die Sorte der Variablen $x$.

### 1.1.1 Invariante, typdefinierbare und definierbare Klassen

Eine Klasse heißt $A$-*invariant*, wenn sie von allen Automorphismen, die $A$ fixieren (punktweise), invariant (also als Klasse) gelassen wird. Sie heißt $A$-*typdefinierbar (definierbar)*, wenn es einen partiellen Typ (eine Formel) mit Parametern aus $A$ gibt, dessen Realisierungsklasse sie ist. Eine $A$-typdefinieerbare Klasse nenne ich $A$-*Klasse*, wenn es einen partiellen Mengentyp mit Parametern aus $A$ gibt, dessen Realisierungsklasse sie ist. Ist $A$ eine echte Klasse, so fallen die Begriffe "$A$-typdefinierbare Klasse" und "$A$-Klasse" also auseinander. Ganz allgemein verwende ich diese Sprechweise: ein $A$-*Objekt* (Funktion, Gruppe, Äquivalenzrelation) ist mit mengenvielen Parametern aus $A$ (typ)definierbar. So sind zum Beispiel die $\mathcal{C}$-Klassen gerade die Klassen, die durch partielle Mengentypen typdefiniert sind und die $\mathcal{C}$-Gruppen sind gerade die mengentypdefinierbaren Gruppen (in $\mathcal{C}$). I.a. werden $A, B, C, ...$ stets Teilmengen des Monsters sein.
Typen über echten Klassen müssen in $\mathcal{C}$ nicht realisiert sein und haben zwei

Mengen den gleichen Typ über einer Klasse $Q$, so müssen sie über $Q$ nicht konjugiert sein (d.h. es existiert i.a. kein Automorphismus von $\mathcal{C}$, der $Q$ fixiert und die beiden Mengen ineinander überführt.) Ich werde später zeigen, daß die Situation besser ist, wenn $Q$ invariant ist: dann existiert (wegen Stabilität) ein solcher Automorphismus.

Noch ein Wort zur Saturiertheit: ist $\Pi(x,y)$ ein partieller Typ, so nenne ich $\Pi(y) = \exists x \Pi(x,y) := \{\exists x \varphi(x,y) \mid \varphi(x,y) \in \Pi(x,y)\}$ und entsprechend $\Pi(x)$ Projektionen von $\Pi$. Ist $\Pi(x,y)$ vollständig, so auch jede Projektion und wegen Saturiertheit ist $\exists x \Pi(x,y)^{\mathcal{C}}$ genau die Projektion von $\Pi(x,y)^{\mathcal{C}}$ auf die $y$-Koordinate. Diese Tatsache wird permanent verwendet, wenn es um Fragen der Typdefinierbarkeit bestimmter Klassen geht.

Die $A$-typdefinierbaren Klassen bilden eine Topologie von abgeschlossenen Mengen auf dem Modell, mit der clopen-Basis der $A$-definierbaren Klassen, die boolsche Algebra der $A$-definierbaren Klassen ist kanonisch isomorph zu der Lindenbaumalgebra von $T(A)$. Ebenso topologisieren die $A$-invarianten Klassen das Modell, diese Topologie verfeinert die erste. Eine typdefinierbare Klasse ist genau dann $A$-typdefinierbar, wenn sie $A$-invariant ist, dafür braucht man, daß das Modell $|A|^+$-saturiert ist (ist $A$ endlich, so sei $|A|^+ := \aleph_0$).

Die $A$-invarianten Klassen bilden sogar eine vollständige boolsche Unteralgebra der Potenzmengenalgebra, diese Algebra ist die von den $A$-typdefinierbaren Klassen erzeugte vollständige Algebra, denn jede $A$-invariante Klasse ist eine Vereinigung von $A$-typdefinierbaren Klassen. Eine Klasse nenne ich *$A$-vollständig*, wenn sie die Realisierungsklasse eines $A$-Typs ist. Die $A$-vollständigen Klassen sind dann gerade die Bahnen unter $Aut_A$ (den Automorphismen von $\mathcal{C}$, die $A$ punktweise fixieren) und deshalb genau die minimalen $A$-invarianten Klassen. Jede $A$-invariante Klasse ist eine disjunkte Vereinigung von $A$-vollständigen Klassen. Demnach sind $A$ invariante Klassen i.a. echte Klassen: ist $X$ $A$-invariant, so ist $X$ genau dann eine Menge, wenn $X \subset acl(A)$.

Invariante Klassen sind folglich noch modelltheoretische Objekte: jeder invarianten Klasse $X$ ordne ich eine Klasse $\hat{X} \subset S(\mathcal{C})$ zu: es sei $X$ eine $A$-invariante Klasse und $\hat{X} := \{\hat{p} \in S(\mathcal{C}) | \hat{p} \supset tp(a/A)$ für ein $a \in X\}$. Ist dann $B \supset A$, so ist $\hat{X} = \{\hat{p} \in S(\mathcal{C}) | \hat{p} \supset tp(a/B)$ für ein $a \in X\}$, die Definition von $\hat{X}$ ist also parameterunabhängig. Für jedes $\hat{p} \in \hat{X}$ gibt es dann ein $B \supset A$ (etwa $B = ACb(\hat{p})$, also braucht man Stabilität), so daß $\hat{p} = stp(a/B)|\mathcal{C}$ für ein $a \in X$. Identifiziert man globale bzw. stationäre Typen mit ihren $\|$-Klassen so ist also $\hat{X} = \{stp(a/B) | a \in X, B \supset A\}$. Diese Identifizierung wird häufig auftauchen, wenn es um parameterunabhängige Betrachtungen geht.

**Noch etwas Notation**: "$St(A)$ " bezeichnet die Menge der stationären Typen in $S(A)$, also $St(A) \neq S(acl(A))$. Ist $p \in St(A)$, so bezeichne ich die $\|$-Klasse von $p$ mit "$\|_p$". $p$ ist genau dann $B$-definierbar, wenn jeder $B$-Automorphismus $\sigma$ die globale nichtforkende Fortsetzung von $p$ fixiert, wenn er also $\|_p$ fixiert. $p$ wird dann zu einem parallelen Typ $p^\sigma \in St(A^\sigma)$ konjugiert und $p\|B$ sei der zu $p$

parallele Typ über $B$, dieser ist zu unterscheiden von $p|B \in St(AB)$.

### 1.1.2 Definierbare Äquivalenzrelationen

Ist $x_1Ex_2$ eine $\emptyset$-Äquivalenzrelation, so bezeichne $pr_E$ die zugehörige $\emptyset$-definierbare Projektion, $a_E := pr_E(a)$ nenne ich den *Parameter der Klasse* $x_1Ea^{\mathcal{C}}$.

1.1 **Fakt**
*Es sei $x_1E_cx_2$ eine c-Äquivalenzrelation, dann gibt es eine $\emptyset$-Äquivalenzrelation $x_1y_1Ex_2y_2$, so daß*

$$Th(c) \models \forall x_1, x_2(x_1E_cx_2 \leftrightarrow x_1cEx_2c)$$

Definiert man dann $pr_{E_c}(x) := pr_E(x,c)$ und $a_{E_c} := ac_E$, so gilt nach dem Fakt für beliebiges $a$: $(xE_ca)^{\mathcal{C}} = pr_{E_c}^{-1}(a_{E_c})$ und deshalb kann $a_{E_c}$ als Parameter der Klasse $(xE_ca)^{\mathcal{C}}$ aufgefasst werden, $pr_{E_c}$ ist dann die zugehörige Projektion, sie ist $c$-definierbar. Die $E_c$-Sorte ist die $E$-Sorte, die $E_c$-Klassen sind $E$-Klassen.
Ist $\mathcal{D}$ eine definierbare Klasse, so bezeichne ich die induzierte Äquivalenzrelation mit “$E_{\mathcal{D}}$”, $pr_{E_{\mathcal{D}}}$ mit “$pr_{\mathcal{D}}$” und, für $a \in \mathcal{D}$, $a_{E_{\mathcal{D}}}$ mit “$cp_{\mathcal{D}}$”. Taucht in diesem Zusammenhang eine Formel als Index auf, so steht sie für die durch sie definierte Klasse.
Für jede Formel $\varphi(x;y)$ und beliebige $c, d$ gilt:

$$d = cp_{\varphi(x,c)} \iff (c,d) \models \exists x\ (\varphi(x,y) \wedge pr_{\varphi(x,y)}(x,y) = z)$$

Da es zu jedem $c \in \mathcal{C}_y$ genau ein solches $d$ gibt, definiert $\exists x\ (\varphi(x,y) \wedge pr_{\varphi(x,y)}(x,y) = z)$ den Graph der Funktion $cp : \mathcal{C}_y \to \mathcal{C}$, die jedem $c$ den Parameter der Formel $\varphi(x,c)$ zuordnet.
Eine $A$-Äquivalenzrelation auf der $A$-Klasse $X$ ist eine Äquivalenzrelation $x_1Ex_2$, zu der es eine $A$-Formel $\varphi(x_1,x_2)$ gibt, so daß $E = \varphi(x_1,x_2) \cap (X \times X)^{\mathcal{C}}$. Mit Kompaktheit gibt es dann eine definierbare Klasse $\mathcal{D} \supset X$, so daß

$$x_1E'x_2 \iff (x_1 \in \mathcal{D} \vee x_2 \in \mathcal{D}) \to (x_2 \in \mathcal{D} \wedge x_2 \in \mathcal{D} \wedge \varphi(x_1,x_2)^{\mathcal{C}}$$

eine $A$-definierbare Äquivalenzrelation ist, die $E$ fortsetzt. Dann sei natürlich $pr_E := pr_{E'_{|X}}$, auf diese Weise gibt es auch für typdefinierbare Äquivalenzrelationen kanonische Projektionen und Sorten. Ist $X$ nicht typdefinierbar, so klappt die Konstruktion nicht, da Kompaktheit nicht angewendet werden kann.

### 1.1.3 Domination, Orthogonalität und Regularität

Ich wiederhole kurz einiges aus der Stabilitätstheorie, vieles davon werde ich oft verwenden. Für stationäre Typen sind alle drei Eigenschaften (in der jeweils parameterunabhängigen Version) $\|$-invariant. Ich setze außerdem die Theorie der $a$-Modelle voraus. (Details findet man z.B. im Ziegler-Skript und bei Pillay).

1.2 **Definition (Domination)**

**(1)** *Es seien $A, B$ und $C$ Teilmengen von $\mathcal{C}$ und $p, q \in S(A)$:*

*(a) $B \rhd_A C$, wenn für alle $D \subset \mathcal{C}$ gilt: $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A D \Rightarrow C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A D$*

*(b) $B \Diamond_A C$, wenn $B \rhd_A C$ und $C \rhd_A B$*

*(c) $p \rhd_A q$, wenn es $a \models p$ und $b \models q$ gibt, so daß $a \rhd_A b$*

**(2)** *Es seien $p, q$ beliebige Typen:*

*(a) $p \rhd q$, wenn es nichtforkende Fortsetzungen $p' \supset p$ und $q' \supset q$ auf eine gemeinsame Parametermenge $B$ gibt, so daß $p' \rhd_B q'$*

*(b) $p \Diamond q$, wenn $p \rhd q$ und $q \rhd p$.*

Alle diese Relationen sind reflexiv und transitiv. Achtung, $p \Diamond q$ bedeutet nicht, daß es dominationsäquivalente Realisierungen von geeigneten nichtforkenden Fortsetzungen geben muß.

**Eigenschaften**

**(1)** $B \rhd_A B' \iff B \rhd_{acl(A)} B' \iff \forall p \in S(acl(A)):\ p|B \models p|B'$

**(2)** Sei $A_i \rhd_A B_i$ $(i \in I)$, dann gilt

$(i)$ $\bigcup_I A_i \rhd_A \bigcup_I B_i$ und $(ii)$ $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig über $A \Rightarrow (B_i)_{i \in I}$ unabhängig über $A$

(induktiv, einfache Forkingrechnung)

**(3)** Aus (2) folgt unmittelbar:

$p_i, q_i \in St(A)$ $(i \in I)$, alle $p_i \rhd_A q_i \Rightarrow \bigotimes p_i \rhd_A \bigotimes q_i$

**(4)** Seien $p, q \in St(A)$, $p \rhd_A q$, dann gilt für jedes $a$-Modell $\mathcal{M} \supset A$: wird $p$ in $\mathcal{M}$ realisiert, so auch $q$.

(Achtung: die Aussage wird falsch, wenn nur "$p \rhd q$" statt "$p \rhd_A q$" gefordert wird)

**(5)** Für Typen über einem $a$-Modell $\mathcal{M}$ fallen $\rhd$ und $\rhd_{\mathcal{M}}$ zusammen.

**(6)** Es sei $\mathcal{M}$ ein $a$-Modell und $\mathcal{M}[B]$ ein $a$-Primmodell von $\mathcal{M}B$, dann $B \rhd_{\mathcal{M}} \mathcal{M}[B]$.

1.3 **Definition (Orthogonalität)**

**(1)** *Zwei Typen $p, q \in S(A)$ sind* fast orthogonal*, $p \perp^a q$, wenn für alle $a \models p$ und $b \models q$ gilt: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A b$.*

**(2)** *Zwei Typen $p, q$ über beliebigen Parametern sind* orthogonal*, $p \perp q$, wenn alle nichtforkenden Fortsetzungen $p' \supset p$ und $q' \supset q$ auf gemeinsame Parametermengen fast orthogonal sind.*

**Eigenschaften**

Seien $q_i$ $(i \in I)$ paarweise orthogonale stationäre Typen, dann gilt:

**(1)** $\bigotimes_{I_1} q_i \perp \bigotimes_{I_2} q_i$ für alle disjunkten $I_1, I_2 \subset I$.

**(2)** $\bigcup_I q_i \models \bigotimes_I q_i$

**(3)** alle $q_i \not\perp q$ ($q$ beliebig), so $\#I < \kappa(T)$.

**(4)** $q \rhd q_i$ für alle $i$, so $q \rhd \bigotimes_I q_i$.

**(5)** Sind $p, q \in St(A)$, so $p \perp q \iff p^{(\omega)} \perp^a q^{(\omega)}$.

1.4 **Definition (Regularität)**
*Ein Typ $p$ heißt regulär, wenn jede forkende Fortsetzung $p'$ von $p$ orthogonal zu $p$ ist.*

Achtung, es gibt in der Literatur auch andere Definitionen, etwa die obige Definition für stationäre Typen, ein beliebiger Typ wird dann regulär genannt, wenn er eine nichtforkende stationäre reguläre Fortsetzung hat (bzw. wenn alle seine nichtforkenden stationären Fortsetzungen regulär sind). Diese Definition liefert mehr reguläre Typen als die hier gewählte!

**Eigenschaften**

**(1)** Sei $p \in St(A)$ regulär, $J \subset p^{\mathcal{C}}$ und alle $j \not\perp_A B$ (B beliebig), dann gilt $p|B \models p|BJ$. Falls $J$ unabhängig über $A$ ist, dann gilt sogar $B \rhd_A J$.

**(2)** Aus (1) folgt unmittelbar:
Ist $stp(^a/_A)$ regulär, so gilt für jedes $b$ : $b \not\perp_A a \iff b \rhd_A a$
Ist $p$ regulär, so gilt für jeden Typ $q$ : $q \not\perp p \iff q \rhd p$

**(3)** $p_i \in St(A)$, $p_1 \not\perp^a p_2, \mathcal{M} \supset A$ $a$-Modell:
Alle $p_1$ bzw. $p_2$ Basen von $\mathcal{M}$ sind dominationsäquivalent über $A$ und gleichmächtig. (Ist $I_1$ eine $p_1$-Basis von $\mathcal{M}$, so wähle (mit Domination(4)) für jedes $i_1$ ein $i_2 \in p_2^{\mathcal{M}}$, dann entsteht (mit (1) und Domination(2)) ein $I_2 \diamond_A I_1$, $I_2$ unabhängig in $p_2^{\mathcal{M}}$. $I_2$ erzeugt $p_2^{\mathcal{M}}$ über $A$: sei $c \in p_2^{\mathcal{M}}$, wähle $c' \in p_1^{\mathcal{M}}$ mit $c' \not\perp_A c$, dann $c \not\perp_A c' \not\perp_A I_1$, also $c \not\perp_A I_1$. Aber $I_1 \diamond_A I_2$, also $c \not\perp_A I_2$. Der Rest ist einfach.)

**(4)** Ist $p \in St(A)$ regulär, $\mathcal{M} \supset A$ ein $a$-Modell und $I$ eine $p$-Basis von $\mathcal{M}$, dann gilt für jede Menge $J$: $J$ unabhängig in $p|I \Rightarrow J$ unabhängig in $p|\mathcal{M}$ (d.h. $(p|I)^{(\alpha)} \models (p|\mathcal{M})^{(\alpha)}$, für alle $\alpha$)
(OE $J$ endlich, sei $J$ unabhängig in $p|I$, angenommen $J \not\perp_A \mathcal{M}$, dann $J \not\perp_{AI} \mathcal{M}$ und da $J$ endlich ist gibt es eine endliche Teilmenge $B$ von $\mathcal{M}$, so daß alle $j \not\perp_{AI} B$, also $B \rhd_{AI} J$ (wegen (1) und wegen Domination(4) realisiert $\mathcal{M}$ $stp(^J/_{AI})$, Widerspruch zur Maximalität von $I$.)

**(5)** Sei $p \in St(A)$ regulär, $q \in S(A)$ und $n \in I\!N$: $q \diamond_A p^{(n)}$ genau dann, wenn für alle $a \models q$, $I \models p^{(n)}$: $a \not\perp_A I \Leftrightarrow a \diamond_A I$
(Wähle nämlich $J \models p^{(n)}$ mit $J \rhd_A a$, dann alle $i \not\perp_A J$, in der Prägeometrie $(p^{\mathcal{C}}, \perp_A)$ gilt also $I \subset cl(J)$, aus Dimensionsgründen gilt dann $cl(I) = cl(J)$, also alle $j \not\perp_A I$ und $I \rhd_A J$ und schließlich $I \rhd_A a$; die Umkehrung geht analog)

### 1.1.4 Basiertheit und kanonische Basen

Ich werde nun einige Begriffe, die oft nur für stationäre Typen definiert sind, für beliebige Typen definieren und einige Eigenschaften beweisen, von denen besonders die über Definierbarkeit später noch verwendet werden. Dieser Abschnitt ist etwas ausführlicher, da der Inhalt nicht mehr unbedingt zum Standardwissen gehört.

**Basiertheit**

1.5 **Definition**
*Seien $p$ und $q$ beliebige Typen:* $p \models_{nf} q :\Longleftrightarrow p \subset_{nf} q$ *und $q$ ist die einzige nicht-forkende Fortsetzung von $p$ nach $dom(q)$*

Ich sage dann, daß $q$ auf $p$ bzw. $dom(p)$ basiert ist, ein Typ $tp(a/A)$ ist genau dann stationär, wenn $tp(a/A) \models_{nf} tp(a/acl(A))(= stp(a/A))$, ein stationärer Typ ist genau dann auf einer Menge basiert, wenn er über dieser Menge definierbar (Achtung, definierbar im guten Sinne, etwa wie bei Lascar) ist. Für $B \supset dom(p)$ sei $NF_p(B)$ die Menge der nichtforkenden Fortsetzungen von $p$ nach $B$, für $NF_p(\mathcal{C})$ schreibe ich nur $NF_p$, dann gilt $p \subset_{nf} q \iff NF_p \supset NF_q$ und $p \models_{nf} q \iff NF_p = NF_q$ und falls $B = acl(B)$, so $NF_p \sim NF_p(B)$ (Restriktion). Brauchbar ist die folgende Eigenschaft der Basiertheit:

1.6 **Basiertheitslemma**
*Für beliebige Mengen $A \supset A_0, B, C$ gilt:*
$tp(BC/A_0) \models_{nf} tp(BC/A) \iff tp(B/A_0C) \models_{nf} tp(B/AC)$ *und* $tp(C/A_0) \models_{nf} tp(C/A)$

**Beweis**
"$\Rightarrow$": Sei $tp(BC/A)$ basiert auf $A_0$,
(i) Sei $\sigma \in Aut_{A_0C}$, so daß $tp(B^\sigma/AC)$ über $A_0C$ nicht forkt, dann ist $tp(B^\sigma C/A)$ eine nichtforkende Fortsetzung von $tp(BC/A_0)$ ($B^\sigma C \equiv_{A_0} BC$ und $B^\sigma \perp_{A_0C} AC$, $B^\sigma C \perp_{A_0C} A$, $B^\sigma C \perp_{A_0} A$, da nach Voraussetzung $A \perp_{A_0} C$). Also $tp(B^\sigma C/A) = tp(BC/A)$ nach Basiertheitsvoraussetzung, deshalb auch $tp(B^\sigma/AC) = tp(B/AC)$, also $tp(B/A_0C) \models_{nf} tp(B/AC)$.
(ii) Sei $\sigma \in Aut_{A_0}$, $\tau \in Aut_{A_0C}$, so daß $C^\sigma \perp_{A_0} A$ und $B^\tau \perp_{A_0C} A$, dann $B^\tau C^\sigma \equiv_{A_0} B^\sigma C^\sigma \equiv_{A_0} BC$ und $tp(B^\tau C^\sigma/A)$ forkt nicht über $A_0$ ($B^\tau \perp_{A_0C} A$ und $C^\sigma \perp_{A_0} A$), also nach Voraussetzung $tp(B^\tau C^\sigma/A) = tp(BC/A)$, damit folgt $tp(C/A_0) \models_{nf} tp(C/A)$.

"$\Leftarrow$": Sei $tp(B/AC)$ basiert auf $A_0C$ und $tp(C/A)$ basiert auf $A_0$, sei $\sigma \in Aut_{A_0}$ mit $(BC)^\sigma \perp_{A_0} A$, dann $C^\sigma \equiv_A C$ (weil $tp(C/A_0) \models_{nf} tp(C/A)$), etwa $C = C^{\sigma\tau}$ für ein $\tau \in Aut_A$, also $B^{\sigma\tau}C = B^{\sigma\tau}C^{\sigma\tau} \equiv_A (BC)^\sigma$ und $B^{\sigma\tau} \equiv_{A_0C} B$. Da außerdem $B^\sigma \perp_{A_0C^\sigma} AC^\sigma$, gilt $B^{\sigma\tau} \perp_{A_0C} AC$, mit der Basiertheitsvoraussetzung dann $B^{\sigma\tau} \equiv_{AC} B$, also $B^{\sigma\tau}C \equiv_A BC$ und folglich $(BC)^\sigma \equiv_A BC$, fertig. □

Mit dem Basiertheitslemma spart man sich einige Standardrechnungen, z.B. sieht man damit, daß Projektionen stationärer Typen stationär sind und daß die Stationarität eine transitive Eigenschaft hat: Sind $tp(C/A)$ und $tp(B/AC)$ stationär, so ist $tp(BC/A)$ stationär (Umkehrung ist offensichtlich falsch, z.B. mit $A = acl(A)$ und $tp(B/AC)$ nicht stationär). Gibt es minimale Mengen, über denen ein Typ basiert ist?

**Kanonische Basen**

1.7 **Definition**
*Eine Menge $C$ heißt* kanonische Basis von $p$, *wenn für jeden Automorphismus $\sigma$ gilt:*

$$\sigma \text{ fixiert } C \Leftrightarrow \sigma \text{ läßt } NF_p \text{ invariant}$$

Für stationäre Typen bedeutet das: $\sigma$ fixiert $C \Leftrightarrow \sigma$ fixiert die globale nichtforkende Fortsetzung von $p$. Offensichtlich ist $C$ eindeutig bis auf Interdefinierbarkeit, d.h. für jede weitere kanonische Basis $C'$ von $p$ gilt $dcl(C') = dcl(C)$. Aus den Grundlagen der Stabilitätstheorie zitiere ich die folgenden

1.8 **Fakten**
**(1)** *$p$ forkt nicht über $A_0$ $\Leftrightarrow$ jeder $acl(A_0)$-Automorphismus fixiert $NF_p$ $\Leftrightarrow$ jeder $acl(A_0)$-Automorphismus läßt $NF_p$ invariant $\Leftrightarrow$ $p$ hat eine globale nichtforkende Fortsetzung mit beschränkter $Aut_{A_0}$-Bahn*
**(2)** *$p \in S(A)$, so operiert $Aut_A$ transitiv auf $NF_p$*
**(3)** *Falls $p$ stationär ist und $a_I$ eine unendliche Morleyfolge in $p$ ist, so fixiert jeder $a_I$-Automorphismus die globale nichtforkende Fortsetzung von $p$*

Aus der Definition und den Fakten ergeben sich dann sofort die folgenden Eigenschaften, sie sind es, die eine kanonisch Basis so brauchbar machen:

1.9 **Eigenschaften**
*Sei $p \in S(A)$, $C$ eine kanonische Basis und $A_0 \subset A$, dann gilt*
**(1)** *$p$ forkt nicht über $A_0$ $\Leftrightarrow C \subset acl(A_0)$*
**(2)** *$p$ ist basiert auf $A_0$ $\Leftrightarrow C \subset dcl(A_0)$*
**(3)** *Ist für $p' \in NF_p(acl(A))$ $I_{p'}$ eine unendliche Morleyfolge in $p'$, so $C \subset dcl(\{I_{p'} \,|\, p' \in NF_p(acl(A))\})$.*

Man beachte, daß die $I_{p'}$ in (3) so gewählt werden können, daß $\{I_{p'} \,|\, p' \in NF_p(acl(A))\}$ unabhängig über $A$ ist. Aus (2) folgt, daß "die" kanonische Basis die kleinste Menge ist, auf der $p$ basiert ist, $dcl(C) = \bigcap\{dcl(A_0) | p \text{ basiert auf } A_0\}$, es fehlt also nur noch ein

1.10 **Existenzsatz**
*Jeder Typ hat eine kanonische Basis.*

**Beweis**

Ist $\hat{p}(x)$ ein globaler Typ und $\varphi(x; y) \in L(\emptyset)$, so bezeichne $c(\hat{p}, \varphi) \in \mathcal{C}^{eq}$ den Parameter der durch $d_{\hat{p}}x\varphi(x; y)$ definierten Klasse $\{c \,|\varphi(x; c) \in \hat{p}\}$. Für einen beliebigen Typ $p$ ist dann $\{c(\hat{p}, \varphi)|\hat{p} \in NF_p\}$ eine endliche (also definierbare) Teilmenge von $\mathcal{C}$, $c(p, \varphi) \in \mathcal{C}$ sei der zugehörige Parameter.
Behauptung: $\{c(p, \varphi)|\varphi \in L(\emptyset)\}$ ist eine kanonische Basis von $p$

Beweis: Ein Automorphismus $\sigma$ fixiert diese Menge genau dann, wenn für jede Formel die Menge $\{c(\hat{p},\varphi)|\hat{p} \in NF_p\}$ invariant bleibt, das ist aber genau dann der Fall, wenn $\sigma$ die globalen nichtforkenden Fortsetzungen von $p$ permutiert. $\square$

Eine kanonische Basis von $p$ bezeichne ich mit "$Cb(p)$", damit sei im Zweifelsfall die gerade konstruierte kanonische Basis gemeint - das ist aber i.a. egal, da sich verschiedene kanonische Basen nur bis auf Interdefinierbarkeit unterscheiden, genauso bedeutet "$C = Cb(p)$" manchmal nur, daß $C$ eine kanonische Basis von $p$ ist. Noch zwei Schreibweisen: $Cb({}^{a}\!/_{A}) := Cb(tp({}^{a}\!/_{A}))$, $Cb^s({}^{a}\!/_{A}) := Cb(stp({}^{a}\!/_{A}))$. Achtung, in der Literatur gibt es oft nur kanonische Basen von stationären Typen, dort wäre dann $Cb({}^{a}\!/_{A}) = Cb(stp({}^{a}\!/_{A}))$, ist aber $tp({}^{a}\!/_{A})$ stationär, so ist natürlich $Cb^s({}^{a}\!/_{A}) = Cb({}^{a}\!/_{A})$. Einen kleinen, aber feinen Unterschied sollte man im Kopf behalten: $Cb({}^{a}\!/_{A}) \subset dcl(A)$, aber $Cb^s({}^{a}\!/_{A})$ liegt nur in $acl(A)$. Außerdem gilt $Cb({}^{a}\!/_{A}) \subset Cb({}^{ab}\!/_{A})$ und für $p \subset q$:

$$p \subset_{nf} q \Leftrightarrow acl(Cb(p)) \supset Cb(q), p \models_{nf} q \Leftrightarrow Cb(p) = Cb(q).$$

1.11 **Definition**
*Zwei beliebige Typen $p$ und $q$ heißen* parallell, *$p \| q$, wenn $NF_p = NF_q$.*

Zwei Typen sind genau dann parallell, wenn sie auf einem gemeinsamen Typ basiert sind (etwa der über der kanonischen Basis). Frage: gibt es für jeden Typ $p$ eine Menge $I$ von Realisierungen von $p$, so daß es einen zu $p$ parallelen Typ über $I$ gibt (das klapt, wenn $p$ stationär ist)?

### Basiertheit und Definierbarkeit

1.12 **dcl-Lemma**
**(1)** *Sei $tp({}^{a}\!/_{A_0}) \models_{nf} tp({}^{a}\!/_{A})$, dann gilt $a \in dcl(A) \Rightarrow a \in dcl(A_0)$*
**(2)** *Sei $A_0 \supset Cb({}^{aB}\!/_{A})$, dann gilt $a \in dcl^A(B) \Rightarrow a \in dcl^{A_0}(B)$*
**(3)** *Sei $a \in dcl^B(A)$, dann gilt $dcl^B(a) = dcl^B(Cb({}^{A}\!/_{Ba}))$.*

**Beweis**

**(1)** Wegen $a \in acl(A)$ und $tp({}^{a}\!/_{A_0}) \subset_{nf} tp({}^{a}\!/_{A})$ gilt $a \in acl(A_0)$, deshalb $tp({}^{a}\!/_{A_0}) \models tp({}^{a}\!/_{A})$ (keine Fortsetzung forkt und nach $A$ gibt es nur eine). Ist also $a$ die einzige Realisierung von $tp({}^{a}\!/_{A})$, so auch von $tp({}^{a}\!/_{A_0})$.
**(2)** Folgt aus (1) und dem Basiertheitslemma: $tp({}^{aB}\!/_{A})$ ist basiert auf $A_0$, also ist $tp({}^{a}\!/_{AB})$ basiert auf $A_0B$, jetzt (1) anwenden.
**(3)** $C := Cb({}^{A}\!/_{Ba}) \subset dcl(Ba)$, also zu zeigen: $a \in dcl(BC)$. Sei also $\sigma \in Aut_{BC}$,
Behauptung: $a^\sigma = a$
Beweis: Sei $A' \models tp({}^{A}\!/_{BC})$ mit $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{BC} a^\sigma a$, dann $A' \equiv_{BCa} A$ und $A' \equiv_{BCa^\sigma} A^\sigma$ (denn $tp({}^{A}\!/_{BC}) \models_{nf} tp({}^{A}\!/_{BCa})$ und $tp({}^{A^\sigma}\!/_{BC}) \models_{nf} tp({}^{A^\sigma}\!/_{BCa^\sigma})$), insbesondere $a \in dcl(A'B)$. Also $A'a^\sigma \equiv_{BC} A^\sigma a^\sigma \equiv_{BC} Aa \equiv_{BC} A'a$ und $a^\sigma \equiv_{A'B} a$, damit folgt die Behauptung. $\square$

### 1.1.5 Gute Eigenschaften von Typen

Ist $p \in S(A)$, so sei $q \in dcl(p) :\Longleftrightarrow q \in S(A)$ und es gibt $a \models p$, $b \models q$, so daß $b \in dcl^A(a)$. $dcl$ wird so zu einem Abschlußoperator auf $S(A)$, entsprechend kann $acl$ als ein solcher Operator aufgefasst werden. Eine Eigenschaft $E$ von Typen nenne ich *gut*, wenn sie die folgen beiden Bedingungen erfüllt:

$$p \models_{nf} q, \text{ so } Ep \iff Eq \qquad\qquad q \in dcl(p), \text{ so } Ep \Longrightarrow Eq$$

Manche Eigenschaften sind nur für nichtalgebraische Typen definiert, in diesem Fall verlange ich natürlich nur, daß sich die Eigenschaft auf die nichtalgebraischen Typen überträgt. Gute Eigenschaften übertragen sich auf Projektionen von Typen. Zwei stationäre Typen nenne ich interdefinierbar, wenn sie nichtforkende Fortsetzungen $p$ und $q$ auf eine gemeinsame Parametermenge haben, so daß $q' \in dcl(p')$ und $p' \in dcl(q')$. Diese Forderung ist echt schwächer, als die folgende: es gibt nichtforkende Fortsetzungen $p$ und $q$ auf eine gemeinsame Parametermenge $B$ und Realisierungen $a \models p$, $b \models q$, so daß $a$ und $b$ interdefinierbar sind über $B$.

Interdefinierbare Typen lassen sich dann nicht durch gute Eigenschaften unterscheiden und viele der wichtigen Eigenschaften von Typen sind gut, etwa

- Stationarität
- Rang $\leq \alpha$
- nicht orthogonal zu $q$ sein
- dominiert sein von $q$
- Regularität

Es gibt einige wichtige Eigenschaften, die sich zwar auf Restriktionen vererben, auf denen der Typ basiert sind, nicht aber auf beliebige Restriktionen, über denen der Typ nicht forkt. Eine prominente solche Eigenschaft ist Regularität (siehe z.B. [**?**, Beispiel 13.3]).

### 1.1.6 Realisierte Typen über invarianten Klassen

Da sich Saturiertheit und Homogenität nur auf Mengentypen beziehen, sind Typen über echten Klassen modelltheoretisch nicht so gut zu behandeln wie sloche über Mengen. Mit Hilfe der Definierbarkeit von Typen (genauer: der Existenz kanonischer Basen) sind jedoch realisierte Typen über invarianten Klassen schon durch einen Mengentyp isoliert und man kann einige angenehme Eigenschaften von Mengentypen retten. Das ist in dieser Arbeit wichtig, da ich viel mit echten Klassen arbeiten werde.

1.13 **Lemma**

*Es sei $X$ eine $A$-invariante Klasse, dann gilt für $C := Cb(a/_{AX})$ ($a$ beliebig):*

**(1)** $C \subset dcl^A(a) \cap dcl^A(X)$

**(2)** $tp(a/_{AC}) \models tp(a/_{AX})$

**(3)** $tp(a/_{AX})^{\mathfrak{C}}$ *ist eine $Aa$-Klasse*

**Beweis**

**(1)** Wegen der $A$-Invarianz von $X$ wird $tp(a/AX)$ von jedem $Aa$-Automorphismus fixiert, also $C \subset dcl(Aa)$, und $C \subset dcl(AX)$ gilt sowieso.

**(2)** Es sei $a' \models tp(a/AC)$, etwa $a' = a^\sigma$ ($\sigma \in Aut_{AC}$), wegen $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{AC} AX$ gilt dann $a^\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{AC} AX^\sigma$, aber $AX^\sigma = AX$, also forkt $tp(a'/AX)$ nicht über $AC$. Wegen der Basiertheit ist dann $tp(a'/AX) = tp(a/AX)$.

**(3)** Wegen (2) ist $tp(a/AX)^C = tp(a/AC)^C$ und wegen (1) gibt es für jedes $c \in C$ eine $A$-Funktion $f_c$, so daß $f_c(a) = c$. Es sei $\Pi(x,y) := \{f_c(x) = f_c(y) \mid c \in C\} \subset L(A)$.

Behauptung:$tp(a/A)(x) \cup \Pi(x,a)$ typdefiniert $tp(a/AC)^C$
Beweis: Für beliebiges $a'$ gilt $a' \models \Pi(x,a) \;\Leftrightarrow$ für alle $c \in C$ : $f_c(a') = c$. Sei nun $\sigma \in Aut_{AC}$, so $a^\sigma \models tp(a/A)$ und für $c \in C$ gilt $f_c(a^\sigma) = f_c(a)^\sigma = c^\sigma = c$, also $a^\sigma \models tp(a/A) \cup Pi(x,a)$. Ist andererseits $\sigma \in Aut_A$, so daß $a^\sigma \models \Pi(x,a)$, dann $a^\sigma C = a^\sigma(f_c(a^\sigma))_{c\in C} = a^\sigma(f_c(a)^\sigma)_{c\in C} \equiv_A a(f_c(a))_{c\in C} = aC$, also $a^\sigma \equiv_{AC} a$, das beweist die Behauptung.

Insgesammt sieht man, daß $tp(a/AX)^C$ durch $tp(a/A)(x) \cup \Pi(x,a)$ $A$-typdefiniert wird. □

Zum Abschluß beweise ich die anfangs erwähnte starke Homogenität über invarianten Klassen:

1.14 **Satz**
*Es sei $\mathcal{M}$ ein saturiertes Modell der stabilen Theorie $T$ und $Q \subset \mathcal{M}$ sei eine $A$-invariante Klasse ($A \subset \mathcal{M}$ Menge). Sind dann $B_1$ und $B_2$ (mengengroße) Tupel in $\mathcal{M}$ mit $B_1 \equiv_{AQ} B_2$, so gibt es einen Automorphismus $\sigma \in Aut_{AQ}(\mathcal{M})$, so daß $B_1^\sigma = B_2$.*

**Beweis**

OE $A = \emptyset$ (da $A$ klein ist, ändert das Zufügen von $A$ zur Sprache nichts an den Voraussetzungen). Ich zeige, daß es für alle $b_1$ ein $b_2$ gibt, so daß $B_1 b_1 \equiv_Q B_2 b_2$. Mit den üblichen Techniken konstruiert man dann den Automorphismus (das Modell aufzählen und hin&her die Elemente wählen). Es sei also $b_1 \in \mathcal{M}$: wegen des Lemmas oben (1.13) gilt dann für $C_1 := Cb(b_1/B_1 Q)$

$$tp(b_1/B_1 C) \models tp(b_1/B_1 C_1 Q) \quad \text{und} \quad C_1 \subset dcl(B_1 Q)$$

Wegen $C_1 \subset dcl(B_1 Q)$ gibt es ein $C_2$ mit $B_1 C_1 \equiv_Q B_2 C_2$, denn für $c_1 \in C_1$, $c_1 \in dcl(B_1 Q_0)$ ($Q_0 \subset Q$ endlich) sei $c_2$ mit der gewöhnlichen Homogenität gefunden (oder einfach ein Konjugat von $c_1$), das so entstehende $C_2$ tut's. Nun sei $T' := Th(\mathcal{M}, B_1 C_1 Q)$, $\Pi := tp(b_1/B_1 C_1)$ und $p := tp(b_1/B_1 C_1 Q)$. Man beachte, daß alle auftretenden Formeln nicht die Elemente von $B_1 C_1 Q b_1$ enthalten, sondern Konstantensymbole für sie. Außerdem ist $\Pi$ ein partieller und $p$ ein vollständiger Typ $T'$.

$B_1C_1 \equiv_Q B_2C_2$ bedeutet, daß $(\mathcal{M}, B_2C_2Q)$ ein Modell von $T'$ ist und wegen $tp({}^{b_1}/_{B_1C}) \models tp({}^{b_1}/_{B_1C_1Q})$ gilt $T' \cup \Pi \vdash p$. Da $\mathcal{M}$ saturiert ist, wird $\Pi$ in $(\mathcal{M}, B_2C_2Q)$ realisiert, etwa durch $b_2$. Dann wird auch $p$ in $(\mathcal{M}, B_2C_2Q)$ durch $b_2$ realisiert und $(\mathcal{M}, B_1C_1Qb_1)$ und $(\mathcal{M}, B_2C_2Qb_2)$ bleiben elementar äquivalent, also $B_1b_1 \equiv_Q B_2b_2$. $\square$

## 1.2 Funktionen

Ich werde Funktionen mit ihren Graphen identifizieren, deshalb sind zwei Funktionen schon dann identisch, wenn ihre Definitionsbereiche identisch sind und sie die gleiche Wirkung haben (d.h. jedem Argument den selben Wert zuordnen). Trotz dieser Identifizierung werde ich natürlich die gewohnten Sprechweisen, etwa "der Graph von $f$" beibehalten, "$f : X \to Y$ ist surjektiv" bedeutet dann ganz einfach nur "$Y = f(X)$".

### 1.2.1 Typdefinierbare Funktionen

Ich habe hier die folgende Perspektive eingenommen: als Teilklassen des Monsters sind Funktionen (d.h. ihre Graphen) noch keine modelltheoretischen Objekte und man muß schauen, wie sie beschaffen sein müssen, daß sie zu solchen werden. Die Antwort ist klar, der Graph muß eine typdefinierkase Klasse sein. Der Ausführlichkeit zuliebe habe ich noch einen Zwischenschritt eingeführt, indem ich den Blick auf die Wirkung von Funktionen richte.

#### $A$-Funktionen

Es sei $X$ stets eine nichtleere Teilklasse von $\mathcal{C}$

2.1 **Definition**
*$f : X \to \mathcal{C}$ sei eine Funktion und $\Phi(x, y)$ ein partieller Typ.*
**(1)** $\Phi(x, y)$ definiert die Wirkung von $f :\Longleftrightarrow Graph(f) = \Phi(x, y)^{\mathcal{C}} \cap (X \times \mathcal{C})$
**(2)** *$f$ heißt $A$-*(typ)definierbar*, wenn $Graph(f)$ $A$-(typ)definierbar ist.*

2.2 **Lemma**
*Sei $f : X \to \mathcal{C}$ eine Funktion, dann gilt*
**(1)** *Ist $f$ $A$-typdefinierbar, so gibt es schon eine $A$-Formel $\varphi(x, y)$, welche die Wirkung von $f$ definiert.*
**(2)** *$f$ ist $A$-(typ)definierbar $\Leftrightarrow$ $X$ und die Wirkung von $f$ sind $A$-(typ)definierbar*
**(3)** *Ist $f$ $A$-(typ)definierbar, so auch $Bild(f)$.*

**Beweis**

**(1)** $\Gamma(x, y)$ typdefiniere $Graph(f)$, dann gilt $\Gamma(x, y_1) \cup \Gamma(x, y_2) \models y_1 = y_2$. Mit Kompaktheit findet man schon eine Formel $\varphi(x, y) \in \Gamma(x, y)$, so daß $\varphi(x, y_1) \cup \varphi(x, y_2) \models y_1 = y_2$, diese tut's.

**(2)** "$\Rightarrow$": $Graph(f)$ sei typdefiniert durch $\Gamma(x, y)$, dann definiert $\Gamma(x, y)$ die Wirkung von $f$ und $X$ ist die Projektion von $Graph(f)$ auf die $x$-Koordinate, also (Saturiertheit) typdefiniert durch $\exists y\, \Gamma(x, y)$ (genauso für "definierbar").
"$\Leftarrow$": Die Wirkung von $f$ sei definiert durch $\Phi(x, y)$ und $X$ sei typdefiniert durch $\Pi(x)$, $Graph(f)$ ist dann typdefiniert durch $\Pi(x) \cup \{\Phi(x, y)\}$. Wegen

(1) kann $\Phi(x,y)$ durch eine Formel ersetzt werden, ist dann auch $\Pi(x)$ nur eine Formel, so ist $Graph(f)$ definierbar.

**(3)** $Bild(f)$ ist die Projektion von $Graph(f)$ auf die $y$-Koordinate, die Behauptung folgt also wegen der Saturiertheit. □

**Beispiel (Kanonische Projektionen und uniforme Familien):**
Ist $E$ eine $A$-Äquivalenzrelation auf der $A$-Klasse $X$, so ist $pr_{E|X}$ $A$-typdefinierbar. Eine Familie $F = \{\mathcal{D}_i | i \in I\}$ definierbarer Klassen induziert die Teilklasse $\{c_{\mathcal{D}_i} | i \in I\}$ des Monstermodells. Eine gute Kontrolle über eine solche induzierte Klasse hat man, wenn man mit einer uniformen Familie definierbarer Klassen startet. Es sei $\varphi(x;z)$ eine beliebige Formel, dann heißt eine Familie $F$ definierbarer Klassen $\varphi(x;z)$-*uniform*, wenn $F \subset \{\varphi(x,c)^{\mathcal{C}} \mid c \in \mathcal{C}\}$. Es gibt dann eine Klasse $X$ von Parametern, so daß

$$F = F_{\varphi(x;z),X} := \{\varphi(x,c)^{\mathcal{C}} \mid c \in X\}$$

Die Wirkung der Funktion $cp : X \to \mathcal{C}$, die jedem $c \in X$ den Parameter von $\varphi(x,c)$ zuordnet, wird dann definiert durch $\exists x\ (\varphi(x,y) \wedge pr_{\varphi(x,y)}(x,y) = z)$ (siehe Abschnitt 1.1.2). Eine $A$-uniforme Familie ist eine Familie $F_{\varphi(x;z),X}$, wobei $\varphi(x;z)$ eine $A$-Formel ist. Ist dann $X$ $A$-(typ)definierbar, so auch $cp : X \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\{\varphi(x,c) \mid c \in X\} \arrow[r, "\text{Realisierungen}"] & \{\varphi(x,c)^{\mathcal{C}} \mid c \in X\} \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{Parameter}\\ \text{der Klasse}\end{array}"] \\
X \arrow[u, "\varphi(x;z)"] \arrow[r, "cp"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

im Monster

2.3 **Lemma**
*Für eine typdefinierbare Funktion $f : X \to \mathcal{C}$ sind äquivalent:*
**(1)** *$f$ ist $A$-typdefinierbar*
**(2)** *Für alle $a \in X, \sigma \in Aut_A$ gilt: $a^\sigma \in X$ und $f(a^\sigma) = f(a)^\sigma$*

**Beweis**
Da $Graph(f)$ typdefinierbar ist, ist er genau dann $A$-typdefinierbar, wenn er $A$-invariant ist und letzteres ist gerade die Aussage von (2). □

2.4 **Definition**
*Es seien $\Phi(x,y)$ und $\Pi(x)$ partielle Typen:*
**(1)** $\Phi(x,y)$ *heißt* funktional auf $X$, *wenn es für alle $a \in X$ genau ein $b \in \mathcal{C}$ gibt, so daß $(a,b) \models \Phi(x,y)$.*
**(2)** $\Phi(x,y)$ *heißt* funktional auf $\Pi(x)$, *wenn* $\Pi(x) \models \exists y \Phi(x,y)$ *und*
$\Pi(x) \cup \Phi(x,y_1) \cup \Phi(x,y_2) \models y_1 = y_2$

Ich habe zwei Begriffe eingeführt, um einerseits von funktionalen Typen auf beliebigen Klassen $X$, andererseits von funktionalen Typen auf nicht notwendig realisierten Typen $\Pi$ sprechen zu können. Ist aber $\Pi(x)^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$, so ist ein partieller Paartyp genau dann funktional auf $\Pi(x)$, wenn er funktional auf $\Pi(x)^{\mathcal{C}}$ ist.

Ein auf $X$ funktionaler partieller Paartyp $\Phi$ induziert die Funktion $f_{\Phi,X}$ auf $X$, ist $X$ typdefinierbar, so auch $f_{\Phi,X}$ und $\Phi$ kann dann durch ein $\varphi \in \Phi$ ersetzt werden. Da ich mich eigentlich nur für typdefinierbare Funktionen interessiere, reicht es also, sich auf funktionale Formeln zu beschränken. $\varphi(x,y)$ ist genau dann funktional auf $\Pi(x)$, wenn $\Pi(x) \models \exists! y \varphi(x,y)$ und wegen Kompaktheit gibt es ein $\pi(x) \in \Pi(x)$, so daß $\varphi$ funktional auf $\pi$ ist. $\hat{\varphi}(x,y) := \pi(x) \wedge \varphi(x,y)$ definiert dann den Graphen.

Eine $A$-typdefinierbare Funktion nenne ich kurz *$A$-Funktion*, die $A$-Funktionen sind genau die $f_{\varphi,X}$, wobei $X$ eine $A$-Klasse ist und $\varphi = \varphi(x,y)$ eine auf $X$ funktionale $A$-Formel. "$x \in X \wedge \varphi(x,y)$" typdefiniert $Graph(f_{\varphi,X})$ und $\exists x(x \in X \wedge \varphi(x,y))$ typdefiniert $Bild(f_{\varphi,X})$. Bilder und Urbilder von $A$-Klassen unter $A$-Funktionen sind wieder $A$-Klassen und jede $A$-Funktion ist die Restriktion einer $A$-definierbaren Funktion auf eine $A$-Klasse.

Ist $\hat{\Pi}(x) \supset \Pi(x)$, so ist $\varphi$ auch funktional auf $\hat{\Pi}$ und $f_{\varphi,\hat{\Pi}}$ ist gerade die Restriktion von $f_{\varphi,\Pi}$ auf $\hat{\Pi}^{\mathcal{C}}$. So "operiert" $f = f_{\varphi,\Pi}$ auf den (partiellen) Fortsetzungen und insbesondere auf den globalen (vollständigen) Fortsetzungen von $\Pi$:

$$f(\hat{\Pi}) \text{ sei der partielle Typ } \exists x(\hat{\Pi}(x) \wedge \varphi(x,y)$$

Ist $\hat{\Pi}$) ein partieller Mengentyp, so ist wegen Saturiertheit $f(\hat{\Pi})^{\mathcal{C}} = f(\hat{\Pi}^{\mathcal{C}}) = Bild(f_{\varphi,\hat{\Pi}})$.

Ist $f : X \to \mathcal{C}$ eine Funktion, $\sigma$ ein Automorphismus und definiert $\varphi(x,y)$ die Wirkung von $f$, so definiert $\varphi^\sigma$ die Wirkung von $\sigma \circ f \circ \sigma^{-1} : X^\sigma \to \mathcal{C}$, denn $Graph(\sigma \circ f \circ \sigma^{-1}) = Graph(f)^\sigma$. Ist $f$ eine typdefinierbare Funktion, so bezeichne "$f(x) = y$" eine die Wirkung von $f$ definierende Formel. Spreche ich von "$f(x) = y$", so sei natürlich vorausgesetzt, daß $f(x) = y \models \exists! y f(x) = y$ (sonst macht die Notation keinen Sinn). Natürlich kann die Wirkung einer typdefinierbaren Funktion durch verschiedene Formeln definiert sein, deshalb sollte man - besonders wenn es um die verwendeten Parameter geht - Funktion und Formel auseinanderhalten.

Es sei f eine definierbare Funktion und $c_f \in \mathcal{C}$ sei der Parameter der (definierbaren) Klasse $Graph(f)$. $c_f$ ist unabhängig von der Wahl der $f$ definierenden Formel und für jede weitere definierbare Funktion $f'$ gilt: $c_f = c_{f'} \Leftrightarrow f = f'$, außerdem ist $f$ genau dann $A$-definierbar, wenn $c_f \in dcl(A)$. Das ganze klappt nicht, wenn der Definitionsbereich nur typdefinierbar ist, denn dann ist der Graph nur noch typdefinierbar, hat also keinen zugehörigen Parameter. Da hilft es auch nicht, die Funktion auf eine definierbare Klasse fortzusetzen, denn diese Fortsetzung ist abhängig von der $f$ definierenden Formel.

### Funktionstypen und vollständige Funktionen

2.5 **Definition**

**(1)** *Ein Paartyp $p(x,y)$ nenne ich* Funktionstyp*, wenn er eine auf $p(x)$ funktionale Formel enthält, $p(y)$ nenne ich dann den* Bildtyp von $p$.

**(2)** *Eine Funktion heißt $A$*-vollständig*, wenn ihr Graph $A$-vollständig ist.*

2.6 **Lemma**

*Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

**(1)** $tp({}^{ab}/_{A})$ *ist ein Funktionstyp*

**(2)** $tp({}^{ab}/_{A})^{\mathcal{C}}$ *ist Graph einer Funktion*

**(3)** *Es gibt eine $A$-Funktion $f : tp({}^{a}/_{A}) \to tp({}^{b}/_{A})$ mit $f(a) = b$*

**(4)** $b \in dcl^A(a)$

**Beweis**

$b \in dcl^A(a) \Leftrightarrow$ es gibt eine $A$-Formel $\varphi(x,y)$, so daß $\varphi(a,y)^{\mathcal{C}} = \{b\}$, diese Formel ist dann funktional auf $tp({}^{a}/_{A})$, der Rest ist damit klar. □

Eine vollständige $A$-Funktion $f : tp({}^{a}/_{A}) \to tp({}^{f(a)}/_{A})$ ist genau dann injektiv, wenn $a$ und $f(a)$ $A$-interdefinierbar sind, $f$ ist dann schon bijektiv und in diesem Fall nenne ich den Funktionstyp invertierbar. Die Eigenschaft, Funktionstyp zu sein, kann bei nichtforkender Restriktion zwar verlorengehen, aber im stationären Fall ist diese Eigenschaft $\|$-invariant. Es gilt sogar

2.7 **Lemma**

**(1)** *Fortsetzungen von Funktionstypen sind Funktionstypen*

**(2)** *Ist $p(x,y)$ ein Funktionstyp und basiert auf $p_0(x,y)$, so ist auch $p_0(x,y)$ ein Funktionstyp*

**Beweis**

(1) ist klar und (2) folgt mit dem *dcl*-Lemma (1.12) und der Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (4) von oben (2.6). □

2.8 **Lemma**

*Es sei $f : X \to \mathcal{C}$ eine Funktion, dann gilt:*

*$f$ ist $A$-vollständig $\Leftrightarrow$ $X$ ist $A$-vollständig und die Wirkung von $f$ ist $A$-definierbar*

**Beweis**

Projektionen von $A$-vollständigen Klassen sind $A$-vollständig. Ist $X = tp({}^{a}/_{A})^{\mathcal{C}}$ und $f$ $A$-definierbar, so ist $Graph(f) = tp({}^{a,f(a)}/_{A})^{\mathcal{C}}$. □

Achtung, eine typdefinierbare Funktion auf einem vollständigen Typ muß nicht vollständig sein. Die vollständigen Funktionen sind das algebraische Pendant zu den realisierten Funktionstypen, denn offensichtlich liefert $p(x,y) \mapsto p(x,y)^{\mathcal{C}}$ eine 1:1 Korrespondenz zwischen realisierten Funktionstypen (modulo logischer Implikation) und vollständigen Funktionen. Wegen der Invarianz (2.3) ist eine vollständige Funktion schon durch die Wirkung auf einen beliebigen Punkt (und ihren Definitionsbereich) festgelegt, d.h. für vollständige Funktionen $f$ und $f'$ auf $p$ gilt: $f = f' \Leftrightarrow$ es gibt ein $a \models p : f(a) = f'(a)$. Die vollständigen $A$-Funktionen sind genau die (bezüglich der Inklusion) minimalen $A$-Funktionen und insofern die Bausteine für alle weiteren $A$-Funktionen, denn da $A$-invariante Klassen stets eine disjunkte Vereinigung von $A$-vollständigen Klassen sind, gilt das

2.9 **Lemma**
*Es sei $f$ eine Funktion auf $X$: ist $X$ $A$-invariant und die Wirkung von $f$ ist $A$-definierbar, so ist $f$ disjunkte Vereinigung von vollständigen $A$-Funktionen.*

### Die Kategorie der $\mathcal{C}$-Klassen

Sind $f$ und $g$ komponierbare Funktionen, deren Wirkungen durch die Formeln $\varphi(x,y)$ bzw. $\psi(y,z)$ definiert werden, so definiert $(\psi \circ \varphi)(x,z) := \exists y(\varphi(x,y) \wedge \psi(y,z))$ die Wirkung von $g \circ f$ und entsprechend ist die Komposition von $A$-Funktionen wieder eine $A$-Funktion und man erhält die Kategorie der typdefinierbaren Klassen, deren Morphismen typdefinierbare Funktionen sind. Inerhalb dieser Kategorie kann man einige der gewohnten Konstruktionen machen, d.h. die Typdefinierbarkeit bleibt dabei erhalten.

2.10 **Lemma**
*Es seien $X$ und $Y$ $A$-Klassen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to \mathcal{C}$ Funktionen, so daß $g \circ f$ eine $A$-Funktion ist:*
*(1) Ist $f$ eine $A$-Surjektion, so ist $g$ eine $A$-Funktion*
*(2) Ist $g$ eine $A$-Injektion, so ist $f$ eine $A$-Funktion*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

**Beweis**

(1) Es gilt für alle $y \in Y : g(y) = z \Leftrightarrow$ (es gibt ein $x \in X : f(x) = y$ und $(g \circ f)(x) = z$). Sind $f$ und $g \circ f$ $A$-Funktionen, so wird $Graph(g)$ $A$-typdefiniert durch "$Y(y) \wedge \exists x\ (X(x) \wedge f(x) = y \wedge (g \circ f)(x) = z)$"
(2) Es gilt für alle $x \in X : f(x) = y \Leftrightarrow$ (es gibt ein $z \in Z : (g \circ f)(x) = z$ und $g(y) = z$). Jetzt analog zu (1). $\square$

**Anwendung von (2)**
Die von einer $A$-Funktion $f$ induzierte Faseräquivalenzrelation $E_f$ auf dem Definitionsbereich $X$ ist $A$-definiert durch $f(x_1) = f(x_2)$. Da $X$ $A$-typdefinierbar ist, stammt $E_f$ von einer globalen $A$-Äquivalenzrelation (Kompaktheit) und hat somit eine eigene Sorte und die $A$-Projektion $pr_{E_f}$. $X/E_f = \{pr_{E_f}(a) |\ a \in X\}$ ist dann (als Bild einer $A$-Klasse unter einer $A$-Funktion) $A$-Klasse und die induzierte Bijektion $\bar{f} : X/E_f \to f(X)$ ist $A$-definierbar.

Das geht auch ganz allgemein:
$f : X \to \mathcal{C}$ sei eine Funktion, $E_1$, $E_2$ seien $A$-Äquivalenzrelationen auf $X$ bzw. auf $\mathcal{C}$ und $f$ sei $(E_1, E_2)$-verträglich (also stets $aE_1b \Rightarrow f(a)E_2f(b)$):
(1) $X/E_1$ und $f(X)/E_2$ sind $A$-Klassen
(2) die induzierte Surjektion $\tilde{f} : X/E_1 \to f(X)/E_2$ ist $A$-definierbar.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "pr_2"] \\
X/_{E_1} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathcal{C}/_{E_2}
\end{tikzcd}$$

**Uniforme Familien**

Ich gebe nun einige Beispiele, was im Fall uniformer Familien passiert. Eine $A$-uniforme Familie von Funktionen ist eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen, zu der es eine $A$-Formel $\varphi(x, y; z)$ gibt, so daß die Wirkung eines jeden $f \in \mathcal{F}$ durch $\varphi(x, y, c_f)$ definiert wird, für ein geeignetes $c_f \in \mathcal{C}_z$. Die Wirkung der Zuordnung $(c_f, a) \mapsto f(a) =: F(c_f, a)$ ist dann $A$-definiert durch $y = f(a) \Leftrightarrow \varphi(a, y, c_f)$ (der Definitionsbereich ist $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{c_f\} \times dom(f)$). Ist dann $\mathcal{P}_\mathcal{F} = \{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$ und haben alle $f \in \mathcal{F}$ den Definitionsbereich $X$, so ist also die Wirkung der Funktion $F : \mathcal{P}_F \times X \to \mathcal{C}$ $A$-definierbar und falls $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ und $X$ $A$-Klassen sind, so ist $F$ eine $A$-Funktion. Man beachte, daß dann für jedes feste $c_f$ $F(c_f, \cdot) : X \to \mathcal{C}$ die $A$-Funktion $f$ ist, der Witz hier ist, daß man eine uniform (für alle $c_f$) definierte Funktion $F$ hat.
Ein Tupel $(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ von Funktionenfamilien nenne ich *komponierbar*, wenn für alle $f_i \in \mathcal{F}_i$ die Komposition $f_n \circ ... \circ f_1$ definiert ist. $\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$ sei dann die Familie aller dieser Kompositionen. Ist $(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ ein komponierbares Tupel von $A$-uniformen Funktionenfamilien, so ist auch $\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$ $A$-uniform, und die Komposition der Funktionen entspricht der Konkatenation der Parameter:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_1(x_1, x_2, c_1), ..., \varphi(x_n, x_{n+1}, c_n) & \mapsto & (\varphi_n \circ ... \circ \varphi_1)(x_1, x_{n+1}, c_1...c_n) \\
\\
(c_1, ..., c_n) & \mapsto & c_1...c_n \\
\\
\mathcal{P}_{\mathcal{F}_1} \times ... \times \mathcal{P}_{\mathcal{F}_n} & \overset{Konkatenation}{\rightarrow} & \mathcal{P}_{\mathcal{F}_1 \circ ... \circ \mathcal{F}_n}
\end{array}$$

Es sei wieder $\varphi(x, y; z)$ eine $A$-Formel, $\mathcal{P}$ eine $A$-Klasse und $\mathcal{F} = \{\varphi(x, y, c)^\mathcal{C} \mid c \in \mathcal{P}\}$ eine uniforme Familie von (definierbaren) Funktionen mit der $A$-Klasse $X$ als gemeinsamem Definitionsbereich, $f_c \in \mathcal{C}$ sei der Parameter von $\varphi(x, y, c)$.

Die Zuordnung $c \mapsto f_c$ ist also gerade eine kanonische Projektion und $f_c = f_{c'} \Leftrightarrow \varphi(x,y,c)^{\mathcal{C}} = \varphi(x,y,c')^{\mathcal{C}}$. Für $a \in X$ sei $f(c,a)$ das $b$ mit $\varphi(a,b,c)$. Mit der Notation von oben hat man dann die folgende kommutative Situation, $f$ ist dann auch eine $A$-Funktion.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \times X \arrow[d, "pr \times id"'] \arrow[dr, "F"] & \\
f(\mathcal{P}) \times X \arrow[r, "f"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Wir haben also die Funktion $F$, die u.a. auf Parametern $\mathcal{P}$ operiert, zur Funktion $f$ faktorisiert, die auf den Funktionen selber, das heißt auf den repräsentierenden Elementen $f_c$, operiert. Auch die Komposition findet man auf der Ebene der repräsentierenden Elemente wieder: Es seien $F_i = \{\varphi_i(x,y,c)^{\mathcal{C}} \mid c \in \mathcal{P}_i\}$ uniforme Familien, alles seien $A$-Objekte. $(F_1, ..., F_n)$ sei komponierbar, $F = F_n \circ ... \circ F_1$ und $\mathcal{P}$ die entsprechende Parameterklasse, also die konkatenierten Tupel aus $\mathcal{P}_1 \times ... \times \mathcal{P}_n$, dann faktorisiert die Konkatenation über den kanonischen Projektionen:

$$(f_{1,c_1}, ..., f_{n,c_n}) = (f_{1,c'_1}, ..., f_{n,c'_n}) \Rightarrow f_{c_1 ... c_n} = f_{c'_1 ... c'_n}$$

Definiert man dann $f_{1,c_n} \circ ... \circ f_{n,c_1} := f_{c_1 ... c_n}$, so wird $\circ : f_1(\mathcal{P}_1) \times ... \times f_n(\mathcal{P}_n) \rightarrow f(\mathcal{P})$ zu einer $A$ Funktion.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_1 \times ... \times \mathcal{P}_n \arrow[r, "\text{Konkatenation}"] \arrow[d, "pr"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "pr"] \\
f_1(\mathcal{P}_1) \times ... \times f_n(\mathcal{P}_n) \arrow[r, "\text{Komposition}"'] & f(\mathcal{P})
\end{tikzcd}$$

### 1.2.2 Die stationäre Theorie: Keime von Funktionen

Definierbare Funktionen leben, wie gesehen, in $\mathcal{C}$, und hat man uniforme Familien, so ist die Situation noch besser. Andererseits bricht diese Theorie zusammen, wenn man nur noch mit typdefinierbare Funktionen arbeitet. Es ist aber möglich, unter Ausnutzung der Definierbarkeit von Typen (Stabilität), für definierbare Funktionen auf stationären Typen eine ähnliche Theorie zu entwickeln. Ich muß also erst sagen, welche Elemente von $\mathcal{C}$ die Funktionen repräsentieren (und in welchem Sinne sie das tun), dann kann ich schauen, was bei uniformen Familien geschieht. Nachdem ich die Theorie für die modelltheoretischen Objekte, nämlich "$p$-funktionale Formeln" und "$p$-Funktionstypen" dargestellt habe, werde mich noch kurz den eher algebraischen Objekten zuwenden, nämlich den "$p$-Funktionen". Die in diesem Kontext adäquaten algebraischen Objekte sind dann Äquivalenzklassen von "generisch identischen" $p$-Funktionen, ihnen entsprechen globale $p$-Funktionstypen (bzw. deren Parallelitätsklassen). Repräsentiert werden diese Objekte durch Elemente von $\mathcal{C}$, "Keime", die mit Hilfe der Definierbarkeit von Typen gewonnen werden. Im Gegensatz zum definierbaren Fall gibt es allerdings i.a. weder kanonische Keime, noch lassen sich die repräsentierten Objekte aus den Keimen zurückgewinnen.
Es sei $p = p(x)$ ein stationärer Typ, C seine kanonische Basis, $\hat{p}$ seine globale nichtforkende Fortsetzung und $p_0 := p \| C$. (Zur Erinnerung: "$p|A$" bezeichnet die nichtforkende Fortsetzung von $p$ auf $A \cup dom(p)$, "$p\|A$" bezeichnet den zu $p$ parallelen Typ in S(A), wobei stillschweigend angenommen wird, daß $p$ A-definierbar ist.) Auch alle anderen Typen seien stationär.

#### $p$-funktionale Formeln

2.11 **Definition**

**(1)** *Eine Formel* $\varphi(x,y)$ *nenne ich* $p$-funktional, *wenn* $\varphi(x,y)$ *funktional auf* $\hat{p}(x)$ *ist (wenn also* $\exists! y \varphi(x,y) \in \hat{p}(x)$*)*
**(2)** *Zwei p-funktionale Formeln* $\varphi(x,y)$ *und* $\psi(x,y)$ *nenne ich* $p$-äquivalent,

$$\varphi \sim_p \psi :\Longleftrightarrow \forall y, y'(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,y') \rightarrow y = y') \in \hat{p}(x)$$

$p$-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der $p$-funktionalen Formeln und wegen der Funktionalität gilt $\varphi \sim_p \psi \;\Leftrightarrow \exists y(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,y)) \in \hat{p}$. Die Klasse der $p$-funktionalen Formeln ist $C$-invariant.

2.12 **Lemma**

*Es sei* $\varphi(x,y;z) \in L(\emptyset)$*:*
*Die Klasse* $\mathcal{D}_\varphi$ *der Parameter c, für die* $\varphi(x,y,c)$ *p-funktional ist, ist* $C$*-definierbar und* $c \sim_p c' :\Longleftrightarrow \varphi(x,y,c) \sim_p \varphi(x,y,c')$ *definiert eine* $C$*-Äquivalenzrelation auf* $\mathcal{D}_\varphi$*.*

**Beweis**

$d_{\hat{p}}x\exists! y\varphi(x,y;z) \in L(C)$ definiert die Klasse $\mathcal{D}_\varphi$, denn für beliebiges $c$ gilt: $c \models d_{\hat{p}}x\exists! y\varphi(x,y) \Leftrightarrow \exists! y\varphi(x,c) \in \hat{p} \Leftrightarrow \varphi(x,c)$ ist $p$-funktional. Genauso sieht man, daß $\sim_p$ durch $d_{\hat{p}}x(\exists y(\varphi(x,y;z) \wedge \varphi(x,y;z')))$ definiert wird. □

2.13 **Definition**

*Der* Keim *einer p-funktionalen Formel $\varphi(x,y,c)$ sei der Parameter $\tilde{c}$ der definierbaren Klasse $(z \sim_p c)^{\mathcal{C}}$.*

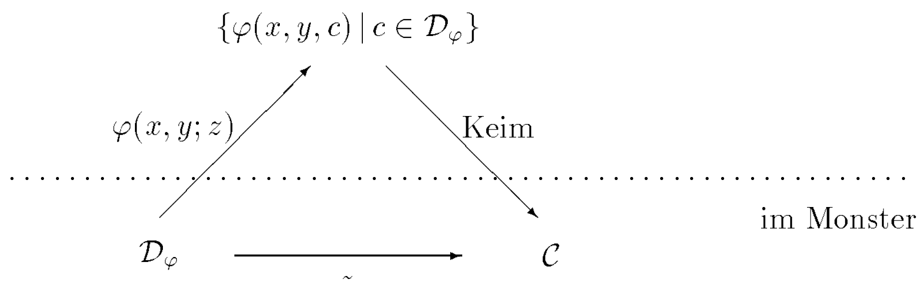
Es sei von nun an $A \supset Cb(p)$.

2.14 **Korollar**

*Für jede A-Formel $\varphi(x,y;z)$ gilt:*

**(1)** *Die Funktion $\tilde{\ }$ auf $\mathcal{D}_\varphi$, die jedem $c$ den Keim von $\varphi(x,y,c)$ zuordnet, ist A-definierbar.*

**(2)** *Für $c \in \mathcal{D}_\varphi$ und $\sigma \in Aut_A$ gilt: $\sigma$ fixiert $\tilde{c} \Leftrightarrow \varphi(x,y,c) \sim_p \varphi(x,y,c^\sigma)$*




**$p$-Funktionstypen**

2.15 **Lemma**

*Ein Funktionstyp $r(x,y)$ ist genau dann stationär, wenn $r(x)$ stationär ist, dann ist auch $r(y)$ stationär.*

**Beweis**

Das folgt alles unmittelbar aus dem Basiertheitslemma: Projektionen stationärer Typen sind stationär, ist andererseits $r = tp(ab/A)$ und $b \in dcl^A(a)$, dann ist mit $\mathrm{tp}(a/A)$ auch $\mathrm{tp}(ab/A)$ stationär. □

2.16 **Definition**

**(1)** *Einen Funktionstyp $r(x,y)$ nenne ich $p$-*Funktionstyp*, wenn $r$ stationär ist und $r(x) \| p$*

**(2)** *Es sei $r$ ein p-Funktionstyp: $\kappa \in \mathcal{C}$ heißt ein* Keim von *$r$, wenn $C\kappa$ eine kanonische Basis von $r$ ist.*

**(3)** *Für eine p-funktionale Formel $\varphi(x,y)$ sei $r_{\varphi(x,y)}$ der von $\hat{p}(x) \wedge \varphi(x,y)$ implizierte globale Typ.*

Die Beziehung "$r$ ist ein $p$-Funktionstyp" ist fur $r$ und $p$ $\|$-invariant, insbesondere können $p$-Funktionstypen mit ihrer $\|$-Klasse identifiziert werden. Ein beliebiger stationärer Paartyp $r(x,y)$ ist folglich genau dann ein $p$-Funktionstyp, wenn es eine $p$-funktionale Formel $\varphi(x,y) \in r$ gibt, so daß $r_\varphi \supset_{nf} r$. Ist dann $\varphi \in L(A)$, so ist $r_\varphi$ $AC$-definierbar und für jedes $a \models p|A$ gibt es ein $b \in \mathcal{C}$, so daß $r_\varphi = tp(^{ab}/_{AC})|\mathcal{C}$. Die globale nichtforkende Fortsetzung des stationären Typs $r(y)$ nenne ich den *Bildtyp* von $r$.

2.17 **Lemma**
*Es seien $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ p-funktional: $\varphi \sim_p \psi \ \Leftrightarrow r_\varphi = r_\psi$*

**Beweis**

Es sei alles definiert über $A \supset C$ und $r_\varphi \| tp(^{ab}/_A)$, $r_\psi \| tp(^{ab'}/_A)$:
Ist $\varphi \sim_p \psi$, dann $\forall y, y' \ (\varphi(x,y) \wedge \psi(x,y') \to y = y') \in p\|A = tp(^a/_A)$, also $\models \forall y, y' \ (\varphi(a,y) \wedge \psi(a,y') \to y = y')$. Aber $(b,b') \models \varphi(a,y) \wedge \psi(a,y')$, also $b = b'$ und $r_\varphi = r_\psi$.
Ist umgekehrt $r = r'$, so $\mathrm{tp}(^{ab}/_A) = \mathrm{tp}(^{ab'}/_A)$, also $b' \models tp(^b/_{Aa})$. Aber $b \in dcl^A(a)$ (2.6), deshalb $b' = b$ und $(a,b) \models \varphi(x,y) \wedge \psi(x,y)$, also $\exists y \ (\varphi(x,y) \wedge \psi(x,y)) \in tp(^a/_A) \subset \hat{p}$, d.h. $\varphi \sim_p \psi$. □

2.18 **Lemma**
*Jeder p-Funktionstyp hat einen Keim, dieser ist bis auf C-Interdefinierbarkeit eindeutig.*

**Beweis**

Es sei $r \| r_\varphi$, dann ist der Keim von $\varphi$ ein Keim von $r$, denn für $\sigma \in Aut$ gilt: $\sigma$ fixiert $C$ und den Keim von $\varphi \ \Leftrightarrow \sigma$ fixiert $\hat{p}$ und (wegen 2.14) $\varphi \sim_p \varphi^\sigma$ $\Leftrightarrow (r_\varphi)^\sigma = r_{\varphi^\sigma}$ und $r_{\varphi^\sigma} = r_\varphi \ \Leftrightarrow \sigma$ fixiert $r_\varphi$. Da nach Definition jeder Keim von $r$ $C$-Interdefinierbar mit $Cb(r)$ ist, ist die "Eindeutigkeit" klar. □

2.19 **Korollar**
*Keime von p-äquivalenten Formeln sind C-interdefinierbar.*

Der Witz ist, daß hier auch Keime bezüglich verschiedener zugrundeliegender Formeln gemeint sind. Achtung, die Unkehrung ist leider falsch: haben zwei $p$-funktionale Formeln $C$-interdefinierbare Keime, so müssen sie noch nicht $p$-äquivalent sein. Sind etwa $a$ und $b$ interdefinerbar über $A$, etwa durch die $A$-Formel $\varphi(x,y)$ und ist $\psi(y,x) := \varphi(x,y)$, so ist $\varphi(x,y)$ $stp(^a/_A)$-funktional und $\psi(y,x)$ ist $stp(^b/_A)$-funktional. Aber beide Formeln haben denselben Keim, falls also $p = stp(^a/_A) = stp(^b/_A)$, so haben wir ein einfaches Gegenbeispiel.

### Komposition von Keimen

Eine $p \rightarrowtail q$ funktionale Formel ist eine $p$-funktionale Formel, deren Bildtyp parallel zu $q$ ist (der Bildtyp einer $p$-funktionalen Formel ist natürlich der Bildtyp des zugehörigen $p$-Funktionstyps). Sind $\varphi_i(x_i, x_{i+1})$ $p_i \rightarrowtail p_{i+1}$ funktionale Formeln, so ist $(\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1)(x_1, x_{n+1}) = \exists x_2 \ldots x_n (\bigwedge \varphi_i(x_i, x_{n+i}))$ eine $p_1 \rightarrowtail p_{n+1}$ funktionale Formel. Die Komposition der Formeln entspricht dann wieder der Konkatenation der Parameter:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(x_1, x_2, c_1), \ldots, \varphi(x_n, x_{n+1}, c_n) & \mapsto & (\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1)(x_1, x_{n+1}, c_1 \ldots c_n) \\ (c_1, \ldots, c_n) & \mapsto & c_1 \ldots c_n \\ \mathcal{D}_{\varphi_1} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\varphi_n} & \stackrel{Konkatenation}{\rightarrow} & \mathcal{D}_{\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1} \end{array}$$

2.20 **Lemma**
*Es seien $\varphi_i(x, y)$ $p \rightarrowtail q$ funktional und $\psi_i(y, z)$ $q$-funktional und $\varphi_1 \sim_p \varphi_2$, dann*

$$\psi_1 \sim_q \psi_2 \iff \psi_1 \circ \varphi_1 \sim_p \psi_2 \circ \varphi_2$$

**Beweis**
Es sei alles definiert über $A$ und $(a, b) \models r_{\varphi_1} \| A \stackrel{Vor}{=} r_{\varphi_2} \| A$, dann $b \models q \| A$ und es gibt $c_i$, so daß $(b, c_i) \models r_{\psi_i} \| A$. Dann $(a, c_i) \models r_{\psi_i \circ \varphi_i}$ und $\psi_1 \sim_q \psi_2 \Leftrightarrow r_{\psi_1} = r_{\psi_2}$ $\Leftrightarrow c_1 = c_2 \Leftrightarrow r_{\psi_1 \circ \varphi_1} = r_{\psi_2 \circ \varphi_2} \Leftrightarrow \psi_1 \circ \varphi_1 \sim_p \psi_2 \circ \varphi_2$ □

2.21 **Korollar**
*Die Konkatenation der Parameter faktorisiert über der Keimbildung und die dadurch entstehende Komposition von Keimen erlaubt Rechtskürzung.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_{\varphi_1} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\varphi_n} \arrow[r, "\text{Konkatenation}"] \arrow[d, "pr"'] & \mathcal{D}_{\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1} \arrow[d, "pr"] \\ \mathcal{D}_{\varphi_1}/\sim_p \times \ldots \times \mathcal{D}_{\varphi_n}/\sim_p \arrow[r, "\text{Komposition}"'] & \mathcal{D}_{\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1}/\sim_p \end{tikzcd}$$

Sind alle Formeln aus $L(A)$, so ist also die Keimkomposition eine $A$-Funktion. Ist $\varphi(x, y; z)$ eine $p \rightarrowtail p$ funktionale $A$-Formel, so ist also $\circ : \mathcal{D}_\varphi^n \rightarrow \mathcal{D}_{\varphi^n}$ für jedes $n$ eine $A$-definierbare Funktion. Es macht also noch keinen Sinn, von "Abgeschlossenheit" der Komposition zu sprechen, da die komponierten Keime in einer anderen Sorte liegen, $\mathcal{D}_{\varphi^n} \neq \mathcal{D}_\varphi$. Ist aber $X \subset \mathcal{D}_\varphi$ derart, daß es für jedes $\bar{c} \in X^n$ ein $c \in \mathcal{D}_\varphi$ gibt, so daß $\varphi^n(x,y,\bar{c}) \sim_p \varphi(x,y,c)$ dann ist $\circ$ : $X^n/_{\sim_p} \to X/_{\sim_p}$, $\quad \widetilde{(c_1,...,c_n)} \mapsto \tilde{c} \iff \varphi^n(x,y,\bar{c}) \sim_p \varphi(x,y,c)$ eine Funktion mit $A$-definierbarer Wirkung, denn $\tilde{c}$ ist nach Definition eindeutig festgelegt: $\varphi^n(x,y,\bar{c}) \sim_p \varphi(x,y,c_1)$ und $\varphi^n(x,y,\bar{c}) \sim_p \varphi(x,y,c_2)$, so $\varphi(x,y,c_1) \sim_p \varphi(x,y,c_2)$ und $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}_{\varphi^n} \arrow[d, "pr"] \\ X^n \arrow[ur, "\circ"] \arrow[r, "\circ"'] & X \end{tikzcd}$$

Das ist wichtig bei der Konstruktion von Gruppen, weil man auf diese Weise (typ)definierbare Halbgruppen mit Rechtskürzung bekommen kann, denn $\circ$ ist offensichtlich assoziativ und erlaubt Rechtskürzung.
Definiert man auf offensichtliche Weise eine Komposition von globalen Funktionstypen (oder stationären Funktionstypen oder ihren $\|$-Klassen: $r_\psi \circ r_\varphi := r_{\psi\circ\varphi}$), so besagt das Lemma, daß diese Komposition wohldefiniert ist und Rechtskürzung erlaubt. Insbesondere entsteht so die Kategorie der stationären Typen (globalen Typen, $\|$-Klassen), deren Morphismen stationäre Funktionstypen sind (die entsprechende parameterabhängige Kategorie ist die der $A$-Typen mit $A$-Funktionestypen, diese ist, geht man zu den Realisierungen über, eine Unterkategorie der Kategorie der $\mathcal{C}$-Klassen).

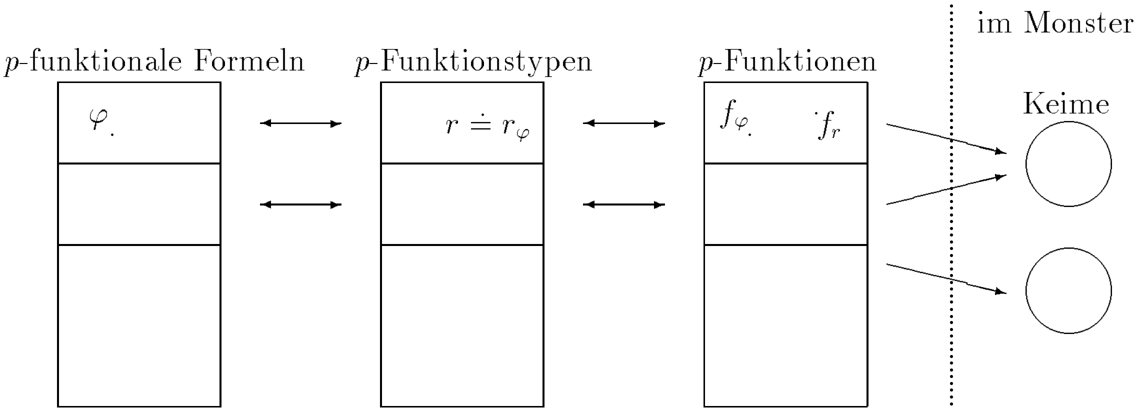
### $p$-Funktionen

2.22 **Definition**
**(1)** *Eine* $p$-Funktion *ist eine typdefinierbare Funktion, deren Definitionsbereich gerade ein* $(p\|A)^{\mathcal{C}}$ *ist (für ein* $A \supset C$*).*
**(2)** *Zwei p-Funktionen nenne ich* $p$-äquivalent (generisch identisch)*, wenn sie auf einem* $(p\|A)^{\mathcal{C}}$ $(A \supset C$ *geeignet) übereinstimmen.*
**(3)** *Ist* $f$ *eine p-Funktion, so heißt* $\kappa \in \mathcal{C}$ *ein* Keim von $f$*, wenn für alle* $\sigma \in Aut_C$ *gilt:* $\sigma$ *fixiert* $\kappa \Leftrightarrow f \sim_p f^\sigma$

Stellt man sich die $(p\|A)^{\mathcal{C}}$ als Umgebungen von $\hat{p}$ vor, so sind zwei $p$-Funktionen genau dann $p$-äquivalent, wenn sie auf einer Umgebung von $\hat{p}$ übereinstimmen, daher der Begriff "Keim".
Ist $\varphi(x,y,c)$ $p$-funktional, so sei $f_{\varphi(x,y,c)}$ die auf $p_0|c$ definierte $Cc$-Funktion. Dann gilt für beliebige $p$-funktionale Formeln $\varphi(x,y,c), \psi(x,y,d)$: $\varphi \sim_p \psi \Leftrightarrow f_\varphi \sim_p f_\psi$ $\Leftrightarrow$ es gibt ein $a \models p_0|cd$ mit $f_\varphi(a) = f_\psi(a) \Leftrightarrow f_\varphi = f_\psi$ auf $p_0|cd$. Deshalb ist der Keim von $\varphi(x,y,c)$ ein Keim von $f_\varphi$ und er liegt in $dcl^C(c)$. Jede $p$-Funktion hat also einen bis auf $C$-Interdefinierbarkeit eindeitigen Keim.
Ist andererseits $f$ eine $p$-Funktion, so ist $f(x) = y$ $p$-funktional, $f$ induziert den globalen $p$-Funktionstyp $r_f := r_{f(x)=y}$ und für beliebige $p$-Funktionen $f, f'$ gilt:

$f \sim_p f' \Leftrightarrow r_f = r_{f'}$. Der Bildtyp von $f$ sei der (globale) Bildtyp von $r_f$. Ist $r$ ein globaler $p$-Funktionstyp, dann sei $f_r$ die durch $r_{|Cb(r)}$ definierte $p$-Funktion sie ist eine (bezüglich der Inklusion) maximale vollständige $p$-Funktion: $r = r_\varphi$, so $f_r \supset f_\varphi$.

Insgesammt erhalten wir also eine kanonische 1:1 Korrespondenz zwischen $\sim_p$-Klassen von $p$-funktionalen Formeln, (Parallelitätsklassen von) $p$-Funktionstypen und $\sim_p$-Klassen von $p$-Funktionen, wobei es in den letzten beiden Fällen kanonische Repräsentanten gibt (globale $p$-Funktionstypen und maximale vollständige $p$-Funktionen). Außerdem ist jeder dieser Äquivalenzklassen eine Klasse von $C$-interdefinierbaren Elementen von $\mathcal{C}$ zugeordnet, nämlich die Klasse der entsprechenden Keime. Eindeutigkeit der Keime bekommt man, wenn die relevanten Formeln im Hintergrund fixiert bleiben, etwa bei uniformen Familien. Leider kann ein Funktionstyp aus seinen Keimen nicht zurückgewonnen werden.




Im allgemeinen muß eine $p$-Funktion nicht vollständig sein, obwohl oft nur die "generische Operation" von $f$ von Interesse ist, d.h. die Operation von $f$ auf $(p\|Ac)^{\mathcal{C}}$, wobei $f$ $Ac$-definierbar ist. Andererseits ist manchmal gerade der folgende Unterschied zwischen $f$ auf $(p\|A)^{\mathcal{C}}$ und auf $(p\|Ac)^{\mathcal{C}}$ interessant: ist $a \models p\|Ac$ und $q = stp({}^{f(a)}/_{A})$, so muß $f$ keine $p \to q$ Funktion sein, denn das ist sie dann und nur dann, wenn $tp({}^{f(a)}/_{Ac})\|q$, wenn also $f(a) \underset{A}{\smile\!\!\!\!\!|}\ c$. Sind also $p, q \in St(A)$, so hat der Begriff "$p \to q$ Funktion" eine nicht zu vernachlässigende Schärfe (für Funktionen, die nicht $A$-definierbar sind), an die man sich zum Beispiel bei der Behandlung generischer Typen in Gruppen erinnern sollte:

$$a \underset{A}{\smile\!\!\!\!\!|}\ c \Longrightarrow f(a) \underset{A}{\smile\!\!\!\!\!|}\ c$$

Übrigens bekommt man mit Hilfe von Morleyfolgen noch eine Information über Keime: ist $(a_i)_\omega$ eine Morleyfolge in $p\|A\tilde{f}$, so ist $(a_i, f(a_i))_\omega$ eine Morleyfolge in $r_f\|A\tilde{f}$ und folglich $\tilde{f} \in dcl(a_1, ..., a_n, f(a_1), ..., f(a_n))$ für ein geeignetes $n$.

## 1.3 Kombinatorische Geometrien

Dieses Kapitel ist rein algebraisch und ich werde recht ausführlich sein. In der kombinatorischen Geometrie axiomatisiert man den Begriff des $n$-dimensionalen Unterraums, wobei beliebige Schnitte von Unterräumen wieder Unterräume sind, so hat man den Begriff des erzeugten Unterraums, also einen Abschlußoperator. Ineinander enthaltene (endlich dimensionale) Räume sollen durch ihre Dimension unterscheidbar sein und die Dimension des Erzeugnisses zweier Räume soll durch die Dimensionen der Räume und ihres Schnittes kontrolliert sein, wobei diese Situation im modularen Fall optimal ist. Obwohl das Kapitel mit "Geometrien" überschrieben ist, sind schon "Prägeometrien" hinreichend geeignete Strukturen. Am Ende werde ich den Begriff der Prägeometrie verallgemeinern und "gewichtete Räume" einführen.

### 1.3.1 Abschlußstrukturen

Ich denke, daß Abschlußoperatoren bekannt sind, sie sind gewissermaßen das Extrakt aus den Begriffen (i) der "erzeugten Substruktur" aus der Algebra und (ii) der "abgeschlossenen Menge" aus der Topologie. Deshalb sind algebraische Strukturen und topologische Räume "Abschlußstrukturen".

3.1 **Definition**
**(1)** *Ein* Abschlußoperator *$cl$ auf einer (nichtleeren) Menge $U$ ist eine inflationäre, monotone und idempotente Abbildung $cl : Pot(U) \to Pot(U)$ (also $cl(X) \supset X$, $X \subset Y \Rightarrow cl(X) \subset cl(Y)$, $cl^2 = cl$). $cl$ heißt* trivial, *wenn $cl(X) = \bigcup_{x \in X} cl(x)$ (für $X \subset U$), $cl$ heißt* diskret, *wenn $cl = id_{Pot(U)}$.*
*Das Paar $\mathcal{U} = (U, cl)$ heißt dann (triviale; diskrete)* Abschlußstruktur
**(2)** *$I \subset U$ heißt* unabhängig *(in $\mathcal{U}$), wenn für jedes $i \in I$ gilt: $i \notin cl(I \backslash \{i\})$*
**(3)** *$E \subset U$ heißt* Erzeugendensystem *(von $\mathcal{U}$), wenn $cl(E) = U$*
**(4)** *$a, b \in U$ heißen aquivalent (in $\mathcal{U}$),$a \sim_{cl} b$, wenn $cl(a) = cl(b)$*

**Beispiel** (($S(A), acl$) und ($S(A), dcl$) sind triviale Abschlußstrukturen):
Es sei $R \subset U \times U$ reflexiv und transitiv, dann wird durch $cl(Y) := \{x \in U \mid R(x, y)$ für ein $y \in Y\}$ ein trivialer Abschlußoperator auf $U$ definiert. Daher induzieren $acl$ und $dcl$ triviale Abschlußoperatoren auf jedem $S(A)$, wobei $acl(p, q) : ngdw$ es gibt $a \models p\, b \models q : b \in acl(Aa)$ für $p, q \in S(A)$ , $dcl(p)$ entsprechend). Da im Falle trivialer Abschlußoperatoren die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist, sind triviale Abschlußstrukturen Topologische Räume, in der die offenen (!) Mengen gerade die "$cl(X)$" sind. Das rechtfertigt topologische Sprechweisen im Zusammenhang mit $(S(A), acl)$ und $(S(A), dcl)$.
Es sei $\mathcal{U}$ von nun an eine Abschlußstruktur und alle Punkte (Elemente) und Mengen seien aus $U$. Ein Element ist unabhängig, wenn es nicht in $cl(\emptyset)$ liegt, zwei Mengen nenne ich *fast disjunkt*, wenn ihre Abschlüsse so disjunkt wie möglich

sind, sich also höchstens in $cl(\emptyset)$ schneiden. Die Begriffe "unabhängig" und "Erzeugendensystem" sind denen aus der linearen Algebra abgeguckt. Ein Erzeugendensystem ist genau dann minimal, wenn es unabhängig ist, es ist dann eine maximal unabhängige Menge, aber eine maximal unabhängige Menge muß kein Erzeugendensystem sein und minimale Erzeugendensysteme können verschiedene Kardinalität haben.

**Beispiel**
Sind $(U, cl)$ und $(U', cl')$ Abschlußstrukturen (etwa mit $cl(\emptyset) = cl'(\emptyset) = \emptyset$), so auch $(U \dot\cup U', \tilde{cl})$, wobei $\tilde{cl}(X) := cl(X) \dot\cup cl'(X)$, falls $X \subset U$ oder $X \subset U'$ und $\tilde{cl}(X) := U \dot\cup U'$ sonst. Vereinigt man auf diese Weise zwei triviale Abschlußstrukturen, so gewinnt man (ziemlich triviale) "Gegenbeispiele":
$\mathcal{V}$ sei auf diese Weise konstruiert aus $(W, id)$ und $(\{p\}, id)$ (wobei $W$ eine Menge mit mindestens 2 Elementen ist), dann ist $W$ eine maximal unabhängige Menge in $\mathcal{V}$, die kein Erzeugendensystem ist.
Will man minimale Erzeugendensysteme von verschiedener Größe, so sei der Abschluß von $W$ einfach als ganz $V$ definiert ($cl$ bleibt dann ein Abschlußoperator), dann ist $W$ ein minimales Erzeugendensystem und auch $\{x, p\}$ für jedes $x \in W$.

Abschlußstrukturen haben "Substrukturen" und "Quotienten", für $X \subset U$ seien $cl_X$ und $cl \cap X$ wie folgt definiert: für $Y \subset U$ sei $cl_X(Y) := cl(XY)$ und für $Y \subset X$ sei $(cl \cap X)(Y) := cl(Y) \cap X$, dann ist $cl_X$ ein Abschlußoperator auf $U$ und $cl \cap X$ einer auf $X$. Wenn ich "$(X, cl)$" schreibe, dann ist natürlich "$(X, cl \cap X)$" gemeint.

3.2 **Definition**
*Sei $\mathcal{U}$ eine Abschlußstruktur und $X \subset U$, dann heißt $\mathcal{U}/X := (U, cl_X)$ die* Lokalisierung *von $\mathcal{U}$ an $X$ und $\mathcal{U} \cap X := (X, cl \cap X)$ ist ein* Unterraum *von $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \backslash X := \mathcal{U} \cap (U \backslash X)$)*

Die folgenden Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen:
(1) $(\mathcal{U}/X_1)/X_2 = \mathcal{U}/X_1X_2$, $(\mathcal{U} \cap X_1) \cap X_2 = \mathcal{U} \cap (X_1 \cap X_2)$
(2) $\mathcal{U}/\emptyset = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}/X = \mathcal{U}/cl(X)$
(3) $X_0 \subset X$, so $(\mathcal{U} \cap X)/X_0 = (\mathcal{U}/X_0) \cap X$
Achtung, (3) wird falsch, sogar sinnlos, wenn man auf die Voraussetzung "$X_0 \subset X$" verzichtet. Selbst "$(\mathcal{U} \cap X)/(cl(X_0) \cap X) = (\mathcal{U}/X_0) \cap X$" gilt nicht allgemein, zum Beispiel gilt für das Beispiel $\mathcal{V}$ von oben: $(\mathcal{V}/p) \cap W \neq (\mathcal{V} \cap W)/(\tilde{cl}(p) \cap W)$ (denn im ersten Raum sind nur $\emptyset$ und $W$ abgeschlossen, der zweite Raum ist diskret).

Nun können die Begriffe von oben übertragen werden: $I$ heißt unabhängig in $X$ über $Y$, wenn $I$ unabhängig in $(\mathcal{U}/Y) \cap X$ ist, das ist genau dann der Fall, wenn $I \subset X$ und $I$ unabhängig/$Y$. Ist eine Menge unabhängig in einer Lokalisierung, so auch in $\mathcal{U}$. Eine Menge $E$ erzeugt $X$ über $Y$, wenn $E$ ein Erzeugendensystem von $(\mathcal{U}/Y) \cap X$ ist, das ist genau dann der Fall, wenn $E \subset X$ und $E \subset cl(YE)$. Ich denke, das ist alles ziemlich klar, man braucht nur im Kopf behalten, daß erst lokalisiert wird, dann geschnitten.

3.3 **Definition**
*Ein Abschlußoperator heißt* algebraisch*, wenn stets gilt: $a \in cl(X) \Rightarrow a \in cl(X_0)$ für ein endliches $X_0 \subset X$.*
*Eine Abschlußstruktur heißt algebraisch, wenn ihr Abschlußoperator algebraisch ist.*

Die meisten in der Algebra vorkommenden Abschlußstrukturen sind algebraisch, sie haben einen endlichen Charakter (anders in der Topologie, man betrachte $X = \mathbb{Q} \subset U = \mathbb{R}$). Achtung: in jeder Abschlußstruktur ist jede abgeschlossene Menge gerade die Vereinigung ihrer endlich erzeugten abgeschlossenen Teilmengen, Algebraizität ist eine strengere Forderung. Ist $\mathcal{U}$ algebraisch, so auch jede Lokalisierung und jeder Unterraum.

### 1.3.2 Prägeometrien

Grundlegend für die lineare Algebra ist der Austauschsatz von Steinitz. Es zeigt sich, daß Abschlußoperatoren, die das "Austauschaxiom" erfüllen, die Abschlußstruktur schon so gut machen, daß ein Dimensionsbegriff definierbar ist.

3.4 **Definition**
*Das Austauschaxiom lautet: $\forall a, b, X: \; a \notin cl(X) \wedge a \in cl(Xb) \Rightarrow b \in cl(Xa)$*
*Eine algebraische Abschlußstruktur heißt* Prägeometrie*, wenn ihr Abschlußoperator das Austauschaxiom erfüllt.*

**Die Standardbeispiele**
**(1)** Es sei $K$ ein Schiefkörper und $V$ ein Vektorraum über $K$, $V$ ist dann mit dem Operator "$X \mapsto$ der von $X$ erzeugte Unterraum" eine Prägeometrie. Das gleich gilt für affine und projektive Räume.
**(2)** Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann ist $K$ mit dem Operator "$X \mapsto$ der von $X$ erzeugte algebraisch abgeschlossene Unterkörper" eine Prägeometrie.
**(3)** Jede diskrete Abschlußstruktur ist eine triviale Prägeometrie.

3.5 **Fakt**
*In einer Prägeometrie ist jede maximal unabhängige Menge ein Erzeugendensystem und alle maximal unabhängigen Mengen haben die gleiche Kardinalität.*

Eine maximal unabhängige Teilmenge einer Prägeometrie $\mathcal{U}$ heißt *Basis*, Basen sind also gerade die minimalen Erzeugendensysteme. Die Kardinalität einer

Basis ist eine Invariante der Prägeometrie, sie wird die Dimension, $dim(\mathcal{U})$, genannt. Die Austauscheigenschaft vererbt sich auf Lokalisierungen und auf Unterräume (auch, wenn diese nicht abgeschlossen sind), also sind Lokalisierungen und Unterräume von Prägeometrien wieder Prägeometrien. Für $X, Y \subset U$ sei $dim_Y(X) := dim(^X/_Y) := dim((\mathcal{U}/Y) \cap X)$, eine Basis von $(\mathcal{U}/Y) \cap X$ nenne ich eine *Basis von $X$ über $Y$*, sie ist eine maximal unabhängige$/Y$ Teilmenge von $X$. Eine endliche Menge $I$ ist genau dann unabhängig$/Z$, wenn $dim_Z(I) = \#I$. Wie in der linearen Algebra zeigt man die Gültigkeit der folgenden

3.6 **Eigenschaften**

| | |
|---|---|
| *(0):* | $dim(^X/_X) = 0$ |
| *($cl_1$):* | $x \in cl(X) \Leftrightarrow dim(^x/_X) = 0$ |
| *($cl_2$)* | $dim(^X/_Y) = dim(^{cl(X)}/_Y) = dim(^X/_{cl(Y)})$ |
| *(Monotonie):* | $Y_0 \subset Y$, *so* $dim(^X/_{Y_0}) \geq dim(^X/_Y)$ |
| *(Additivität):* | $dim(XY) = dim(^X/_Y) + dim(Y)$ |
| *(endl $Char_1$):* | $dim(X)$ *endlich* $\Leftrightarrow dim(X) = dim(X_0)$ *für ein endl.* $X_0 \subset X$ |
| *(endl $Char_2$):* | $dim(X)$ *endlich, dann gibt es für alle* $Y$ *ein endliches* $Y_0 \subset Y$, *so daß* $dim(^X/_Y) = dim(^X/_{Y_0})$ |

Beweis von (endlicher Charakter$_2$):
Es sei $I$ eine endliche Basis von $X$ und $I_0$ eine Basis von $I$ über $Y$, dann $dim(^X/_Y) = dim(^I/_Y) = dim(I_0Y) = \#I_0$. Dann ist jedes $j \in I \backslash I_0$ abhängig von $I_0$ über $Y$ und $j \in cl(I_0Y)$, es gibt also ein endliches $Y_j \subset Y$, so daß $j \in cl(I_0Y_j)$. Es sei $Y_0 = \bigcup_{j \in I \backslash I_0} Y_j$, dann ist $I_0$ immer noch unabhängig über $Y_0$, aber $I \subset cl(I_0Y_0)$, also ist $I_0$ eine Basis von $I$ über $Y_0$ und $\#I_0 = dim(^{I_0}/_{Y_0}) = dim(^I/_{Y_0}) = dim(^X/_{Y_0})$ und $Y_0$ ist endlich.
Diese Eigenschaften gelten natürlich auch für "$dim_Z$, $cl_Z$" an Stelle von "$dim$, $cl$". Die Dimensionen müssen nicht endlich sein, jedoch sind sie hauptsächlich im endlich dimensionalen wirklich nützlich. Nun will ich doch noch sagen, was eine (kombinatorische) Geometrie ist:

3.7 **Definition**
*Eine Prägeometrie heißt* Geometrie, *wenn jeder Punkt unabhängig und abgeschlossen ist (d.h. wenn $cl(\emptyset) = \emptyset$ und für alle $x : cl(x) = \{x\}$)*

Die (als Abschlußstruktur) trivialen Geometrien sind genau die diskreten Abschlußstrukturen. Affine und projektive Räume sind Geometrien, Vektorräume aber nicht. Aber so wie man aus der Prägeometrie des Vektorraums durch Übergang zum projektiven Raum eine Geometrie macht, kann jeder Prägeometrie ganz kanonisch eine Geometrie zugeordnet werden: zuerst schmeißt man die abhängigen Punkte raus, dann identifiziert man äquivalente Punkte: ist $\mathcal{U}$ eine Prägeometrie, so sei $\mathcal{G}(\mathcal{U}) := (^{U \backslash cl(\emptyset)}/_\sim, \tilde{cl})$, wobei $a \sim b \Leftrightarrow cl(a) = cl(b)$ und $\tilde{x} \in \tilde{cl}(\tilde{X}) :\Longleftrightarrow x \in cl(X)$. Das ist wohldefiniert, weil in Prägeometrien, und deshalb auch in allen Lokalisierungen, alle unabhängigen Punkte in eindimensionalen Räumen $cl$-äquivalent sind; $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ ist dann wieder eine Prägeometrie. Nach Konstruktion ist $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ dann eine Geometrie. In einer Geometrie sind die eindimensionalen abgeschlossenen Räume genau die Punkte, die zweidimensionalen abgeschlossenen Räume heißen Geraden (u.s.w.), das unterscheidet sich allerdings vom Dimensionsbegriff aus der affinen Geometrie, dort sind die zweifach erzeugten Räume zwar auch Geraden, aber eindimensional (also: affine Dimension = kombinatorische Dimension - 1). Induzieren zwei Prägeometrien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ isomorphe Geometrien, so schreibe ich $\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2$. Viele Eigenschaften von Prägeometrien werden über den Verband der Unterräume definiert. Dieser Verband ist kanonisch isomorph zum Unterraumverband der zugehörigen Geometrie, deshalb sind solche Eigenschaften schon Eigenschaften der gesammten $\sim$-Klasse.

Prägeometrien können auf viele Weisen axiomatisiert werden, zum Beispiel durch eine Abhängigkeitsrelation $\not\perp \subset U \times Pot(U)$, welche die "van der Waerden-Axiome" (siehe z.B. [?, Kapitel 13]) erfült. Definiert man dann $cl(X) := \{x \in U | x \not\perp X\}$, so ist $(U, cl)$ eine Prägeometrie. Andererseits ist $(U, cl)$ genau dann eine Prägeometrie, wenn die Relation "$\in cl$" die van der Waerden-Axiome erfüllt. Ebenso ist eine Prägeometrie durch die Dimensionsfunktion festgelegt und auch durch den Begriff "unabhängige Menge" (d.h. alle diese Begriffe lassen sich durch jeweils nur einen gegebenen Begriff definieren).

### Reguläre Typen

Ist $\mathcal{P}$ eine Teilklasse des Monsters, so kann man auf offensichtliche Weise $\not\perp_A \subset \mathcal{P} \times Pot(\mathcal{P})$ als eine Relation betrachten (für beliebige $A$) und erhält so die Struktur $(\mathcal{P}, \not\perp_A)$, deren Eigenschaften man rein algebraisch untersuchen kann. Manchmal ist es hilfreich, die Forkingrelation als einen Operator zu betrachten: $\not\perp_A : Pot(\mathcal{P}) \to Pot(\mathcal{P})$, $B \mapsto \not\perp_A B := \{a \in \mathcal{P} \,|\, a \not\perp_A B\}$. Es ist bekannt, daß die Forkingrelation symmetrisch ist und (wegen Transitivität) die Austauscheigenschaft besitzt:

$$a \mathop{\perp}_A B \text{ und } a \mathop{\not\perp}_A Bb \Rightarrow b \mathop{\not\perp}_A Ba$$

Ist $\mathcal{P}$ die Realisierungsklasse eines nichtalgebraischen Typs $p \in S(A)$, so ist $\not\perp_A$ auf $\mathcal{P}$ auch reflexiv (für "$(\mathcal{P}, \not\perp_A)$" schreibe ich auch "$(p, \not\perp_A)$"). Alles, was wir also noch brauchen, damit $(\mathcal{P}, \not\perp_A)$ eine Prägeometrie ist, ist die Transitivität (nicht mit der Forkingtransitivität zu verwechseln):

$$a \mathop{\not\perp}_A B \text{ und alle } b \mathop{\not\perp}_A C \Rightarrow a \mathop{\not\perp}_A C$$

Schreibt man $\not\perp_A$ als Operator, dann sieht Transitivität so aus: $a \in \not\perp_A B$ und $B \subset \not\perp_A C$, so $a \in \not\perp_A C$. Es ist bekannt, daß diese Transitivität genau dann auf $\mathcal{P}$ erfüllt ist, wenn $p$ regulär ist, es gilt also

3.8 **Fakt**
*Es sei $p \in S(A)$: $p$ ist genau dann regulär, wenn $(p^{\mathcal{C}}, \not\perp_A)$ eine Prägeometrie ist.*

Es sei $p \in St(A)$ regulär, dann kann die Prägeometrie $(p, \not\perp_A)$ wie üblich nach $X \subset p^{\mathcal{C}}$ lokalisiert werden, man erhält dann die Prägeometrie $(p, \not\perp_A X)$ (nicht $(p, \not\perp_{AX})$, das ist gar keine Prägeometrie). Die Frage, welche Eigenschaften beim Lokalisieren erhalten bleiben ist i.a. eine rein algebraische Frage. Der einzige Unterschied jedoch zwischen der Lokalisierung und der Prägeometrie $(p|X, \not\perp_{AX})$ ist, daß es im ersten Fall abhängige Elemente gibt, nämlich die $a \models p$ mit $a \not\perp_A X$. Daraus folgt, daß die Lokalisierung dieselbe Geometrie hat, wie die nichtforkende Fortsetzung: $(p, \not\perp_A X) \sim (p|X, \not\perp_{AX})$. Daher kann man auch nach beliebigen Parametern "lokalisieren", d.h. für beliebiges $B \supset A$ kann man $(p|B, \not\perp_B)$ als "Lokalisierung" von $(p, \not\perp_A)$ auffassen. Wie diese "Lokalisierungen" aussehen, ist dann eine modelltheoretische Frage. Ist zum Beispiel $p$ ein nichttrivialer regulärer Typ, so ist auch jede nichtforkende Fortsetzung nichttrivial (wie man durch "hochziehen" eines die Trivialität zerstörenden Tupels sofort sieht). Trivialität vererbt sich aus algebraischen Gründen auf echte Lokalisierungen, daß sie sich auf beliebige nichtforkende Fortsetzungen vererbt kann ich erst später zeigen.
Angenommen $p \models p|B$, dann ist zwar $p^{\mathcal{C}} = (p|B)^{\mathcal{C}}$, aber es gilt nicht notwendig $(p, \not\perp_A) = (p|B, \not\perp_{AB})$, denn diese Gleichheit gilt genau dann, wenn zusätzlich der Begriff der unabhängigen Menge in beiden Strukturen übereinstimmt. Da jede in $p|B$ unabhängige Menge auch unabhängig in $p$ ist, gilt also

$$(p, \underset{A}{\not\perp}) = (p|B, \underset{AB}{\not\perp}) \Leftrightarrow \text{ für alle } I \subset p^{\mathcal{C}} : \ (I \text{ unabhängig}/A \Rightarrow I \text{ unabhängig}/AB)$$

Das ist sicherlich erfüllt, wenn $p^{\mathcal{C}} \perp_A B$, aber diese Forderung ist echt stärker. Es lohnt sich, den Unterschied kurz zu beleuchten: falls $p^{\mathcal{C}} \perp_A B$, so gilt für alle $X, Y \subset p^{\mathcal{C}}$: $X \not\perp_A Y \Leftrightarrow X \not\perp_{AB} Y$, für die Identität der Abschlußstrukturen reicht hingegen. daß für alle $x \in p^{\mathcal{C}}$, $Y \subset p^{\mathcal{C}}$ $x \not\perp_A Y \Leftrightarrow x \not\perp_{AB} Y$ gilt.

### 1.3.3 Unabhängigkeit

In affinen Räumen gibt es parallele Geraden, also gibt es 4 Punkte $a, b, c, d$, so daß $dim(ab) = dim(cd) = 2$ und $cl(ab) \cap cl(cd) = \emptyset$, aber $dim(abcd) \neq 4$. Ich werde nun eine Unabhängigkeitsrelation zwischen Unterräumen einführen, die stärker ist als fast Disjunktheit.

3.9 **Definition**
*Eine endliche Familie von endlich dimensionalen abgeschlossenen Unterräumen einer Prägeometrie heißt* unabhängig, *wenn die Dimension des von ihr erzeugten Unterraums gleich der Summe der Dimensionen der einzelnen Räume ist.*

Man kann die Definition dann sofort auf beliebige Familien von Mengen ausdehnen, indem man von jeder endlichen Teilfamilie von endlichen Teilmengen die Unabhängigkeit der jeweils erzeugten Unterräume fordert: $\{X_i \mid i \in I\}$ ist genau dann unabhängig, wenn für alle endlichen $I_0 \subset I$ und für alle endlichen $X_{i,0} \subset X_i$ gilt: $dim(\bigcup_{I_0} X_{i,0}) = \sum_{I_0} dim(X_{i,0})$. Ich habe den Begriff so speziell definiert, um ihn in den richtigen Kontext zu stellen. Man sollte ihn auch nicht mit dem früheren Begriff der unabhängigen Menge verwechseln, obwohl eine offensichtliche Verwandschaft besteht: eine (endliche) Menge $I$ ist genau dann unabhängig, wenn sie als Familie von Singeltons unabhängig ist, wenn also $dim(I) = \#I$.

3.10 **Lemma**

*Es seien $X, Y \subset U$: $X$ ist genau dann unabhängig von $Y$, wenn für alle endlichen, unabhängigen $I \subset X$, $J \subset Y$ gilt: $dim(IJ) = \#I + \#J$*

**Beweis**

Umabhängigkeit vererbt sich auf Teilmengen: sind $X$ und $Y$ voneinander unabhängig und $Y_0 \subset Y$, OE $Y$ endlich, so $dim(X) \overset{Vor}{=} dim(X/Y) \leq dim(X/Y_0)$ $\leq dim(X)$, also $dim(X/Y_0) = dim(X)$, d.h $X$ und $Y_0$ sind voneinander unabhängig, entsprechend auch $X_0$ und $Y_0$. Die Umkehrung gilt wegen der Existenz von Basen: es seien $I$ und $J$ (OE endliche) Basen von $X$ bzw. $Y$, dann $dim(X) + dim(Y) = dim(I) + dim(J) \overset{Vor}{=} dim(IJ) \leq dim(XY) \leq dim(X) + dim(Y)$, $X$ und $Y$ sind also voneinander unabhängig. □

In unendlich Dimensionalen kann man die Unabhängigkeit natürlich nicht mehr an der Dimension ablesen: ist $X$ ein unendlich dimensionaler Unterraum und $y \notin cl(X)$, so sind $X$ und $\{y\}$ voneinander abhängig, obwohl $dim(Xy) = dim(X) + dim(y)$. Sind $I$ und $J$ jeweils unabhängig und auch voneinander unabhängig, so ist auch $IJ$ unabhängig (die Umkehrung gilt auch, wenn man $IJ$ als Konkatenation von Tupeln liest, auf diese Weise kann die Unabhängigkeit von Räumen auch über den Begriff des "unabhängigen Tupels" definiert werden, es wird aber im übernächsten Parapraphen klar, warum ich mich für diese Variante entschieden habe). $I$ ist genau dann unabhängig über $Z$, wenn $dim(I/Z) = \#I$, folglich gilt für unabhängiges $I$: $I$ ist genau dann unabhängig von $Z$, wenn $I$ unabhängig über $Z$ ist. Was mit "$X$ und $Y$ sind unabhängig über $Z$" gemeint ist, sollte klar sein, in den Lokalisierungen gelten die gleichen Eigenschaften.

## 1.3.4 Modularität

Fast Disjunktheit kann man "sehen" (am Schnitt), Unabhängigkeit dagegen ist ein subtilerer Begriff. Zwar sind unabhängige Mengen fast disjunkt (das folgt z.B. aus der Submodularität), aber die Umkehrung gilt nicht ohne Weiteres, es kann Mengen geben, die "unabhängig aussehen" (fast disjunkt sind), aber nicht unabhängig sind (z.B. parallele Geraden in affinen Räumen).

3.11 **Definition**
*Eine Prägeometrie heißt* modular, *wenn für alle endlich dimensionalen, abgeschlossenen Unterräume $X, Y$ gilt:*

$$dim(XY) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y)$$

Modularität garantiert die Existenz von nicht trivialen Schnittpunkten und so werde ich sie haupsächlich verwenden: sind $X$ und $Y$ Mengen, so daß $dim(XY) < dim(X) + dim(Y)$, dann gibt es ein $a \in cl(X) \cap cl(Y) \backslash cl(\emptyset)$.

**Beispiel**
Triviale Prägeometrien, Vektorräume und projektive Räume sind modular, affine Räume und algebraisch abgeschlossene Körper jedoch nicht.

3.12 **Lemma**
*Für eine Prägeometrie $\mathcal{U}$ sind äquivalent:*
**(1)** *$\mathcal{U}$ ist modular*
**(2)** *Je zwei abgeschlossene Unterräume sind unabhängig über ihrem Schnitt*
**(3)** *Die Begriffe "voneinander unabhängig" und "fast disjunkt" fallen in jeder Lokalisierung von $\mathcal{U}$ zusammen*
**(4)** *Für unabhängige Mengen fallen die Begriffe "voneinander unabhängig" und "fast disjunkt" in jeder Lokalisierung zusammen.*

**Beweis**
(1) $\Rightarrow$ (2): Seien $X$ und $Y$ abgeschlossene Unterräume, OE endlich dimensional, so gilt wegen Additivität und Modularität $dim_{X \cap Y}(XY) = dim(XY) - dim(X \cap Y) = (dim(X) + dim(Y) - dim(X \cap Y)) - dim(X \cap Y) = dim_{X \cap Y}(X) + dim_{X \cap Y}(Y)$, $X$ und $Y$ sind also voneinander unabhängig in $\mathcal{U}/(X \cap Y)$.
(2) $\Rightarrow$ (3): voneinander unabhängige Mengen sind stets fast disjunkt. Sind $X, Y$ fast disjunkt$/Z$, d.h. $cl(ZX) \cap cl(ZY) = cl(Z)$, dann gilt $dim_Z(XY) = dim_Z((ZX)(ZY)) \overset{(2)}{=} dim_Z(ZX) + dim_Z(ZY) = dim_Z(X) + dim_Z(Y)$, $X$ ist also unabhängig$/Z$ von $Y$.
(3) $\Rightarrow$ (4) ist klar
(4) $\Rightarrow$ (1): Seien $X, Y$ endlich dimensional, $Z := cl(X) \cap cl(Y)$ und $I, J$ Basen von $X$ bzw. $Y$ über $Z$, dann $dim_Z(X) + dim_Z(Y) = dim_Z(I) + dim_Z(J) \overset{(4)}{=} dim_Z(IJ) \leq dim_Z(XY) \leq dim_Z(X) + dim_Z(Y)$, also (Additivität) $dim(XY) + dim(Z) = dim(X) + dim(Y)$. □

Insbesondere vererbt sich die Modularität auf Lokalisierungen. Bei Unterräumen muß man etwas aufpassen: in der Formel "$dim(cl(X) \cap cl(Y)) = dim(X) + dim(Y) - dim(XY)$" ist die rechte Seite unsensibel für Schnitte im $XY$ umgebenden Raum, die linke Seite jedoch nicht. So sieht man aber, daß Modularität sich auf solche Unterräume $Z$ überträgt, mit:

$$X, Y \subset Z, \text{ so } dim(cl(X) \cap cl(Y)) = dim(cl(X) \cap cl(Y) \cap Z)$$

Abgeschlossene Unterräume bleiben also modular. Das ist auch aufgrund einer anderen Überlegung klar: Modularität hängt nur von von dem Verband der abgeschlossenen Unterräume ab, (die Dimension eines endlich dimensionalen Unterraums ist gerade sein Fundierungsrang in diesem Verband) und der zu einem abgeschlossenen Unterraum $Z$ gehörende Verband ist gerade der Unterverband (des Ausgangsverbandes) der (in $U$) abgeschlossenen Mengen, die in $Z$ enthalten sind. Da eine Prägeometrie und ihre zugehörige Geometrie isomorphe Verbände haben, rechtfertigt diese Überlegung auch die folgende

3.13 **Bemerkung**
*Eine Prägeometrie ist genau dann modular, wenn die zugehörige Geometrie modular ist.*

Modularität läßt sich auch etwas "geometrischer" charakterisieren. Dazu vorab die folgenden Sprechweisen: Ist $X$ ein abgeschlossener Unterraum und $a$ ein beliebiger Punkt, so heißt $K(X,a) := \bigcup_{x \in X} cl(xa)$ ein *Kegel*. *Geraden* seien 2-dimensionale abgeschlossene Unterräume, sie heißen *parallel*, wenn ihr ihr Schnitt 0-dimensional, ihre Vereinigung aber nur 3-dimensional ist. Parallele Geraden machen also die Modularität kaputt, sie sind fast disjunkt, aber voneinander abhängig. Außerdem gibt es keine "kleineren Gegenbeispiele": ist $X$ oder $Y$ eindimensional, so gilt die Modularitätsformel.

3.14 **Lemma**
*Für eine Prägeometrie $\mathcal{U}$ sind äquivalent:*
**(1)** *$\mathcal{U}$ ist modular*
**(2)** *Kegel sind abgeschlossen*
**(3)** *In keiner Lokalisierung von $\mathcal{U}$ gibt es parallele Geraden*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2): Seien $X, a$ in $U$, $a \notin X$ (sonst klar), dann $K(X,a) \subset cl(Xa)$. Sei $b \notin K(X,a)$, dann $dim(ab) = 2$ und $dim(cl(X) \cap cl(ab)) = 0$ (sonst $x \in cl(ab)$ und wegen (Austausch) $b \in cl(xa)$ für ein $x \in cl(X)$, Widerspruch), wegen Modularität dann $dim(Xab) = dim(X) + 2$ also $b \notin cl(Xa)$. Also $cl(Xa) \subset K(X,a)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Seien $cl(Zab)$ und $cl(Zcd)$ voneinander abhängige Geraden in $\mathcal{U}/Z$, etwa $b \in cl(Zacd) = cl((Zcd)a)$, dann gibt es wegen (2) ein $x \in cl(Zcd)$ mit $b \in cl(xa)$. Dann schneiden sich die beiden Geraden in $x$, denn $b \notin cl(Za), b \in cl(Zxa), x \in cl(Zab)$ (Austausch), also $x \in cl(Zab) \cap cl(Zcd)$, andererseits $x \notin cl(Z)$ (sonst $b \in cl(Za)$), fertig.

(3) $\Rightarrow$ (1) indirekt: Ich werden zeigen, wie man aus einem "Gegenbeispiel", welches noch keine parallelen Geraden sind ein "Gegenbeispiel von kleinerer Dimension" konstruiert, induktiv folgt dann die Behauptung. Seien also $X, Y$ derart, daß $dim(XY) + dim(Z) < dim(X) + dim(Y) (< \omega)$ und

$dim(Y \backslash Z) > 2$, wobei $Z := cl(X) \cap cl(Y)$. Sei $a \in Y \backslash Z$.
Fall 1: $cl(Xa) \cap cl(Y) = cl(Za)$
dann zeigt eine einfache Dimensionsrechnung, daß auch $Xa, Y$ ein Gegenbeispiel ist mit $dim(Y \backslash (cl(Xa) \cap cl(Y))) < dim(Y \backslash Z)$ (d.h. mit "kleinerer Dimension").
Fall 2: sonst gibt es ein $b \in cl(Xa) \cap cl(Y) \backslash cl(Za)$, und eine Dimensionsrechnung zeigt, daß $X$, $Zab$ wieder ein Gegenbeispiel mit "kleinerer Dimension" ist (da $dim(Y \backslash Z) > 2$). □

### 1.3.5 Lokale Modularität

3.15 **Definition**
*Eine Prägeometrie heißt* lokal modular*, wenn für alle endlich dimensionalen, abgeschlossenen Unterräume $X, Y$ gilt:*

$$dim(X \cap Y) > 0 \Rightarrow dim(XY) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y)$$

Eine Prägeometrie ist also genau dann modular, wenn jede echte Lokalisierung (d.h. mit Mengen positiver Dimension) modular wird. Das ist schon dann der Fall, wenn jede Lokalisierung mit einem unabhängigen Punkt modular wird, denn alle weiteren Lokalisierungen bleiben modular, deshalb sind modulare Prägeometrien auch lokal modular. Die Standardbeispiele für lokal modulare, nicht modulare Geometrien sind affine Räume: lokalisiert man einen affinen Raum an einem beliebigen Punkt, so wird die entstehende Prägeometrie isomorph zu der modularen Geometrie des zugrundeliegenden Vektorraumes (das Lokalisieren an einem Punkt entspricht der Auszeichnung eines "Nullpunkts"). Leider sehen nicht alle lokal modularen Räume so aus, wie ein Beispiel unten zeigen wird. Ich möchte es nicht unerwähnt lassen, daß die Geometrie algebraisch abgeschlossener Körper i.a. nichtmals lokal modular ist. Denn ist $t$ transzendent über $K$ (alles im großen algebraisch abgeschlossenen Körper $L$), so ist die Lokalisierung nach $t$ nicht modular: sind $\{a, b, c\}$ algebraisch unabhängig über $K(t)$ und ist $d = ac^2 + bc + t$, so sind $acl_{K(t)}(ab)$ und $acl_{K(t)}(cd)$ parallele Geraden, d.h. $trdeg_{K(t)}(ab) = trdeg_{K(t)}(cd) = 2$, $trdeg_{K(t)}(abcd) = 3$ und $acl_{K(t)}(ab) \cap acl_{K(t)}(cd) = acl(K(t))$.
Es gibt zwei natürliche Möglichkeiten, den Abschlußoperator *span* zu verändern: ist $A$ ein affiner Raum über $V$ und $Z \subset A$, $U \subset V$, so sei für $X \subset A$:

$$a \in span_Z^U(X) :\Longleftrightarrow \{x - a \mid x \in ZX\} \text{ ist linear abhängig über } U$$

Offensichtlich ist $span = span_\emptyset^{\{0\}}$ und $span_Z = span_Z^{\{0\}}$ ist die übliche Lokalisierung. Man kann sich recht einfach überlegen, daß jede solche gemischte „Lokalisierung" identisch zu einer nicht-gemischten „Lokalisierung" ist, wobei die echten Lokalisierungen (d.h. die nach Teilmengen von $A$) genau die sind, bei denen die Geometrie modular wird.

Man sollte sich diese Situation gut einprägen, denn das Ziel meiner Arbeit ist es zu zeigen, daß sich im Falle lokal moduraler nicht modularer Typen alle „genauso" wie in diesen Standardbeispielen aus der linearen Algebra verhält: daß ihre Geometrien affine Räume sind und daß die Geometrie von nichtforkenden Fortsetzungen aus der alten affinen Geometrie durch die zwei oben erwähnten Arten von „Lokalisierung" hervorgeht.
Man weiß übrigens, daß im wesentlichen alle modularen Geometrien projektive Räume sind. Ich zeige nun, daß es lokal modulare Räume gibt, die keinem Standardbeispiel entsprechen.

**Ein lokal modularer nicht modularer Raum, der nicht affin ist**

Es sei $A = \{a_1, ..., a_8\}$ eine Menge mit 8 (paarweise verschiedenen) Elementen. Für $X \subset A$ sei

$$cl(X) := X \text{ falls } \#X \leq 2, \quad cl(X) := A \text{ sonst}$$

Behauptung: $(A, cl)$ ist eine lokal modulare nicht modulare Prägeometrie. Beweis: Man sieht schnell, daß $cl$ ein algebraischer Abschlußoperator auf $A$ ist. Es sei $X \subset A$, $a, b \in A$, $a \notin cl(X)$ und $a \in cl(Xb)$: da $a \notin cl(X)$, ist $\#X \leq 2$. Falls $\#X \leq 1$, so ist $a = b$. Falls $\#X = 2$, so ist $cl(Xa) = A$, es gilt also in allen Fällen, daß $b \in cl(Xa)$. $(A, cl)$ ist somit eine Prägeometrie. $a_1a_2$ und $a_3a_4$ sind parallele Geraden, sie bezeugen die Nichtmodulatität. Da die Modularitätsformel stets gilt, wenn einer der Räume Dimension $\leq 1$ oder volle Raumdimension hat oder beide Räume identisch sind, muß ich hier nur jeweils verschiedene zweidimensionale Räume betrachten: $a_ia_j$ und $a_ka_l$ seien derart, dann ist $dim(a_ia_ja_ka_l) + dim(cl(a_ia_j) \cap cl(a_ka_l)) = 3 + 1 = 2 + 2 = dim(a_ia_j) + dim(a_ka_l)$. $(A, cl)$ ist also lokal modular.
Behauptung: $(A, cl)$ ist kein affiner Raum. Beweis: affine Räume haben die Kardinalität des zugrundeliegenden Vektorraums, im endlichen also Kardinalität $p^(n-1)$, wobei $p$ die Charakteristik des Körpers und $n$ die (kombinatorische) Dimension des affinen Raumes ist. Für $A$ müßte also gelten: $8 = p^2$ für eine Primzahl $p$, das geht nicht.
Was ich getan habe, ist folgendes: die Unterräume $\{a_1, ..., a_4\}$ und $\{a_5, ..., a_8\}$ sind jeweils der zu dem Vektorraum $F_2^2$ gehörende affine Raum. In gewissem Sinne ist $A$ eine disjunkte Vereinigung dieser beiden Räume, wobei der Gesamtraum jedoch 3-dimensional blieb. Zu je zwei Punkten $a_i, a_k$ $(1 \leq i \leq 4 < k \leq 8)$ habe ich dann noch die Gerade $cl(a_ia_k) = \{a_i, a_k\}$ hinzugefügt. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele solche Räume konstruieren.

### 1.3.6 Gewichtete Räume

Es wird später in der Arbeit eine wichtige Abschlußstruktur auftauchen, die zwar keine Prägeometrie ist, auf der aber eine "Gewichtung" definiert ist, die sich ähnlich der Dimension in Prägeometrien verhält. Um das Verständnis dieser Situation zu verbessern, habe ich mich entschieden, sie zu axiomatisieren.

3.16 **Definition**
*Es sei* $\mathcal{U} = (U, cl)$ *eine algebraische Abschlußstruktur, eine* Gewichtung *auf* $\mathcal{U}$ *ist eine Abbildung* $w$*, die je zwei Mengen* $X, Y \subset U$ *eine Kardinalzahl* $w(X/Y)$ *zuordnet, so daß für alle Teilmengen von* $U$ *die folgenden Eigenschaften erfüllt sind (wobei* $w(X) = w(X/\emptyset)$ *und* $w_Z(X/Y) = w(X/ZY)$*):*

| | |
|---|---|
| *(0):* | $w_Z(X/X) = 0$ |
| *($cl_1$):* | $x \in cl_Z(Y) \Leftrightarrow w_Z(x/Y) = 0$ |
| *($cl_2$):* | $w_Z(X/Y) = w_Z(cl(X)/Y) = w_Z(X/cl(Y))$ |
| *(Monotonie):* | $Y_0 \subset Y$*, so* $w_Z(X/Y_0) \geq w_Z(X/Y)$ |
| *(Additivität):* | $w_Z(XY) = w_Z(X/Y) + w_Z(Y)$ |
| *(endl Char$_1$):* | $w_Z(X)$ *endlich* $\Leftrightarrow w_Z(X) = w_Z(X_0)$ *für ein endliches* $X_0 \subset X$ |
| *(endl Char$_2$):* | $w_Z(X)$ *endlich, dann gibt es für alle* $Y$ *ein endliches* $Y_0 \subset Y$*, so daß* $w_Z(X/Y) = w_Z(X/Y_0)$ |

$\mathcal{U}$ *zusammen mit* $w$ *heißt dann* gewichteter Raum*.*

Die geforderten Eigenschaften sind denen der Dimension in Prägeometrien abgeguckt und so formuliert, daß Lokalisierungen und Unterräume von gewichteten Räumen wieder gewichtete Räume sind. $w(X/Y)$ ist dann eine Invariante des gewichteten Raumes $(\mathcal{U}/Y) \cap X$. Wegen $(cl_1)$ ist $cl$ durch $w$ definierbar, man könnte deshalb einen geweichteten Raum nur als Paar $(U, w)$ auffassen und so axiomatisieren, daß durch "$x \in cl_Z(Y) :\Longleftrightarrow w_Z(x/Y) = 0$" ein (algebraischer) Abschlußoperator definiert wird. Aus den Axiomen folgen außerdem

| | |
|---|---|
| (Monotonie'): | $X_0 \subset X$, so $w_Z(X_0/Y) \leq w_z(X/Y)$ |
| (Submodularität): | $w_Z(XY) + w_Z(cl_Z(X) \cap cl_Z(Y)) \leq w_Z(X) + w_Z(Y)$ |
| ($cl_1'$): | $X \subset cl_Z(Y) \Leftrightarrow w_Z(X/Y) = 0$ |

3.17 **Beispiele**
*Jede Prägeometrie ist mit dim ein gewichteter Raum, auch mit* $n{\cdot}dim$ $(0 < n < \omega)$*, instruktiver aber ist das folgende Beispiel:*
$\mathcal{U} = (U, cl)$ *sei eine Prägeometrie,* $\bar{U} := \bigcup_{n<\omega} U^n$ *und* $\pi : Pot(\bar{U} \to Pot(U)$ *sei folgendermaßen definiert: für* $x = (x_1, ...x_n) \in \bar{U}$ *sei* $x^\pi := \pi(\{x\}) := \{x_1, ..., x_n\}$*, für* $X \subset \bar{U}$ *sei dann* $\pi(X) := \bigcup_{x \in X} x^\pi$ *(*$\pi$ *ist sozusagen die Vorschrift: "fasse Tupel als Mengen auf"), dann gilt*
*(i)* $\pi$ *ist eine Projektion, d.h. surjektiv und idempotent (bzw.* $\pi_{|Pot(U)} = id_{Pot(U)}$*)*
*(ii)* $\pi$ *ist* $\subset$ *und* $\cup$ *homomorph.*
*Für* $X, Y \subset \bar{U}$ *sei dann* $\bar{cl}(X) := \{x \in \bar{U} \mid x^\pi \subset cl(\pi(X))\}$*, dann gilt*

$$X' \subset \bar{cl}_Y(X) \Leftrightarrow \pi(X') \subset cl_{\pi(Y)}(\pi(X))$$

*und daraus folgt*

*(iii)* $\pi(\bar{cl}(X)) = cl(\pi(X))$

$$\begin{tikzcd} Pot(\bar{U}) \arrow[r, "\bar{cl}"] \arrow[d, "\pi"'] & Pot(\bar{U}) \arrow[d, "\pi"] \\ Pot(U) \arrow[r, "cl"'] & Pot(U) \end{tikzcd}$$

*(denn* $\bar{cl}_Y(X) \subset \bar{cl}_Y(X) \ \Rightarrow \pi(\bar{cl}(X)) \subset cl(\pi(X)),\ \pi(cl_{\pi(Y)}(\pi(X))) \overset{(i)}{\subset} cl_{\pi(Y)}(\pi(X))$
$\Rightarrow \quad cl_{\pi(Y)}(\pi(X)) \subset \bar{cl}_Y(X) \ \Rightarrow cl_{\pi(Y)}(\pi(X)) \subset \pi(cl_{\pi(Y)}(\pi(X))) \overset{(ii)}{\subset} \pi(\bar{cl}_Y(X)))$
*Definiert man dann* $w({}^{X}/_{Y}) := dim({}^{\pi(X)}/_{\pi(Y)})$*, so ist* $(\bar{U}, \bar{cl}, w)$ *ein gewichteter Raum und* $(\bar{U}, \bar{cl}, w) \cap U = (U, cl, dim)$*. Ich nenne* $\bar{\mathcal{U}}$ *den von* $\mathcal{U}$ *induzierten gewichteten Raum.*
*Nun noch ein Beispiel aus der Stabilitätstheorie:*
*Es sei* $\mathcal{C}$ *ein Monstermodell einer stabilen Theorie und für* $A \subset \mathcal{C}$ *sei*

$$D(A) := \{a \,|\, U({}^{a}/_{A}) < \omega\}$$

$$U_A({}^{X}/_{B}) := sup\{U(tp({}^{X_0}/_{AB})) \,|\, X_0 \subset X \ endlich\}$$

*dann ist* $(D(A), acl_A, U_A)$ *ein gewichteter Raum. Ist* $p \in St(A)$ *ein U-Rang 1 Typ, so ist seine Prägeometrie als gewichteter Raum ein Unterraum von* $D(A)$*:*

$$(p^{\mathcal{C}}, acl_A, dim_p) \subset (D(A), acl_A, U_A)$$

*Der später auftauchende gewichtete Raum dient dazu, diese Situation auf beliebige stationäre reguläre Type zu verallgemeinern. Wie in dem Beispiel hier ergeben sich dann einige Eigenschaften des gewichteten Raums sofort aus den Definitionen, für andere (etwa Monotonie und Additivität) muß man "knallharte Modelltheorie" anwenden.*

Wie in Prägeometrien kann man nun Unabhängigkeit und Modularität definieren:

3.18 **Definition**
**(1)** *Eine Familie* $\{X_i | i \in I\}$ *von Mengen* $X_i \subset U$ *heißt* unabhängig *(in* $\mathcal{U}$*), wenn für alle endlichen* $I_0 \subset M$, $X_{i,0} \subset X_i$ *gilt*

$$w(\bigcup_{i \in I_0} X_{i,0}) = \sum_{i \in I_0} w(X_{i,0})$$

**(2)** $\mathcal{U}$ *heißt modular, wenn für alle abgeschlossenen* $X, Y \subset U$ *gilt:* $w(XY) + w(X \cap Y) = w(X) + w(Y)$

Entsprechen definiert man den Begriff "unabhängig über $Z$". Wie in Prägeometrie zeigt man, daß für endlich gewichtete Räume $X, Y$ gilt: $w_Z(XY) = w_Z(X) + w_Z(Y)$, so $w_Z(X_0 Y_0) = w_Z(X_0) + w_Z(Y_0)$ für alle endlichen $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$

("$w_Z(X) = w_Z({}^X\!/_Y) \leq w_Z({}^X\!/_{Y_0} \leq w_Z(X)$"). Endlich gewichtete Räume $X$ und $Y$ sind also genau dann voneinander unabhängig über $Z$, wenn $w_Z(XY) = w_Z(X) + w_Z(Y)$.

**Achtung**: Den Begriff der unabhängigen Menge gibt es schon in der Abschlußstruktur und es gilt in gewichteten Räumen nicht mehr, daß eine Menge $I$ genau dann unabhängig ist, wenn sie als Familie von Singeltons unabhängig ist. Dieser Unabhängigkeitsbegriff ist aber in gewichteten Räumen unbrauchbar und ich definiere deshalb: eine Teilmenge eines gewichteten Raumes heißt $w$-unabhängig (oder einfach nur unabhängig), wenn sie als Familie von Singeltons unabhängig ist. In Prägeometrien gilt also: $I$ ist genau dann unabhängig, wenn jedes $i \notin I\backslash\{i\}$, in gewichteten Räumen kann das falsch werden.

**Beispiel**: Es sei $\bar{\mathcal{U}}$ der von der Prägeometrie $\mathcal{U}$ induzierte gewichtete Raum, $(a, b, c, d)$ sei minimal ($w$-)abhängig in $\mathcal{U}$ und $X := \{(a, b), (b, c)\}$, so ist $X$ ($w$-)abhängig, obwohl jedes $x \notin X\backslash\{x\}$. Außerdem ist $w(X) = 3$, obwohl für jede (..)unabhängige Teilmenge $I$ von $X$ gilt: $w(I) < 3$. Ist $Y := \{d\}$, so sind alle unabhängigen Mengen in $X$ und $Y$ voneinander unabhängig, obwohl $cl(y) \subset cl(X)$.
Von Standpunkt der Prägeometrie aus ist das eine pathologische Situation, aber für gewichtete Räume ist sie ganz normal. Der Grund ist, daß in gewichteten Räumen kein "Basisexistenzsatz" gilt und daß deshalb die Unabhängigkeit von Unterräumen nicht mehr durch unabhängige Mengen charakterisiert werden kann, denn es muß keine ($w$-)unabhängigen Teilmengen geben, die das Gewicht einer Menge realisieren (ich weiß nichtmals, ob jeder abgeschlossene Raum eine "Basis" hat). Die Richtung, für die keine Existenzannahme benötigt wird, gilt natürlich immer noch: sind $X$ und $Y$ voneinander unabhängig, dann gilt für alle unabhängigen $I \subset X$, $J \subset Y$: $IJ$ ist unabhängig. $\mathcal{U} = (U, cl, w)$ sei ab nun ein gewichteter Raum. Das nächste Lemma gibt einen ersten Eindruck:

3.19 **Lemma**
**(1)** *$a \in cl_Z(b)$, so $w_Z(a) = w_Z(b) \Leftrightarrow cl_Z(a) = cl_Z(b)$ ($\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $a \sim_{cl_Z} b$)*
**(2)** *Es sei $w_Z(a) = w_Z(b)$ und $a$ unabhängig von $X$ über $Z$: $a \in cl_Z(Xb) \Rightarrow b \in cl_Z(Xa)$ und $b$ ist unabhängig von $X$ über $Z$.*
**(3)** *$U_1 = \{x \in U \mid w(x) \leq 1\}$, so ist $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap U_1$ eine Prägeometrie.*

**Beweis**
(1) Ist $a \in cl_Z(b)$, so $w_Z({}^b\!/_a) = w_Z(ab) - w_Z(a)$ ($w_Z(a) < \omega$) $= w_Z(b) - w_Z(a)$, also $w_Z(a) = w_Z(b) \Leftrightarrow w_Z({}^b\!/_a) = 0 \Leftrightarrow b \in cl_Z(a) \Leftrightarrow cl_Z(a) = cl_Z(b)$.
(2) Es sei $a \in cl_Z(Xb)$ (und die anderen Voraussetzungen gelten, OE $X$ endlich), so $w_Z({}^b\!/_{Xa}) = w_Z({}^{ab}\!/_X) - w_Z({}^a\!/_X) = w_Z({}^b\!/_X) - w_Z(a) = w_Z({}^b\!/_X) - w_Z(b) \leq 0$, also $w_Z({}^b\!/_X) = w_Z(b)$ und $b \in cl_Z(Xa)$.
(3) Wegen (2) gilt die Austauscheigenschaft: $a \in cl(Xb)$ und $a \notin cl(X)$, so $w(a) = 1 = w(b)$ und $w(Xa) = w(X) + w(a)$, also $b \in cl(Xa)$. $\square$

(2) kann man auch eine “schwache Austauscheigenschaft” nennen. Ist $\mathcal{U}$ modular, so auch jede Lokalisierung und jeder abgeschlossnen Unterraum und ist die Modularität verletzt, so sieht man das schon in einem endlich gewichteten Unterraum. Außerdem gilt wieder

3.20 **Lemma**
*Für einen gewichteten Raum* $\mathcal{U}$ *sind äquivalent:*
**(1)** $\mathcal{U}$ *ist modular*
**(2)** *Je zwei abgeschlossene Unterräume sind unabhängig über ihrem Schnitt*
**(3)** *Die Begriffe "voneinander unabhängig" und "fast disjunkt" fallen in jeder Lokalisierung von* $\mathcal{U}$ *zusammen*

# Kapitel 2

# p-Einfachheit und p-Gewicht

## 2.1 Internalität und Fremdheit

Die Begriffe der Internalität und der Fremdheit führen aus, in welchem Sinne ein Objekt sehr bzw. sehr wenig von einem anderen Objekt abhängig sein kann. Das Begriffspaar ist in diesem Kontext wichtig, da $p$-Einfachheit als eine Verallgemeierung der Internalität aufgefasst werden kann, wobei gleichzeitig eine spezielle Form der Fremdheit, nämlich erbliche Orthogonalität, eine wichtige Rolle bei der Definition der $p$-Einfachheit spielt.

### 2.1.1 Internalität

Ich habe verschiedene Definitionen für Internalität gesehen, als Relation zwischen 2 Typen über den gleichen Parametern, als Relation zwischen zwei definierbaren Klassen, als Relation zwischen einem stationären Typ und einer Klasse von partiellen Typen. Mit der Einführung des $Int$-Operators auf dem Monster habe ich hier einen recht algebraischen Standpunkt eingenommen. Die Definition ist sehr allgemein und macht die Beziehung zum definierbaren Abschluß klar: $Int \supset dcl$. Ich werde einige Charakterisierungen der Internalität geben, die weitestgehende ist die Existenz einer "Fundamentallösung". Diese brauche ich später bei der Konstruktion der "Bindungsgruppe".

1.1 **Definition**
*Es sei $Q$ eine beliebige Teilklasse von $\mathcal{C}$ und $q \in St(A)$:*
**(1)** *$q$ heißt* $Q$-intern, *wenn es ein $B$ gibt, so daß $(q|B)^{\mathcal{C}} \cap dcl^B(Q) \neq \emptyset$*
**(2)** $Int_A(Q) := \{a \mid stp(a/A)$ *ist $Q$-intern*$\}$

Der Begriff ist erst dann brauchbar, wenn $Q$ $A$-invariant ist, dann ist $Int_A(Q)$ $A$-invariant ($Int_A(Q)$ ist nach Definition schon $acl(A)$-invariant und i.a. eine echte Klasse) und $stp(a/A)$ ist genau dann $Q$-intern, wenn es ein $B \supset A$ gibt, so daß $a \perp_A B$ und $a \in dcl^B(Q)$. Man kann den Begriff anstatt für Klassen auch

für Familien von (partiellen) Typen definieren, dann muß man noch zusätzlich aufpassen, daß die Parameter "$B$" die Parameter der relevanten Typen enthalten: ist $\mathcal{P}$ eine Klasse von (partiellen) Typen, so bedeute "$a \models \mathcal{P}|B$", daß $tp(^a/_B)$ ein $\Pi \in \mathcal{P}$ fortsetzt, man sagt "$a$ realisiert $\mathcal{P}$ über $B$". $(\mathcal{P}|B)^{\mathcal{C}}$ sei dann die Klasse der Elemente, die $\mathcal{P}$ über $B$ realisieren. Dann kann man wie oben definieren: $q \in St(A)$ ist $\mathcal{P}$-intern, wenn es ein $B \supset A$ gibt, so daß $(q|B)^{\mathcal{C}} \cap dcl^B((\mathcal{P}|B)^{\mathcal{C}}) \neq \emptyset$. Ist z.B. $\mathcal{P}$ nur ein einziger Typ $p$, so ist $q$ genau dann $p$-intern, wenn es ein $B \supset A$ gibt, so daß $q|B$ in $dcl^B(p^{\mathcal{C}})$ realisiert wird <u>und</u> $B \supset dom(p)$.
$Q$-Internalität vererbt sich sicher von $q$ auf ganz $dcl(q)$ und ist, falls $Q$ $Cb(q)$-invariant ist, eine $\|$-Invariante Eigenschaft (man braucht die $Cb(q)$-Invarianz beim "hochgehen"). Abgesehen von dieser Einschränkung ist Internalität also eine gute Eigenschaft von stationären Typen.

1.2 **Lemma**
*$Q$ sei $A$-invariant, $q \in St(A)$ und $\mathcal{M} \supset A$ ein hinreichend saturiertes Modell, dann gilt:*

$$q \text{ ist } Q\text{-intern} \iff q^{\mathcal{C}} \subset dcl^{\mathcal{M}}(Q)$$

**Beweis**

Ist $q^{\mathcal{C}} \subset dcl^{\mathcal{M}}(Q)$, so sicher $(q|\mathcal{M})^{\mathcal{C}} \cap dcl^{\mathcal{M}}(Q) \neq \emptyset$, d.h. $q$ ist $Q$-intern. Ist andererseits $q$ $Q$-intern und $a \models q$ dann gibt es eine endliche Menge $B$, so daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$ und $a \in dcl^{AB}(Q)$. OE $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{Aa} \mathcal{M}$, dann $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\mathcal{M}} a$. Basiere $stp(^{Ba}/_{\mathcal{M}})$ auf einer kleinen Menge $A' \supset A$, und realisiere $stp(^B/_{A'})$ in $\mathcal{M}$, etwa durch $B'$ ($\mathcal{M}$ muß also $(|A|+|T|)^+$-saturiert sein). Wegen $Ba \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A'} \mathcal{M}$ gilt dann $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A'} a$ und $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A'} a$ also $B' \equiv_{A'a} B$ und $B'a \equiv_A Ba$, also $a \in dcl^{AB'}(Q) \subset dcl^{\mathcal{M}}(Q)$.
□

1.3 **Korollar**
*Ist $Q$ $A$-invariant, so gilt*
**(1)** *Ist $q \in St(A)$ $Q$-intern, so auch jede Fortsetzung von $q$*
**(2)** $Int_A(Int_A(Q)) = Int_A(Q)$

**Beweis**

(1) Ist $q$ $Q$-intern und $q' \supset q$, so $q'^{\mathcal{C}} \subset q^{\mathcal{C}} \subset dcl^{\mathcal{M}}(Q)$ und deshalb ist auch $q'$ $Q$-intern ($\mathcal{M}$ geeignet)
(2) Es sei $a \in Int_A(Int_A(Q))$, etwa $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$ und $a \in dcl^B(c_1, ..., c_n)$ für geeignete $c_i \in Int_A(Q)$. Wähle ein geeignetes $\mathcal{M} \supset A$ mit $Ba \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A \mathcal{M}$ und $c_i \in dcl^{\mathcal{M}}(Q)$, dann $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A \mathcal{M}B$ und $a \in dcl^{\mathcal{M}B}(Q)$, also $a \in Int_A(Q)$. □

Da für beliebige $Q \subset Q'$ $Q \subset Int_A(Q) \subset Int_A(Q')$ ist $Int_A$ ein Abschlußoperator auf den $A$-invarianten Klassen, dort ist auch $dcl(Int_A(Q)) = Int_A(Q)$,

denn $dcl(Int_A(Q)) \subset Int_A(Int_A(Q))$. Der Operator $Int_A$ kann als natürliche Verallgemeinerung von $dcl_A$ aufgefasst werden, offensichtlich gilt für beliebige $Q$: $dcl_A(Q) \subset Int_A(Q)$.
"$a \in dcl_A(b)$" läßt sich auch mit der Existenz einer $A$-Funktion charakterisieren, die $a$ auf $b$ abbildet (also auch $tp(^a/_A)$ surjektiv auf $tp(^b/_A)$ abbildet). Definierbare Funktionen sind auch im internen Kontext anwesend:

1.4 **Definition**
*Ein Tupel $\bar{a}$ von Realisierungen von $q \in St(A)$ heißt eine* Fundamentallösung *von $q$ bezüglich $Q \subset \mathcal{C}$, wenn $q^{\mathcal{C}} \subset dcl^{A\bar{a}}(Q)$.*

Gibt es eine Fundamentallösung, so gibt es eine partielle Surjektion $f : Q^m \supset\!\!\twoheadrightarrow (q|\bar{a})^{\mathcal{C}}$, deren Wirkung $A\bar{a}$ definierbar ist und $q$ ist dann sicher $Q$-intern. Es geht aber noch viel besser:

1.5 **Lemma über die Fundamentallösung**
*Ist $q \in St(A)$ und $Q$ eine $A$-invariante Klasse, so sind äquivalent:*
**(1)** *$q$ ist $Q$-intern*
**(2)** *$q$ hat eine Fundamentallösung bezüglich $Q$*
**(3)** *Es gibt ein $m < \omega$ und eine partielle Surjektion $g : Q^m \supset\!\!\twoheadrightarrow q^{\mathcal{C}}$, deren Wirkung $q^{\mathcal{C}}$-definierbar ist.*

**Beweis**
(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) ist klar, Arbeit macht nur (1) $\Rightarrow$ (3): Es sei $a \in dcl^B(\bar{c})$ für ein $a \models q|B$ und $\bar{c} \subset Q$, $MF$ sei eine Morleyfolge in $stp(^{a\bar{c}}/_B)|a\bar{c}$, dann ist $stp(^{a\bar{c}}/_{B, MF})$ basiert auf $tp(^{a\bar{c}}/_{MF})$ und nach dem dcl-Lemma ist $a \in dcl^{MF}(\bar{c})$, d.h. es gibt $a_1\bar{c}_1, ..., a_n\bar{c}_n$ unabhängig in $stp(^{a\bar{c}}/_B)|a\bar{c}$, so daß $a \in dcl(\bar{c}, a_1\bar{c}_1, ..., a_n\bar{c}_n)$ und $(a, a_1, ..., a_n) \models q^{(n+1)}$ (da $a \downarrow_A B$) etwa $a = f(\bar{d}, \bar{a})$, wobei $\bar{d} = \bar{c}\bar{c}_1...\bar{c}_n$ und $\bar{a} = a_1...a_n$.

Behauptung: $\bar{a}$ ist eine Fundamentallösung von $q$ bezüglich $Q$.
Beweis: Es sei $g(\bar{x}, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n, \bar{a}) := f(\bar{x}, f(\bar{x}_1, \bar{a}), ..., f(\bar{x}_n, \bar{a}))$, wobei $\bar{x}$ die Stelligkeit von $\bar{d}$ hat und die $f(\bar{x}_i, \bar{a})$ an den Stellen der $a_i$ stehen. Es sei nun $a' \models q$, wie oben findet man $\bar{d}' \subset Q$ und $(a'_1, ..., a'_n) \models (q|a')^{(n)}$, so daß $a' = f(\bar{d}', \bar{a}')$. Nun kann $\bar{a}'$ sogar unabhängig von $\bar{a}$ gewählt werden (mit der geeigneten Morleyfolge), dann jedes $(a'_i, \bar{a}) \models q^{(n+1)}$, also $a'_i\bar{a} \equiv^s_A a\bar{a}$ und $a'_i = f(\bar{d}'_i, \bar{a})$ für geeignete $\bar{d}'_i \subset Q$ (konjugiere "$a = f(\bar{d}, \bar{a})$"). Dann $a' = f(\bar{d}', a'_1, ..., a'_n) = f(\bar{d}', f(\bar{d}'_1, \bar{a}), ..., f(\bar{d}'_n, \bar{a})) = g(\bar{d}, \bar{d}'_1, ..., \bar{d}'_n, \bar{a})$, $g$ ist also die gesuchte partielle Surjektion. □

Da stets $Cb(^c/_{AB}) \subset dcl(U)$ gilt, wobei $U$ eine geeignete unabhängige Folge in $tp(^c/_{AB})$ ist, ist $Cb(^c/_{AB}) \subset dcl(U)$. Deshalb ist für $Q = tp(^c/_{AB})^{\mathcal{C}}$ und $C \subset Q$ $Cb(^C/_{AB}) \subset Int(Q)$, insbesondere gilt

$$Q \underset{Int_A(Q) \cap dcl_A(B)}{\downarrow} B$$

Auch hier geht's noch besser:

1.6 **Lemma**
*Es sei $Q$ $A$-invariant und $D \downarrow_A B$, dann $DQ \downarrow_{Int_A(Q) \cap dcl_A(B)} B$*

**Beweis**
Es sei $\bar{c} \subset Q$ und $e \in Cb({}^{D\bar{c}}/_{AB})$, für $D_1\bar{c}_1, ..., D_n\bar{c}_n$ geeignet unabhängig in $tp({}^{Dc}/_{AB})$ ist dann $e \in dcl(D_1\bar{c}_1, ..., D_n\bar{c}_n) = dcl^{D_1,...,D_n}(\bar{c}_1, ..., \bar{c}_n) \subset dcl^{D_1,...,D_n}(Q)$. Da $D \downarrow_A B$ ist dann $D_1, ..., D_n \downarrow_A B$. Aber auch $e \in dcl(AB)$, also $e \downarrow_A D_1...D_n$ und $e \in dcl^{D_1...D_n}(\bar{c}_1, ..., \bar{c}_n)$. Da $Q$ $A$-invariant ist, sind $\bar{c}_1, ..., \bar{c}_n \subset Q$ und deshalb ist $e \in Int_A(Q)$. Also $Cb({}^{D\bar{c}}/_{AB}) \subset Int_A(Q) \cap dcl_A(B)$ und $D\bar{c} \downarrow_{Int_A(Q) \cap dcl_A(B)} B$. □

1.7 **Definition**
*Es sei $q \in St(A)$ und $Q$ eine Teilklasse von $\mathcal{C}$. $q$ heißt $Q$-*fremd*, wenn für alle $B \supset A$ und $a \models q|B$ gilt: $a \downarrow_B Q$*

Eine äquivalente Forderung ist (wegen Transitivität): für alle $B \supset A$, $a \models q|B$ und $c \in Q$ (Elemente, nicht Tupel!) gilt: $a \downarrow_B c$. Fremdheit ist die stärkste Form der Unabhängigkeit, die bisher aufgetaucht ist. Aus dem nächsten Lemma folgt dann, daß die $Q$-internen Typen "dicht" in den Typen liegen, die nicht $Q$-fremd sind:

1.8 **Lemma**
*Es sei $q$ nicht $Q$-fremd, dann gibt es ein nicht algebraisches $q' \in dcl(q)$, welches $Q$-intern ist.*

**Beweis**
Es sei $D \supset A$, $a \models q|D$ und $a \not\downarrow_D Q$, dann $a \not\downarrow_A DQ$. Aber $a \downarrow_{Int_A(Q) \cap dcl_A(a)} DQ$ (wegen 1.6), also $a \not\downarrow_A Int_A(Q) \cap dcl_A(a)$ und $Int_A(Q) \cap dcl_A(a) \not\subset acl(A)$. Wähle ein $c \in Int_A(Q) \cap dcl(Aa) \setminus acl(A)$, dann $q' := stp({}^c/_A)$. □

### 2.1.2 Erbliche Orthogonalität

Einen Spezialfall der Fremdheit müssen wir für das Folgende genauer kennenlernen. Alle Typen seien stationär, $A_0$, $A$ bezeichnen stets $dom(p)$, $dom(q)$.

1.9 **Definition**
*$q$ heißt* erblich orthogonal zu $p$, $q \ {}^h\!\perp\ p :\Longleftrightarrow q' \perp p \ \forall q' \supset q$

Mit $q$ ist auch jede Fortsetzung von $q$ erblich orthogonal zu $p$ und da $\perp$ eine $\|$-Invariante ist, ist ${}^h\!\perp$ $\|$-invariant im zweiten Argument, es kann also i.a. OE $A_0 = Cb(p)$ angenommen werden. Sind $p, q \in St(A)$, dann ist $q$ genau dann erblich orthogonal zu $p$, wenn $p$ $q^{\mathcal{C}}$-fremd ist. In Elementen geschrieben bedeutet das:

$$q \ {}^h\!\perp\ p \Leftrightarrow \forall a \models q \ B \supset A_0 A, \ c \models p|B : \ a \underset{B}{\downarrow} c$$

1.10 **Eigenschaften**

**(1)** *$Cb(p) \subset A$, so $q \ {}^h\!\!\perp\ p \Leftrightarrow \exists a \models q\ \forall B \supset A_0A,\ c \models p|B :\ c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B a$*

**(2)** *${}^h\!\!\perp$ ist $\|$-invariant im ersten Argument für Parametermengen über $Cb(p)$.*

**(3)** *$stp({}^{a_i}/_{A_i})\ {}^h\!\!\perp\ p\ (i = 1,2) \Rightarrow stp({}^{a_1a_2}/_{A_1A_2})\ {}^h\!\!\perp\ p$*

**Beweis**

**(1)** "$\Rightarrow$" klar, "$\Leftarrow$": $a$ erfülle die Bedingung der rechten Seite, sei $B \supset A_0A$, $c \models p|B$, $a' \models q$, zu zeigen: $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B a'$
OE $A_0 = Cb(p)$, sei $\sigma \in Aut_A$ mit $\sigma(a') = a$, dann $B^\sigma \supset A$, $c^\sigma \models p|B^\sigma$ ($p^\sigma = p$), dann gilt nach Voraussetzung $c^\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B^\sigma} a$, also $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B a'$.

**(2)** Sei $A' \supset A \supset Cb(p)$, $q|A'\ {}^h\!\!\perp\ p$, zu zeigen: $q\ {}^h\!\!\perp\ p$ (alles andere ist klar) Sei $\hat{q} \supset q$, wähle ein $\sigma \in Aut_A$, so daß $dom(\hat{q})^\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A A'$, dann gilt mit dem $\diamondsuit$-Lemma: $\hat{q}^\sigma|A' \supset q|A'$. Da nach Voraussetzung $q|A'\ {}^h\!\!\perp\ p$, ist $\hat{q}^\sigma|A' \perp p$, also $\hat{q} \perp p^{\sigma^{-1}}$. Aber $Cb(p) \subset A$, deshalb $p^{\sigma^{-1}} \| p$ und $\hat{q} \perp p$.

**(3)** Seien $a_1'a_2' \models stp({}^{a_1a_2}/_{A_1A_2})$, $B \supset A_1A_2$, $c \models p|B$, dann $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B a_1'$ (denn $a_1' \models stp({}^{a_1}/_{A_1})\ {}^h\!\!\perp\ p$) und $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{Ba_1'} a_2'$ ($a_2' \models stp({}^{a_2}/_{A_2})\ {}^h\!\!\perp\ p$), also $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B a_1'a_2'$. □

1.11 **Definition**

*Es sei $p$ ein stationärer, regulärer Typ und $X$ eine beliebige Klasse von Parametern.*

$$\tilde{cl}_p(X) := \{a \mid \textit{es gibt eine Menge } A \subset X : stp({}^a/_A)\ {}^h\!\!\perp\ p\}$$

1.12 **Lemma**

**(1)** *$acl \subset \tilde{cl}_p$*

**(2)** *$\tilde{cl}_p$ ist ein Abschlußoperator auf $\mathcal{C}$.*

**(3)** *Für $a \models p$ gilt: $a \in \tilde{cl}_p(A_0B) \Leftrightarrow a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A_0} B$.*

**Beweis**

(1) Jeder algebraische Typ ist orthogonal, also auch erblich orthogonal zu $p$.

(2) Bis auf die Idempotenz ist alles schon bekannt. Sei also $a \in \tilde{cl}_p(\tilde{cl}_p(X))$, etwa $stp({}^a/_B)\ {}^h\!\!\perp\ p$ für eine Teilmenge $B \subset \tilde{cl}_p(X)$, dann gibt es eine Teilmenge $A \subset X$, so daß $stp({}^B/_A)\ {}^h\!\!\perp\ p$.

Behauptung: $stp({}^a/_A)\ {}^h\!\!\perp\ p$
Beweis: Sei $D \supset A_0A$ und $c \models p|D$, dann $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_D c$ (da $stp({}^B/_A)\ {}^h\!\!\perp\ p$), also $c \models p|BD$. Aber $BD \supset B$, also $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{BD} c$ (da $stp({}^a/_B)\ {}^h\!\!\perp\ p$), also $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_D c$ (da $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_D c$).

(3) Es seien $a \models p$, dann $a \in \tilde{cl}_p(A_0B) \Leftrightarrow stp({}^a/_{A_0B})\ {}^h\!\!\perp\ p \Leftrightarrow stp({}^a/_{A_0B})$ ist eine forkende Fortsetzung von $p \Leftrightarrow a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A_0} B$. □

Aus (3) folgt $((\mathcal{C},\tilde{cl}_p)/A_0)\cap p^{\mathcal{C}} = (p^{\mathcal{C}}, \not\perp_{A_0})$, anders gesagt:

$$(p^{\mathcal{C}}, \underset{A_0}{\not\perp}) \text{ ist ein Unterraum von } (\mathcal{C}, \tilde{cl}_{p,A_0}).$$

Schön wäre, wenn erbliche Orthogonalität im ersten Argument auf nichtforkende Einschränkungen vererben würde. Das folgende Beispiel zeigt, daß das i.a. nicht der Fall ist, aber das anschließende Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium.

1.13 **Beispiel**
*Sei $T$ die Theorie einer Äquivalenzrelation $E$ mit unendlich vielen unendlichen Klassen. $T$ ist $\omega$-kategorisch und $\omega$-stabil. Sei $q$ der Typ in $S_1(\emptyset)$, $a$ ein Element und $p$ der nicht algebraische Typ in $S_1(a)$ mit $E(x,a)\in p$, dann sind beide Typen sationär, $U(p)=1$ und es gilt $\emptyset \perp p$, $q|a \ {}^h\!\!\perp\ p$, $q \ {}^h\!\!\not\perp\ p$. Für $b\models q|a$ gilt also: $b\in \tilde{cl}_p(a)\backslash\tilde{cl}_p(\emptyset)$.*

1.14 **Lemma**
*Sei $p$ regulär und $A\not\perp p$, dann gilt für beliebiges $B$: $q|B \ {}^h\!\!\perp\ p \Rightarrow q \ {}^h\!\!\perp\ p$*

**Beweis**

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von 1.10(2), bis an die Stelle, wo $\hat{q}\perp p^{\sigma^{-1}}$ gilt. Dann muß man anders argumentieren, da $p^{\sigma^{-1}}\| p$ i.a. nicht gilt. Dazu braucht man den folgenden (er folgt z.B. aus [?, C.6])

1.15 **Fakt**
*Sei $p$ ein regulärer Typ, $p\not\perp A = acl(A)$, $\sigma\in Aut_A$, dann $p^\sigma \not\perp p$*

Damit erhalten wir in der obigen Situation $\hat{q}\perp p^{\sigma^{-1}}\not\perp p$, also $\hat{q}\perp p$ (Regularität) □

Schränkt man sich also in der zweiten Variablen auf reguläre Typen ein, so bekommt man sogar $\|$-Invarianz im ersten Argument für Parametermengen, die nicht orthogonal zum regulären Typ im zweiten Argument sind und das zweite Argument wird invariant für $\not\perp$-Klassen regulärer Typen.

## 2.2 p-Einfachheit und p-Gewicht

Ich komme nun zu zwei der wichtigsten Begriffe dieser Arbeit. Nachdem ich die Begriffe definiert und einige grundlegende Eigenschaften bewiesen habe, werde ich zeigen, daß sich das $p$-Gewicht auf der Klasse der $p$-einfachen Typen ähnlich wie ein Rang verhält und daß man auf diese Weise gewichtete Räume erhält. Dies verallgemeinert die Situation des Beispiels 3.17: die Prägeometrie des regulären Typs ist ein Unterraum des gewichteten Raums. Das werde ich in zwei Schritten tun, erst wird ein Abschlußoperator auf $\mathcal{C}$ definiert, welcher die Rolle von $acl$ übernimmt, dann wird auf einer geeigneten Klasse ein Gewicht eingeführt, welches die Rolle des $U$-Rang übernimmt.
Um ein besseres Verständnis für das Verhältnis zwischen Forking und $p$-Gewicht zu bekommen, werde ich dann erst etwas über kanonische Basen sagen und schließlich den Begriff der $p$-Semiregularität einführen.

### 2.2.1 Die Definition und erste Eigenschaften

$p$ und $q$ seien stets stationäre Typen, $p$ regulär, $A_0,\ A$ bezeichnen $dom(p),\ dom(q)$.

2.1 **Definition**
*Es sei $p \not\perp A$:*
**(1)** *Ein Tripel $(I, B, a)$ nenne ich* $p$-Zeuge für q $:\Longleftrightarrow$

$$I \subset p^{\mathcal{C}},\ B \supset A_0A,\ a \models q|B,\ \textit{und}\ stp({}^{a}/_{BI})\ {}^{h}\!\perp\ p$$

**(2)** *$q$ heißt* $p$-einfach $:\Longleftrightarrow$ *$dom(q) \not\perp p$ und es gibt einen $p$-Zeugen für $q$.*
**(3)** *Ist $q$ $p$-einfach, dann ist das* $p$-Gewicht von $q$

$$w_p(q) := min\{\#J | (J, B, a)\ \textit{ist ein p-Zeuge für}\ q\}$$

Für "$w_p(stp({}^{a}/_{A}))$" schreibe ich "$w_p({}^{a}/_{A})$", ich sage, daß $(I, B, a)$ $w_p(q)$ realisiert, wenn $(I, B, a)$ ein $p$-Zeuge (oder einfache nur "Zeuge") für $q$ ist und $\#I = w_p(q)$. Wenn ich vom $p$-Gewicht eines Typs spreche, dann meine ich natürlich insbesondere, daß es existiert, d.h. daß der Typ $p$-einfach ist. So gilt

$$stp({}^{a}/_{A})\ {}^{h}\!\perp\ p \Leftrightarrow a \in cl_p(A) \Leftrightarrow w_p({}^{a}/_{A}) = 0.$$

Offensichtlich ist ein Typ genau dann $p$-einfach, wenn alle seine Projektionen $p$-einfach sind, sein $p$-Gewicht ist dann das Maximum der $p$-Gewichte seiner Projektionen. So kann man die Begriffe auch für *-Typen erklären:
Ein *-Typ heißt $p$-einfach, wenn alle seine Projektionen auf Typen $p$-einfach sind und sein $p$-Gewicht ist dann das Supremum der $p$-Gewichte der Projektionen.

2.2 **Lemma**

Es sei $J \subset p^{\mathcal{C}}$ endlich und $B \supset A_0$, dann ist $stp(^J/_B)$ $p$-einfach und

$$w_p(^J/_B) = dim_{p|B}(J).$$

**Beweis**

Sei $I$ eine $p|B$-Basis von $J$, dann gilt für $D \supset BI$ : $p|D \models p|DJ$ (Regularität), also für $c \models p|D$ : $c \downarrow_D J$. $(I, B, J)$ ist also ein Zeuge für $stp(^J/_B)$ und $w_p(^J/_B) \leq \#I = dim_{p|B}(J)$. Sei $(I', B', J')$ eine Realisierung von $w_p(^J/_B)$, dann gilt $stp(^{J'}/_{B'I'}) \perp^a p|B'I'$, also kann kein $j'$ in $p|B'I'$ liegen, d.h. alle $j' \not\downarrow_{B'} I'$. Dann gilt aber (Regularität) $dim_{p|B'}(J') \leq dim_{p|B'}(I') \leq \#I' = w_p(^J/_B)$. Insgesammt ergibt sich also $w_p(^J/_B) \leq dim_{p|B}(J) = dim_{p|B}(J') \stackrel{\downarrow}{=} dim_{p|B'}(J') \leq w_p(^J/_B)$ □

Achtung: Nach Definition ist (für $J \subset p^{\mathcal{C}}$ beliebig groß, $b \supset A_0$) $w_p(^J/_B) \leq \omega$ (da $w_p(^J/_B) \stackrel{Def}{=} sup\{w_p(^{J_0}/_B) | J_0 \subset J$ endlich $\} = sup\{dim_{p|B}(J_0) | J_0 \subset J$ endlich $\} \leq \omega$), falls also $J$ überabzählbar ist, fallen $w_p(^J/_B)$ und $dim_{p|B}(J)$ auseinander.

Die Begriffe "$p$-einfach" und "$p$-Gewicht" hängen vom Begriff des Zeugen ab, dieser sieht aber auf den ersten Blick etwas zu liberal aus, da z.B. nicht "$I \subset (p|B)^{\mathcal{C}}$" gefordert wurde: einen Zeugen $(I, B, a)$ nenne ich *gut*, wenn $I$ unabhängig in $p|B$ ist und $a \rhd_B I$. Das folgende Lemma enthält so ungefähr alles, was man über Zeugen wissen muß.

2.3 **Zeugenlemma**

**(1)** *Ist $(J, B, a)$ ein Zeuge für $q$ und $J' \subset p$, so daß alle $j \not\downarrow_B J'$, dann ist auch $(J', B, a)$ ein Zeuge für $q$.*

**(2)** *Ist $(J, B, a)$ ein Zeuge für $q$, so gibt es ein $B' \supset B$, $I \subset J$, so daß $(I, B', a)$ ein guter Zeuge für $q$ ist.*

**(3)** *Über a-Modellen gibt es stets gute Zeugen: sei $\mathcal{M} \supset A_0$ ein a-Modell und $tp(^b/_{\mathcal{M}})$ p-einfach, dann gibt es ein $I$, so daß $(I, \mathcal{M}, b)$ ein guter Zeuge für $tp(^b/_{\mathcal{M}})$ ist.*

**(4)** *$stp(^a/_A)$ sei p-einfach von endlichem p-Gewicht und $(J, B, a)$ ein Zeuge, dann gilt: $(J, B, a)$ realisiert $w_p(^a/_A)$ $\Leftrightarrow$ $(J, B, a)$ ist gut und $w_p(^J/_B) = w_p(^a/_A)$*

**(5)** *Es sei $p' \in St(A_0')$ regulär und $p' \not\perp p$, $B \supset A_0A_0'$, $I' \subset p'$, so daß alle $i \not\downarrow_B I'$:*
*Ist $(I, B, a)$ ein p-Zeuge für $q$, so ist $(I', B, a)$ ein $p'$-Zeuge für $q$.*

**Beweis**

(1) zu zeigen: $stp(^a/_{BJ'}) \stackrel{h}{\perp} p$. Sei $D \supset BJ'$, $c \models p|D$, dann $c \models p|DJ$ (alle $j \not\downarrow_B J' \subset D$ und Regularität), also $c \downarrow_{DJ} a$, da $stp(^a/_{BJ}) \stackrel{h}{\perp} p$. Weil $c \downarrow_D J$, gilt $c \downarrow_D a$, damit folgt die Behauptung.

(2) Wähle $J_0 \subset J$ maximal mit $J_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B a$, dann ist für $B' := BJ_0$ auch $(J \backslash J_0, B', a)$ ein Zeuge. Sei $I$ eine $p|B'$-Basis von $J \backslash J_0$, wegen (1) ist dann auch $(I, B', a)$ ein Zeuge, nach Konstruktion ist $I$ unabhängig in $p|B'$ und alle $i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B'} a$ (Maximalität von $J_0$), also $a \rhd_{B'} I$ (Regularität).

(3) Es sei $(J, B, a)$ ein guter Zeuge für $q = tp({}^b/_{\mathcal{M}})$, $C := Cb(p) \cup Cb(q)$, wähle eine kleine Menge $B_0 \subset B$, so daß $C \subset B_0$ und $stp({}^{aJ}/_B)$ auf $B_0$ basiert ist. Wähle $\sigma \in Aut_C$ mit $B_0^\sigma \subset \mathcal{M}$ (das geht, denn $C \subset dcl(A_0 A) \subset \mathcal{M}$, $CB_0$ ist klein und $\mathcal{M}$ ist ein $a$-Modell) und $\tau \in Aut_{B_0^\sigma}$ mit $a^{\sigma\tau} J^{\sigma\tau} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0^\sigma} \mathcal{M}$.

Behauptung: $(J^{\sigma\tau}, \mathcal{M}, a^{\sigma\tau})$ ist ein guter Zeuge für $q$.
Beweis: $stp({}^a/_{BJ}) \overset{h}{\perp} p$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0 J} BJ$, also $stp({}^a/_{B_0 J}) \overset{h}{\perp} p$, $stp({}^{a^{\sigma\tau}}/_{B_0^\sigma J^{\sigma\tau}})$ $\overset{h}{\perp} p^{\sigma\tau}$ und $stp({}^{a^{\sigma\tau}}/_{\mathcal{M} J^{\sigma\tau}}) \overset{h}{\perp} p$ $(p \| p^{\sigma\tau}$, weil $Cb(p)$ fixiert bleibt).
Nun gilt $(i)$ $aJ \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0} B$ und $(ii)$ $a^{\sigma\tau} J^{\sigma\tau} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0^\sigma} \mathcal{M}$. Also $a \rhd_B J \overset{(i)}{\Rightarrow} a \rhd_{B_0} J \Rightarrow a^{\sigma\tau} \rhd_{B_0^\sigma}$ $J^{\sigma\tau} \overset{(ii)}{\Rightarrow} a^{\sigma\tau} \rhd_{\mathcal{M}} J^{\sigma\tau}$ und analog $J$ unabhängig in $p|\mathcal{M} \overset{(i)}{\Rightarrow} J$ unabhängig in $p|B_0 \Rightarrow J^{\sigma\tau}$ unabhängig in $p|B_0^\sigma \overset{(ii)}{\Rightarrow} J^{\sigma\tau}$ unabhängig in $p|\mathcal{M}$, das beweist die Behauptung.

Konjugiert man jetzt noch $a^{\sigma\tau}$ über $\mathcal{M}$ auf $b$, so sei $I$ das Konjugat von $J^{\sigma\tau}$, das erfüllt das Gewünschte.

(4) "$\Rightarrow$": Wie im Beweis von (2) gibt es disjunkte Teilmengen $I$ und $J_0$ von $J$, so daß $(I, BJ_0, a)$ ein guter Zeuge für $q$ ist. Aber $w_p({}^a/_A) = \leq \#I \leq \#J = w_p({}^a/_A)$, deshalb folgt $I = J$, da $\#J$ endlich ist. Dann ist aber $J_0 = \emptyset$ und $J$ unabhängig in $p|B$, also $w_p({}^J/_B) = dim_{p|B}(J) = \#J = w_p({}^a/_A)$.
"$\Leftarrow$": Da $J$ unabhängig in $p|B$ ist, gilt $\#J = dim_{p|B}(J) = w_p({}^J/_B)$, da aber $w_p({}^J/_B) = w_p({}^a/_A)$, realisiert $(J, B, a)$ das $p$-Gewicht von $stp({}^a/_A)$.

(5) zu zeigen ist: $stp({}^a/_{BI'}) \overset{h}{\perp} p'$. Wie in (1) zeigt man $stp({}^a/_{BI'}) \overset{h}{\perp} p$, dazu braucht man, daß alle $i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B I'$, mit $p' \not\perp p$ folgt dann die Behauptung.

□

Aus dem Lemma folgt, daß man die Definition auch auf gute Zeugen hätte einschränken können. Im Beweis von (3) hätte ich auch mit einem guten Zeugen beginnen können, der $w_p({}^b/_{\mathcal{M}})$ realisiert, dann wäre eine gute Realisierung $(I, \mathcal{M}, b)$ rausgekommen. Die nächsten 3 Lemmas zeigen, daß die Begriffe den Mindestanforderungen genügen.

2.4 **Lemma**
*$p$-Einfachheit und $p$-Gewicht sind $\|$-invariante Begriffe für Parametermengen, die nicht orthogonal zu $p$ sind.*

**Beweis**
Seien $q_i \in St(A_i)$, $(i = 1, 2)$, $A_2 \supset A_1 \not\perp p$, $q_2 \supset q_1$: jeder Zeuge für $q_2$ ist auch ein Zeuge für $q_1$, insbesondere ist $w_p(q_1) \leq w_p(q_2)$.

Sei andererseits $(I, B, a)$ ein Zeuge für $q_1$ und $a' \models q_2|B$, dann ist wegen Stationarität $stp(a'/B) = stp(a/B)$. Für ein $\sigma \in Aut_{acl(B)}$ mit $a \mapsto a'$, gilt dann: $q_2 \overset{nf}{\subset} q_2|B = stp(a'/BA_2) \subset stp(a^\sigma/BA_2I^\sigma) \supset stp(a^\sigma/BI^\sigma) = stp(a/BI)^\sigma \;{}^h\!\!\perp\; p^\sigma = p$
Also ist $(I^\sigma, BA_2, a^\sigma)$ ein Zeuge für $q_2$ und folglich $w_p(q_2) \leq w_p(q_2)$ □

2.5 **Lemma**
*Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ a-Modelle, $A_0 \subset \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{N}$: Ist $tp(a/\mathcal{M})$ p-einfach, so gilt für jede $p|\mathcal{M}$-Basis $I$ von $\{c \in \mathcal{N} \mid c \not\perp_{\mathcal{M}} a\}$: $(I, \mathcal{M}, a)$ realisiert $w_p(a/\mathcal{M})$*

**Beweis**
OE $A_0 = \mathcal{M}$, sei $(J, \mathcal{M}, a)$ eine gute Realisierung von $w_p(a/\mathcal{M})$, dann kann $J \subset \mathcal{N}$ gewählt werden:
Basiere $tp(aJ/\mathcal{M})$ wieder auf einer kleinen Teilmenge $B_0$, die die kanonischen Basen der betrachteten Typen umfasst, konjugiere dann $J$ über $B_0a$ auf $J' \subset \mathcal{N}$, dann ist wieder $stp(a/\mathcal{M}J') \;{}^h\!\!\perp\; p$. Für $j \in J$ gilt $j \not\perp_{\mathcal{M}} a$, also $a \rhd_{\mathcal{M}} j$, $a \rhd_{B_0} j$, $a \rhd_{B_0} j'$, $j' \perp_{B_0} \mathcal{M}$, $j' \not\perp_{\mathcal{M}} a$ (man verwendet $aj \perp_{B_0} \mathcal{M}$), also ist $(J', \mathcal{M}, a)$ ein guter Zeuge.
Es sei $I'$ eine $p$-Basis von $J'$, dann realisiert auch $(I', \mathcal{M}, a)$ das $p$-Gewicht von $q$.

Behauptung: $I'$ ist eine $p$-Basis von $Y := \{c \in \mathcal{N} | c \not\perp_{\mathcal{M}} a\}$
Beweis: $I' \subset Y$, denn $(I', \mathcal{M}, a)$ ist gut, und für $c \models p|\mathcal{M}I'$ gilt $c \perp_{\mathcal{M}I'} a$ (denn $stp(a/\mathcal{M}I') \;{}^h\!\!\perp\; p$), also $c \perp_{\mathcal{M}} a$. Das bedeutet $\forall c \in p^Y : c \not\perp_{\mathcal{M}} I'$, $I'$ ist also ein unabhängiges Erzeugendensystem, d.h. eine Basis.
Ist $I$ eine weitere $p$-Basis von $Y$, so gilt wegen des Zeugenlemmas (2.3), daß auch $(I, \mathcal{M}, a)$ ein Zeuge ist, also realisiert $(I, \mathcal{M}, a)$ das $p$-Gewicht von $stp(a/\mathcal{M})$. □

2.6 **Korollar**
**(1)** *Es sei $\mathcal{M} \supset A_0A$ ein a-Modell, $a \models q|\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}[a]$ sei ein a-Primmodell von $\mathcal{M}a$:*
*Falls $stp(a/A)$ p-einfach ist, so gilt für jede $p|\mathcal{M}$-Basis $I$ von $\mathcal{M}[a]$: $(I, \mathcal{M}, a)$ realisiert $w_p(a/A)$, insbesondere gilt $w_p(a/A) = dim_{p|\mathcal{M}}(\mathcal{M}[a])$*
**(2)** *Es sei $q$ p-einfach, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $w_p(q) \geq n \iff q \rhd p^{(n)}$*

**Beweis**
**(1)** $\{c \in \mathcal{M}[a] \mid c \not\perp_{\mathcal{M}} a\} = \mathcal{M}[a] \backslash \mathcal{M}$, da $a \rhd_{\mathcal{M}} \mathcal{M}[a]$
**(2)** Wähle wieder $\mathcal{M}[a] \succ \mathcal{M} \supset A_0A$ für ein $a \models q|\mathcal{M}$: aus Korollar (1) folgt, daß $(p|\mathcal{M})^{(n)}$ genau dann in $\mathcal{M}[a]$ realisiert wird, wenn $q \rhd p^{(n)}$ □

Das Korollar (2) macht übrigens die Verwandschaft zwischen dem "lokalen" $p$-Gewicht und dem für beliebige Typen definierten Gewicht deutlich (mehr zu diesem allgemeinen Gewicht findet man z.B. in [?] oder auch bei [?, Kapitel 1]). Ich nenne einen zu $p$ nicht orthogonalen regulären Typ *p-regulär*. Wie bei der Domination hängen die Begriffe nur von der Orthogonalitätsklasse von $p$ ab:

2.7 **Lemma**
*Die Begriffe "p-einfach" und "p-Gewicht" bleiben invariant, wenn man p durch einen p-regulären Typ ersetzt.*

**Beweis**

Es sei $q$ ein $p$-einfacher Typ, $p' \in St(A_0')$ regulär, $p' \not\perp p$, zu zeigen ist: $q$ ist $p'$-einfach und $w_{p'}(q) = w_p(q)$.
Sei $\mathcal{M} \supset A_0 A_0' A$ ein $a$-Modell, $a \models q|\mathcal{M}$, $\mathcal{M}(a)$ sei ein $a$-Primmodell von $\mathcal{M}a$, $I$ eine $p|\mathcal{M}$-Basis von $\mathcal{M}(a)$ und $I'$ eine $p'|\mathcal{M}$-Basis von $\mathcal{M}(a)$:
Da alle $i \not\downarrow_{\mathcal{M}} I'$, bezeugt $(I', \mathcal{M}, a)$ die $p'$-Einfachheit von $q$ (Zeugenlemma, 2.3). Dann wird $w_{p'}(q)$ von $(I', \mathcal{M}, a)$ und $w_p(q)$ von $(I, \mathcal{M}, a)$ realisiert und mit $\#I = \#I'$ folgt die Behauptung. □

### 2.2.2 Weitere Eigenschaften

2.8 **Lemma (Algebraischer Abschluß)**
*Es sei q p-einfach und $q' \in acl^s(q)$, dann ist auch $q'$ p-einfach und $w_p(q') \leq w_p(q)$*

**Beweis**

Es sei $(J, B, a)$ ein Zeuge für $q$ und $b \models q'$, $b \in acl(Aa)$, dann ist $(J, B, b)$ ein Zeuge für $q'$. □

2.9 **Lemma (Monotonie)**
*Fortsetzungen von p-einfachen Typen bleiben p-einfach und das p-Gewicht kann dabei nicht steigen.*

**Beweis**

Es sei $q' \in St(B)$, $q' \supset q$, $q$ sei $p$-einfach, zu zeigen: $q'$ ist $p$-einfach und $w_p(q') \leq w_p(q)$
Wähle ein $a$-Modell $\mathcal{M} \supset A_0 A$, zu finden ist ein $a \models q|\mathcal{M} \cup q'|\mathcal{M}B$, denn dann ist für jeden Zeugen $(I, \mathcal{M}, a)$ von $q$ $(I, \mathcal{M}B, a)$ ein Zeuge von $q'$ (und wegen des Zeugenlemmas gibt es solche Zeugen) und damit folgte die Behauptung.
Angenommen es könnte $\mathcal{M} \downarrow_A B$ gewählt, so hätten wir mit dem $\diamond$-Lemma $q'|\mathcal{M}B \models q|\mathcal{M}$ und wir wären fertig, aber wir können M nicht ohne weiteres so wählen, denn $A_0 \downarrow_A B$ muß nicht gelten.
Wähle deshalb ein $\sigma \in Aut_{acl(A)}$, so daß $A_0^\sigma \downarrow_A B$. Wegen $p \not\perp A$ gilt dann $p^\sigma \not\perp p$ (1.15) und $p$ kann durch $p^\sigma$ ersetzt werden. Dann klappt alles. □

2.10 **Lemma (Additivität)**
*Es seien $stp({}^{a}\!/_{A})$, $stp({}^{b}\!/_{A})$ p-einfach, dann ist auch $stp({}^{ab}\!/_{A})$ p-einfach und es gilt:*

$$w_p({}^{ab}\!/_{A}) = w_p({}^{a}\!/_{Ab}) + w_p({}^{b}\!/_{A})$$

**Beweis**

Sei $\mathcal{M} \supset A_0A$ ein $a$-Modell, $\mathcal{M} \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{A} ab$, $\mathcal{M}[b]$ sei ein $a$-Primmodell von $\mathcal{M}b$, so daß $\mathcal{M}[b] \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}b} a$, $I$ sei eine $p|\mathcal{M}$-Basis von $\mathcal{M}[b]$. Sei $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}[b]$ ein $a$-Modell, dann gilt $I \subset Y := \{c \in \mathcal{N} \mid c \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}} ab\}$, $I$ läßt sich also durch $J$ zu einer $p|\mathcal{M}$-Basis $IJ$ von $Y$ fortsetzen.

Behauptung: $(I, \mathcal{M}, b)$ realisiert $w_p({}^{b}\!/_{\mathcal{M}})$, $(IJ, \mathcal{M}, ab)$ realisiert $w_p({}^{ab}\!/_{\mathcal{M}})$, $(J, \mathcal{M}, a)$ realisiert $w_p({}^{a}\!/_{\mathcal{M}[b]})$

Beweis: $(I, \mathcal{M}, b)$ realisiert $w_p({}^{b}\!/_{\mathcal{M}})$ wegen (2.6), $(IJ, \mathcal{M}, ab)$ ist wegen (1.10(3)) ein Zeuge für $stp({}^{ab}\!/_{\mathcal{M}})$ und realisiert $w_p({}^{ab}\!/_{\mathcal{M}})$, weil $IJ$ eine $p|\mathcal{M}$-Basis von $Y$ ist (und 2.5). Für den letzten Teil reicht es zu zeigen: $J$ ist eine $p|\mathcal{M}[b]$-Basis von $\{c \in \mathcal{N} | c \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}[b]} a\}$.

$J$ ist unabhängig in $p|\mathcal{M}[b]$, denn $J \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}} I$ und $I$ ist eine $p|\mathcal{M}$-Basis von $\mathcal{M}[b]$ (Regularität). Sei $c \models p|\mathcal{M}[b]$, $c \in \mathcal{N}$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}[b]} J$, dann gilt $c \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}} \mathcal{M}[b]J$, also $c \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}[b]} a$, denn $stp({}^{a}\!/_{\mathcal{M}})\ {}^{h}\!\perp\ p$. $J$ ist also ein unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis, das beendet den Beweis der Behauptung.

Insgesammt gilt deshalb: $w_p({}^{ab}\!/_{\mathcal{M}}) = \#IJ = \#J + \#I = w_p({}^{a}\!/_{\mathcal{M}[b]}) + w_p({}^{b}\!/_{\mathcal{M}})$, und da alle Fortsetzungen nicht forkend waren, sind wir fertig. □

2.11 **Korollar**
**(1)** *$(I, A, a)$ realisiere das endliche p-Gewicht eines p-einfachen Typen, sei $B \supset A$ und $stp({}^{b}\!/_{A})$ p-einfach, so gilt*

$$w_p({}^{ab}\!/_{B}) = w_p({}^{Ib}\!/_{B}) \text{ und } w_p({}^{b}\!/_{Ba}) = w_p({}^{b}\!/_{BI})$$

*(a und I sind also bei Gewichtsrechnungen "stets austauschbar").*
**(2)** *Sind $q_1, q_2 \in St(A)$ p-einfach, so auch $q_1 \otimes q_2$ und $w_p(q_1 \otimes q_2) = w_p(q_1) + w_p(q_2)$.*

**Beweis**

(1) $stp({}^{a}\!/_{AI})\ {}^{h}\!\perp\ p$, also $w_p({}^{a}\!/_{BI}) \leq w_p({}^{a}\!/_{AI}) = 0$, und da $w_p({}^{a}\!/_{A})$ endlich ist, ist $w_p({}^{a}\!/_{A}) = w_p({}^{I}\!/_{A}) < \omega$ (Zeugenlemma). $w_p({}^{I}\!/_{Aa}) + w_p({}^{a}\!/_{A}) \stackrel{additiv}{=} w_p({}^{Ia}\!/_{A}) \stackrel{additiv}{=} w_p({}^{a}\!/_{AI}) + w_p({}^{I}\!/_{A}) = w_p({}^{I}\!/_{A})$, also $w_p({}^{I}\!/_{Aa}) = w_p({}^{I}\!/_{A}) - w_p({}^{a}\!/_{A}) = 0$. Wegen (Monotonie) ist $w_p({}^{I}\!/_{Bab}) = w_p({}^{a}\!/_{BIb}) = 0$, also $w_p({}^{ab}\!/_{B}) = w_p({}^{ab}\!/_{B}) + w_p({}^{I}\!/_{Bab}) \stackrel{additiv}{=} w_p({}^{Iab}\!/_{B}) \stackrel{add}{=} w_p({}^{a}\!/_{BIb}) + w_p({}^{Ib}\!/_{B}) = w_p({}^{Ib}\!/_{B})$ und $w_p({}^{b}\!/_{BI}) \stackrel{add}{=} w_p({}^{Ib}\!/_{B}) - w_p({}^{I}\!/_{B}) \stackrel{s.o.}{=} w_p({}^{ab}\!/_{B}) - w_p({}^{a}\!/_{B}) \stackrel{add}{=} w_p({}^{b}\!/_{Ba})$.

(2) Sei $ab \models q_1 \otimes q_2$, dann $w_p({}^{ab}\!/_{A}) = w_p({}^{a}\!/_{Ab}) + w_p({}^{b}\!/_{A})$ und $w_p({}^{a}\!/_{Ab}) = w_p({}^{a}\!/_{A})$, da $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{A} b$. □

2.12 **Lemma (endlicher Charakter)**
*Sei $stp(^a/_A)$ p-einfach von endlichem p-Gewicht, dann gibt es für jede Parametermenge $B$ ein endliches $B_0 \subset B$, so daß $w_p(^a/_{AB}) = w_p(^a/_{AB_0})$.*

**Beweis**

OE $Ba \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A A_0$ (sonst konjugiere $p$ geeignet über $acl(A)$), $\mathcal{M} \supset A_0A$ sei ein $a$-Modell mit $Ba \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0A} \mathcal{M}$, also $Ba \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{M}$, $(I, \mathcal{M}, a)$ realisiere $w_p(^a/_A)$.

Wegen des Korollars (2.11) gilt für beliebige $B' \subset B$ : $w_p(^I/_{\mathcal{M}B'}) = w_p(^a/_{\mathcal{M}B'}) \overset{\smile\!\!\!\!\!\!|}{=} w_p(^a/_{AB'})$ und nach 2.2 gilt $w_p(^I/_{\mathcal{M}B'}) = dim_{p|\mathcal{M}B'}(I)$.

Behauptung: Es gibt ein endliches $B_0 \subset B$, so daß $dim_{p|\mathcal{M}B}(I) = dim_{p|\mathcal{M}B_0}(I)$
Beweis: Sei $J$ eine $p|\mathcal{M}B$-Basis von $I$, $B_i \subset B$ endlich mit $i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}} JB_i$ für $i \in I \backslash J$ und $B_0 = \bigcup_{i \in I \backslash J} B_i$ ($B_0$ ist endlich, da $I$ endlich ist). $J$ ist dann eine $p|\mathcal{M}B_0$-Basis von $I$, denn $J$ ist unabhängig in $p|\mathcal{M}B_0$ weil $J$ unabhängig in $p|\mathcal{M}B$ war und alle $i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathcal{M}} B_0J$, also stimmen beide Dimensionen mit $\#J$ überein.

Insgesammt haben wir also: $w_p(^a/_{AB}) = w_p(^a/_{\mathcal{M}B}) = w_p(^I/_{\mathcal{M}B}) = dim_{p|\mathcal{M}B}(I) = dim_{p|\mathcal{M}B_0}(I) = w_p(^I/_{\mathcal{M}B_0}) = w_p(^a/_{\mathcal{M}B_0}) = w_p(^a/_{AB_0})$ □

Man beachte, daß der Beweis der Behauptung ganz wie der Beweis von (endl. Charakter$_2$) für Prägeometrien aussieht. Der Grund, warum ich die Behauptung nicht aus (endlicher Charakter$_2$) folgern kann ist, daß $B$ keine Teilmenge der Prägeometrie sein muß, $p|\mathcal{M}B$ also keine echte Lokalisierung ist. Der modelltheoretische Grund, warum der Beweis trotzdem klappt ist natürlich der endliche Charakter des Forkens. Ich mache darauf aufmerksam, weil es das erste Beispiel dafür ist, daß sich eine Eigenschaft, die sich auf Lokalisierungen überträgt, auch auf nicht forkende Fortsetzungen überträgt.

### 2.2.3 Der gewichtete Raum $D_p(A)$

Ab jetzt sei $A_0 = Cb(p)$. Ich nehme nun wieder einen algebraischeren Standpunkt ein.

2.13 **Definition**
*Für $A \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} p$ und beliebiges $X$ sei*

$$D_p(A) := \{a \mid stp(^a/_A) \text{ ist p-einfach von endlichem p-Gewicht}\}$$

$$cl_p^A(X) := \tilde{cl}_p(AX) \cap D_p(A)$$

Man beachte, daß $cl_p^A$ auf beliebige Parameterklassen angewendet werden kann. Aus den Definitionen und den Eigenschaften des vorigen Abschnitts erhält man für $A \subset B$: $acl(A) \subset \tilde{cl}_p(A) = cl_p^A(\emptyset) \subset D_p(A) \subset D_p(B)$ und

$$(D_p(A), cl_p^A) \subset (\mathcal{C}, \tilde{cl}_p)_A$$

Aber Achtung, $D_p(A)$ ist im allgemeinen kein abgeschlossener Unterraum von $(\mathcal{C}, \tilde{cl}_p)_A$, in nicht superstabilen Theorien kann es zum Beispiel für ein $\mathcal{M} \supset A_0$ einen $p$-einfache Typ $stp(a/\mathcal{M})$ von unendlichem $p$-Gewicht geben, für ein geeignetes $I \subset p^{\mathcal{C}} \subset D_p(\mathcal{M})$ ist dann $w_p(a/\mathcal{M}I) = 0$, also $a \in \tilde{cl}_p(D_p(A)) \backslash D_p(A)$. Es gilt aber

2.14 **Lemma**
*Es sei $c \in \tilde{cl}_p(AB)$ und $B \subset D_p(A)$, dann ist $stp(c/A)$ ist $p$-einfach und $w_p(c/A) \leq w_p(B/A)$.*

**Beweis**
Wähle ein geeignetes $\mathcal{M} \supset A$ mit $\mathcal{M} \downarrow_A Bc$ und eine Realisierung $(I, \mathcal{M}, B)$ von $w_p(B/A)$, dann ist $B \subset \tilde{cl}_p(\mathcal{M}I)$, also $c \in \tilde{cl}_p(\mathcal{M}I)$, also ist $(I, \mathcal{M}, c)$ ein Zeuge für $tp(c/\mathcal{M})$. Wegen $c \downarrow_A \mathcal{M}$ (und $A \not\perp p$) folgt die Behauptung. □

Es folgt, daß für $B \subset D_p(A)$ mit $w_p(B/A) < \omega$ gilt: $\tilde{cl}_p(AB) \subset D_p(A)$, also

$$\tilde{cl}_p(AB) = cl_p^{AB}(\emptyset) = cl_p^A(B).$$

Ich werde nun noch einmal die bisher gezeigten Eigenschaften auflisten, aus ihnen folgt dann insbesondere der erwartete

2.15 **Satz**
*Für jedes $A \not\perp p$ ist $(D_p(A), cl_p^A, w_p)$ ein gewichteter Raum.*

Es seien $X, Y \subset D_p(A)$ und $B$ beliebig:

| | |
|---|---|
| (Additivität) | $w_p(XY/A) = w_p(X/AY) + w_p(Y/A)$ |
| (Monotonie) | $w_p(X/A) \geq w_p(X/AB)$ |
| ($cl_p$) | $Z \subset cl_p^A(X), Z' \subset \tilde{cl}_p(A)$, so $w_p(XZ/A) = w_p(X/A) = w_p(X/AZ')$ |
| (endl Char) | $X$ ist genau dann endlich gewichtet, wenn es ein $a \in D_p(A)$ gibt, so daß $X \sim_{cl_p^A} a$. Dann gibt es endliche $X_0 \subset X$ und $B_0 \subset B$: $w_p(X/A) = w_p(X_0/A)$ und $w_p(X/AB) = w_p(X/AB_0)$ |
| ($\downarrow$) | $X \downarrow_A B$, so $w_p(X/A) = w_p(X/AB)$ |
| (Algebr) | $acl^A(X) \subset cl_p^A(X)$ |
| (Zeugen) | Ist $a \in D_p(A)$ und $(I, A, a)$ eine Realisierung von $w_p(a/A)$, so $a \sim_{cl_p^A} I$ |
| (?) | Ist $X$ endlich gewichtet, so $\tilde{cl}_p(AX) = cl_p^A(X)$ |

Ist $A \supset A_0$, so ist also auch $\bigcup_{n<\omega} p^{(n)} \subset D_p(A)$ und $(\bigcup_{n<\omega} p^{(n)}, cl_p^A, w_p)$ ist der von $(p^{\mathcal{C}}, dim_{p|A})$ induzierte gewichtete Raum (siehe Kapitel 1.3.6). Zu Unabhängigkeit in $D_p(A)$ sage ich *$p$-Unabhängigkeit*, dieser Unabhängigkeitsbegriff unterscheidet sich von Begriff der Forkingunabhängigkeit: Forkingunabhängigkeit impliziert $p$-Unabhängigkeit.

### 2.2.4 Kanonische Basen

Kanonische Basen sind ein wichtiges technisches Hilfsmittel und die folgenden Eigenschaften werde ich häufig unerwähnt verwenden.

2.16 **Lemma**

*Es sei* $a \in D_p(A)$, $B \supset A$ *und* $C = Cb^s(a/B)$:
**(1)** $C \subset cl_p^A(B)$
**(2)** $w_p(a/A) = w_p(a/B) \Leftrightarrow C \subset cl_p^A(\emptyset)$
**(3)** $w_p(C/A)$ *ist endlich.*
**(4)** $Cb(B/Aa) \subset cl_p^A(a)$.

**Beweis**

Es sei $c \in C$ und $(b_1, ..., b_k) = \bar{b}$ eine unabhängige Folge in $tp(a/B)$, so daß $c \in dcl(\bar{b})$.

(1) $dcl(\bar{b}) \subset acl(A\bar{b}) \subset D_p(A)$ und $c \in acl(B_0) \subset cl_p(B_0)$ für ein endliches $B_0 \subset B$, also $c \in cl_p^A(B)$

(2) "$\Rightarrow$": zu zeigen ist $w_p(c/A) = 0$. Ist $w_p(a/A) = w_p(a/B)$, so $w_p(\bar{b}/A) = w_p(\bar{b}/B) < \omega$, denn $w_p(\bar{b}/A) \leq \sum_{i=1}^k w_p(b_i/A) = k \cdot w_p(a/A) = k \cdot w_p(a/B) = w_p(\bar{b}/B) \leq w_p(\bar{b}/A)$. Also $w_p(\bar{b}/A) \leq w_p(\bar{b}/Ac) \leq w_p(\bar{b}/Bc) = w_p(\bar{b}/B)$ (da $c \in acl(B)$). Aus $w_p(\bar{b}/A) = w_p(\bar{b}/Ac)$ folgt mit der Additivität (und dem endlichen $p$-Gewicht von $stp(\bar{b}/A)$) $w_p(c/A) = w_p(c/A\bar{b})$. Aber $w_p(c/A\bar{b}) = 0$, da $c \in dcl(\bar{b})$, folglich $c \in cl_p(A)$.
"$\Leftarrow$": $w_p(a/A) \overset{Vor}{=} w_p(a/AC) \overset{\downarrow}{=} w_p(a/B) \leq w_p(a/A)$

(3) Es sei $b_\alpha$ eine Morleyfolge in $stp(a/B)$, so daß $stp(a/B) \| stp(a/Ab_\alpha)$, dann $C = Cb^s(a/Ab_\alpha)$ und $w_p(a/Ab_\alpha) = w_p(a/B) < \omega$. Aber (wegen endlichem Charakter) $w_p(a/Ab_\alpha) = w_p(a/A\bar{b})$ für ein geeignetes endliches Tupel $\bar{b} \in b_\alpha$. Aus (2) folgt $C \subset cl_p^{A\bar{b}}(\emptyset) = cl_p^A(\bar{b})$, also $w_p(C/A) \leq w_p(\bar{b}/A) < \omega$. (Mit dem endlichen Charakter hätte man zwar sofort ein endliches $B_0 \subset B$ bekommen mit $C \subset cl_p^{AB_0}(\emptyset)$, aber eventuell $B_0 \not\subset D_p(A)$.)

(4) $Cb(B/Aa) \subset dcl(Aa) \subset \tilde{cl}_p(Aa) = cl_p^A(a)$. □

**Anmerkung**

Man beachte die Verwandtschaft von (2) mit "$a \underset{A}{\downarrow} B \Leftrightarrow C \subset acl(A)$". Kanonische Basen sind ein zentralen Hilfsmittel und man möchte gerne mehr über ihr Gewicht wissen. Wünschenswert wäre folgende Situation: $a \in D_p(A)$, $B \supset A$, $w_p(Cb^s(a/B)/A) = w_p(a/A) - w_p(a/B)$. Eine kurze Gewichtsrechnung zeigt, daß das äquivalent ist zu: $a \in D_p(A)$, $B \supset A$, $Cb^s(a/B) \subset cl_p^A(a)$. (denn $w_p(C/A) = w_p(C/Aa) + w_p(a/A) - w_p(a/B)$ wegen Additivität und $w_p(a/AC) = w_p(a/B)$). Das ist i.a. natürlich falsch, erinnert aber an 1-Basiertheit ("$Cb^s(a/B) \subset acl(a)$"). Ich werden später, im Abschnitt über Modularität, nochmal darauf zurückkommen. Zum Abschluß bringe ich noch ein interessantes Lemma, welches ich jedoch nicht weiter verwenden werde (glaube ich). Man beachte, daß die Aussage nur für den Fall interessant ist, wenn $b \not\downarrow_B a$ (denn sonst $Cb({}^{Bb}/_{Aa}) \subset acl(A)$).

2.17 **Lemma**
*Sei $A = acl(A) \subset B$, $a \downarrow_A B$ und $b \in D_p(B)$, dann $Cb({}^{Bb}/_{Aa}) \subset D_p(A)$*

**Beweis**

Sei $c \in C = Cb({}^{Bb}/_{Aa})$ und $(B_ib_i)_{i\leq k}$ unabängig in $tp({}^{Bb}/_{Aa})$, so daß $c \in dcl(B_1b_1...B_kb_k)$

Behauptung: $c \in D_p(B_1...B_k)$
Beweis: $b \in D_p(B) \Rightarrow b_i \in D_p(B_i)$ $(i \leq k)$, denn es gibt $\sigma_i \in Aut_A$ mit $\sigma_i(Bb) = B_ib_i$, also $b_i \in D_{\sigma_i(p)}(B_i) = D_p(B_i)$ (da wegen 1.15 $\sigma_i(p) \not\perp p$, hier geht $A = acl(A)$ ein!). Wegen (Monotonie) und (Additivität) gilt dann $(b_1...b_k) \in D_p(B_1...B_k)$, also $c \in dcl(B_1...B_k, b_1...b_k) \subset D_p(B_1...B_k)$, fertig.

Behauptung: $c \downarrow_A B_1...B_k$
Beweis: $a \downarrow_A B$, $a \downarrow_A B_1...B_k$ ($B_1...B_k$ sind unabhängig in $tp({}^{B}/_{Aa})$), mit $c \in C \subset dcl(Aa)$ folgt die Behauptung.
Insgesammt gilt also $c \in D_p(A)$. □

## Internalität

2.18 **Lemma**
*Es sei $B \supset A$, dann*

$$Int_A(D_p(B)) = D_p(A) \text{ und } Int_A(cl_p(B)) = cl_p(A)$$

**Beweis**

Es sei $q \in St(A)$ $D_p(B)$-intern, da $D_p(B)$ $A$-invariant ist, gilt für ein hinreichend saturiertes $\mathcal{M} \supset B$, daß $q^{\mathcal{C}} \subset dcl^{\mathcal{M}}(D_p(B))$, etwa $a \in dcl^{\mathcal{M}}(c_1, ..., c_n)$ für ein $a \models q|\mathcal{M}$ und geeignete $c_i \in D_p(B) \subset D_p(\mathcal{M})$. Dann aber $dcl^{\mathcal{M}}(c_1, ..., c_n)$ $\subset D_p(\mathcal{M})$ und $a \in D_p(\mathcal{M})$. Wegen $a \downarrow_A \mathcal{M}$ gilt dann $a \in D_p(A)$. Andersrum ist $D_p(A) \subset D_p(B) \subset Int_A(D_p(B))$. Für „$cl_p$" klappt der gleiche Beweis. □

2.19 **Korollar**
*Die Eigenschaft, p-einfach und von endlichen p-Gewicht zu sein (von p-Gewicht Null zu sein), vererbt sich von einem Typ q auf jeden q-internen Typ.*

Mit dem Existenzlemma 1.8 erhält man dann auch das folgende

2.20 **Korollar**
*Es sei $q$ p-einfach und $r$ nicht q-fremd, $r \in St(A)$ und $A \not\perp p$, dann gibt es einen nichtalgebraischen Typ $r' \in dcl(r)$, so daß $r'$ p-einfach ist. Hat $q$ endliches p-Gewicht, so auch $r'$.*

### 2.2.5 $p$-semireguläre Typen

Ich wende mich jetzt einer besonders guten Klasse von $p$-einfachen Typen zu, sie werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen, weil man bei ihnen das Forken schon am $p$-Gewicht ablesen kann.

2.21 **Definition**
*Ein (stationärer) Typ $q$ heißt* $p$-semiregulär, *wenn er $p$-einfach ist und es ein $n < \omega$ gibt, so daß $q \diamond p^{(n)}$ $(n \neq 0)$*

Das Paradebeispiel für einen $p$-semiregulären Typ ist natürlich $p^{(n)}$ selber. Der Typ $q$ ist genau dann $p$-semiregulär, wenn er endliches $p$-Gewicht hat und es eine Realisierung $(I, \mathcal{M}, a)$ gibt, so daß $I \diamondsuit_{\mathcal{M}} a$ ($\mathcal{M}$ ist natürlich ein geeignetes $a$-Modell, bei der einen Richtung muß man nur beachten, daß aus $(p|\mathcal{M})^{(n)} \rhd_{\mathcal{M}} q|\mathcal{M}$ und $q|\mathcal{M} \rhd_{\mathcal{M}} (p|\mathcal{M})^{(n)}$ schon $(p|\mathcal{M})^{(n)} \diamondsuit_{\mathcal{M}} q|\mathcal{M}$, folgt, wegen Regularität) Außerdem ist, falls $stp(a/A)$ $p$-semiregulär ist und $b \in acl(Aa)$, auch $stp(ab/A)$ $p$-semiregulär (da $a \diamondsuit_B ab$ für alle $B \supset A$), insbesondere ist $p$-Semiregularität eine gute Eigenschaft und Projektionen von $p$-semiregulären Typen sind wieder $p$-semiregulär – oder algebraisch. Für $\star$-Typen gilt die gleiche Definition.

2.22 **Satz über $p$-semireguläre Typen**
*Sei $a \in D_p(A)$, dann sind äquivalent*
**(1)** *$stp(a/A)$ ist $p$-semiregulär*
**(2)** *$w_p(a/AB) < w_p(a/A) \iff a \not\downarrow_A B$ (für alle $B$)*
**(3)** *$a \downarrow_A \tilde{cl}_p(A)$*
**(4)** *$acl(Aa) \cap cl_p(A) = acl(A)$*
**(5)** *$dcl(acl(A)a) \cap cl_p(A) = acl(A)$*
**(6)** *Für jeden $p$-einfachen Typ $q$ gilt: $q \perp p \Rightarrow q \ {}^{h}\!\!\perp\ stp(a/A)$*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $a \not\downarrow_A B$, zu zeigen: $w_p(a/AB) < w_p(a/A)$ (die Umkehrung gilt stets)
Sei $(I, \mathcal{M}, a)$ eine gute Realisierung von $w_p(a/A)$, so daß $I \diamondsuit_{\mathcal{M}} a$ (das geht nach Voraussetzung), OE $\mathcal{M} \downarrow_A Ba$, dann $a \downarrow_{AB} \mathcal{M}B$, $a \not\downarrow_{\mathcal{M}} B$ und $(I, \mathcal{M}B, a)$ ist ein Zeuge für $stp(a/AB)$, also $w_p(a/AB) \leq dim_{p|\mathcal{M}B}(I) \leq dim_{p|\mathcal{M}}(I) = w_p(a/A)$
Behauptung: $dim_{p|\mathcal{M}B}(I) < dim_{p|\mathcal{M}}(I)$
Beweis: $I \diamondsuit_{\mathcal{M}} a$ und $a \not\downarrow_{\mathcal{M}} B \Rightarrow I \not\downarrow_{\mathcal{M}} B$, also ist $I$ nicht unabhängig in $p|\mathcal{M}B$. Da aber $I$ unabhängig in $p|\mathcal{M}$ und endlich (!) ist, folgt die Behauptung.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4): klar.

(4) $\Rightarrow$ (5): $acl(A) \subset dcl(acl(A), a) \cap cl_p(A) \subset acl(Aa) \cap cl_p(A) \overset{(4)}{=} acl(A)$

(5) $\Rightarrow$ (6): $q$ sei ein $p$-einfacher Typ mit $q \perp p$, also $w_p(q) = 0$, da diese Voraussetzungen bei beliebiger Fortsetzung von $q$ erhalten bleiben, reicht es zu zeigen: $q \perp tp(a/A)$ (OE $A = acl(A)$). Sei $\mathcal{M} \supset A_0 Adom(q)$ ein $a$-Modell, OE $\mathcal{M} \downarrow_A a$, sei $b \models q|\mathcal{M}$, zu zeigen: $b \downarrow_{\mathcal{M}} a$. Wegen $w_p(b/\mathcal{M}) = 0$ und 2.16 gilt $Cb(\mathcal{M}b/Aa) \subset cl_p(A)$, also $Cb(\mathcal{M}b/Aa) \subset dcl(Aa) \cap cl_p(A) \overset{(5)}{\subset} acl(A)$, d.h. $\mathcal{M}b \downarrow_A Aa$, also $q|\mathcal{M} \perp^a stp(a/A)|\mathcal{M}$, fertig.

(6) $\Rightarrow$ (1) indirekt: Sei $(I, \mathcal{M}, a)$ eine gute Realisierung von $w_p(a/A)$ mit $I \subset \mathcal{M}[a]$. Angenommen $I \not\rhd_{\mathcal{M}} a$, dann gibt es ein $b$ mit $b \downarrow_{\mathcal{M}} I$, $b \not\downarrow_{\mathcal{M}} a$. Sei $C = Cb^s(Ia/\mathcal{M}b)$, dann $a \not\downarrow_{\mathcal{M}} C$ (denn $Ia \not\downarrow_{\mathcal{M}} \mathcal{M}b$, also $Ia \not\downarrow_{\mathcal{M}} C$, wegen $a \rhd_{\mathcal{M}} Ia$ dann $a \not\downarrow_{\mathcal{M}} C$).

Behauptung: $C \subset cl_p(\mathcal{M})$

Beweis: Es sei $(I_i a_i)_\omega$ eine Morleyfolge in $stp(Ia/\mathcal{M}b)$, wegen $a \in cl_p(\mathcal{M}I)$ sind alle $a_i \in cl_p(\mathcal{M}I_i)$, dann $C \subset dcl(I_i a_i | i \leq \omega) \subset cl_p(\mathcal{M}I_\omega)$. Andererseits ist $C \subset acl(\mathcal{M}b)$ und $b \downarrow_{\mathcal{M}} I$, also $b \downarrow_{\mathcal{M}} I_\omega$ und $C \downarrow_{\mathcal{M}} I_\omega$, damit folgt die Behauptung.

Für ein geeignetes $\bar{c} \in C$ gilt dann $w_p(\bar{c}/\mathcal{M}) = 0$ und $a \not\downarrow_{\mathcal{M}} \bar{c}$, also widerlegt $tp(\bar{c}/\mathcal{M})$ Aussage (6). □

2.23 **Korollar**

**(1)** *Die p-regulären Typen sind genau die p-semiregulären Typen von p-Gewicht 1.*
**(2)** $a \in D_p(A)$: *$stp(a/A)$ ist genau dann p-semiregulär, wenn $stp(a/A) \models stp(a/cl_p(A))$*
**(3)** $a \in D_p(A)$, $\bar{A} := cl_p(A) \cap dcl(Aa)$, *so ist $stp(a/\bar{A})$ p-semiregulär und $cl_p(\bar{A}) = cl_p(A)$ (insbesondere $w_p(a/\bar{A}) = w_p(a/A)$).*
**(4)** *Sei $a \in D_p(A)$, $B$ beliebig: $w_p(a/A) = w_p(a/AB) \Leftrightarrow a \downarrow_{cl_p(A)} B$*

**Beweis**

**(1)** Sei $q$ $p$-einfach, $q \diamond p$: ist $q'$ eine forkende Fortsetzung von $q$, so folgt aus dem Satz, daß das Gewicht fällt, also $w_p(q') = 0$, d.h. $q' \perp p$, dann auch $q' \perp q$ (da $q \diamond p$), $q$ ist demnach regulär. Der Rest ist klar.

**(2)** Bei keiner Fortsetzung von $stp(a/A)$ nach $S(cl_p(A))$ verändert sich das $p$-Gewicht, mit Eigenschaft (3) folgt die Behauptung.

**(3)** Wegen $dcl(\bar{A}a) \subset dcl(Aa)$ und $cl_p(\bar{A}) = cl_p(A)$ gilt $cl_p(\bar{A}) \cap dcl(\bar{A}a) \subset cl_p^A(\bar{A}) \cap dcl(Aa) \subset cl_p(A) \cap dcl(Aa) = \bar{A}$, mit dem Satz folgt dann, daß $stp(a/\bar{A})$ $p$-semiregulär ist.

**(4)** Wegen Eigenschaft (4) ist $stp(a/cl_p(A))$ $p$-semiregulär, also $w_p(a/cl_p(A)) = w_p(a/cl_p(A)B) \Leftrightarrow a \downarrow_{cl_p(A)} B$, aber $w_p(a/A) = w_p(a/cl_p(A))$ und $w_p(a/AB) = w_p(a/cl_p(A)B)$ □

Aus (2) und (3) folgt unter anderem, daß man $cl_p(A)$ (in gewissem Sinne) wie eine Menge behandeln kann: es sei $a \in D_p(A)$ und $\bar{A}$ wie in (3), dann gilt $stp(a/\bar{A}) \models stp(a/cl_p(A))$ (z.B. gilt deshalb für ein $a' \models stp(a/\bar{A})|B$: $a' \models stp(a/cl_p(A))|B$).

2.24 **Existenzsatz**

*Es sei $p'$ p-semiregulär und $q \not\perp p'$, etwa $q \in St(A)$ und $A \not\perp p$, dann gibt es einen p-einfachen nichtalgebraischen Typ $q' \in dcl(q)$, so daß*
*(1) $0 < w_p(q') < \omega$*
*(2) $q'$ ist p-semiregulär, falls $p'$ p-regulär und $q$ orthogonal zu jeder forkenden Fortsetzung von $p'$ ist.*

**Beweis**

Es sei $B \supset A = acl(A)$ und $q|B \not\perp^a p'|B$ vermöge $a \not\downarrow_B b$ ($a \models q|B$, $b \models p'|B$), dann gilt für $C := Cb(^{Bb}/_{Aa})$: $b \not\downarrow_A C$ und $C \downarrow_A B$ (wegen $Bb \not\downarrow_A C$ und $a \downarrow_A B$, $C \subset dcl(Aa)$). Sei $c \in C \setminus acl(A)$, so daß $c \not\downarrow_B b$, $tp(^c/_A)$ erfüllt dann das Gewünschte:
$tp(^c/_A) \in dcl(q)$ da $c \in C \subset dcl(Aa)$ (deshalb habe ich nicht die kanonische Basis des starken Typs genommen). Seien $(B_i b_i)_{i \leq k}$ unabhängig in $tp(^{Bb}/_{Aa})$, so daß $c \in dcl(B_1 b_1 ... B_k b_k)$, $\bar{B} := \bigcup B_i \supset A$, dann gilt $dcl(Ac) \subset dcl(Aa) \cap dcl(\bar{B} b_1 ... b_k)$.

(1) $stp(^c/_A)$ ist $p'$-intern und $p'$ hat endliches $p$-Gewicht, also auch $stp(^c/_A)$ (2.19). Nach Voraussetzung ist $stp(^b/_B)$ $p$-semiregulär, wegen $b \not\downarrow_B c$ gilt deshalb $w_p(^b/_{Bc}) < w_p(^b/_B)$, also $c \notin cl_p(B)$ und auch $w_p(^c/_A) > 0$.

(2) OE $p' = p$. . Wegen des Satzes über semireguläre Typen reicht es zu zeigen: $d \in dcl(Ac) \setminus acl(A) \Rightarrow w_p(^d/_A) > 0$.
Für ein solches $d$ gilt $d \downarrow_A \bar{B}$ (denn $c \downarrow_A \bar{B}$, s.o.) und $d \in dcl(\bar{B} b_1 ... b_k)$, folglich $d \not\downarrow_{\bar{B}} b_1 ... b_k$ (sonst wäre $d \in acl(A)$). Wähle $\bar{b} \in b_1 ... b_k$ maximal mit $d \downarrow_{\bar{B}} \bar{b}$, OE $b_1 \notin \bar{b}$, dann $d \not\downarrow_{\bar{B}\bar{b}} b_1$

Behauptung: $stp(^{b_1}/_{\bar{B}\bar{b}})$ ist regulär und nichtorthogonal zu $p$
Beweis: Nach Voraussetzung ist $stp(^a/_A)$ orthogonal zu jeder forkenden Fortsetzung von $p$ und da $stp(^{b_1}/_{B_1})$ über $A = acl(A)$ zu $p|B$ konjugiert ist und $d \in dcl(Aa)$, gilt dasselbe für $stp(^d/_A)$ anstelle von $stp(^a/_A)$ und für $stp(^{b_1}/_{B_1})$ anstelle von $p$. Da nun $stp(^d/_A)|\bar{B}\bar{b} \not\perp^a stp(^{b_1}/_{\bar{B}\bar{b}})$ (vermöge $d \not\downarrow_{\bar{B}\bar{b}} b_1$), muß $stp(^{b_1}/_{\bar{B}\bar{b}})$ die nichtforkende Fortsetzung von $stp(^{b_1}/_{B_1})$ sein. Weil außerdem $stp(^{b_1}/_{B_1})$ regulär und nicht orthogonal zu $p$ ist, folgt die Behauptung.

Es gilt also $stp(^d/_A) \not\perp p$, d.h. $w_p(^d/_A) > 0$ □

## 2.3 Modularität

Jetzt ist es an der Zeit, für die Mühen etwas zu ernten. Es wird sich nun zeigen, daß die Theorie des $p$-Gewichts und besonders der gewichtete Raum $(D_p(A), cl_p^A)$ eine wichtige Rolle in der geometrischen Stabilitätstheorie spielt.

### 2.3.1 $D_p(A)$ als modularer Raum

Ich habe auf Seite 55 die Frage nach dem genauen Gewicht von kanonischen Basen und die Parallele zur Monobasiertheit angesprochen. Monobasiertheit bedeutet, daß je zwei algebraisch abgeschlossene Mengen unabhängig über ihrem Schnitt sind, man darf also auch eine Verwandtschaft mit der Modularität vermuten. Diesen Fragen wende ich mich jetzt noch einmal zu, bevor ich eine wichtige Charakterisierung der lokalen Modularität von Typen gebe.

3.1 **Modularitätslemma**
*Für alle $D_p(A)$ sind äquivalent*
**(1)** *$D_p(A)$ ist modular*
**(2)** *Für alle $a, b \in D_p(A)$ gilt: $a \downarrow_{cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b)} b$*
**(3)** *Für $a \in D_p(A)$ und beliebiges $B$ gilt: $a \downarrow_{cl_p^A(a) \cap cl_p^A(B)} B$*
**(4)** *Für alle $a \in D_p(A)$, $B \supset A$ : $stp(a/B)$ $p$-semiregulär $\Rightarrow Cb^s(a/B) \subset cl_p^A(a)$*

**Beweis**

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Modularität bedeutet, daß endlich gewichtete abgeschlossene Unterräume unabhängig über ihrem Schnitt sind, Gewichtsunabhängigkeit und Forkingunabhängigkeit sind aber über abgeschlossenen (in $D_p(A)$) Mengen dasselbe.
(1) $\Rightarrow$ (4): Sei $C = Cb^s(a/B)$, $D = cl_p^A(C) \cap cl_p^A(a)$, dann $w_p(a/AD) \overset{mod.}{=} w_p(a/AC) \overset{\downarrow}{=} w_p(a/B) = w_p(a/BD)$ (da $D \subset cl_p(B)$), also nach (2.16) $Cb^s(a/BD) \subset cl_p^A(D)$. Da $stp(a/B)$ semiregulär ist und $w_p(a/B) = w_p(a/BD)$, gilt $a \downarrow_B D$, also $Cb^s(a/BD) = Cb^s(a/B) = C$, also $C \subset cl_p^A(D) \subset cl_p^A(a)$.
(4) $\Rightarrow$ (3): Es sei $a \in D_p(A)$, $B$ beliebig, $\bar{B} = cl_p(AB) \cap acl(ABa)$ und $D = cl_p(Aa) \cap cl_p(AB)$, dann ist $cl_p(A\bar{B}) = cl_p(AB)$, $stp(a/\bar{B})$ $p$-semiregulär und $w_p(a/\bar{B}) = w_p(a/\bar{B}D)$, also (Semiregularität) $a \downarrow_{\bar{B}} D$, d.h. $Cb^s(a/\bar{B}D) = Cb^s(a/\bar{B})$. Wegen (3) ist $Cb^s(a/\bar{B}) \subset cl_p(Aa)$, also $Cb^s(a/\bar{B}D) \subset cl_p(Aa) \cap cl_p(AB) = D$ und deshalb $a \downarrow_D \bar{B}$ und $a \downarrow_D B$.
(3) $\Rightarrow$ (2) ist klar □

3.2 **Korollar**
*Ist $T$ monobasiert, so sind alle $D_p(A)$ modular*

**Beweis**

Ist $T$ monobasiert, so gilt für alle kanonischen Basen $Cb^s(a/B) \subset acl(a) \subset cl_p^A(a)$ $\square$

Eigenschaft (3) gilt auch für beliebige Teilmengen von $D_p(A)$, d.h. $D_p(A)$ ist genau dann modular, wenn für $C \subset D_p(A)$ und beliebiges $B$ gilt:

$$C \underset{cl_p^A(C)\cap cl_p^A(B)}{\perp} B$$

Außerdem gilt wegen den Bemerkungen auf Seite 55 gilt, daß Modularität von $D_p(A)$ gleichbedeutend zur "optimalen Kontrolle" des Gewichts (einiger) kanonischer Basen ist: für alle $p$-semiregulären $stp(a/B)$ ($a \in D_p(A)$, $B \supset A$) gilt:

$$w_p(Cb^s(a/B)/A) = w_p(a/A) - w_p(a/B)$$

3.3 **Definition**
*In Anlehnung an Pillays Terminologie (Pillay, Definition 2.2.4) nenne ich den regulären Typ $p \in St(A_0)$* linear, *falls für $a, b \models p$, $B \supset A_0$ und $C = Cb^s(ab/B)$ gilt: $stp(ab/B)$ $p$-regulär, so $w_p(C/A_0) \leq 1$.*

3.4 **Modularitätssatz**
*Es sei $p \in St(A_0)$ ein regulärer Typ, dann sind äquivalent:*
**(1)** *$p$ ist lokal modular.*
**(2)** *$D_p(A)$ ist modular, für alle $A \not\perp p$.*
**(3)** *$D_p(A_0)$ ist modular.*
**(4)** *$p$ ist linear.*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2), der Weg ist naheliegend, aber etwas mühsam, ich brauche dazu noch ein

**Lemma**
Seien $a, b \in D_p(A)$, $\mathcal{M} \supset A_0A$, $ab \perp_A \mathcal{M}$ und $(a, \mathcal{M}, J_a), (b, \mathcal{M}, J_b)$ Realisierungen von $w_p(a/A), w_p(b/A)$:
$a$ und $b$ sind fast disjunkt in $D_p(A)$ $\Rightarrow J_a$ und $J_b$ sind fast disjunkt in $(p|\mathcal{M}, \not\perp_{\mathcal{M}})$

**Beweis**

Indirekt: Es gebe ein $d \models p|\mathcal{M}$, so daß $J_a \not\perp_{\mathcal{M}} d \not\perp_{\mathcal{M}} J_b$
Behauptung 1: Es gibt ein $m \in \mathcal{M} \cap D_p(A)$, so daß $cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb) \not\subset cl_p^A(\mathcal{M})$
Beweis: $Cb^s(ab/\mathcal{M}d) \subset D_p(A) \cap acl(\mathcal{M}d) \subset cl_p^A(\mathcal{M}a) \cap cl_p^A(\mathcal{M}b)$, denn $d \in cl_p(\mathcal{M}a) \cap cl_p(\mathcal{M}b)$. Da $ab \not\perp_{\mathcal{M}} d$ (das Gewicht von $d$ fälllt), gibt es ein $c \in Cb^s(ab/\mathcal{M}d)$, so daß $c \in acl(\mathcal{M}d) \backslash \mathcal{M}$, also $c \notin cl_p(\mathcal{M})$ (Semiregularität von $stp(d/\mathcal{M})$) und $c \in cl_p^A(\mathcal{M}a) \cap cl_p^A(\mathcal{M}b) \backslash cl_p^A(\mathcal{M})$. (Nun

könnte sofort ein $m \in \mathcal{M}$ gefunden werden, welches die Behauptung erfüllt, wir wollen aber ein $m \in \mathcal{M} \cap D_p(A)$) Es sei $C = Cb^s({}^{abc}/_{\mathcal{M}})$, dann $c \downarrow_{Ca} \mathcal{M}a$, $c \downarrow_{Cb} \mathcal{M}b$, also $c \in cl_p^A(Ca) \cap cl_p^A(Cb)$ und für ein $m \in C \subset \mathcal{M} \cap D_p(A)$ gilt dann $c \in cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb) \setminus cl_p^A(\mathcal{M})$.
Behauptung 2: $cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb) = cl_p^A(m, cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b))$
Beweis: Sei $X = cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb)$ und $C' = Cb^s({}^X/_{Aab})$, so $X \downarrow_{AC'} ab$, also $X \downarrow_{AC'm} Aabm$ und $w_p({}^X/_{AC'm}) = w_p({}^X/_{Aabm}) = 0$, d.h. $X \subset cl_p^A(mC')$. Wegen $m \in \mathcal{M} \downarrow_A ab$, gilt $w_p({}^{ma}/_{Aa}) = w_p({}^{ma}/_{Aab})$, also $w_p({}^X/_{Aa}) = w_p({}^X/_{Aab})$, mit (2.16) dann $C' \subset cl_p^A(a)$, genauso $C' \subset cl_p^A(b)$. Folglich gilt $cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb) = X \subset cl_p^A(mC') \subset cl_p^A(m, cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b)) \subset cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb)$, deshalb Behauptung 2.
Insgesammt haben wir also $cl_p^A(m, cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b)) = cl_p^A(ma) \cap cl_p^A(mb) \not\subset cl_p^A(\mathcal{M})$ und deshalb $cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b) \not\subset cl_p^A(\mathcal{M})$. $a$ und $b$ sind also nicht fast disjunkt in $D_p(A)$. □

Nun zum Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2):
Es seien $a, b \in D_p(A)$, zu zeigen ist: $w_p({}^a/_{Ab}) = w_p({}^a/_{A, cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b)})$. $A' := A \cup (cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b))$, dann sind $a$ und $b$ fast disjunkt in $D_p(A')$. Wähle ein $\mathcal{M} \supset A_0 A'$, so daß $p|\mathcal{M}$ modular ist, $\mathcal{M} \downarrow_{A'} ab$ (OE $A_0 \downarrow_A ab$) und es Realisierungen $(a, \mathcal{M}, J_a)$, $(b, \mathcal{M}, J_b)$ von $w_p({}^a/_{A'})$, $w_p({}^b/_{A'})$ gibt. Wegen des Lemmas sind dann $J_a$ und $J_b$ fast disjunkt in $p|\mathcal{M}$, also unabhängig wegen der Modularität von $p|\mathcal{M}$. Diese Unabhängigkeit überträgt sich nun wieder: $w_p({}^a/_{Ab}) = w_p({}^a/_{A'b}) = w_p({}^a/_{\mathcal{M}b}) = w_p({}^{J_a}/_{\mathcal{M}J_b}) = w_p({}^{J_a}/_{\mathcal{M}}) = w_p({}^a/_{\mathcal{M}}) = w_p({}^a/_{A'}) = w_p({}^a/_{A, cl_p^A(a) \cap cl_p^A(b)})$, fertig.

(2) $\Rightarrow$ (3) ist klar.

(3) $\Rightarrow$ (4): Seien $a, b \models p$, $B \supset A_0$ und sei $stp({}^{ab}/_B)$ $p$-regulär: da $D_p(A_0)$ modular ist, gilt $w_p(Cb^s({}^{ab}/_B)/_{A_0}) = w_p({}^{ab}/_{A_0}) - w_p({}^{ab}/_B) \leq 2 - 1$ (Modularitätslemma).

(4) $\Rightarrow$ (1): Sei OE $A_0 = \emptyset$, sei $c \models p$, ich zeige, daß jeder Kegel in $p|c$ abgeschlossen ist. Seien $a, b, B$ aus $p|c$, so daß $b \in cl_p^c(Ba)$, zu finden ist ein $d \in cl_p^c(B) \cap p|c$, so daß $b \in cl_p^c(ad)$. OE $a, b \notin cl_p^c(B)$, $b \notin cl_p^c(a)$ (sonst ist die Sache klar), dann gelten die folgenden (Un)abhängigkeiten: $Bab \downarrow c$, $a \downarrow Bc$, $b \downarrow Bc$, $(abc) \models p^{(3)}$, $a \not\downarrow_{Bc} b$, also auch $a \not\downarrow_B b$ (da $ab \downarrow_B Bc$) und $w_p({}^{ab}/_B) = w_p({}^{ab}/_{Bc}) = w_p({}^a/_{Bc}) = 1$.

Sei $B' := cl_p^c(B) \cap dcl^c(ab)$ und $C = Cb^s({}^{ab}/_{B'})$, dann ist $stp({}^{ab}/_{B'})$ semiregulär von Gewicht 1, also auch $w_p({}^{ab}/_C) = 1 = w_p({}^a/_C)$ $(1 = w_p({}^a/_B) = w_p({}^a/_{B'}) = w_p({}^a/_C))$ und deshalb $b \in cl_p(Ca)$, außerdem $C \subset cl_p^c(B)$.

Behauptung: (i) $C \subset cl_p(ab)$, (ii) $a \equiv_C^s c$
Beweis: Weil $p$ linear ist, gilt $w_p(C) = 1$, mit (Additivität) folgt dann

(i). $w_p(c) = w_p({}^{c}\!/_{ab}) \overset{(i)}{=} w_p({}^{c}\!/_{abC})$, also $c \downarrow C$ (semigerulär). Entsprechend $w_p(a) = w_p({}^{a}\!/_{C})$ und $a \downarrow C$, also folgt (ii), da $a \equiv^s c$.

Wähle nun ein $d$, so daß $ab \equiv^s_C cd$, dann erfüllt $d$ das Gewünschte: $b \models p|a$, also $d \models p|c$, $b \in cl^a_p(C)$, also $d \in cl^c_p(C) \subset cl^c_p(B)$, schließlich folgt aus (i), daß $C \subset cl_p(cd)$, zusammen mit $b \in cl_p(Ca)$ erhält man $b \in cl^c_p(ad)$. □

3.5 **Korollar**

**(1)** *Lokale Modularität ist eine Eigenschaft der Orthogonalitätsklasse von regulären Typen.*
**(2)** *Ist $T$ monobasiert, so sind alle regulären Typen lokal modular.*

**Beweis**

(1) Sind $p$ und $p'$ nicht orthogonale reguläre Typen, so sind alle Räume $D_p(A)$ und $D_{p'}(A)$ identisch, mit Charakterisierung (2) folgt das Gewünschte.
(2) folgt aus dem Korollar oben wieder mit Charakterisierung (2). □

Mit dem Modularitätslemma erhält man noch weitere Charakterisierungen der lokalen Modularität von regulären Typen. Eine neue Charakterisierung möchte ich zum Abschluß noch geben, dazu beachte man, daß $D^1_p(A) = \{a \in D_p(A) \mid w_p({}^{a}\!/_{A}) = 1\}$ eine Prägeometrie ist (siehe etwa **??**).

3.6 **Lemma**

*Für den regulären Typ $p \in St(A_0)$ sind äquivalent:*
**(1)** *$p$ ist lokal modular.*
**(2)** *$D^1_p(A)$ ist für alle $A \not\perp p$ modular.*
**(3)** *Es gibt ein a-Modell $\mathcal{M} \supset A_0$ , so daß $D^1_p(\mathcal{M})$ modular ist.*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2): Ist $p$ lokal modular, so sind nach dem Modularitätssatz alle gewichteten Räume $D_p(A)$ modular. Rein algebraisch folgt dann (wirklich?), daß auch die Prägeometrie $D^1_p(A)$ modular ist.

(2) $\Rightarrow$ (3) ist klar.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $D^1_p(\mathcal{M})$ modular, dann ist $p|\mathcal{M}$ linear: OE $\mathcal{M} = \emptyset$, seien $a, b \models p$, $stp({}^{ab}\!/_{B})$ $p$-regulär, $C = Cb^s({}^{ab}\!/_{B})$ und $D = cl_p(ab) \cap cl_p(C) \cap D^1_p$, dann $w_p({}^{ab}\!/_{C}) = w_p({}^{ab}\!/_{B}) = w_p({}^{ab}\!/_{BD})$, also $C = Cb^s({}^{ab}\!/_{CD}) = Cb^s({}^{ab}\!/_{BD})$ (Semiregularität).

Behauptung: $w_p({}^{ab}\!/_{C}) = w_p({}^{ab}\!/_{D})$
Beweis: Es sei $(\bar{c}, \emptyset, ab)$ eine Realisierung von $w_p(C)$, dann gilt $C \sim_{cl_p} \bar{c}$ und folglich $w_p({}^{ab}\!/_{C}) = w_p({}^{ab}\!/_{\bar{c}})$ und $w_p({}^{ab}\!/_{D}) = w_p({}^{ab}\!/_{cl_p(ab) \cap cl_p(\bar{c}) \cap D^1_p})$. Wegen der Modularität von $D^1_p$ folgt dann die Behauptung.

Dann gilt auch $w_p({}^{ab}\!/_{D}) = w_p({}^{ab}\!/_{CD})$ und nach (2.16) ist dann $Cb^s({}^{ab}\!/_{CD}) \subset cl_p(D)$. Also $C \subset cl_p(ab)$ und $w_p(C) = w_p(Cab) - w_p({}^{ab}\!/_{C}) \leq 2 - 1$. □

Die Modularität von $D_p^1$ konnte angewendet werden, weil $\bar{c} \subset D_p^1$. Um dieses $\bar{c}$ zu bekommen, war es nötig, über einem $a$-Modell zu arbeiten, denn ich sehe nicht, warum eine solche ,,Basis" i.a. existieren muß (dazu werde ich später noch etwas sagen). Mit anderen Worten: die Parameterabhängigkeit des Lemmas ergibt sich aus der Tatsache, daß $D_p^1(A)$ nur dann garantiert dicht genug in $D_p(A)$ liegt, wenn $A$ ein $a$-Modell ist.

### 2.3.2 Die Geometrie modularer Typen

Bevor ich mich den modularen Typen zuwende, will ich noch auf eine wichtige Kleinigkeit aufmerksam machen: ist $p \in St(A)$ ein regulärer Typ, so gilt:

$$(p, \underset{A}{\not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}}) = (p|cl_p(A), \underset{cl_p(A)}{\not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}})$$

denn für alle unabhängigen $I \subset (p)^{\mathcal{C}}$ ist $tp({}^{I}\!/_{A})$ $p$-semiregulär und $w_p({}^{I}\!/_{A}) = w_p({}^{I}\!/_{cl_p(A)})$, also $I \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A cl_p(A)$ und deshalb ist $I$ unabhängig in $(p|cl_p(A))^{\mathcal{C}}$. Anders gesagt: für $B \supset A$ sind $(p, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A)$ und $(p|B, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B)$ genau dann identisch, wenn für beliebige $I \subset p^{\mathcal{C}}$ gilt: $w_p({}^{I}\!/_{A}) = w_p({}^{I}\!/_{B})$. Es gilt dann natürlich nicht $p^{\mathcal{C}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$, aber Semiregularität stopft gerade die entscheidende Lücke: für unabhängige $I \subset p^{\mathcal{C}}$ gilt $I \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.

3.7 **Lemma**

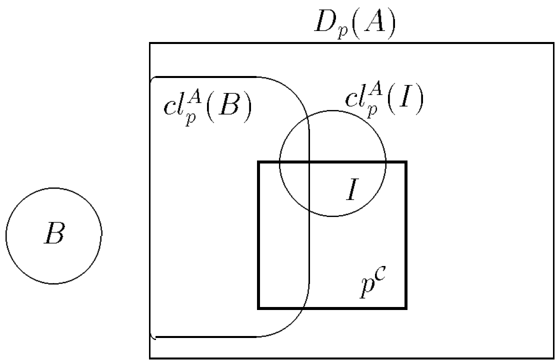
*Es sei $p \in St(A)$ modular und $I \subset p^{\mathcal{C}}$ endlich, dann gilt für beliebiges $B$:*

$$cl_p^A(C \cap p^{\mathcal{C}}) = C, \text{ wobei } C = cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B)$$

**Beweis**

Es reicht zu zeigen, daß $w_p({}^{C \cap p^{\mathcal{C}}}\!/_{A}) = w_p({}^{C}\!/_{A})$: es sei $I' \equiv_C I$ mit $I' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C I$, dann $C \subset cl_p^A(I')$, $I' \subset p^{\mathcal{C}}$ $(A \subset C)$ und $cl_p^A(I') \cap cl_p^A(I) \subset cl_p^A(C) = C$ (da $I' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C I$), also $cl_p^A(I') \cap cl_p^A(I) = C$. Wegen der Modularität von $p$ gilt dann $w_p({}^{I'}\!/_{AI}) = w_p({}^{I'}\!/_{A, C \cap p^{\mathcal{C}}}) \leq w_p({}^{I'}\!/_{AC}) \leq w_p({}^{I'}\!/_{AI})$, da auch $w_p({}^{I'C}\!/_{A}) = w_p({}^{I', C \cap p^{\mathcal{C}}}\!/_{A})$, folgt mit der Additivität die Behauptung. $\square$

Das $p$-Gewicht von $C$ wird also schon von $C \cap p^{\mathcal{C}}$ annuliert. Die Aussage des Lemmas ist übrigens Äquivalent zu: $a \in cl_p^A(p^{\mathcal{C}}) \Rightarrow a \in cl_p^A(cl_p^A(a) \cap p^{\mathcal{C}})$



Damit hat man wieder eine "globale Konsequenz" der Modulatität:

3.8 **Satz**
*Ist $p \in St(A)$ regulär, dann sind äquivalent*
**(1)** *$p$ ist modular*
**(2)** *Für alle endlichen $I \subset p^{\mathcal{C}}$ und beliebige $B$ gilt: $I \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(I)\cap cl_p^A(B)\cap p^{\mathcal{C}})} B$*

**Beweis**
(1) $\Rightarrow$ (2): Ist $p$ modular, so gilt nach dem Modularitätslemma $w_p({}^{I}/AB) = w_p({}^{I}/A, cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B))$, letzteres ist aber wegen des Lemmas gerade $w_p({}^{I}/A, cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}})$. Da Unabhängigkeit und $w_p$-Unabhängigkeit über abgeschlossenen Räumen dasselbe sind, folgt (2).
(2) $\Rightarrow$ (1) ist klar nach Definition der Modularität. □

Die Unabhängigkeit $I \downarrow_{cl_p^A(I)\cap cl_p^A(B)} B$ hat man wegen des Modularitätslemmas schon dann, wenn $p$ lokal modular ist. Ist $p$ modular und von $U$-Rang 1, so weiß man, daß sogar $I \downarrow_{cl_p^A(I)\cap cl_p^A(B)\cap p^{\mathcal{C}}} B$ (sogar $I \downarrow_{acl^A(I)\cap acl^A(B)\cap p^{\mathcal{C}}} B$, $I$ und $B$ sind also unabhängig über dem Schnitt „ihrer Abschlüsse in $p^{\mathcal{C}}$"). Ist $p$ nicht minimal, so hat man nur die lokale $p$-Unabhängigkeit von $I$ und $B$ über dem Schnitt „ihrer Abschlüsse in $p^{\mathcal{C}}$", um globale Forkingunabhängigkeit zu bekommen, muß man noch einmal den $cl_p^A$-Abschluß bilden.

3.9 **Korollar**
*Es sei $p \in St(A)$ modular, $B \supset A$ und $B_p := cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}}$:*
**(1)** $p^{\mathcal{C}} \downarrow_{cl_p^A(B_p)} cl_p(B)$
**(2)** $(p|B, \not\downarrow_B) = (p|B_p, \not\downarrow_{AB_p})$
**(3)** *"Lokalisierungen" von modularen Typen sind echte Lokalisierungen.*
**(4)** *Trivialität ist eine Eigenschaft der gesammten Orthogonalitätsklasse regulärer Typen.*

**Beweis**
**(1)** Es sei $I \subset p^{\mathcal{C}}$, dann $I \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(I)\cap cl_p^A(B)\cap p^{\mathcal{C}})} B$, $I \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(I)\cap cl_p^A(B)\cap p^{\mathcal{C}})} cl_p(B)$ und fertig wegen $cl_p^A(cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}}) \subset cl_p^A(B_p) \subset cl_p(B)$.

**(2)** Wegen (1) gilt $(p|cl_p^A(B_p), \not\downarrow_{cl_p^A(B_p)}) = (p|cl_p(B), \not\downarrow_{cl_p(B)})$, wendet man nun die Bemerkung von oben auf beide Seiten an, so $(p|cl_p^A(B_p), \not\downarrow_{cl_p^A(B_p)}) = (p|B_p, \not\downarrow_{AB_p})$ (denn $cl_p(AB_p) = cl_p^A(B_p)$) und $(p|cl_p(B), \not\downarrow_{cl_p(B)}) = (p|B, \not\downarrow_B)$, fertig.

**(3)** Das folgt aus (3), da $B_p \subset p^{\mathcal{C}}$.

**(4)** Folgt aus (3), da Lokalisierungen trivialer Abschlußstrukturen trivial bleiben (und Nichttrivialität vererbt sich auch auf nichtforkende Fortsetzungen). □

3.10 **Korollar**

*Ist $p \in St(A)$ modular, so gilt*

**(1)** *Für alle $q \in S(A)$ und $n < \omega$ gilt: $q \not\perp^a p^{(n)} \Rightarrow q \not\perp^a p$*

**(2)** *Es sei $q \in St(A)$ modular, dann $q \not\perp^a p \Leftrightarrow q \not\perp p$*

**Beweis**

**(1)** Es gilt für alle unabhängigen $I \subset p^{\mathcal{C}}$ und beliebige $B$: $I \perp_A B \Leftrightarrow cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}} = \emptyset$, denn wegen $p$-Semiregularität und 3.8 ist $I \perp_{A, cl_p^A(I) \cap cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}}} B$. Wendet man das auf $B = b \models q$ an, so folgt die Behauptung.

**(2)** Es sei $q \not\perp p$ dann gilt $q^{(m)} \not\perp^a p^{(n)}$ (für geeignete m,n), (1) zweimal angewendet ergibt $q \not\perp^a p$, die andere Richtung ist klar. □

(2) bedeutet, daß es in der Orthogonalitätsklasse eines lokal modularen Typs über jeder Parametermenge (höchstens) eine modulare Geometrie gibt. Damit haben wir einen guten Überblick über alle modularen Geometrien in der Orthogonalitätsklasse von $p$.

### 2.3.3 Geometrie in $D_p(A)$

Die $D_p(A)$ haben eine nette Struktur, nun können wir anfangen, darin Geometrie zu betreiben. Es sei $X$ ein abgeschlossener (endlich gewichteter) Unteraum von $D_p(A)$. Ich sage, $c_1, ...c_n$ ist eine Basis von $X$, wenn $c_1, ..., c_n \in X$, alle $w_p(c_i/A) = 1$ und $w_p(c_1...c_n/A) = n = w_p(X/A)$. $\{c_1, ..., c_n\}$ ist also eine Basis (im Sinne der Prägeometrie $D_p^1(A)$) in $X \cap D_p^1(A)$, die das $p$-Gewicht von $X$ annimmt und $X$ hat genau dann eine Basis, wenn $w_p(X \cap D_p^1(A)/A) = w_p(X/A)$. Ich sage "$D_p(A)$ hat Basen", wenn jeder endlich gewichtete abgeschlossene Unterraum von $D_p(A)$ eine Basis hat (dieser Begriff macht allgemein in gewichteten Räumen Sinn). Ist $A = \mathcal{M}$ ein $a$-Modell und $(c_1...c_n, \mathcal{M}, a)$ eine Relisierung von $w_p(a/\mathcal{M})$, so ist $c_1, ..., c_n$ eine Basis von $cl_p^{\mathcal{M}}(a)$ in $D_p(\mathcal{M})$, $D_p(\mathcal{M})$ hat also Basen, aber ich sehe keinen Grund, warum es über beliebigen Parametern Basen geben sollte.

3.11 **Lemma**

*Es sei $p$ lokal modular, dann hat jedes $D_p(A)$ Basen.*

**Beweis**

Es sei $a \in D_p(A)$ und $c_1, ..., c_k \in cl_p^A(a)$ seien schon gefunden ($k < w_p(a/A)$), so daß alle $w_p(c_i/A) = 1$ und $w_p(c_1...c_k/A) = k$, $A' := Ac_1...c_k$. Wähle ein $B \supset A'$, so daß $stp(a/B)$ $p$-semiregulär von $p$-Gewicht $w_p(a/A') - 1$ ist (gehe etwa hoch in ein $a$-Modell und wähle einen Teil der Zeugenelemente, um das Gewicht von $a$ kontrolliert zu verringern, dann mache alles $p$-semiregulär). Da $D_p(A')$ modular ist, gilt für $C := Cb^s(a/B)$: $C \subset cl_p^{A'}(a)$ und $w_p(C/A') = w_p(a/A') - w_p(a/B) = 1$. Es gibt dann also ein $c'_{k+1} \in C$, so daß $w_p(c'_{k+1}/A') = 1$. Dann ist auch $w_p(c_1...c_k c'_{k+1}/A) - w_p(c_1...c_k/A) = 1$ und es gibt ein $c_{k+1} \in$

$cl_p^A(c_1...c_kc'_{k+1})\backslash cl_p^A(c_1...c_k)$, für dieses gilt dann: $c_{k+1} \in cl_p^A(a)$, $w_p({c_{k+1}}/{A}) = 1$ und $w_p({c_1 \cdots c_k c_{k+1}}/{A}) = k+1$. Induktiv folgt also die Existenz einer Basis. □

3.12 **Korollar (Koordinatisierung)**

*Es sei $q$ ein beliebiger stationärer Typ, der nichtorthogonal zu $p$ ist: ist $p$ lokal modular, so gibt es einen $p$-einfachen Typ $q' \in cl_p(q)$ von $p$-Gewicht 1.*

**Beweis**

Wegen des Existenzsatzes 2.24 gibt es ein $p$-einfaches $r \in acl(q)$ mit endlichem, positiven $p$-Gewicht. Zu $a \models r$ gibt es wegen des Lemmas ein $b \in cl_p^A(a)$ $(A = dom(r))$ mit $w_p({b}/{A}) = 1$, also $q' := stp({b}/{A}) \in cl_p(r) \subset cl_p(q)$. □

3.13 **Lemma**

*Es sei $p \in St(A)$ ein lokal modularer nicht trivialer Typ, dann gilt:*
*Zu je zwei unabhängigen Realisierungen $a, b$ von $p$ gibt es ein $c \in D_p(A)$, so daß $w_p({c}/{A}) = 1$ und $(a, b, c)$ minimal abhängig ist. Ist $p$ modular, so kann $c$ schon in $p^{\mathcal{C}}$ gefunden werden.*

**Beweis**

Es sei $(a, b) \models p^{(2)}$. Da $p$ nicht trivial ist, gibt es eine minimal abhängige Menge $I = \{a_1, ...a_n\}$ in $p^{\mathcal{C}}$ der Mächtigkeit $n \geq 3$. Dann sind insbesondere $a_1, a_2$ unabhängige Realisierungen von $p$ und deshalb läßt sich $I$ so konjugieren, daß $(a_1, a_2)$ in $(a, b)$ übergeht (es gilt also in jedem regulären nicht trivialen Typ: es gibt ein $n$, so daß jedes unabhängige Paar zu einer minimal abhängigen Menge der Machtigkeit $n$ fortgesetzt werden kann. Im allgemeinen hat man in nicht trivialen Prägeometrien nichtmals die Existenz einer solchen Fortsetzung).

Wähle also nun $c_1, ..., c_k$, so daß $a, b, c_1, ..., c_k$ minimal abhängig über $A$ sind. Dann ist $w_p({ab}/{A}) = 2$, $w_p({c_1 \cdots c_k}/{A}) = k$, $w_p({abc_1 \cdots c_k}/{A}) = k+1$ und (Modularität) es gibt ein $c \in cl_p^A(a, b) \cap cl_p^A(c_1...c_k)$ mit $w_p({c}/{A}) = 1$. Ist $p$ modular, so kann $c$ schon in $p^{\mathcal{C}}$ gefunden werden. Da $a \perp_A c_1...c_k$ und $c \in cl_p^A(c_1...c_k)$, gilt $w_p({a}/{Ac}) = w_p({a}/{A})$, aber $stp({a}/{A})$ ist $p$-semiregulär, also $a \perp_A c$, analog $b \perp_A c$ und $(a, b, c)$ ist minimal abhängig. □

Insbesondere hat, falls $p$ modular und nicht trivial ist, in der von $p$ induzierten Geometrie jede Gerade eine Mächtigkeit $\geq 3$.

# Kapitel 3

# Stabile Gruppen

Ich werde nun einigen Standardstoff aus der Theorie stabiler Gruppen darstellen, wobei es sich als praktisch erweist, die Theorie schon für homogene Räume zu entwickeln. Eine stabile Gruppe ist eine $\mathcal{C}$-Gruppe, wobei $\mathcal{C}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie ist. Ich werde erst etwas über die Definierbarkeit der relevanten Objekte sagen und dann den Begriff der Generizität erläutern, mit dessen Hilfe die Struktur stabiler Gruppen genauer untersucht werden kann. Ein wichtiger Baustein für stabile Gruppen sind zusammenhängende Gruppen, und da jede solche Gruppe gerade ein Stabilisator (unter der kanonischen Operation der Gruppe auf ihren globalen Typen) ist, werde ich auch etwas über Stabilisatoren sagen. Es folgen dann einige Existenzsätze, welche ich später bei der Konstruktion des Vektorraumes verwenden werde. Zum Abschluß übertrage ich die Standardtheorie auf $p$-einfache Gruppen. Ich habe mich bemüht, den recht umfangreichen Stoff so zu gliedern, daß ich mit so wenig Zitaten wie möglich die Theorie verständlich machen kann. Lokale Modularität spielt in diesem Kapitel keine Rolle.

## 3.1 Typdefinierbare Gruppen und Gruppenoperationen

$A$ sei eine Teilmenge des Monstermodells und $B \supset A$.
Eine $A$-Gruppe ist eine $A$-typdefinierbare Klasse $G$ zusammen mit einer $A$-Funktion $\mu : G \times G \to G$, so daß $(G, \mu)$ eine Gruppe ist (für $\mu(g, h)$ schreibe ich natürlich $g{\cdot}h$). Das neutrale Element ist dann $A$-invariant, also $A$-definierbar und die Inversabbildung wird durch die $A$-Formel "$g{\cdot}x = 1$" definiert, insbesondere sind $g$ und $g^{-1}$ $A$-interdefinierbar (das brauche ich z.B. bei Forkingrechnungen). Eine $A$-Gruppe ist auch eine $B$-Gruppe, mit den Konventionen vom Anfang der Arbeit gilt das auch, falls $B$ eine Klasse ist. Eine $\mathcal{C}$-Gruppe ist also eine (mengen)typdefinierbare Gruppe. Eine $A$-Gruppe heißt $A$-definierbar, wenn die Trägerklasse schon $A$-definierbar ist. Die modelltheoretischen Eigenschaften von $G$ werden in $\mathcal{C}$ bestimmt, deshalb ist die Struktur $G$ i.a. keine reine Gruppe,

sondern eine Gruppe mit der von $\mathcal{C}$ induzierten Zusatzstruktur. $G$ ohne die Zusatzstruktur nenne ich einfach die *reine Gruppe* $G$. Jeder $A$-Automorphismus läßt die Gruppenstruktur invariant, ist also eingeschränkt auf $G$ ein Automorphismus von $G$ (mit Zusatzstruktur) und jeder solche Automorphismus läßt sich zu einem $A$-Automorphismus fortsetzen (?!). Andererseits stammt natürlich nicht jeder reine Gruppenautomorphismus von $G$ von einem Automorphismus des Monsters. $G$ sei in diesem Abschnitt stets eine $A$-Gruppe.

### 3.1.1 Die Kategorie der $\mathcal{C}$-Gruppen

Ein Morphismus von typdefinierbaren Gruppen ist natürlich ein typdefinierbarer Gruppenhomomorphismus. Die $\mathcal{C}$-Gruppen bilden zusammen mit den $\mathcal{C}$-Homomorphismen die Kategorie der $\mathcal{C}$-Gruppen. Viele modelltheoretischen Eigenschaften von $\mathcal{C}$-Gruppen bleiben durch $\mathcal{C}$-Homomorphismen erhalten, i.a. jedoch nicht durch reine Homomorphismen. Deshalb ist der reine Isomorphiebegriff hier nicht mehr adäquat, man braucht $\mathcal{C}$-Isomorphie.

**Untergruppen**

Eine $B$-Untergruppe $U$ von $G$ ist eine Untergruppe von $G$, die $B$-typdefinierbar ist, die Gruppenoperation auf $U$ sei dann durch die gleiche Formel gegeben, wie die auf $G$. Die Nebenklasse $g{\cdot}U$ ist dann $Bg$-typdefinierbar. Falls die Trägerklasse von $U$ sogar der Schnitt von $G$ mit einer $B$-definierbaren Klasse $\mathcal{D}$ ist, so heißt $U$ eine relativ $B$-definierbare Untergruppe. $\mathcal{D}$ kann mit Kompaktheit so gewählt werden, daß die Gruppenverknüpfung und die Inversabbildung noch darauf definiert sind, sie sind dann aber i.a. nicht abgeschlossen auf $\mathcal{D}$. Die Nebenklasse $g{\cdot}U$ ist dann relativ $Bg$-typdefinierbar, nämlich der Schnitt von $G$ mit der $Bg$-definierbaren Klasse $g{\cdot}D = \exists x(x \in D \wedge y = g{\cdot}x)^{\mathcal{C}}$. Die relativ $B$-definierbaren Untergruppen von $B$-definierbaren Gruppen sind genau die $B$-definierbaren Untergruppen.
$B$-Untergruppen sind abgeschlossen unter beliebigen Schnitten, relativ $B$-definierbare Untergruppen hingegen nur unter endlichen Schnitten. Eine feste Formel $\varphi(x;z)$ kann mit verschiedenen Parametern verschiedene Untergruppen definieren. Die Ordnung der relativ $\varphi$-definierbaren Untergruppen hat *dcc*:

1.1 **Fakt**
*Es sei $\varphi(x;z)$ eine $\emptyset$-Formel und $\{c_i \mid i \in I\}$ eine Klasse von Parametern, so daß für jedes i $G_i := G \cap \varphi(x, c_i)^{\mathcal{C}}$ eine Untergruppe von $G$ ist, dann gibt es ein endliches $I_0 \subset I$, so daß $\bigcap_I G_i = \bigcap_{I_0} G_i$.*

Das ist gerade [**?**, 1.6.13]

1.2 **Korollar**
*$G_i \leq G$ seien relativ $A$-definierbare Untergruppen ($i \in I$), dann gibt es ein $I_0 \subset I$ mit $\#I_0 \leq \#T$ und $\bigcap_{I_0} G_i = \bigcap_I G_i$, d.h. für jede Schnitt von relativ $A$-definierbaren Untergruppen braucht man höchstens $\#T$ der Untergruppen.*

Ein erfreulicher Satz von Hrushovski besagt, daß zwischen einer $A$-Gruppe $G$ und einer $A$-definierbaren Oberklasse dieser Gruppe stets eine $A$-definierbare Obergruppe von $G$ liegt, siehe etwa [**?**, 1.6.19]. Jede $A$-Gruppe $G$ liegt also schon in einer $A$-definierbaren Gruppe $\hat{G}$ und ist Schnitt von höchstens $\#T$ vielen $A$-definierbaren Gruppen $G_i \leq \hat{G}$. Ganz genauso ist eine $B$-Untergruppe einer $A$-Gruppe gerade der Schnitt von höchstens $|T|$-vielen relativ $B$-definierbaren Untergruppen.

### Quotienten

Eine relativ $B$-definierbare Untergruppe induziert über die Linksnebenklassen eine $B$-definierbare Äquivalenzrelation, denn ist die Untergruppe relativ definiert durch die $B$-Formel $\varphi(x)$, dann ist $Exy := \varphi(x^{-1} \cdot y)$ eine $B$-Äquivalenzrelation auf $G$. Die kanonische Projektion $pr_E$ ist eine $B$-Funktion und bildet die $B$-Klasse $G$ auf die $B$-Klasse ${}^{G}/_{U} := \{pr_E(g) | g \in G\}$ ab. Für das Element $pr_E(g) \in \mathcal{C}$ schreibe ich "$g_U$", Achtung, $g_U$, also auch ${}^{G}/_{U}$, ist abhängig von der Wahl der Formel $\varphi(x)$ und sollte außerdem nicht mit der $Bg$-Nebenklasse $g \cdot U \subset \mathcal{C}$ verwechselt werden. Falls $U$ nun ein Normalteiler von $G$ ist, so wird ${}^{G}/_{U}$ auf kanonische Weise zu einer $B$-Gruppe, wobei die kanonische Projektion ein $B$-Homomorphismus ist. Ich nenne ${}^{G}/_{U}$ dann einen "$B$-Quotienten" von $G$.
Mit Hilfe der Elemente von ${}^{G}/_{U}$ lernen wir auch noch etwas über die Nebenklassen von $U$: $g_U$ ist ein kanonischer Parameter für $g \cdot U$ (über $B$), d.h. ein $B$-Automorphismus fixiert $g_U$ genau dann, wenn er $g \cdot U$ invariant läßt. Insbesondere ist $g_U$ eindeutig bis auf $B$-Interdefinierbarkeit, $g \cdot U$ ist schon $Bg_U$-typdefinierbar und es gilt: ${}^{G}/_{U} \subset dcl(B) \Leftrightarrow$ alle Linksnebenklassen von $U$ sind $B$-invariant. Das gleiche kann auch für Rechtsnebenklassen gemacht werden, der kanonische Parameter von $U \cdot g$ ist dann ${}_U g \in {}_{U}\backslash^{G}$.
Sei H eine $B$-Untergruppe von $G$ und $g \in G$, dann ist die Nebenklasse $g \cdot H$ $Bg$-typdefinierbar. Die Konstruktion des Quotienten klappt aber nicht mehr wie oben, da "$g \equiv h \bmod H$" keine definierbare Äquivalenzrelation mehr ist. Man kann aber ${}^{G}/_{H}$ noch hinreichend gut durch eine Klasse von unendlichen Tupeln repräsentieren: es sei $H = \bigcap_I H_i$ ($H_i$ relativ $B$-definierbare Untergruppen), definiere für $g \in G : g_H := (g_{H_i})_{i \in I}$. Dieses Tupel im Monstermodell ist dann ein kanonischer Parameter (über $B$) der Nebenklasse $g \cdot H$: falls ein $B$-Automorphismus $g_H$ fixiert (also jedes $g_{H_i}$), so läßt er jedes $g \cdot H_i$ invariant, also auch $g \cdot H$. Bewegt er jedoch ein $g_{H_i}$, so bewegt er die ganze Nebenklasse $g \cdot H_i$ auf eine andere Nebenklasse, die enthaltene Klasse $g \cdot H$ wird also auch wegbewegt. Damit sieht man auch, daß $g_H$ bis auf $B$-Interdefinierbarkeit eindeutig ist (d.h. nur bis

auf $B$-Interdefinierbarkeit von der Wahl der $H_i$ abhängt) und daß $g{\cdot}H$ $Bg_H$-typdefinierbar ist. Der Faktor ${}^{G}\!/_{H}$ wird mit $\{g_H|g \in G\}$ identifiziert, sie ist dann die Extension eines (von der Wahl der $H_i$ und der Wahl der definierenden Formeln abhängigen) partiellen $\star$-Typen (über $B$). Die Menge $\{H_i|i \in I\}$ kann so gewählt werden, daß sie durch die Inklusion "invers gerichtet" wird, d.h. für $I_0 \subset I$ endlich gibt es ein $j \in I$, so daß $H_j \subset \bigcap_{I_0} H_i$ (man kann z.B. die Menge sofort unter endlichen Schnitten abschließen). Mit dem gleichen Argument wie oben ist dann jedes $g_{H_i} \in dcl^B(g_{H_j})$ $(i \in I_0)$ (${}^{G}\!/_{H}$ ist dann der projektive Limes von $\{{}^{G}\!/_{H_i}|i \in I\}$).
Ich werde oft so tun, als ob $g_H$ ein Element von $\mathcal{C}$ ist, ich deute das dann durch Anführungsstriche an, etwa "$g_H$ $' \in'$ $A$", "${}^{G}\!/_{H}$ $' \subset'$ $acl(A)''$, "${}^{G}\!/_{H}$ ist ein '$B$-Quotient' von $G$". Dann gilt wie oben: $g_H$ $' \in'$ $dcl^B(g)$, alle ${}^{G}\!/_{H'}$ $\subset'$ $dcl(B)$ $\Leftrightarrow$ alle Nebenklassen von $H$ sind $B$-invariant. Mit Hilfe der kanonischen Parameter sieht man auch: ist $H'$ eine $B'$-invariante Nebenklasse von $H$ und enthält $H'$ ein Element, das über $B$ unabhängig von $B'$ ist, so ist $H'$ schon $acl(B)$-invariant ($a \in H'$, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\:|}_B B'$, so $a_H$ $' \in'$ $dcl(B,a) \cap B' \subset acl(B)$).

**Kartesische Produkte**

Sind $G_1, ..., G_k$ $A$-Gruppen, so auch $G_1 \times ... \times G_k$ und die Projektionsabbildungen $pr_i : G_1 \times ... \times G_k \twoheadrightarrow G_i$ sind $A$-Funktionen. Für eine $B$-Gruppe $H < G_1 \times ... \times G_k$ ist $pr_i(H)$ als Bild einer $B$-Klasse unter einer $B$-Funktion wieder eine $B$-Klasse, also eine $B$-Untergruppe von $G_i$. Für $H < G_1 \times G_2$ sei $kern(H) := \{h_1 \in G_1|(h_1, e) \in H\}$ und $cokern(H) := \{h_2 \in G_2|(e, h_2) \in H\}$, sind $G_1, G_2$ und $H$ $A$-Gruppen, so auch $kern(H)$ und $cokern(H)$.

**Isomorphielemmas**

Aus dem bisherigen Wissen über Definierbarkeit folgt, daß man bei den Isomorphielemmas die Kategorie der $\mathcal{C}$-Gruppen nicht verläßt:
Ist $\pi : G \twoheadrightarrow H$, alles typdefinierbar über $A$, so ist $N = kern(\pi)$ relativ $A$-definierbar, ${}^{G}\!/_{N}$ eine $A$-Gruppe und der Isomorphismus ${}^{G}\!/_{N} \cong H$ ist eine $A$-Funktion. Sind $U < H < G$ relativ $A$-definierbar, so ist die kanonische Bijektion ${}^{G}\!/_{H} \sim {}^{G/U}\!/_{H/U}$ eine $A$-Bijektion von $A$-Klassen. Sollte dabei $H$ ein Normalteiler sein, so ist diese Bijektion ein Gruppenisomorphismus – das ist reine Algebra, die Definierbarkeit bleibt natürlich bestehen. Ist $H$ nur eine $A$-Untergruppe, so gilt analog: durch die kanonische Bijektion sind alle $g_H$ und $(g_U)_{H/U}$ $A$-interdefinierbar.

### 3.1.2 Typdefinierbare Gruppenoperationen

Eine $A$-Gruppenoperation $(G, X)$ ist eine $A$-Gruppe G, die $A$-definierbar auf einer $A$-Klasse $X$ operiert (also $\omega : G \times X \to X$ ist eine $A$-Abbildung, die $X$ zu einem $G$-Raum macht, für $\omega(g,a)$ schreibe ich $g{\cdot}a$). Ein Morphismus von Gruppenoperationen $f:(G,X)\to(H,Y)$ ist ein paar von Funktionen $f_1:G\to H$ und $f_2:X\to Y$, wobei $f_1$ ein Gruppenhomomorphismus ist und $f_2(g{\cdot}a)=f_1(g){\cdot}f_2(a)$ $\forall g\in G, a\in X$. Ich verlange außerdem, daß $f_1$ surjektiv ist. Ein $A$-Morphismus ist dann ein Morphismus, bei dem beide Abbildungen $A$-Funktionen sind. Für $a\in X$ ist $Stab_G(a)=G\cap\{x{\cdot}a=a\}^{\mathcal{C}}$, also relativ Aa-definierbar, und die Bahn von a ist als Bild der $A$-Klasse $G$ unter der $Aa$-Abbildung $(\cdot a)$ $Aa$-typdefinierbar. (G,G) ist mit den üblichen Operationen jeweils eine $A$-Gruppenoperation, wenn ich nichts weiteres dazusage (etwa durch einen Index $_r$ für die Rechtstranslation), ist stets die Linkstranslation gemeint. Durch "$g{\cdot}a=a$" operiert $G$ trivial auf ganz $\mathcal{C}$.

Wie gewohnt sind die homogenen Räume gerade die Faktorräume:
Sei $U\leq G$ relativ $A$-definierbar, dann wird $(G,{}^{G}\!/_{U})$ durch $g{\cdot}(h/U):=(g{\cdot}h)/U$ zu einer transitiven $A$-Gruppenoperation. Sei andererseits $(G,X)$ eine transitive $A$-Gruppenoperation und $a\in X$, dann ist $(G,G/Stab_G(a))$ eine $Aa$-Gruppenoperation und bekannterweise ist die Abbildung $g{\cdot}a\mapsto g_{Stab_G(a)}$ ein Isomorphismus von $G$-Räumen, er ist dann ein $Aa$-Isomorphismus. Eine $B$-Untergruppe $H$ operiert durch Linkstranslation auf jeder ihrer Rechtsnebenklassen, $(H,H{\cdot}g)_l$ wird so zu einer regulären $Bg$-Gruppenoperation.

Ist $H<G$ nur typdefinierbar, so ist zwar $(G,{}^{G}\!/_{H})$ ein homogener Raum, aber nicht typdefinierbar, da ${}^{G}\!/_{H}$ nicht typdefinierbar ist (siehe oben). Die Konstrukton von oben zieht sich aber durch, für $g_H=(g_{H_i})_I$ und $g'\in G$ ist $g'{\cdot}g_H=(g'{\cdot}g)_H=((g'{\cdot}g)_{H_i})_I=(g'{\cdot}g_{H_i})_I$. Im Folgenden wird sich vieles von typdefinierbaren homogenen Räumen recht kanonisch auf "typdefinierbare" homogene Räume übertragen lassen.

### 3.1.3 Der $G$-Raum $(G,\hat{X})$

Ich habe vorher schon gesagt, wie Funktione auf Typen operieren. Es sei $\hat{X}$ die Klasse der globalen Typen von $X$ (bzw. der Stationaritätsklassen), ist dann $\hat{p}\in\hat{X}$, so ist also erklärt, was $g{\cdot}\hat{p}$, die Funktion $(g\cdot)$ angewendet auf $\hat{p}$, bedeutet. Dann ist $g{\cdot}\hat{p}\in\hat{X}$ (denn ist $\hat{p}=stp({}^{a}\!/_{Bg})$, so ist $g{\cdot}\hat{p}=stp({}^{g\cdot a}\!/_{Bg})$ und $g{\cdot}a\in X$). So wird $\hat{X}$ auf kanonische Weise zu einem $G$-Raum. Wie gehabt sei für einen beliebigen stationären B-Typ $p$ von X $g{\cdot}p$ definiert als $g{\cdot}(p|g)(\in S(Bg))$. Ebenso "operiert" $X$ auf $\hat{G}$, den stationären Typen von $G$ durch $(p,a)\mapsto p{\cdot}a=(p|a){\cdot}a$. Ist $f=(f_1,f_2):(G,X)\to(H,Y)$ ein $A$-Morphismus von $A$-Gruppenoperationen, so induziert $f$ einen Morphismus $\hat{f}=(\hat{f}_1,\hat{f}_2):(G,\hat{X})\to(G,\hat{Y})$, wobei $\hat{f}_1=f_1$ und $\hat{f}_2$ die Operation von $f_2$ auf den (globalen) Typen von $X$ ist. $\hat{}$ wird so zu einem Funktor von der Kategorie der typdefinierbaren Gruppenoperationen in die Kategorie der Gruppenoperationen. Natürlich schreibe ich i.a. $f$ für $\hat{f}$.

$$\begin{tikzcd}
(G,X) \arrow[rr, "f"] & & (H,Y) \\
& {} \arrow[d] & \\
& {} & \\
(G,\hat{X}) \arrow[rr, "\hat{f}"'] & & (H,\hat{Y})
\end{tikzcd}$$

Zwei stationäre Typen von X nenne ich translatiert, wenn ihre $\|$-Klassen in der gleichen Bahn liegen. Sind $p$ und $q$ translatiert, so sind sie offensichtlich interdefinierbar ($a$ und $g{\cdot}a$ sind sogar $Bg$-interdefinierbar). Insbesondere teilen translatierte Typen alle guten Eigenschaften. Der Raum $(G,\hat{X})$ spielt eine zentrale Rolle in der "parameterfreien Theorie", als sehr wichtig werden sich auch die Stabilisatoren dieser Operation herausstellen, das können sie nur aufgrund von

1.3 **Fakt**
*Es sei $(G,X)$ eine typdefinierbare Gruppenoperation und $\hat{p} \in \hat{X}$, dann ist $Stab(\hat{p})$ typdefinierbar.*

(folgt z.B. aus [**?**, 1.6.17])

## 3.2 Generizität

Generizität ist ein zentraler Begriff für das Studium stabiler Gruppen, denn in gewissem Sinne sind "fast alle" Gruppenelemente generisch. Es ist wieder nützlich, den Begriff schon für Gruppenoperationen zu definieren.

### 3.2.1 Generische Typen

#### Generische Typen von $\mathcal{C}$-Gruppenoperationen

Sei $G$ weiterhin eine $A$-Gruppe und$(G, X)$eine $A$-Gruppenoperation, B sei setes eine Obermenge von A, g,h seien stets Elemente von G und a,b Elemente von X.

2.1 **Definition**
**(1)** *Ein Element a von X heißt* B-generisch *(in X, oder auch in $(G, X)$), wenn*

$$\forall g \in G : (a \underset{B}{\downarrow} g \Rightarrow g{\cdot}a \underset{B}{\downarrow} g)$$

**(2)** *Eine definierbare Klasse $\mathcal{D}$ (bzw. eine Formel) heißt* generisch *(in $(G, X)$), wenn endlich viele Translate von $\mathcal{D} \cap X$ schon ganz $X$ überdecken.*
**(3)** *Ein partieller Typ von X heißt generisch, wenn alle enthaltenen Formeln generisch sind.*

2.2 **Fakt**
*Ist $\Pi$ ein partieller $B$-Typ von $X$, so ist $\Pi$ genau dann generisch, wenn es eine $B$-generische Realisierung von $\Pi$ gibt.*

Das folgt z.B. aus [**?**, 1.6.9].

2.3 **Korollar**
**(1)** *In jeder A-Gruppenoperation gibt es A-generische Elemente.*
**(2)** *Ein (vollständiger) B-Typ von X ist genau dann generisch, wenn alle seine Realisierungen B-generisch sind.*

**Beweis**

$X$ ist selber ein generischer partieller $A$-Typ von $(G, X)$, also enthält $X$ eine $A$-generische Realisierung. Außerdem ist $A$-Generizität nur abhängig vom $A$-Typ des Elements, damit folgt (2). □

Ich werde hauptsächlich diese Charakterisierung von generischen Typen verwenden. Deshalb noch ein paar Bemerkungen zu Forkingrechnungen:

**Bemerkungen**:
**(1)** Will man für ein $a$ mit $a \downarrow_B g$ nachgerechnen, ob $g{\cdot}a \downarrow_B g$, so kann $a$ ohne

Einschränkung unabhängig (über B) von weiteren Parametern gewählt werden: $a \mathop{\downarrow}_B g$ und $a^\sigma \mathop{\downarrow}_{Bg} C$ ($\sigma \in Aut_{Bg}$), dann $a^\sigma \mathop{\downarrow}_B Cg$ und $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B g \Leftrightarrow a^\sigma{\cdot}g \mathop{\downarrow}_B g$
**(2)** Für ein B-generisches Element $a \in X$ gilt ein Analogon zur Domination: ist $g \in G$ und $C$ eine beliebige Parametermenge, so

$$a \mathop{\downarrow}_B gC \Rightarrow g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B gC$$

denn $a \mathop{\downarrow}_B gC \Rightarrow g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_{Bg} gC$ und $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B g$, also $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B gC$.

Offensichtlich sind Restriktionen von generischen (partiellen) Typen wieder generisch, natürlich gilt das auch für nichtforkende Fortsetzungen:

2.4 **Lemma**
*$a \in X$ sei A-generisch und $a \mathop{\downarrow}_A B$, so ist $a$ auch B-generisch.*

**Beweis**
$a \mathop{\downarrow}_B g$, so $a \mathop{\downarrow}_A g$ und $a \mathop{\downarrow}_{Ag} B$, also $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_A g$ und $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_{Ag} B$, also $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_A gB$ und $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B g$. □

Ein partieller Typ von $X$ ist also genau dann generisch, wenn er von einem (globalen) generischen Typ fortgesetzt wird und wie erwartet ist Generizität eine Forkinginvariante. Daß i.a. aber auch nichtforkende Fortsetzungen eines generischen Typen generisch sein können, zeigt schon das triviale Beispiel: bei der trivialen Operation sind alle Typen generisch. Generizität hängt nur vom Typ, nicht vom starken Typ ab, für $a \in X$ ist also $tp(a/B)$ genau dann generisch, wenn $stp(a/B)$ generisch ist.
Es ist eleganter und übersichtlicher, Generizität auf der Ebene der stationären Typen zu behandeln, deshalb seien generische Typen von nun an stets stationär. $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{G}_X$) sei die Klasse der (globalen) generischen Typen bzw. ihre Stationaritätsklassen, also $\mathcal{G} \subset \hat{X}$. Gerechnet wird natürlich weiterhin auf der Ebene der Elemente.

2.5 **Lemma**
**(1)** *Translate von generischen B-Typen sind generisch und $acl(B)$-definierbar.*
**(2)** *Ein $\mathcal{C}$-Morphismus von $\mathcal{C}$-Gruppenoperationen erhält die Generizität von Typen.*

**Beweis**
**(1)** Es sei $a$ $B$-generisch und $a \mathop{\downarrow}_B g$, so ist $g{\cdot}a$ $Bg$-generisch: $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_{Bg} h$, so OE $h \mathop{\downarrow}_{Bg} a$, dann $a \mathop{\downarrow}_B h{\cdot}g, h, g$ und $(h{\cdot}g){\cdot}a \mathop{\downarrow}_B h{\cdot}g, h, g$ (da $a$ $B$-generisch ist), also $h{\cdot}(g{\cdot}a) \mathop{\downarrow}_{Bg} h$, außerdem ist $g{\cdot}a \mathop{\downarrow}_B g$. Ist also $p = stp(a/B)$ generisch, so auch $g{\cdot}p = stp(g{\cdot}a/Bg)$ und dieser Typ forkt nicht über $B$.

**(2)** $a \in X$ sei $B$-generisch und OE seien $(G,X)$, $(H,Y)$ und $f$ $B$-typdefinierbar, so ist $f(a)$ $B$-generisch in $(H,Y)$: sei $f(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B h$, OE $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B a$. Wähle ein $g \in G$ mit $h = f(g)$ ($f : G \twoheadrightarrow H$ ist surjektiv nach Definition), OE $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Bh} a$, dann $g,h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B a$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B g$, also $g{\cdot}a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B g$ und $f(g{\cdot}a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B f(g)$. Aber $f(g{\cdot}a) = f(g){\cdot}f(a)$ und $f(g) = h$, also $h{\cdot}f(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B h$. □

Aus (1) folgt, daß $(G, \mathcal{G}_X)$ ein Unterraum von $(G, \hat{X})$ ist und aus (2) folgt, daß $\hat{f} : (G, \mathcal{G}_X) \to (H, \mathcal{G}_Y)$ ein Morphismus ist (falls $f : (G,X) \to (H,Y)$ ein $\mathcal{C}$-Morphismus ist).

$$\begin{array}{ccc} (G,\hat{X}) & \xrightarrow{\quad\hat{f}\quad} & (H,\hat{Y}) \\ \bigcup & & \bigcup \\ (G,\mathcal{G}_X) & \xrightarrow{\quad\hat{f}_{|\mathcal{G}_X}\quad} & (H,\mathcal{G}_Y) \end{array}$$

Außerdem bildet ein $A$-Morphismus (unter der Operation der Gruppen auf den generischen Typen) Bahnen surjektiv auf Bahnen ab (das ist eine allgemeine Eigenschaft von Morphismen) und (2) angewendet auf den $\mathcal{C}$-Morphismus $({\cdot}a) : (G,G)_l \to (G,X)$ ergibt:
Ist $g$ $B$-generisch in $G$ und $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B a \in X$, so ist $g{\cdot}a$ $Ba$-generisch in $X$.
Da es einen generischen $acl(A)$-Typ gibt und alle seine Translate sind $acl(A)$-definierbar sind, ist jeder generische Typ von $(G,X)$ $acl(A)$-definierbar, falls $(G,\mathcal{G})$ transitiv ist.

2.6 **Fakt**
*Ist $(G,X)$ transitiv, so auch $(G,\mathcal{G}_X)$.*

Das folgt z.B. aus [**?**, 1.6.6]. In homogenen Räumen (über A) hat man also folgende schöne Situation: ist ein $B$-Typ von $X$ ist generisch, so auch seine Restriktion auf $acl(A)$, Generizität ist also ein parameterunabhängiger Begriff. Daß das i.a. falsch ist, hat schon das triviale Beispiel oben gezeigt, dort können generische Typen über $A$ forken. Für Elemente geschrieben hat man also in homogenen Räumen die folgende Situation: $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a$, so

(i) $g$ generisch, dann $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} g{\cdot}a$ (ii) $a$ generisch, so $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} g{\cdot}a$

Das werde ich bei Forkingrechnungen ständig verwenden. Ist $(G,X)$ homogen und $p$ generisch in $G$, so ist übrigens $p{\cdot}X$ gerade die Menge der generischen Typen von $X$, denn sind $g \models p$, $q$ generisch in $X$ und $a \models q|g$, so ist $p{\cdot}(g^{-1}{\cdot}a) \| q)$.

### Quotienten und Nebenklassen

Es sei $H < G$ relativ definierbar. Wendet man 2.5(2) auf die kanonischen $\mathcal{C}$-Morphismen $(G,G) \twoheadrightarrow (G,G/H)$ und $(G,G) \twoheadrightarrow (G/H,G/H)$ an, so erhält man das

2.7 **Lemma**
**(1)** *Die kanonische Projektion* $g \mapsto g_H$ *induziert eine Surjektion der generischen Typen von* $G$ *auf die generischen Typen von* $(G,G/H)_l$.
**(2)** *Ist* $H$ *ein Normalteiler von* $G$*, so induziert die kanonische Projektion eine Surjektion der generischen Typen von* $G$ *auf die generischen Typen der Gruppe* $G/H$*, insbesondere sind die generischen Typen von* $(G,G/H)_l$ *gerade die generischen Typen der Gruppe* $G/H$.

Die Theorie der Generizität soll nun auf 'Quotienten' übertragen werden, das Problem war, daß $G/H$ nicht in $\mathcal{C}$ lebt. Ein Element $g_H \in {}^{G}\!/_{H}$ heißt $B$-generisch (in $(G,G/H)$), wenn für alle $g' \in G$ gilt: $g_H \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B g' \Rightarrow g'{\cdot}g_H \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B g'$ (das macht Sinn, da $g_H$ und $g'{\cdot}g_H$ Tupel in $\mathcal{C}$ sind, außerdem ist die Definition wegen der Interdefinierbarkeit unabhängig von der Wahl der $H_i$), entsprechend für Typen. $g_H$ ist genau dann $B$-generisch, wenn alle $g_{H_i}$ $B$-generisch sind, damit folgt aus dem Bisherigen das folgende

2.8 **Lemma**
*Es seien* $H < G$ *A-Gruppen, dann gilt:*
**(1)** *Die A-generischen Elemente von* $(G,G/H)$ *sind genau die* $g_H$ *mit* $g$ *A-generisch in* $G$.
**(2)** $G$ *operiert transitiv auf den generischen Typen von* $(G,G/H)$.

Für die Uniformität der Translation in (2) betrachte man, daß $h$ unabhängig von $i$ gewählt werden kann.

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "(h\cdot)"] \arrow[d, "pr"'] & h{\cdot}g \arrow[d, "pr"] \\ g_{H_i} \arrow[r, "(h\cdot)"'] & h{\cdot}g_{H_i} \end{tikzcd}$$

Das obige angewendet auf den $\mathcal{C}$-Isomorphismus $(g\cdot) : (H,H)_r \cong (H,g{\cdot}H)_r$ ergibt schließlich:

2.9 **Lemma**
*Ist* $H$ *eine typdefinierbare Untergruppe von* $G$*, so induziert* $(g\cdot)$ *eine Bijektion der generischen Typen von* $H$ *mit den generischen Typen von* $(H,g{\cdot}H)_r$ $(g \in G)$.

### Generische Typen von Gruppen

Ich zeige nun, daß der Begriff des generischen Typs in Gruppen nicht von der Entscheidung für die Linkstranslation (in der Definition) abhängt:

2.10 **Lemma**
*Für jedes Element $g$ der $A$-Gruppe $G$ gilt: $g$ ist $B$-generisch bezüglich der Linkstranslation $\Leftrightarrow$ $g$ ist $B$-generisch bezüglich der Rechtsstranslation*

**Beweis**
Das Lemma ergibt sich aus den folgenden beiden Eigenschaften:

**(1)** Ist $g$ $B$-linksgenerisch, dann ist $g^{-1}$ $B$-rechtsgenerisch:
$g^{-1} \downfree_B h$, so (wegen der $B$-Interdefinierbarkeit) $g \downfree_B h^{-1}$, also $h^{-1}\cdot g \downfree_B h^{-1}$ und $g^{-1}\cdot h \downfree_B h$.
**(2)** Ist $g$ $B$-linksgenerisch, so auch $g^{-1}$, denn $stp(g/B)$ und $stp(g^{-1}/B)$ sind linkstranslatiert:
wähle $g' \models stp(g^{-1}/B)|g^{-1}$, dann ist $g'$ rechtsgenerisch (s.o.), also $g'\cdot g^{-1} \downfree_B g^{-1}$ und $g'\cdot g^{-1} \downfree_B g$, folglich ist $stp(g'/Bg'\cdot g^{-1}) = (g'\cdot g^{-1})\cdot stp(g/B)$ generisch und forkt (Transitivität) nicht über $B$, also $stp(g^{-1}/B) \| (g'\cdot g^{-1})\cdot stp(g/B)$. □

**Kartesische Produkte**

$G_1, ..., G_n$ seien $A$-Gruppen, dann ist auch $G_1 \times ... \times G_n$ eine $A$-Gruppe, es sei $U$ eine $B$-Untergruppe von $G_1 \times ... \times G_n$ und $U_i := pr_i(U)$, dann ist $U < U_1 \times ... \times U_n$, aber i.a. natürlich $U \neq U_1 \times ... \times U_n$ (z.B. $\Delta_G \neq G \times G$). Wie sehen die generischen Elemente von $U$ aus?

2.11 **Lemma**
**(1)** *Ist $(g_1, ..., g_n)$ $B$-generisch in $U$, so ist $g_i$ $B$-generisch in $U_i$ $(i = 1, ..., n)$.*
**(2)** *$(g_1, ..., g_n)$ ist $B$-generisch in $U_1 \times ... \times U_n$ $\Leftrightarrow$ jedes $g_i$ ist $B$-generisch in $U_i$ und $g_1, ..., g_n$ ist unabhängig über $B$*

**Beweis**
**(1)** Es sei $(g_1, ..., g_n)$ $B$-generisch in $U$ und $g_i \downfree_B h_i \in U_i$ (für ein $i$):
OE $h_i \downfree_B g_1, ..., g_n$, sei $(h_1, ..., h_n) \in U$ $(h_i \in pr_i(U))$, OE $h_1, ..., h_n \downfree_{Ah_i} g_1..g_n$, also $h_1, ..., h_n \downfree_A g_1, ..., g_n$. Dann $(g_1, ..., g_n)\cdot(h_1, ..., h_n) \downfree_B (h_1, ..., h_n)$ wegen Generizität, insbesondere $g_i\cdot h_i \downfree_B h_i$. $g_i$ ist also $B$-generisch in $U_i$.

**(2)** "$\Leftarrow$": Es seien die $g_i$ $B$-generisch in $U_i$ und voneinander unabhängig über $B$, $(g_1, ..., g_n) \downfree_B (h_1, ..., h_n) \in U_1 \times ... \times U_n$:
$g_i \downfree_B h_1, ..., h_n$, also $g_i\cdot h_i \downfree_B h_1, ..., h_n$. Aber $g_1\cdot h_1, ..., g_n\cdot h_n$ ist unabh. über $Bh_1, ..., h_n$ (denn $g_1, ..., g_n$ sind unabhängig über $Bh_1, ..., h_n$ und $g_i \rhd_{Bh_1,...,h_n} g_i\cdot h_i$), also $g_1\cdot h_1, ..., g_n\cdot h_n \downfree_B h_1, ..., h_n$, $(g_1, ..., g_n)\cdot(h_1, ..., h_n) \downfree_B (h_1, ..., h_n)$. Also ist $(g_1, ..., g_n)$ $B$-generisch in $U$.

"$\Rightarrow$": OE $n = 2$ (induktiv), es sei $(g_1, g_2)$ $B$-generisch in $U_1 \times U_2$, wähle $h_1 \in U_1, h_2 \in U_2$, $h_1 \downfree_B h_2$, $h_1, h_2 \downfree_B g_1, g_2$, dann gilt $(g_1, g_2) \downfree_B (h_1^{-1}, h_2^{-1})$ und mit Generizität $(h_1^{-1}, h_2^{-1})\cdot(g_1, g_2) \downfree_B (h_1^{-1}, h_2^{-1})$, also $(h_1^{-1}\cdot g_1, h_2^{-1}\cdot g_2) \downfree_B h_1, h_2$

und, da $a_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_B a_2, h_2, h_2^{-1}{\cdot}g_2, h_1^{-1}{\cdot}g_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_B a_1$. Dann $a_2{\cdot}a_2^{-1}{\cdot}b_2 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_{B,a_1^{-1}\cdot b_1} a_1{\cdot}h_1^{-1}{\cdot}g_1$, also $g_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_{B,h_1^{-1}\cdot g_1} g_2$. Nun hätte man natürlich $h_1$ auch noch $B$-generisch wählen können, dann wäre auch $h_1^{-1}$ $B$-generisch und $h_1^{-1} \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_B g_1$, also $h_1^{-1}{\cdot}g_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_B g_1$. Zusammen mit $g_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_{B,h_1^{-1}\cdot g_1} g_2$ bekommt man schließlich $g_1 \mathop{\smile\hskip-0.9em\vert}_B g_2$. □

Formuliert man Teil (2) für Typen, dann klingt das so:

2.12 **Korollar**
*Die generischen Typen von $G_1 \times ... \times G_n$ sind genau die $p_1 \otimes ... \otimes p_n$ mit $p_i$ generisch in $G_i$.*

Aus (2) folgt (etwa mit $U = U_1 \times \ldots \times U_n$), daß die Umkehrung von (1) i.a. nicht gilt.

### Eigenschaften von Gruppenoperationen

Es sei $(G, X)$ eine typdefinierbare Gruppenoperation und $E$ eine Eigenschaft von (globalen) Typen.

2.13 **Definition**
*$(G, X)$ hat die Eigenschaft $E$ $:\Longleftrightarrow$ alle globalen generischen Typen von $X$ haben die Eigenschaft $E$*

Diese Definition ist parameterunabhängig, d.h. es ist egal, über welchen Parametern $(G, X)$ typdefiniert wird. Sie ist aber eigentlich nur brauchbar, wenn $E$ eine gute Eigenschaft und $(G, X)$ transitiv ist. Dann sind nämlich alle generischen Typen "interdefinierbar" und es gilt:

$$(G, X) \text{ hat } E \Leftrightarrow \text{ein generischer Typ von } X \text{ hat } E$$

Zum Beispiel ist eine $\mathcal{C}$-Gruppe genau dann regulär, wenn sie einen regulären generischen Typ besitzt. Bei mir seien reguläre Gruppen außerdem stets zusammenhängend, denn ich werde die folgende Tatsache ([**?**, 1.6.23]) häufig verwenden:

2.14 **Fakt**
*Eine reguläre zusammenhängende Gruppe ist abelsch.*

Die Definition geht auch für $(G, G/H)$, wenn $H$ nur typdefinierbar ist, ein globaler Typ von $G/H$ ist dann ein globaler $\star$-Typ und er hat genau dann die Eigenschaft $E$, wenn alle seine Projektionen (auf globale Typen) die Eigenschaft $E$ haben. Dann muß $E$ aber gut sein, damit alles unabhängig von der Wahl der $H_i$ bleibt. Ist $H$ $B$-typdefinierbar, so gilt

$$(G, G/H) \text{ hat } E \Leftrightarrow \text{es gibt ein } B\text{-generisches } g \in G\text{: alle } stp(g_{H_i}/B) \text{ haben } E$$

### 3.2.2 Zusammenhängende Gruppen

**Die Zusammenhangskomponente**

Eine Untergruppe von $G$ heißt generisch, wenn ihr Träger eine generische (also insbesondere typdefinierbare) Klasse von $G$ ist, wenn sie also einen (in $G$) generischen (globalen) Typ enthält, wegen Translation sind dann alle ihre eigenen generischen Typen schon generisch in $G$ und ihre Nebenklassen sind dann auch generisch, beliebige Schnitte von generischen Gruppen sind generisch (betrachte z.B. die Vereinigung der definierenden Formeln, die sind alle generisch). Eine relativ $B$-definierbare Untergruppe $H$ ist genau dann generisch, wenn sie endlichen Index hat, wenn also ${}^{G}/_{H} \subset acl(B)$ (das folgt alles sofort aus der Definition). Folglich sind für eine $B$-typdefinierbare Untergruppe $H$ äquivalent:
– $H$ ist generisch
– ${}^{G}/_{H}$ "$\subset$" $acl(B)$ (oder: ${}^{G}/_{H}$ ist mengengroß)
– alle Nebenklassen von $H$ sind $acl(B)$-invariant
– es gibt eine Menge, über der alle Nebenklassen von $H$ invariant sind
– $H$ enthält ein (in $G$) $B$-generisches Element.

Insbesondere sind alle typdefinierbaren Untergruppen mit endlichem Index generisch (die Umkehrung ist i.a. falsch). Außerdem ist Generizität von Untergruppen eine "transitive" Eigenschaft: Ist $H' < H$ generisch und $H < G$ generisch, so auch $H' < G$. $\mathcal{H}$ (bzw. $\mathcal{H}_G$) sei die Menge der generischen Untergruppen von $G$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ sei die Menge der relativ $A$-definierbaren generischen Normalteiler von $G$ (im Gegensatz zu $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{N}$ parameterabhängig).

2.15 **Definition**
*Es sei $G$ eine beliebige typdefinierbare Gruppe:*
**(1)** $G^0 := \bigcap \mathcal{H}_G$ *heißt die* Zusammenhangskomponente *von $G$.*
**(2)** $G$ *heißt* zusammenhängend, *wenn $G = G^0$.*

$G$ ist also genau dann zusammenhängend, wenn $G$ keine echte generische Untergruppe hat und eine typdefinierbare Untergruppe ist genau dann generisch, wenn sie $G^0$ enthält. $G^0$ ist wieder generisch, die Zusammenhangskomponente von $G$ ist also die eindeutig bestimmte kleinste generische Untergruppe von $G$, sie ist außerdem zusammenhängend ("Transitivität"). Da $\mathcal{H}$ invariant unter Gruppenkonjugation ist, ist $G^0$ ein Normalteiler von $G$.

2.16 **Fakt**
**(1)** $G^0 = \bigcap \mathcal{N}_G$
**(2)** $G^0$ *operiert trivial auf den generischen Typen von $G$.*

Teil (2) folgt z.B. aus [**?**, 1.6.6], Teil (1) bekommt man mit einer Standardkonstruktion unter Verwendung von 1.1.

2.17 **Korollar**

**(1)** *Ist $G$ eine $A$-Gruppe, so auch $G^0$ und $G^0$ ist genau der Schnitt aller typdefinierbaren Untergruppen von $G$ mit endlichem Index.*
**(2)** *$G^0$ hat genau einen generischen Typ, dieser ist definierbar über $A$ und auch generisch in $G$.*
**(3)** *Ist $(G,X)$ transitiv, so operiert $G^0$ trivial auf $\mathcal{G}_X$.*

**Beweis**

**(1)** $G^0$ ist als Schnitt von $A$-Gruppen auch eine $A$-Gruppe und $\mathcal{N} \subset \{H | H < G$ typdefinierbar und von endlichem Index$\} \subset \mathcal{H}$.

**(2)** $G^0$ ist generisch und enthält deshalb einen generischen Typ von $G$, etwa $p$. $p$ ist dann auch generisch in $G^0$ und jeder weitere generische Typ von $G^0$ ist $G^0$-translatiert zu $p$. Aber $p$ bewegt sich nicht unter $G^0$-Translation, also ist er der einzige generische Typ von $G^0$. Außerdem ist jede Fortsetzung von $p_{|A}$ nach $acl(A)$ generisch, also hat $p_{|A}$ nur eine Fortsetzung nach $acl(A)$ und ist deshalb stationär.

**(3)** Ist $(G,X)$ transitiv, so $(\cdot a) : (G, \mathcal{G}_G) \twoheadrightarrow (G, \mathcal{G}_X)$. Ist dann $\hat{q}$ generisch in $X$ und $g \in G^0$, so $g \cdot \hat{q} = g \cdot (\hat{p} \cdot a) = (g \cdot \hat{p}) \cdot a = \hat{p} \cdot a = \hat{q}$ für einen geeigneten generischen Typ $\hat{p}$ von $G$. □

$gen(G)$ sei der generische Typ von $G^0$, er heißt der *hauptgenerische* Typ von $G$ und ist über den gleichen Parametern definierbar, wie $G$ (die anderen generischen Typen sind i.a. nur über dem algebraischen Abschluß definierbar). Da $gen(G)$ der einzige generische Typ von $G^0$ ist, gilt $gen(G)^{-1} = gen(G)$ und $G^0 = gen(G)^{\mathcal{C}} \cdot gen(G)^{\mathcal{C}}$ (jedes Gruppenelement ist stets das Produkt von zwei generischen Elementen). (Ist (gen(G) durch "generisch und identisch zum Inversen" charakterisiert?). Ist $stp(g/B)$ ein generischer Typ von $G$, so ist $g \cdot gen(G) = gen(G) \cdot g = stp(g/B)$ (bz.w. "$\|$" statt "=").

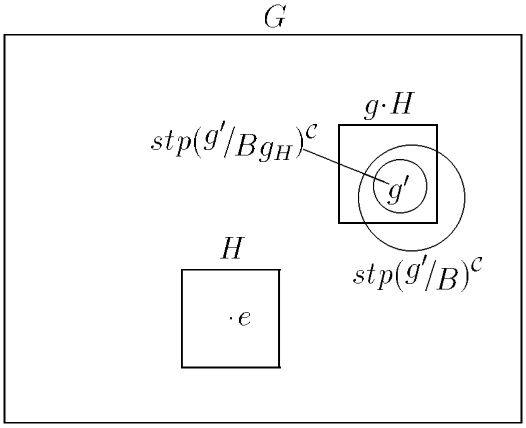
Klar ist auch, daß eine Gruppe genau dann trivial ist, wenn sie zusammenhängend und nur mengengroß ist.

### Untergruppen, Quotienten und kartesische Produkte

Mit Hilfe der hauptgenerischen Elemente kann ich nun noch etwas Interessantes über Generizität in Untergruppen und einigen ihrer Nebenklassen sagen:

2.18 **Lemma**

*Es seien $H$ eine $B$-Untergruppe von $G$ und $g$ sei $B$-generisch in $G$. Die generischen Typen von $(H, g \cdot H)_r$ sind genau die $stp(g'/Bg_H)$, wobei $g'$ $B$-generisch in $G$ ist und $g' \in g \cdot H$.*




**Beweis**

Jeder generische $Bg_H$-Typ von $(H, g{\cdot}H)$ ist nach 2.9 ein $stp(g{\cdot}h/_{Bg_H})$ mit $h$ $B$-generisch in $H$, $h \perp_B g$, wobei dann $stp(g{\cdot}h/_{Bg_H}) \| g{\cdot}stp(h/_B)$. Aber $g{\cdot}h \in g$ liegt in $H$ und ist $B$-generisch in $G$ (wegen 2.7), damit folgt die eine Richtung. Für die andere Richtung reicht es zu zeigen, daß $stp(g/_{Bg_H})$ generisch in $g{\cdot}H$ ist. Es sei $h \perp_B g$ ein $B$-hauptgenerisches Element von $H$.

Behauptung: $tp(g/_{Bg_H}) = tp(g{\cdot}h/_{Bg_H})$

Beweis: $stp(g{\cdot}h/_B) \| stp(g{\cdot}h/_{Bh}) = stp(g/_{Bh}){\cdot}h \overset{!}{=} stp(g/_{Bh}) \| stp(g/_B)$, denn $h \in H^0 \subset G^0$ fixiert die generischen Typen von $G$. Also $stp(g{\cdot}h/_B) = stp(g/_B)$ und $stp(a{\cdot}h, g_H/_B) = stp(g, g_H/_B)$ (denn $(g{\cdot}h, (g{\cdot}h)_H) = (g^\sigma, (g^\sigma)_H) = (g, g_H)^\sigma$ für $\sigma \in Aut^s_B$ geeignet und $(g{\cdot}h)_H = g_H$), damit folgt die Behauptung (falls sogar $stp(g/_{Bg_H}) = tp(g{\cdot}h/_{Bg_H})$, so wäre die Situation schöner und der Beweis fertig).

Aber $g{\cdot}h$ ist $Bg$-generisch in $g{\cdot}H$, also $Bg_H$-generisch, und Generizität hängt nur vom Typ, nicht vom starken Typ ab, deshalb ist auch $g$ $Bg_H$-generisch in $g{\cdot}H$. □

2.19 **Korollar**

*Jeder generische Typ von $H$ ist translatiert zu $stp(g/_{Bg_H})$, wobei $g$ ein $B$-generisches Element in $G$ ist, insbesondere kann man alle guten Eigenschaften der Gruppe $H$ schon an $stp(g/_{Bg_H})$ ablesen.*

**Beweis**

Es sei $p$ generisch in $H$, $g{\cdot}p$ und $stp(g/_{Bg_H})$ sind generisch in $(H, g{\cdot}H)_r$, also rechtstranslatiert, deshalb sind auch $p$ und $stp(g/_{Bg_H})$ rechtstranslatiert. □

2.20 **Lemma**

*Es sei $N \lhd G$ relativ definierbar und $H$ typdefinierbar, $N < H < G$: $H$ ist genau dann generisch in $G$, wenn $H/_N$ generisch in $G/_N$ ist.*

**Beweis**

Es sei alles definiert über $B$, dann gilt mit einem Isomorphielemma: alle $g_H$ und $(g_N)_{H/N}$ sind $B$-interdefinierbar, deshalb gilt

$H$ ist generisch in $G$ $\Leftrightarrow$ alle $g_H \subset acl(B)$ $\Leftrightarrow$ alle $(g_N)_{H/N} \subset acl(B)$ $\Leftrightarrow$ $H/N$ ist generisch in $G/N$. □

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] & & G/N \arrow[d, dash] \\
H \arrow[d, dash] \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{erhält}", "\text{Generizität}"'] & & G/H \arrow[d, dash] \\
N & & \langle 1 \rangle
\end{tikzcd}$$

Klar ist dann auch das

**2.21 Korollar**

**(1)** *$\mathcal{C}$-Quotienten von zusammenhängenden Gruppen sind zusammenhängend.*

**(2)** *Es sei $\pi$ ein $\mathcal{C}$-Homomorphismus:*

*(a) $H$ generisch in $G$ $\Rightarrow \pi(H)$ generisch in $\pi(G)$*

*(b) $H$ zusammenhängend $\Rightarrow \pi(H)$ zusammenhängend*

*(c) $\pi(G^0) = \pi(G)^0$*

Mit 2.11 erhält man einen guten Überblick über die Situation in kartesischen Produkten:

**2.22 Lemma**

**(1)** *$G_1 \times ... \times G_n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle $G_i$ zusammenhängend sind. Dann ist $gen(G_1 \times ... \times G_n) = gen(G_1) \otimes ... \otimes gen(G_n)$.*

**(2)** $(G_1 \times ... \times G_n)^0 = G_1^0 \times ... \times G_n^0$

**(3)** $gen(G_1 \times ... \times G_n) = gen(G_1) \otimes ... \otimes gen(G_n)$

**Beweis**

**(1)** Eine Gruppe ist genau dann zusammenhängend, wenn sie nur einen generischen Typ hat und die generischen Typen des Produkts sind die Produkte der generischen Typen der Komponenten.

**(2)** $G_1^0 \times ... \times G_n^0$ ist generisch in $G_1 \times ... \times G_n$ und zusammenhängend, also identisch mit $(G_1 \times ... \times G_n)^0$.

**(3)** $gen(G_1 \times ... \times G_n) = gen((G_1 \times ... \times G_n)^0) \overset{(1),(2)}{=} gen(G_1^0) \otimes ... \otimes gen(G_n^0) = gen(G_1) \otimes ... \otimes gen(G_n)$ □

**Stabilisatoren**

Es sei $p$ ein stationärer Typ von $X$, dann ist $Stab(p) = \{g \in G | g{\cdot}\hat{p} = \hat{p}\}$, also $g \in Stab(\hat{p}) \Leftrightarrow (g\cdot)$ ist eine $p{\to}p$-Funktion. Ist $p$ ein stationärer Typ von $G$, so bezeichnet $Stab(p)$ natürlich den Stabilisator von $(G, \hat{G})$ bezüglich der Linkstranslation. Manchmal schreibe ich auch einen Index dazu. Für $\sigma \in Aut_A$ ist $Stab(p^\sigma) = Stab(p)^\sigma$, insbesondere ist $Stab(p)$, falls $p$ definierbar über $B$ ist, $B$-invariant, also eine $B$-Gruppe. ($Cb(p)$ ist aber i.a. keine "kanonische Basis" von $Stab(p)$ (über $A$), da $\hat{p}$ und $\hat{p}^\sigma$ verschiedene Typen mit gleichem Stabilisator sein können.) Ist $G$ eine zusammenhängende Gruppe, so ist $(G, \mathcal{G})$ trivial und folglich ist $G$ genau der Stabilisator seines generischen Typs. Wann Stabilisatoren zusammenhängend sind, besagt Teil (3) des folgenden Lemmas.

2.23 **Stabilisatorlemma**

*Es sei $p$ ein stationärer $B$-Typ von $G$ und $S := Stab_l(p)$:*

**(1)** *Für jedes $g \in G$ ist $Stab_l(p{\cdot}g) = S$, d.h. rechtstranslatierte Typen haben denselben Linksstabilisator.*

**(2)** *Für jedes $g \in G$ ist $Cb(g{\cdot}p) = Bg_S$.*

**(3)** *$p$ setzt genau dann eine rechts-Nebenklasse $S'$ von $S$ fort, wenn $S$ zusammenhängend und $p$ generisch in dieser Nebenklasse ist.*

**Beweis**

OE $B = acl(B)$, $S$ ist dann $B$-typdefinierbar.

**(1)** Man rechnet leicht nach, daß für beliebige $g, h \in G$ $h{\cdot}(p{\cdot}g) = (h{\cdot}p){\cdot}g$ ist.

**(2)** Für $\sigma \in Aut_B$ gilt: $\sigma$ fixiert $Cb(g{\cdot}p)$ $\Leftrightarrow \sigma$ fixiert $g{\cdot}\hat{p}$ $\Leftrightarrow g{\cdot}\hat{p} = g^\sigma{\cdot}\hat{p}$ $\Leftrightarrow g \equiv g^\sigma \bmod Stab(p)$ $\Leftrightarrow g{\cdot}S = (g^\sigma){\cdot}S$ $\Leftrightarrow \sigma$ läßt $g{\cdot}S$ invariant. $Cb(g{\cdot}p)$ ist also eine kanonische Basis von $g{\cdot}S$ über $B$, $Bg_S$ auch, damit sind beide Mengen interdefinierbar.

**(3)** " $\Rightarrow$ ": Sei $g \models p$ und $q = stp(a/B)$ ein generischer Typ von $S$, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B g$.

Behauptung: $\hat{q}{\cdot}g = \hat{p}$

Beweis: $\hat{q}{\cdot}g$ und $a{\cdot}\hat{p}$ sind beides globale Fortsetzungen von $stp(a{\cdot}g/B)$. Aber $a{\cdot}\hat{p} \overset{a \in S}{=} \hat{p}$ forkt nicht über $B$ und $\hat{q}{\cdot}g$ ist generisch in $(S, S{\cdot}g) = (S, S')$. Nach Voraussetzung ist aber $S'$ $B$-invariant, $(S, S')$ ist also eine transitive $B$-Gruppenoperation, deshalb forken ihre generischen Typen nicht über $B$, insbesondere $\hat{p} \| stp(a{\cdot}g/B) \| \hat{q}{\cdot}g$, damit folgt die Behauptung.

$\hat{q} = \hat{p}{\cdot}g^{-1}$ ist also der einzige generische Typ von $S$ und da $({\cdot}g)$ eine Bijektion der generischen Typen von $S$ mit den generischen Typen von $S'$ induziert, ist der Rest klar. Die andere Richtung ist sowieso klar ($p$ ist generisch in der Nebenklasse, setzt sie also fort). □

2.24 **Korollar**

**(1)** *Ist $p$ generisch in $G$, so ist $Stab(p) = G^0$.*

**(2)** *Ist $S$ eine zusammenhängende Untergruppe der $A$-Gruppe $G$, so ist $Cb(gen(S))$ eine "kanonische Basis" von $S$ über $A$.*
**(3)** *$\hat{q} \in \hat{G}$ ist genau dann der generische Typ einer zusammenhängenden Gruppe $S < G$, wenn $S = Stab(\hat{q})$ und $S \subset \hat{q}$ (als Typen).*

**Beweis**

(1) $p$ und $gen(G)$ sind rechtstranslatiert, also $Stab(p) = Stab(gen(G)) = G^0$.
(2) Fixiert ein $A$-Automorphismus $gen(S)$, so läßt er $S = Stab(gen(S))$ invariant. Läßt er $S$ invariant, so fixiert er $gen(S)$, da $S$ zusammenhängend ist.
(3) klar. □

Für nicht zusammenhängende Gruppen ist Teil (2) falsch, denn ein Automorphismus kann den hauptgenerischen Typ, also auch die Zusammenhangskomponente, festhalten, die anderen generischen Typen jedoch echt permutieren.

## 3.3 Gruppenexistenzsätze

### 3.3.1 Von Prägenerischen zu Gruppen

3.1 **Definiton**

**(1)** *Ein Paar* $(q, \cdot)$ *nenne ich einen* prägenerischen $A$-Typ, *wenn* $q \in St(A)$ *und* $\cdot : q^{(2)} \to q$ *eine* $A$*-Funktion ist, so daß*
*(a)* $\cdot$ *ist generisch assoziativ* $(\forall (a,b,c) \models q^{(3)} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$
*(b)* $\cdot$ *ist beidseitig generisch* $(\forall (a,b) \models q^{(2)} : a, b, a \cdot b$ *sind paarw. unabhängig über* $A)$
**(2)** *Ein* $A$*-Morphismus von prägenerischen* $A$*-Typen* $(q, \cdot), (r, \circ)$ *ist eine* $A$*-Funktion* $f : q \to r$*, so daß* $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ *(für* $(a,b) \models q^{(2)}$*)*

Ist $(G, \cdot)$ eine $A$-Gruppe, so ist $(gen(G) \| A, \cdot)$ ein prägenerischer $A$-Typ. Ich werde nun zeigen, daß alle prägenerische $A$-Typen so aussehen:

3.2 **Satz**

*Jeder prägenerische* $A$*-Typ* $(q, \cdot)$ *induziert auf kanonische Weise eine zusammenhängende* $A$*-Gruppe* $\mathcal{G} = (\mathcal{G}(q, \cdot), \circ)$*, so daß* $(gen(\mathcal{G}) \| A, \circ) \cong_A (q, \cdot)$

**Beweis**

Da $\cdot$ beidseitig generisch ist, ist jedes $(a \cdot)$ eine $q \!\to\! q$ Funktion. Die uniforme Familie $\{(a \cdot) \mid a \models a\}$ induziert also eine Familie von $q \!\to\! q$ Keimen $\{\widetilde{(a \cdot)} \mid a \models q\}$ und die Zuordnung $\tilde{}: q \to \tilde{q} = tp(\widetilde{(a \cdot)}/A)$ $(a \models q)$ ist eine $A$-Surjektion. Die Keime sind selber wieder $q \!\to\! q$ Funktionen, es ist $\tilde{a}(c) = (a \cdot)(c) = a \cdot c$, die Komposition $\circ$ ist eine $A$-Funktion auf $\tilde{q}$.

Behauptung: $(\tilde{q}, \circ)$ ist ein prägenerischer $A$-Typ und $\tilde{}: (q, \cdot) \cong_A (\tilde{q}, \circ)$.
Beweis: Es sei $(a,b) \models q^{(2)}$ und $c \models q|ab$, dann $\widetilde{a \cdot b}(c) \overset{Def}{=} (a \cdot b) \cdot c \overset{(a)}{=} a \cdot (b \cdot c) \overset{Def}{=} \tilde{a}(\tilde{b}(c)) = (\tilde{a} \circ \tilde{b})(c)$ die Keime sind also generisch identisch, also identisch und $\tilde{}$ ist homomorph. Nun seien $a, a' \models q$, so daß $\tilde{a} = \tilde{a'}$, wähle dann $c \models q|aa'$, wegen (b) ist $(\cdot c)$ eine $q \!\to\! q$ Funktion und deshalb surjektiv auf $q|c$, es gibt also $b, b' \models q|c$, so daß $b \cdot c = a$ und $b' \cdot c = a'$. Dann ist aber $\tilde{b} \circ \tilde{c} \overset{hom}{=} \widetilde{b \cdot c} \overset{Vor}{=} \widetilde{b' \cdot c} = \tilde{b'} \circ \tilde{c}$ und da für Keime die Rechtskürzung gilt, ist $\tilde{b} = \tilde{b'}$ und $a = b \cdot c = \tilde{b}(c) = \tilde{b'}(c) = b' \cdot c = a'$. Insgesammt ist $\tilde{}$ also injektiv, homomorph und $A$-definierbar, damit folgt die Behauptung.

Ich habe also den alten prägenerischen Typ durch einen besseren ersetzt, denn nun ist die Verknüpfung (Komposition) auch für abhängige Elemente definiert, sie ist außerdem assoziativ und erlaubt Rechtskürzung. Es sei nun $G = \tilde{q}^{\mathcal{C}} \circ \tilde{q}^{\mathcal{C}}$, $G$ ist dann eine $A$-Klasse und die Komposition auf $G$ ist eine $A$-Funktion.

Behauptung: $\tilde{q}^{\mathcal{C}} \subset G = G \circ G$
Beweis: wie im Beweis der vorigen Behaupung sieht man, daß es wegen der beidseitigen Generizität von $\circ$ zu $(g,h) \models \tilde{q}^{(2)}$ Keime $f_1, f_2 \models \tilde{q}$ gibt, so daß

$f_1 \circ g = h$, $g \circ f_2 = h$ und $f_i, g, h$ sind paarweise unabhängig über $A$. Ich bezeichne $f_1$ mit "$(hg^{-1})$" und $f_2$ mit "$(g^{-1}h)$". Wegen Rechtskürzung ist $f_1$ eindeutig, also $(hg^{-1}) \in dcl^A(g,h)$. Jetzt ist offensichtlich $\tilde{q} \subset G$ ($h = (hg^{-1}) \circ g$). Es seien nun $f_1, f_2, f_3 \models \tilde{q}$ und $g \models \tilde{q} | f_1 f_2 f_3$, dann ist $f_2 = (f_2 g^{-1}) \circ g$ und $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = (f_1 \circ (f_2 g^{-1})) \circ (g \circ f_3)$. Aber $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A f_3$ und $f_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A f_2 g^{-1}$ (denn $f_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A f_2} g \overset{dcl}{\rightsquigarrow} f_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A f_2} f_2 g^{-1} \overset{f_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|} f_2 g^{-1}}{\rightsquigarrow} f_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A f_2 g^{-1}$), also $f_1 \circ (f_2 g^{-1}), g \circ f_3 \models \tilde{q}$ und folglich $\tilde{q} \circ \tilde{q} \circ \tilde{q} \subset \tilde{q} \circ \tilde{q}$. Ich habe also

$$G = \tilde{q} \circ \tilde{q} \subset G \circ G = \tilde{q} \circ \tilde{q} \circ \tilde{q} \circ \tilde{q} \subset \tilde{q} \circ \tilde{q} \circ \tilde{q} \subset G.$$

Sind $(g,h) \models \tilde{q}^{(2)}$, dann sind $g, h \circ g, (g(h \circ g)^{-1})$ paarweise unabhängig über $A$.

Behauptung: $(g(h \circ g)^{-1}) \circ h$ ist neutral

Beweis: Es sei $f \in G$, OE $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A g$, dann $(g(h \circ g)^{-1}) \circ h \circ f = (g(h \circ g)^{-1}) \circ h \circ (g \circ (g^{-1} f) = (g(h \circ g)^{-1}) \circ (h \circ g) \circ (g^{-1} f) = g \circ (g^{-1} f) = f$, wir haben also Linksneutralität, wegen Rechtskürzung auch Rechtsneutralität ("$(g \circ 1) \circ h = g \circ (1 \circ h) = g \circ h \Rightarrow g \circ 1 = g$")

$(G, \circ)$ ist also ein stabiler Monoid mit Rechtskürzung. Bei [**?**, Kapitel IV, Lemma 5] kann man nachlesen:

**Fakt**

Ist ein Monoid mit Rechtskürzung stabil, so ist er schon eine Gruppe

Da $\tilde{q}$ offensichtlich ein generischer Typ von $G$ ist ($g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A h \Rightarrow g \circ h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A h$) und $G$ von $\tilde{q}$ erzeugt wird, ist $G$ zusammenhängend und $(gen(G) \| A, \circ) \cong_A (q, \cdot)$, fertig. □

Man sieht an der Konstruktion, daß $A$-isomorphe prägenerische Typen $A$-isomorphe Gruppen induzieren und so erhalten wir das

3.3 **Korollar**

*Die Zuordnung $(q, \cdot) \mapsto \mathcal{G}(q, \cdot)$ ergibt eine 1:1 Korrespondenz zwischen $A$-Isomorphieklassen von prägenerischen $A$-Typen bzw. zusammenhängenden $A$-Gruppen.*

(Die Konstruktion liefert wohl sogar einen Funktor der Kategorie der prägenerischen $A$-Typen in die Kategorie der zusammenhängenden $A$-Gruppen. Dieser Funktor ist dann hofentlich eine Äquivalenz von Kategorien, der „inverse" Funktor ist wohl $(G \xrightarrow{f} H) \mapsto ((gen(G), \cdot) \overset{f|gen(G)}{\rightarrow} (gen(H), \cdot))$.)

Die folgende Konstruktion liefert prägenerische Typen:

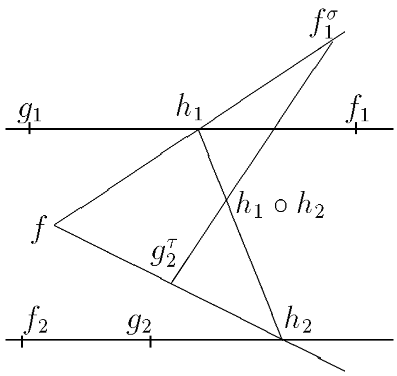
3.4 **Lemma**

*Es sei $f_0$ ein invertierbarer Keim eines $A$-Funktionstyps, so daß für $(f_1, f_2) \models stp(f_0/A)^{(2)}$ $f_1, f_2, f_1^{-1} \circ f_2$ paarweise unabhängig über $A$ sind (wobei $\circ$ die Komposition von Keimen ist). Dann ist $(stp(f_1^{-1} \circ f_2/A), \circ)$ ein prägenerischer $A$-Typ.*

**Beweis**

OE $A = \emptyset$. Es seien $f_1, f_2, g_1, g_2$ unabhängig in $stp(f_0)$, $h_1 = f_1^{-1} \circ g_1$, $h_2 = f_2^{-1} \circ g_2$ und $q = stp(h_1)$.

Behauptung: $(h_1, h_2) \models q^{(2)}$, $h_1 \circ h_2 \models q$ und $h_1, h_2, h_1 \circ h_2$ sind paarweise unabhängig.
Beweis: man beachte, daß $h_1, f_1, g_1$ und $h_2, f_2, g_2$ nach Voraussetzung jeweils paarweise unabhängig sind, aber je zwei Elemente sind interdefinierbar über dem dritten. Wähle nun ein




$f \models stp(f_0)$, so daß $f \perp f_1, f_2, g_1, g_2$, dann gilt $f \perp h_1$, $g_1 \perp h_1$, $f \perp h_2$ und $f_2 \perp h_2$, also $f \equiv_{h_1} g_1$ und $f \equiv_{h_2} f_2$. Wähle also geeignete Automorphismen $\sigma$ und $\tau$, so daß $(f_1 g_1 h_1)^\sigma = f_1^\sigma f h_1$ und $(f_2 g_2 h_2)^\tau = f g_2^\tau h_2$, die Unabhängigkeiten und Interdefinierbarkeiten bleiben dann erhalten und es gilt: $h_1 \circ h_2 = f_1^{-1} \circ g_1 \circ f_2^{-1} \circ g_2 = (f_1^\sigma)^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ g_2^\tau = (f_1^\sigma)^{-1} \circ g_2^\tau$

($^{-1}$ ist eine $\emptyset$-Funktion, kommutiert also mit den Automorphismen). Mit Hilfe des Bildes rechnet man leicht nach, daß $f_1^\sigma \perp g_2^\tau$ und $h_i \perp f_1^\sigma, g_2^\tau$. Dann aber $f_1^\sigma g_2^\tau \equiv f_1 g_1$ und $(f_1^\sigma)^{-1} \circ g_2^\tau \equiv f_1^{-1} \circ g_1 = h_1$, also $h_1 \circ h_2 \models q$ und auch die restlichen Unabhängigkeiten gelten.

Damit ist die Behauptung bewiesen und ich bin fertig, da jedes weitere unabhängige Paar zu $(h_1, h_2)$ konjugiert ist. □

### 3.3.2 Eine nette Konstruktion mit Keimen

Es sei $G$ eine zusammenhängende $A$-Gruppe und $f$ eine $A$-Funktion auf $p = gen(G) \| A$, etwa $f : p \to q \in St(A)$. Dann ist $f_g := f \circ (g\cdot)$ für jedes $g \in G$ eine $p \rightarrowtail q$ Funktion, denn für $a \models q|g$ ist $f_g(a) = f(g\cdot a)$ und $g\cdot a \perp_A g$ (Generizität), also $f(g\cdot a) \perp_A g$ und $f_g(p|g) \| q$. Folglich ist $\{f_g \,|\, g \in G\}$ eine uniforme Familie von $p \rightarrowtail q$ Funktionen und "$f_g$ und $f_{g'}$ sind generisch identisch" induziert eine $A$-Äquivalenzrelation auf $G$, $\tilde{g}$ ist dann der (ein) Keim von $f_g$. Es sei $U := \{g \in G \,|\, f_g \sim_p f\}$, $U$ ist also die Klasse, die die 1 enthält.

3.5 **Lemma**

**(1)** *$U$ ist eine relativ $A$-definierbare Untergruppe von $G$*
**(2)** *$\tilde{g} \mapsto {}_U g$ ist eine $A$-Bijektion $\tilde{G} \sim {}_U\backslash^G$*
**(3)** *${}_U\backslash^G \subset Int_A(q)$*
**(4)** *$U$ ist genau dann eine generische Untergruppe, wenn $f$ konstant ist.*

**Beweis**

(1) Es seien $g, h \in U$ und $a \models p|g, h$: $f_{g^{-1}}(a) = f(g^{-1}\cdot a) \stackrel{g^{-1}\cdot a \perp g}{=} f_g(g^{-1}\cdot a) = f(a)$, also $g^{-1} \in U$. $f_(g\cdot h)(a) = f_g(h\cdot a) \stackrel{h\cdot a \perp g}{=} f(h\cdot a) \stackrel{h \perp a}{=} f(a)$, also $g\cdot h \in U$. $U$ ist also eine Untergruppe und als Klasse einer $A$-Äquivalenzrelation auf $G$ relativ $A$-definierbar.

(2) $\tilde{g} = \tilde{h} \Leftrightarrow f_g \sim_p f_h \Leftrightarrow f(g\cdot a) = f(h\cdot a)$ für ein $a \models p|g, h \Leftrightarrow f_{g\cdot h^{-1}}(h\cdot a) = f(h\cdot a)$ für ein $a \models p|g, h \Leftrightarrow f_{g\cdot h^{-1}} \sim_p f$ (denn $a \models p|g, h$, so $h\cdot a \perp_A g\cdot h^{-1}$) $\Leftrightarrow g\cdot h^{-1} \in U \Leftrightarrow {}_U g =_U h$, die $A$-definierbarkeit der Bijektion ist dann auch klar.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dr, "pr"] & \\ \tilde{G} \arrow[rr, leftrightarrow] & & {}_U\backslash^{G} \end{tikzcd}$$

(3) Es sei $g \in G$ und $(a_i)_I$ eine lange Morleyfolge in $p|g$,

Behauptung: ${}_U g \in dcl^{Aa_I}((f(g\cdot a_i))_I)$
Beweis: Für $h \models stp({}^{g}/_{A, a_I, (f(g\cdot a_i))_I})$ ist dann $f_g(a_i) = f'_g(a_i)$ für alle $i \in I$, aber mindestens ein $a_i$ muß von $(g, g')$ unabhängig sein (über $A$, da $I$ lang genug, d.h. $|I| > \kappa(T)$), deshalb $f_g \sim_p f_{g'}$, wegen (2) dann ${}_U g =_U g'$, damit folgt die Behauptung.

Da außerdem ${}_U g \perp_A a_I$ und alle $f(g\cdot a_i) \models q$, ist $stp({}^{_U g}/_A)$ $q$-intern.

(4) Ist $f$ konstant, so $U = G$. Es sei nun $U$ generisch in $G$ (d.h. $q^{\mathcal{C}} \subset U$) und $a, b \models p$: wähle $c \models p|a, b$, so $f(a) \stackrel{a \perp c\cdot a^{-1} \in U}{=} f_{c\cdot a^{-1}}(a) = f(c) \stackrel{b \perp c\cdot b^{-1} \in U}{=} f_{c\cdot b^{-1}}(b) = f(b)$, $f$ ist also konstant. □

Mit dieser Konstruktion erhält man einen schönen Existenzsatz im Internen Kontext:

3.6 **Satz**
*Es sei $G$ eine $A$-Gruppe, $Q$ eine $A$-invariante Klasse und $B \supset A$. Angenommen, es gibt ein $B$-generisches $a \in G$, so daß $a \not\perp_B Q$, dann gibt es einen relativ $A$-definierbaren Normalteiler $N \lhd G$, so daß ${}^{G}/_{N} \subset Int_A(Q)$ und ${}^{G}/_{N} \not\subset acl(A)$.*

**Beweis**

Wegen $a \perp_A B$ gilt $a \perp_{Int_A(Q) \cap dcl_A(a)} BQ$ (1.6), da aber $a \not\perp_A BQ$, gilt $a \not\perp_A Int_A(Q) \cap dcl_A(a)$, also gibt es ein $c \in Int_A(Q) \cap dcl_A(a)$ $acl(A)$ und deshalb eine nicht konstante $A$-Funktion $f : p \to stp({}^{c}/_{A})$ mit $c = f(a)$ . Damit kann man nun wie oben eine relativ $A$-definierbare Untergruppe $U$ konstruieren, so daß ${}_U\backslash^{G} \subset Int_A((stp({}^{c}/_{A}))^{\mathcal{C}} \subset Int_A(Int_A(Q)) = Int_A(Q)$. $f$ ist nicht konstant, also ist $U$ keine generische Untergruppe. Mit einer Standardkonstruktion (unter Verwendung von 1.1) findet man dann einen relativ $A$-definierbaren Normalteiler $N \lhd G$, so daß $N \subset U$, ${}^{G}/_{N}$ bleibt in $Int_A(Q)$. $N$ ist nicht generisch in $G$, also ${}^{G}/_{N} \not\subset acl(A)$. □

### 3.3.3 Die Bindungsgruppe

Es seien $p, q \in S(A)$, $p$ sei stationär und $q$-intern. $Q$ sei eine $\mathrm{A}q^{\mathcal{C}}$ umfassende $A$-invariante Klasse, $P := p^{\mathcal{C}}$ und $\bar{p} \in S(A)$ sei der Typ einer Fundamentallösung von $p$ bezüglich $q$. Man behalte im Hinterkopf, daß aus elementarer Äquivalenz über $Q$ schon Konjugiertheit über $Q$ folgt (1.14). Ich werde nun zeigen, wie sich mit Hilfe der Fundamentallösung eine $A$-Gruppe konstruieren läßt.

**Schritt 1**
Es gibt eine $A$-Formel $\varphi(x, y, \bar{x}, \bar{y})$, so daß für beliebige $c \models \bar{p}$ und $\sigma \in Aut_Q$ gilt: $\varphi(x, y, c, c^\sigma)$ definiert die Wirkung von $\sigma$ auf $P$
Beweis:
Es sei $g(v, \bar{x}) = y \in L(\emptyset)$, so daß für ein geeignetes $m < \omega$ und jedes $c \models \bar{p}$ $g(v, c)$ eine partielle Surjektion von $q^m$ nach $P$ ist ($g$ existiert nach der Definition der Fundamentallösung). Nun sei

$$\Pi(x, y, \bar{x}, \bar{y}) := \exists v (q^m(v) \wedge x = g(v, \bar{x}) \wedge y = g(v, \bar{y})) \subset L(A)$$

Behauptung: Für jedes $c \models \bar{p}$ und $\sigma \in Aut_Q$ definiert $\Pi(x, y, c, c^\sigma)$ die Wirkung von $\sigma$ auf $P$
Beweis: Es sei $a \in P$, dann $(a, b) \models \Pi(x, y, c, c^\sigma) \Leftrightarrow$ es gibt ein $d \models q^m : a = g(d, c)$ und $b = g(d, c^\sigma)$. Aber $g(d, c^\sigma) = g(d, c)^\sigma = a^\sigma$ ($Q$ wird von $\sigma$ fixiert) und da es in jedem Fall für $a$ ein $d \models q^m$ gibt mit $a = g(d, c)$, gilt: $b = a^\sigma \Leftrightarrow$ es gibt ein $d \models q^m : a = g(d, c)$ und $b = g(d, c^\sigma)$, damit folgt die Behauptung.
Fixiere nun ein $c$ und finde mit Kompaktheit ein $\varphi(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \in \Pi(x, y, \bar{x}, \bar{y})$, so daß (für jedes $\sigma \in Aut_Q$) $\varphi(x, y, c, c^\sigma)$ die Wirkung von $\sigma$ auf $P$ definiert. Für ein $\tau \in Aut_A$ definiert dann $\varphi(x, y, c, c^{\tau\sigma\tau^{-1}})$ die Wirkung von $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ auf $P$, also definiert $\varphi(x, y, c^\tau, c^{\tau\sigma}) = \varphi(x, y, c, c^{\tau\sigma\tau^{-1}})^\tau$ die Wirkung von $\tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \sigma$ auf $P^\tau = P$, $\varphi$ leistet also das Gewünschte.

**Schritt 2**
Wegen der $A$-Invarianz von $P$ ist jedes $\tilde{\sigma} := \sigma_{|P} \in Aut_Q(P)$ eine Permutation von $P$, also sei $Aut_Q(P)$ die Restriktion von $Aut_Q$ auf $P$ und

$$X := \{(c, c') \mid c \models \bar{p}, c' \equiv_Q c\} = \{(c, c^\sigma) \mid c \models \bar{p}, \sigma \in Aut_Q\}$$

Für $(c, c') \in X$ sei $f_{c,c'}$ die durch $\varphi(x, y, c, c')$ definierte Funktion auf $P$, dann gilt wegen Schritt (1) für alle $c \models \bar{p}$ und $\sigma \in Aut_Q$:

$$f_{c,c^\sigma} = \tilde{\sigma}$$

Insbesondere ist $f : X \to Aut_Q(P)$, $(c, c') \mapsto f_{c,c'}$ eine Surjektion.
Die kanonische Operation von $Aut_Q(P)$ auf $\bar{p}^{\mathcal{C}} \subset P^n$ ist fixpunktfrei, denn sind $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in Aut_Q(P)$, $c \models \bar{p}$, $\tilde{\sigma}(c) = \tilde{\tau}(c)$, so $c^\sigma = c^\tau$ und $\tilde{\sigma} = f_{c,c^\sigma} = f_{c,c^\tau} = \tilde{\tau}$. Wegen der Stationarität von $p$ ist $Aut_Q(P) = \{f_{c,c'} \mid (c, c') \in X\}$ eine $A$-uniforme Familie

von $p$-Funktionen und $\sim_p$ ist eine Äquivalenzrelation auf $X$ $((c,c') \sim_p (d,d') \Leftrightarrow f_{c,c'} \sim_p f_{d,d'})$. Dann gilt:

$$(c,c') \sim_p (d,d') \iff f_{c,c'} = f_{d,d'}$$

denn ist $(c,c') \sim_p (d,d')$, so stimmen $f_{c,c'}$ und $f_{d,d'}$ auf $p \| Acc'dd'$ überein, also auch auf einer hinreichend unabhängigen Realisierung von $\bar{p}$. Wegen der Fixpunktfreiheit ist dann $f_{c,c'} = f_{d,d'}$.

Es sei $G := X/\sim_p$, dann ist also $\tilde{\sigma} \mapsto \widetilde{(c, c^{\sigma})}$ $(c \models \bar{p})$ eine kanonische (unabhängig von der Wahl von $c$) Bijektion $Aut_Q(P) \tilde{\to} G$, so wird $G$ zu einer Gruppe.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dr, "pr"] & \\
Aut_Q(P) \arrow[rr, leftrightarrow] & & G
\end{tikzcd}$$

**Schritt 3**
$G$ ist eine $A$-Gruppe, denn $X$ ist eine $A$-Klasse und für die auf $G$ induzierte Verknüpfung gilt:

$$g_2 \cdot g_1 = g_3 \iff \text{es gibt } (c_1,c_2),(c_2,c_3) \in X: \ g_1 = \widetilde{(c_1,c_2)}, g_2 = \widetilde{(c_2,c_3)}, g_3 = \widetilde{(c_1,c_3)}$$

Beweis:
$X = \bigcup_{c \models \bar{p}} \{c\} \times tp({}^{c}\!/_{Q})^{\mathcal{C}}$. Fixiere erst ein $c \models \bar{p}$, dann gibt es (nach 1.13) einen partiellen $A$-Typ $\Phi(\bar{x},\bar{y})$, so daß $tp({}^{c}\!/_{Q})^{\mathcal{C}} = (\bar{p}(\bar{y}) \cup \Phi(c,\bar{y}))^{\mathcal{C}}$. Durch $A$-Konjugation sieht man dann, daß $X$ durch $\bar{p}(x) \cup \bar{p}(y) \cup \Phi(x,y)$ $A$-typdefiniert wird. Da $\sim_p$ eine $A$-Äquivalenzrelation auf $X$ ist, ist $pr : X \twoheadrightarrow G$ eine $A$-Funktion und $G$ eine $A$-Klasse. Nun zur Definierbarkeit der Verknüpfung:
"$\Rightarrow$": Es sei $c_1 \models \bar{p}$, wähle $\sigma_i \in Aut_Q$, so daß $g_i = \widetilde{(c_1, c_1^{\sigma_i})}$, dann gilt für $c_2 := c_1^{\sigma_1}$ und $c_3 := c_1^{\sigma_3}$: $\widetilde{(c_2,c_3)} = g_2$, denn $g_2 = g_3 \cdot g_1^{-1} = \widetilde{(c_1, c_1^{\sigma_3})} \cdot \widetilde{(c_1, c_1^{\sigma_1})}^{-1} \mapsto \tilde{\sigma}_3 \circ \tilde{\sigma}_1^{-1} \mapsto \widetilde{(c_2, c_2^{\sigma_1^{-1}\sigma_3})} = \widetilde{(c_2,c_3)}$. Also erfüllen $c_1, c_2, c_3$ das Gewünschte.
"$\Leftarrow$": Für $c \models \bar{p}$, $\sigma, \tau \in Aut_Q$ gilt: $\widetilde{(c^{\sigma}, c^{\sigma\tau})} \cdot \widetilde{(c, c^{\sigma})} = \widetilde{(c, c^{\sigma\tau})}$.

**Schritt 4**
Die kanonischen Operationen von $G$ auf $P$ und $\bar{p}^{\mathcal{C}}$ sind auch $A$-definierbar: durch

$$g \cdot a = b \ :\iff \ \exists \bar{x}, \bar{y} \ ((\bar{x},\bar{y}) \in X \ \wedge \ \widetilde{(\bar{x},\bar{y})} = g \ \wedge \ \varphi(a,b,\bar{x},\bar{y}))$$

wird $(G,P)$ zu einer (treuen) $A$-Gruppenoperation, dann ist auch $(G, \bar{p}^{\mathcal{C}})$ eine $A$-Gruppenoperation, nach Schritt (2) ist sie fixpunktfrei. Die Bahnen dieser Operation sind gerade die $\hat{p}^{\mathcal{C}}$, wobei $\hat{p}$ eine Fortsetzung von $\bar{p}$ nach $Q$ ist. Dann ist $\hat{p}^{\mathcal{C}} = (\hat{p}_{|ACb(\hat{p})})^{\mathcal{C}}$, also ist jedes $(G, \hat{p}^{\mathcal{C}})$ eine reguläre $ACb(\hat{p})$-Gruppenoperation, insbesondere ist $G \sim \hat{p}^{\mathcal{C}}$. Mit Hilfe dieser regulären Operationen können wir noch mehr über $G$ erfahren:

**Schritt 5**
$Aut_{acl(Q)}(P)$ ist die Zusammenhangskomponente von $Aut_Q(P)$
Beweis:
Die gesammte Konstruktion hatte nur die Invarianz von $Q$ vorausgesetzt, wir können also auch $Q$ durch $acl(Q)$ ersetzen, d.h. OE $Q = acl(Q)$. Es sei $\bar{p}'$ eine Fortsetzung von $\bar{p}$ nach $Q$ mit kanonischer Basis $D$ und $g, g'$ seien generisch über $AD$ in $G$. Wähle ein $c \models \hat{p}$ mit $c \downarrow_{AD} g, g'$, dann $g{\cdot}c \downarrow_{AD} c$ und $g'{\cdot}c \downarrow_{AD} c$ (denn $g, g'$ sind generisch und die Operation ist transitiv). Aber $g{\cdot}c$ und $g'{\cdot}c$ realisieren denselben stationären (deshalb $acl(Q)$) Typ über $AD$, also $g{\cdot}c \equiv_{ADc} g'{\cdot}c$, etwa $g'{\cdot}c = (g{\cdot}c)^\sigma$. Dann $g' = f_{c,g'\cdot c} = f_{c,(g\cdot c)^\sigma} = f^\sigma_{c,g\cdot c} = g^\sigma$, also $g' \equiv_{AD} g$. $G$ hat also nur einen generischen Typ (über $AD$), ist also zusammenhängend.

3.7 **Definition**
*Es seien $p, q \in S(A)$, $p$ stationär, $\bar{p}$ sei der $A$-Typ einer Fundamentallösung von $p$ bezüglich $q$. Dann heißt $Aut_{acl(Aq^{\mathfrak{C}})}(p^{\mathfrak{C}}) := \{\sigma_{|p^{\mathfrak{C}}} | \sigma \in Aut_{acl(Aq^{\mathfrak{C}})}\}$ die* Bindungsgruppe *von $p$ bezüglich $q$.*

Ich habe also insbesondere den folgenden Satz bewiesen:

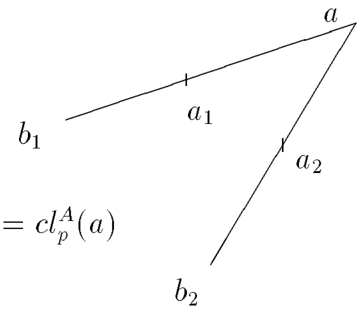
3.8 **Satz über die Bindungsgruppe**
*Sind $p, q \in S(A)$, $p$ stationär und $q$-intern, so ist die Bindungsgruppe von $p$ bezüglich $q$ eine zusammenhängende $A$-Gruppe, die treu und $A$-definierbar auf $p^{\mathfrak{C}}$ operiert.*

### 3.3.4 Konfigurationen

Ich hatte in Kapitel 2.3.3 angedeutet, daß man in $D_p(A)$ "Geometrie betreiben" kann, besonders, wenn $D_p(A)$ modular ist. Das will ich nun tun und zeigen, wie man aus geeigneten "Konfigurationen" Gruppen konstruieren kann.
Grob gesagt ist eine *Konfiguration in $D_p(A)$* eine endliche Teilmenge $\{a_1, ..., a_n\}$ von $D_p(A)$, so daß die $a_i$ paarweise $p$-unabhängig sind, zusammen mit einer (nicht notwendig vollständigen) Beschreibung der bestehenden $p$-Abhängigkeiten. Konfigurationen kann man durch Diagramme geben, wobei je 3 Punkte genau dann kollinear sind, wenn einer von ihnen schon im Abschluß der beiden anderen liegt, drei nicht kollineare Punkte sollen i.a. $p$-unabhängig sein. Die ganze Sache kann allgemein für gewichtete Räume formuliert werden, das folgende Lemma dient zur Einstimmung, (1) und (2) verlaufen ganz ohne Modelltheorie im gewichteten Raum $D_p(A)$.

3.9 **Lemma**
*Es sei $\{a, a_1, a_1, b_1, b_2\}$ eine Konfiguration in $D_p(A)$, so daß*

*(a)* $a \in cl_p^A(a_1b_1) \cap cl_p^A(a_2b_2)$
*(b) Je drei nicht kollineare Punkte sind p-unabhängig*
*(c) Die beiden b mit je einem weiteren Punkt spannen die Konfiguration auf, dann gilt*




*(1)* $w_p(a/A) = w_p(a_1/A) = w_p(a_2/A)$ *und* $a \sim_{cl_p^{Ab_i}} a_i$
*(2)* $cl_p^A(a) = cl_p^A(a_1b_1) \cap cl_p^A(a_2b_2)$
*(3)* $(tp(a/Aa_1a_2b_1b_2))^{\mathcal{C}} \subset cl_p^A(a)$ *und* $cl_p^A(Cb(a/Aa_1a_2b_1b_2)) = cl_p^A(a)$
*(4) Es gibt ein* $a' \in dcl^A(a_1a_2b_1b_1)$ *mit* $a' \sim_{cl_p^A} a$

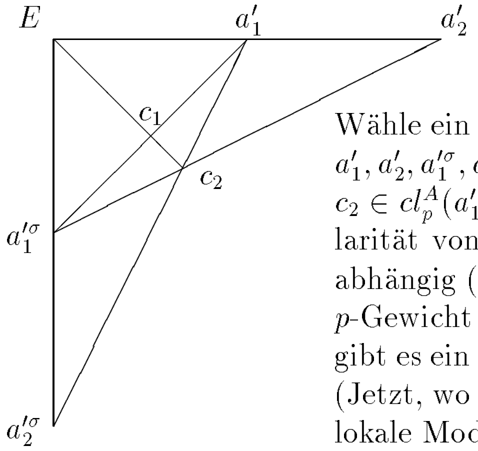
**Beweis**

(1) Nach Voraussetzung ist $w_p(a/A)+w_p(b_1b_2/A) = w_p(a/Ab_1b_2)+w_p(b_1b_2/A) = w_p(ab_1b_2/A) = 3 = w_p(a_ib_1b_2/A) = w_p(a_i/Ab_1b_2) + w_p(b_1b_2/A) = w_p(a_i/A) + w_p(b_1b_2/A)$, also $w_p(a/A) = w_p(a_i/A)$. Dann $w_p(ab_i/A) = w_p(a/A) + w_p(b_i/A) = w_p(a_i/A) + w_p(b_i/A) = w_p(a_ib_a/A)$, also $cl_p^A(ab_i) = cl_p^A(a_ib_i)$
(2) Es sei $X = cl_p^A(a_1b_1) \cap cl_p^A(a_2b_2)$, dann $cl_p^A(a) \subset X$ nach Voraussetzung, aber $w_p(X/A) = w_p(Xa_1b_1/A) - w_p(a_1b_1/AX) \leq w_p(a_1b_1/A) - w_p(a_1b_1/Aa_2b_2) = w_p(a_1/A) + w_p(b_1/A) - w_p(b_1/a_2b_2) = w_p(a_1/A) = w_p(a/A)$, also $cl_p^A(a) = cl_p^A(X) = X$.
(3) Es sei $U$ eine geeignete Folge in $tp(a/Aa_1a_2b_1b_2)$, so daß $C = Cb(a/Aa_1a_2b_1b_2) \subset dcl(U)$, aber wegen (2) ist $cl_p^A(a)$ $Aa_1a_2b_1b_2$-invariant, also $(tp(a/Aa_1a_2b_1b_2))^{\mathcal{C}} \subset cl_p^A(a)$ und deshalb $U \subset cl_p^A(a)$ und $C \subset cl_p^A(a)$. Andererseits $w_p(a/AC) \overset{\perp}{=} w_p(a/Aa_1a_2b_1b_2) = 0$ und deshalb $a \in cl_p^A(C)$.
(4) Ein geeignetes Element aus $Cb(a/Aa_1a_2b_1b_2)$ tut's. □

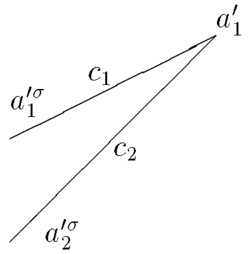
3.10 **Lemma**
*Es sei* $p \in St(A)$ *lokal modular und nicht trivial, dann gibt es Elemente* $a, b, c \in D_p(A)$ *und eine Menge* $E$ *von Parametern, so daß*
**(1)** $A \subset E \subset D_p(A)$ *und* $w_p(E/A) = 1$
**(2)** $stp(a/E), stp(b/E), stp(c/E)$ *sind p-regulär*
**(3)** $\{a, b, c\}$ *ist minimal abhängig über* $E$ *und* $a$ *und* $b$ *sind* $Ec$*-interdefinierbar.*

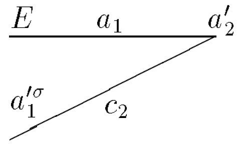
**Beweis**

Es sei $(a_1', a_2') \models p^{(2)}$, da $p$ lokal modular, aber nicht trivial ist, gibt es ein $e \in D_p(A)$, so daß $a_1', a_2', e$ paarweise unabhängig über $A$ sind ("jede Gerade hat mindestens 3 Punkte", (3.13)), es sei $E := acl^A(a_1'a_2'e) \cap cl_p^A(e)$, dann ist $stp(a_1'a_2'/E)$ $p$-semiregulär und $stp(a_i'/E) = p|E$.




Wähle ein $\sigma \in Aut_E$, so daß $a_1'^\sigma, a_2'^\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_E a_1', a_2'$, dann sind $a_1', a_2', a_1'^\sigma, a_2'^\sigma$ minimal abhängig über $A$ und es gibt ein $c_2 \in cl_p^A(a_1' a_2'^\sigma) \cap cl_p^A(a_2' a_1'^\sigma)$, so daß $w_p(c_2/A) = 1$ (Modularität von $D_p(A)$), dann ist $c_2$ $p$-unabhängig, also unabhängig (über $A$) von jedem der $a$. Andererseits ist das $p$-Gewicht der gesammten Konfiguration 3 und wieder gibt es ein $c_1 \in cl_p^A(a_1', a_1'^\sigma) \cap cl_p^A(E, c_2)$ mit $w_p(c_1/A) = 1$. (Jetzt, wo ich diese Konfiguration habe, brauche ich die lokale Modularität nicht mehr)




Es seien $a' = (a_1', a_2')$, $b' = (a_1'^\sigma, a_2'^\sigma)$, $c = (c_1, c_2)$,
Behauptung: Es gibt $a = (a_1, a_2)$ und $b$, so daß $a_i \sim_{cl_p^E} a_i'$, $b \sim_{cl_p^E} b'$ und $a$ und $b$ sind $Ec$-interdefinierbar.
Beweis: wende das Einstimmungslemma 3.9 an auf das obere Bild und finde so ein $a_1 \in dcl^A(b'c)$ mit $a_1 \sim_{cl_p^A} a_1'$, wende das Lemma dann an auf untere Bild und finde ein $a_2 \sim_{cl_p^A} a_2'$ mit $a_2 \in dcl^A(Ea_1a_1'^\sigma c_2) \subset dcl^E(b'c)$, dann $a \in dcl^E(b'c)$ und $cl_p^E(a) = cl_p^E(a_1) = cl_p^E(a_1') = cl_p^E(a')$.

Nun sei $B = Cb(b'/Eac)$, da $a \in dcl(Eb'c)$ sind nach dem $dcl$-Lemma (1.12) $B$ und $a$ interdefinierbar über $Ec$, wähle also ein $b \in B$, so daß $a \sim_{dcl^{Ec}} b$, dann ist insbesondere $w_p(b/Ec) = 1$ und $b \notin cl_p(E)$. Wieder mit dem Einstimmungslemma folgt, daß $(tp(a_1'^\sigma/Eac))^{\mathcal{C}} \subset cl_p^E(a_1'^\sigma)$, und, wegen $a_2'^\sigma \in cl_p^E(a_1'^\sigma)$, $tp(b'/Eac))^{\mathcal{C}} \subset (tp(a_1'^\sigma/Eac))^{\mathcal{C}} \cup (tp(a_2'^\sigma/Eac))^{\mathcal{C}} \subset cl_p^E((tp(a_1'^\sigma/Eac))^{\mathcal{C}}) \subset cl_p^E(a_1'^\sigma)$, also $b \in B \subset cl_p^E(a_1'^\sigma)$ und schließlich $cl_p^E(b) = cl_p^E(a_1'^\sigma) = cl_p^E(b')$, damit ist die Behauptung bewiesen.

Zwar ist nun die Semiregularität kaputtgegangen, aber wir haben $p$-Gewicht 1 und können sie wieder herstellen (indem wir zu $E$ noch einige Parameter aus $cl_p^A(E)$ dazufügen), also OE seien alle 3 Typen $p$-regulär, dann gelten auch die gewünschten Unabhängigkeiten. □

3.11 **Lemma**

*Es sei $p$ lokal modular und $a, b, c \in D_p(A)$, so daß*
*(1) $tp(a/A), tp(b/A), tp(c/A)$ sind $p$-regulär,*
*(2) $\{a, b, c\}$ ist minimal abhängig über $A$ und $a$ und $b$ sind interdefinierbar über $Ac$,*
*dann gibt es eine zusammenhängende $p$-reguläre $A$-Gruppe.*

**Beweis**

Da $a \sim_{dcl^{Ac}} b$ und $tp(^a/_{Ac})$ stationär ist (alle drei Typen sind nach Voraussetzung stationär), ist $tp(^{ab}/_{Ac})$ ein stationärer invertierbarer Funktionstyp, es sei $\tilde{c}$ ein Keim (über $A$), d.h. $A\tilde{c} = Cb(^{ab}/_{Ac})$ (ab jetzt arbeite ich in der durch $tp(^{\tilde{c}}/_A)$ gegebenen uniformen Familie). Es sei $\sigma \in Aut^s_{Ab}$, so daß $\tilde{c}^\sigma \downarrow_{Ab} \tilde{c}$, dann $\tilde{c}^{-1}(\tilde{c}^\sigma(a^\sigma) = \tilde{c}^{-1}(b^\sigma) = \tilde{c}^{-1}(b) = a$, also $a^\sigma a \downarrow_{A,\tilde{c}^{-1}\circ\tilde{c}^\sigma} c, c^\sigma$ und es sei $\tilde{d} = \tilde{c}^{-1} \circ \tilde{c}^\sigma$ (ich habe eine Formel im Hintergrund fixiert, deshalb "der" Keim).

Behauptung: $\tilde{c}, \tilde{c}^\sigma, \tilde{d}$ sind paarweise unabhängig über $A$.
Beweis: $A\tilde{d} = Cb(^{a^\sigma a}/_{Acc^\sigma}) =: C$ und $tp(^{a^\sigma a}/_{Acc^\sigma})$ ist $p$-semiregulär, denn $tp(^a/_{Acc^\sigma}) = tp(^a/_A)|cc^\sigma$ ist $p$-semiregulär und $a^\sigma \in dcl^A(a, cc^\sigma)$. Da $p$ lokal modular ist, ist $w_p(^C/_A) = w_p(^{aa^\sigma}/_A) - w_p(^{aa^\sigma}/_{Acc^\sigma}) = 2 - 1 = 1$, also $w_p(^{\tilde{d}}/_A) = 1$. Aber $\tilde{d} \notin cl_p^A(\tilde{c})$, denn $\tilde{c}^\sigma \in dcl^A(\tilde{c}, \tilde{d}) \backslash cl_p^A(\tilde{c})$, folglich $\tilde{c} \notin cl_p^A(\tilde{d})$ (Austausch), also $\tilde{c} \downarrow_A \tilde{d}$, entsprechend $\tilde{c}^\sigma \downarrow_A \tilde{d}$, fertig.

Wegen (3.4) ist dann $tp(^{\tilde{d}}/_A)$ ein prägenerischer Typ (mit der Komposition) und es gibt eine zusammenhängende Gruppe $G$, deren generischer Typ $A$-interdefinierbar zu $tp(^{\tilde{d}}/_A)$ ist. Nun ist $\tilde{d} \in dcl^{A\tilde{c}}(\tilde{c}^\sigma)$ und $tp(^{\tilde{c}^\sigma}/_{A\tilde{c}})$ ist ein $p$-regulärer Typ ($tp(^c/_A)$ ist $p$-regulär, deshalb auch $tp(^{\tilde{c}}/_A)$), also auch $tp(^{\tilde{d}}/_{A\tilde{c}})$ und $tp(^{\tilde{d}}/_A)$ auch, $G$ ist also $p$-regulär. □

Man kann über diese Gruppe noch einiges mehr sagen, etwa, in welchem Verhältnis der generische Typ zu $tp(^c/_A)$ steht und wie die "generische Operation" von $G$ auf $tp(^a/_A)$ – $\tilde{d}$ war schließlich der Keim einer $tp(^a/_A) \to tp(^a/_A)$ Funktion – zu einer transitiven $A$-Gruppenoperation $(G, X)$ gemacht werden kann, wobei $tp(^a/_A)$ dann der (einzige) generische Typ von $X$ ist.... aber das brauche ich alles nicht und irgendwo muß ja mal Schluß sein. Ich brauche später nur den folgenden Satz, der sofort aus den beiden Lemmas folgt (und der für triviale Typen offensichtlich falsch ist):

3.12 **Satz**

*Es sei $p \in St(A)$ ein lokal modularer nicht trivialer Typ, dann gibt es eine Menge $E \in D_p(A)$ mit $w_p(^E/_A) = 1$ und eine zusammenhängende Gruppe $G$, die $p$-regulär und $E$-typdefinierbar ist. Insbesondere gibt es $p$-reguläre Gruppen.*

## 3.4 $p$-einfache Gruppen

### 3.4.1 $p$-einfache Gruppen

$(G, X)$ sei eine transitive $A$-Gruppenoperation. Die Definition 2.13 angewendet auf die gute Eigenschaft "ist $p$-einfach und hat $p$-Gewicht $\leq \kappa$" ergibt: $(G, X)$ ist genau dann $p$-einfach, wenn ein/alle generischen Typen $p$-einfach sind. Diese Typen haben dann alle dasselbe $p$-Gewicht (Interdefinierbarkeit), dieses sei das $p$-Gewicht von $X$ (bzw. von $(G, X)$). Ist $(G, X)$ $p$-einfach, so wissen wir aber bisher noch nichts über $p$-Einfachheit und $p$-Gewicht der nicht generischen Elemente. Es reicht aber schon die $p$-Einfachheit von $G$, dann ist „alles" $p$-einfach und von $p$-Gewicht $\leq w_p(G)$:

4.1 **Lemma**
*Es sei $G$ $p$-einfach, dann gilt:*
**(1)** *$stp(g/A)$ und $stp(a/A)$ sind für alle $g \in G$ und $a \in X$ $p$-einfach.*
**(2)** *$(G, X)$ ist $p$-einfach und für jedes $a \in X$ gilt:*

$$w_p(a/A) \leq w_p(X) \leq w_p(G)$$

**Beweis**

**(1)** Jedes $g \in G$ ist Produkt von zwei $A$-generischen Elementen, etwa $g_1$ und $g_2$, dann $g \in dcl^A(g_1, g_2)$. Mit $stp(g_i/A)$ $(i = 1, 2)$ ist dann auch $stp(g/A)$ $p$-einfach. Sei $a \in X$, wähle ein $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$ in $X$ und $g \in G$ mit $g \cdot b = a$, dann $a \in dcl^{Ab}(g)$ und deshalb sind mit $stp(g/A)$ auch $stp(g/Ab), stp(a/Ab)$ und $stp(a/A)$ ($\smile\!\!\!\!\!\!|$) $p$-einfach.

**(2)** Aus (1) folgt, daß $(G, X)$ $p$-einfach ist. Es sei $g$ $A$-generisch in $G$ und $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$, dann ist $g \cdot a$ $A$-generisch in $X$ und $w_p(a/A) = w_p(a/Ag) \overset{interdef}{=} w_p(g \cdot a/Ag) \leq w_p(g \cdot a/A) = w_p(X)$. Es folgt (für $X = G$), daß auch $w_p(g/A) \leq w_p(G)$ fur jedes $g \in G$. Ist schließlich $a$ $A$-generisch in $X$, so wähle wie in (1) $b \in X$ und $g \in G$, dann $w_p(X) = w_p(a/A) = w_p(a/Ab) \leq w_p(g/Ab) \leq w_p(g/A) \leq w_p(G)$. □

4.2 **Korollar**
**(1)** *Typdefinierbare Untergruppen und Quotienten einer $p$-einfachen Gruppe $G$ sind $p$-einfach, ihr Gewicht ist $\leq w_p(G)$.*
**(2)** *Eine $A$-Gruppe $G$ ist genau dann $p$-einfach und von endlichem $p$-Gewicht, wenn $G \subset D_p(A)$.*

$G$ sei für den Rest des Kapitels eine $A$-Gruppe in $D_p(A)$. Ist $H < G$ typdefinierbar, so ist $(G, G/H)$ eine nur fast in $\mathcal{C}$ lebende transitive Gruppenoperation, sie ist genau dann $p$-einfach, wenn ein (alle) generischer $\star$-Typ (also alle seine Projektionen) $p$-einfach ist. Das $p$-Gewicht ist dann das $p$-Gewicht eines solchen generischen $\star$-Typs. Ist $H = \bigcap H_i$ eine $B$-Gruppe und $g \in G$ ein $B$-generisches Element, so ist $g_H = (g_{H_i})_I$ $B$-generisch in $(G, G/H)$ und $stp(g_H/B)$ ist genau dann $p$-einfach, wenn alle $stp(g_{H_i}/B)$ $p$-einfach sind. Außerdem ist $stp(g/Bg_H)$ translatiert zu einem generischen Typ von $H$ (2.19), also $w_p(H) = w_p(g/Bg_H)$.

4.3 **Lemma**
*Es sei $H = \bigcap_I H_i$ eine $B$-Untergruppe von $G$:*
**(1)** *Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $j \in I$, so daß $g_H \sim_{cl_p^B} g_{H_j}$.*
**(2)** *Es gibt ein $j \in I$, so daß $w_p(G/H) = w_p(G/H_j)$ und $w_p(H) = w_p(H_j)$.*
**(3)** *$w_p(G/H) = max\{w_p(G/H_i) | i \in I\}$*

**Beweis**

**(1)** Es sei $g \in G$, dann alle $w_p(g_{H_i}/B) \leq w_p(G) < \omega$, es gilt also ein $j \in I$, so daß $w_p(g_{H_j}/B)$ maximal wird. Für $i \in I$ ist dann $(g_{H_i}, g_{H_j}) \in dcl^B(g_{H_i \cap H_j})$ und $w_p(g_{H_i} g_{H_j}/B) \leq w_p(g_{H_i \cap H_j}/B) \overset{max}{\leq} w_p(g_{H_j}/B)$, also $g_{H_i} \in cl_p^B(g_{H_j})$ und folglich $g_H \subset cl_p^B(g_{H_j})$. Da sowieso $g_{H_j} \in cl_p^B(g_H)$, gilt $g_H \sim_{cl_p^B} g_{H_j}$.

**(2)** Es sei $g$ ein $B$-generische Element von $G$, wähle ein $j \in I$ mit $g_H \sim_{cl_p^B} g_{H_j}$, dann ist $w_p(G/H) = w_p(g_H/B) = w_p(g_{H_j}/B) = w_p(G/H_j)$. Außerdem ist $w_p(H) = w_p(g/Bg_H) = w_p(g/Bg_{H_j}) = w_p(H_j)$.

**(3)** Mit $g$ und $j$ wie in (2) gilt: $w_p(G/H) = w_p(g_H/B) = max\{w_p(g_{H_i}/B) | i \in I\} = max\{w_p(G/H_i) | i \in I\}$ □

So erhalten wir das Pendant zu Lemma 4.1:

4.4 **Korollar**
*Ist $G$ $p$-einfach, so auch $G/H$ und für alle $g_H \in G/H$ ist $w_p(g_H/B) \leq w_p(G/H) \leq w_p(G)$.*

4.5 **Lemma (Additivität)**
*Es sei $H$ eine typdefinierbare Untergruppe von $G$, dann*

$$w_p(G) = w_p(G/H) + w_p(H)$$

**Beweis**

Es sei $H$ etwa eine $B$-Gruppe, $g \in G$ $B$-generisch, dann $g_H \in dcl^B(g)$ und $w_p(G) = w_p(g/B) = w_p(g, g_H/B) \overset{additiv}{=} w_p(g/Bg_H) + w_p(g_H/B) = w_p(H) + w_p(G/H)$. □

### 3.4.2 $p$-semireguläre Gruppen

Für eine $A$-Gruppe $G \subset D_p(A)$ sei $\mathcal{H}^p := \mathcal{H}_G^p := \{H | H < G$ typdefinierbar und $w_p(H) = w_p(G)\}$ und $\mathcal{N}^p := \mathcal{N}_G^p := \{N | N \lhd G$ relativ $A$-typdefinierbar und $w_p(N) = w_p(G)\} \subset \mathcal{H}^p$ ($\mathcal{N}^p$ ist wieder parameterabhängig). Der folgende Satz gibt eine interessante und wichtige Charakterisierung der $p$-Semiregularität von Gruppen:

4.6 **Satz über $p$-semireguläre Gruppen**

*Für eine $p$-einfache Gruppe $G$ von endlichem $p$-Gewicht sind äquivalent:*

**(1)** *$G$ ist $p$-semiregulär*

**(2)** *Für alle $H \in \mathcal{H}^p$ gilt: $H$ hat endlichen Index*

**(3)** *Für alle $N \in \mathcal{N}^p$ gilt: $N$ hat endlichen Index*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2): Es sei $H$ eine $B$-Gruppe in $\mathcal{H}^p$ und $g \in G$ sei $B$-generisch, dann ist $g_H \in dcl(Bg)$ und (Additivität) $w_p({}^{g_H}/_B) = w_p(G/H) = 0$ und d.h. $g_H \in cl_p(B) \cap dcl(Bg)$. Aber wegen (1) ist $stp({}^g/_B)$ $p$-semiregulär und deshalb (2.22) $g_H \in acl(B)$. $H$ hat also endlichen Index.
(2) $\Rightarrow$ (3): klar
(3) $\Rightarrow$ (1) indirekt: Es sei $g \in G$ $A$-generisch aber nicht $p$-semiregulär, dann gilt $g \not\downarrow_A cl_p(A)$, $stp({}^g/_A)$ ist also nicht $cl_p(A)$-fremd. Nach 3.6 gibt es dann einen relativ $A$-definierbaren Normalteiler $N \triangleleft G$, so daß ${}^G/_N \subset Int_A(cl_p(A))$ und $N$ nicht generisch ist, also insbesondere unendlichen Index hat. Aber nach 2.18 ist $Int_A(cl_p(A)) = cl_p(A)$, also hat ${}^G/_N$ $p$-Gewicht 0 und somit ist $N \in \mathcal{N}^p$. □

Aus (4.1) folgt, daß generische Typen maximales $p$-Gewicht haben, die Umkehrung muß aber nicht gelten. Besser ist die Situation in $p$-semiregulären $G$-Räumen:

4.7 **Lemma**

*Es sei $(G, X)$ $p$-semiregulär und $q$ ein stationärer Typ von $X$, dann sind äquivalent:*

**(1)** *$q$ ist generisch in $X$*

**(2)** *$w_p(q) = w_p(X)$*

**Beweis**

(1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus der Definition von $w_p(X)$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Es sei $a \in X$, so daß $w_p({}^a/_B) = w_p(X)$, dann ist $stp({}^a/_B)$ translatiert zu einem generischen Typ von $X$:
$g$ sei ein $B$-generisches Element von $G$ mit $g \downarrow_B a$. $stp({}^{g\cdot a}/_B) \| stp({}^g/_B)\cdot a$ ist dann generisch in $X$, also $p$-semiregulär und $w_p({}^a/_B) = w_p({}^{g\cdot a}/_B) \geq w_p({}^{g\cdot a}/_{Bg}) \overset{interdef}{=} w_p({}^a/_{Bg}) = w_p({}^a/_B)$, also $w_p({}^{g\cdot a}/_B) = w_p({}^{g\cdot a}/_{Bg})$ und wegen $p$-Semiregularität (2.22) dann $g\cdot a \downarrow_B g$. Also auch $g\cdot a \downarrow_B g^{-1}$ und deshalb $stp({}^a/_{Bg}) = g^{-1}\cdot stp({}^{g\cdot a}/_B)$. □

4.8 **Korollar**

*Für eine reguläre $A$-Gruppe $G \not\perp p$ gilt: $G = (G \cap cl_p(A)) \,\dot{\cup}\, \{g | g$ ist $A$-generisch in $G\}$*

**Beweis**

$G$ ist $p$-semiregulär von $p$-Gewicht 1, das Lemma besagt, daß die $A$-generischen Elemente gerade die von maximalem $p$-Gewicht (über $A$) sind, hier also genau die außerhalb $cl_p(A)$. □

### 3.4.3 $p$-zusammenhängende Gruppen

Die typdefinierbaren Untergruppen von $G$ mit gleichem Gewicht wie $G$ haben schon bei der Charakterisierung der $p$-Semiregularität eine wichtige Rolle gespielt. Bei der Einführung der "$p$-Zusammenhangskomponente" spielen sie die analoge Rolle zu den generischen Gruppen bei der Zusammenhangskomponente (ich könnte diese Gruppen also "$p$-generisch" nennen, dann würden die Parallelen noch deutlicher). Wegen Additivität gilt für eine $B$-typdefinierbare Untergruppe $H < G$:

$$w_p(H) = w_p(G) \Leftrightarrow G/H\,'\!\subset'\, cl_p(B) \Leftrightarrow \text{ alle Nebenkl. von } H \text{ sind } cl_p(B)\text{-invariant}$$

4.9 **Definition**
**(1)** $G^{0,p} := \bigcap \mathcal{H}^p_G$ *heißt die* $p$-Zusammenhangskomponente von G
**(2)** *$G$ nenne ich* $p$-zusammenhängend*, wenn $G = G^{0,p}$.*

$G$ ist also genau dann $p$-zusammenhängend, wenn $G$ keine echte typdefinierbare Untergruppe von gleichem Gewicht hat. $G^{0,p}$ ist typdefinierbar und $w_p(G^{0,p}) = w_p(G)$, also $G^{0,p} = min(\mathcal{H}^p, \subset)$, d.h. die $p$-Zusammenhangskomponente von $G$ ist die eindeutig bestimmte kleinste typdefinierbare Untergruppe von $G$ mit gleichem $p$-Gewicht wie $G$ und offensichtlich ist sie $p$-zusammenhängend ("Transitivität"). Wie im Kapitel über die Zusammenhangskomponente gibt es auch hier für jedes $H \in \mathcal{H}^p$ schon ein $N \in \mathcal{N}^p$ mit $G^{0,p} \subset N \subset H \subset G$, insbesondere ist $G^{0,p} = \bigcap \mathcal{N}^p$. $G^{0,p}$ ist also ein $A$-Normalteiler von $G$. Jede generisch Untergruppe von $G$ liegt in $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^p$, also ist $G^{0,p} \subset G^0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $G$ $p$-semiregulär ist. Aus dem Satz über $p$-semireguläre Gruppen ergibt sich sofort das folgende schöne

4.10 **Lemma**
*Für eine p-einfache A-Gruppe $G \subset D_p(A)$ sind äquivalent:*
**(1)** *$G$ ist p-zusammenhängend*
**(2)** *$G$ ist zusammenhängend und p-semiregulär*

**Beweis**
(1) $\Rightarrow$ (2): $G$ hat keine echte Untergruppe von gleichem Gewicht, ist also $p$-semiregulär, insbesondere hat $G$ keine echte generische Untergruppe, ist also zusammenhängend.
(2) $\Rightarrow$ (1): Es sei $H \in \mathcal{H}^p$, da $G$ $p$-semiregulär ist, hat $H$ endlichen Index. Aber $G$ ist zusammenhängend und hat folglich keine echte typdefinierbare Untergruppe von endlichem Index, deshalb ist $H = G$ und folglich $G = G^{0,p}$.
□

### Kartesische Produkte und Quotienten

Aus der Charakterisierung oben und dem Wissen über zusammenhängende Gruppen und $p$-Semiregularität folgen dann die analogen Eigenschaften zu vorher:

4.11 **Lemma**
*Ist $\pi$ ein $\mathcal{C}$-Homomorphismus von $G$ und $H < G$, so*
*(a) $w_p(G/H) = 0 \Rightarrow w_p(\pi(G)/\pi(H)) = 0$*
*(b) Ist $H$ $p$-zusammenhängend, so auch $\pi(H)$.*
*(c) $\pi(H^{0,p}) = \pi(H)^{0,p}$*

4.12 **Lemma**
**(1)** *Quotienten von $p$-zusammenhängenden Gruppen (mit relativ definierbaren Normalteilern) sind $p$-zusammenhängend.*
**(2)** *$G_1 \times ... \times G_n$ ist genau dann $p$-zusammenhängend, wenn alle $G_i$ $p$-zusammenhängend sind.*

### Stabilisatoren

4.13 **Lemma**
*Ist $q = stp(a/B)$ ein stationärer Typ von $G$ und $S = Stab(q)$, dann gilt*
**(1)** *Ist $g$ $Ba$-generisch in $G$, so $w_p(S) = w_p(q) - w_p(gs/B, g{\cdot}a)$*
**(2)** *Ist $w_p(S) = w_p(q)$ und $q$ $p$-semiregulär, so ist $S$ $p$-zusammenhängend und $q$ (rechts)translatiert zu $gen(S)$.*

**Beweis**

**(1)** Wegen des Stabilisatorlemmas 2.23 ist $Bg_S = Cb(g{\cdot}q)$, also ist $w_p(g{\cdot}a/Bg_S) = w_p(g{\cdot}a/Bg) = w_p(g{\cdot}q) = w_p(q)$ und da $w_p(g{\cdot}a/B) = w_p(G)$ und $w_p(gs/B) = w_p(G/S)$ folgt mit der Additivität $w_p(q) - w_p(gs/B, g{\cdot}a) = w_p(q) - (w_p(q) + w_p(G/S) - w_p(G)) = w_p(S)$.

**(2)** Es sei $w_p(S) = w_p(q)$ und $q$ sei $p$-semiregulär,

Behauptung: $q$ setzt $S' = S{\cdot}a$ fort
Beweis: Es sei $b \models gen(S) \| Ba$, dann forkt $b{\cdot}q$ nicht über $B$, also $b{\cdot}a \downarrow_B b$. Also $w_p(q) = w_p(b{\cdot}q) = w_p(b{\cdot}a/B) \geq w_p(b{\cdot}a/Ba) = w_p(b/Ba) = w_p(b/B) = w_p(S)$. Nach Voraussetzung ist dann $w_p(b{\cdot}a/B) = w_p(b{\cdot}a/Ba)$ und wegen $p$-Semiregularität ist $b{\cdot}a \downarrow_B a$. Aber beide Elemente liegen in $S'$, also ist $S'$ typdefinierbar über $acl^B(b{\cdot}a) \cap acl^B(a) \subset acl(B)$, damit ist $q^{\mathcal{C}} \subset S'$.

Aus dem Stabilisatorlemma folgt dann, daß $S$ zusammenhängend und $q$ generisch in $S'$ ist, also $q = gen(S \cdot a) = gen(S) \cdot a$. □

# Kapitel 4

# Die Geometrie lokal modularer Typen

Ich wende mich nun den Geometrien lokal modularer Typen zu. Ein großer Teil der Konstruktion des Schiefkörpers und des Vektorraums kann schon in einem sehr allgemeinen Kontext durchgeführt werden, deshalb betrachte ich zuerst bestimmte Kategorien regulärer Gruppen. Die bleibenden Lücken werden dann im lokal modularen Kontext geschlossen. Mit Hilfe dieser Vektorräume kann ich dann am Ende die Geometrie lokal modularer Typen untersuchen.

## 4.1 Kategorien regulärer Gruppen

Wir suchen einen Ring. Viele Ringe sind Endomorphismenringe, aber ganz so glatt geht's hier erstmal nicht. Deshalb muß ich von Homomorphismen zu "Quasihomomorphismen" übergehen und dann nach "Quasiendomorphismenringen" schauen, wobei ich im Falle der $p$-regulären Gruppen verschiedene Verknüpfungen betrachte. Am Ende gelangen wir nach einer geeigneten Faktorisierung dann doch noch zu einem Schiefkörper aus Endomorphismen. Weil es kaum mehr Arbeit macht und außerdem die Situation in ein klareres Licht stellt, konstruiere ich sofort die zugrundeliegenden Kategorien. Lokale Modularität spielt auch in diesem Kapitel noch keine Rolle.

### 4.1.1 Quasihomomorphismen

In diesem Abschnitt skizziere ich, wie man Quasihomomorphismen als verallgemeinerte Homomorphismen auffassen kann.

#### Die Kategorie $\mathcal{S}_Q$ und der Funktor $\mathcal{G}$

Zu jeder Signatur $S$ gibt es die Kategorie $\mathcal{S}$ der $S$-Strukturen, mit $S$-Strukturen als Objekten und $S$-Homomorphismen als Morphismen. Ich werde nun durch

Einführung von "$S$-Quasihomomorphismen" den Morphismusbegriff verallgemeinern und so eine neue Kategorie erhalten, in welche die alte durch einen kanonischen Funktor eingebettet ist.

Sind $A, B, C$ Mengen und $U \subset A \times B$, $V \subset B \times C$, so sei

$$V \circ U := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : \ (a, b) \in U, \ (b, c) \in V\}$$

So erhält man eine Kategorie $\mathcal{M}_Q$, deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen "Quasiabbildungen" sind: $Mor_{\mathcal{M}_Q}(A, B) = Qabb(A, B) := Pot(A \times B)$, denn man rechnet schnell nach, daß $\circ$ assoziativ ist, das neutrale Element in $Qabb(A, A)$ ist gerade die Diagonale $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$. Außerdem liefert die Zuordnung, die identisch auf den Objekten (Mengen) operiert und jeder Abbildung ihren Graphen zuordnet, einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{M}$ der Mengen in die Kategorie $\mathcal{M}_Q$ ($Graph(\tau \circ \sigma) = Graph(\tau) \circ Graph(\sigma)$, $Graph(id_A) = \Delta_A$). Auf diese Weise können Abbildungen mit ihren Graphen identifiziert werden, d.h. also Quasiabbildungen aufgefasst werden.

Wie die Morphismen in der Kategorie der $S$-Strukturen Abbildungen sind (also bestimmte Morphismen in $\mathcal{M}$), so werden nun die Morphismen der angestrebten Kategorien Quasiabbildungen, also Morphismen in $\mathcal{M}_Q$ sein. Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ $S$-Strukturen und $\mathcal{U} < \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{V} < \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ $S$-Substrukturen:

$$V \circ U \text{ ist eine } S\text{-abgeschlossene Teilmenge von } \mathcal{A} \times \mathcal{C}$$

$$\Delta_A \text{ ist } S\text{-abgeschlossen in } \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

die induzierten $S$-Substrukturen werden mit "$\mathcal{V} \circ \mathcal{U}$" und "$\Delta_{\mathcal{A}}$" bezeichnet. Wie oben erhält man die Kategorie $\mathcal{S}_Q$ mit $S$-Stukturen als Objekten und den $S$-Substrukturen von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ als Morphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, ein $S$-Quasihomomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ sei also einfach eine $S$-Substruktur von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Um zu sehen, daß die Graphzuordnung ein Funktor bleibt, beachte man, daß für Abbildungen $\sigma : A \to B$ (und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $S$-Strukturen) gilt:

$$\sigma \text{ ist ein } S\text{-Homomorphismus} \Rightarrow \text{der Graph von } \sigma \text{ ist } S\text{-abgeschlossen}$$

Die Umkehrung ist natürlich falsch, da der Begriff "$S$-Homomorphismus" eine Bedingung auch an die Relationen stellt, der Begriff "$S$-abgeschlossen" jedoch nicht, sie bleibt aber richtig, solange $S$ keine Relationssymbole enthält. Die durch $\sigma$ induzierte $S$-Substruktur von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ wird mit "$\mathcal{G}(\sigma)$" bezeichnet, der Graph eines $S$-Homomorphismus ist also ein $S$-Quasihomomorphismus. So erhält man, wie oben, den Funktor $\mathcal{G}$, mit dessen Hilfe $S$-Homomorphismen als $S$-Quasihomomorphismen aufgefasst werden können.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[d, "\mathcal{V}"'] & \mathcal{S}_Q \arrow[d, "\mathcal{V}"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{G}"'] & \mathcal{M}_Q \end{tikzcd}$$

$\mathcal{V}$ ist der Vergiß-Funktor

In der Kategorie $\mathcal{M}_Q$ findet man neben der (partiellen) Verknüpfung $\circ$ noch eine weitere (globale) Operation:

$$U \subset A \times B, \text{ so } U^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \,|\, (a,b) \in U\}$$

Ist $\sigma \in Abb(A,B)$ und invertierbar, so gilt offensichtlich $\mathcal{G}(\sigma^{-1}) = \mathcal{G}(\sigma)^{-1}$. Zwar hat nun jede Quasiabbildung $U$ ein "Inverses" $U^{-1}$, aber Achtung, i.a. gilt weder $U \circ U^{-1} = \Delta$ noch $U^{-1} \circ U = \Delta$ (d.h. $U^{-1}$ ist i.a. kein inverser Morphismus zu $U$). Ist $U$ jedoch invertierbar, so ist $U^{-1}$ der inverse Morphismus und $U$ ist der Graph einer Bijektion ("die Quasibijektionen sind die Bijektionen"), außerdem ist stets $(V \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1}$.
Insbesondere trägt $Qend(A) = Pot(A \times A)$ eine kanonische $\{\circ, ^{-1}, 1\}$-Struktur und ist $\mathcal{A}$ eine $S$-Struktur, so ist $Qend_S(\mathcal{A}) = Qhom_S(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \subset Qend(A)$ eine $\{\circ, ^{-1}, 1\}$-Substruktur.

### Die Kategorie der abelschen Gruppen$_Q$

Die Kategorie der abelschen Gruppen ist eine Unterkategorie von $\mathcal{S}$ bezüglich der Signatur $S = \{+, -, 0\}$. Für Gruppen $G, H$ sind die Quasihomomorphismen von $G$ nach $H$ die Untergruppen von $G \times H$, eine Abbildung von $G$ nach $H$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn ihr Graph ein Quasihomomorphismus ist.
Für $U < G \times H$ gilt (auch im nicht abelschen Fall) $kern(U) \lhd pr_1(U) < G$, $cok(U) \lhd pr_2(U) < H$ und $pr_1(U)/kern(U)$ und $pr_2(U)/cok(U)$ sind kanonisch isomorph durch $g/kern(U) \mapsto h/cok(U)$ falls $(g,h) \in U$. Auf diese Weisen entsteht eine natürliche 1:1 Korrespondenz zwischen $Qhom(G,H)$ und Isomorphismen von Quotienten von Untergruppen von $G$ und $H$.

1.1 **Lemma**
*Es sei $U \in Qhom(G,H)$, $G_0 \lhd G$, $H_0 \lhd H$ und es gelte $pr_1(U) = G$, $pr_2(U) = H$ und $\forall (g,h) \in U : g \in G_0 \Leftrightarrow h \in H_0$, dann ist ${}^{U}/_{G_0 \times H_0}$ $(= \{u + G_0 \times H_0 \,|\, u \in U\})$ der Graph eines Isomorphismus $\sigma_U : {}^{G}/_{G_0} \to {}^{H}/_{H_0}$.*

**Beweis**

(1) $\sigma_U$ ist wohldefiniert und injektiv: $(g,h), (g',h') \in U$, so $(g-g', h-h') \in U$ und ${}^{g}/_{G_0} = {}^{g'}/_{G_0} \Leftrightarrow g - g' \in G_0 \Leftrightarrow h - h' \in H_0 \Leftrightarrow {}^{h}/_{H_0} = {}^{h'}/_{H_0}$.

(2) $\sigma_U$ ist total und surjektiv, da $pr_1(U) = G$ und $pr_2(U) = H$.
(3) Es seien ${}^{g}/_{G_0}, {}^{g'}/_{G_0} \in {}^{G}/_{G_0}$, OE $(g,h),(g',h') \in U$ für geeignete $h, h'$, dann $(g{+}g', h{+}h') \in U$ und $\sigma_U({}^{g}/_{G_0}{+}{}^{g'}/_{G_0}) = \sigma_U({}^{g+g'}/_{G_0}) = \sigma_U({}^{h+h'}/_{H_0}) = \sigma_U({}^{h}/_{H_0}) + \sigma_U({}^{h'}/_{H_0}) = \sigma_U({}^{g}/_{G_0}) + \sigma_U({}^{g'}/_{G_0})$. □

Sind $U, V \in Qhom(G,H)$, so wird durch

$$U + V := \{(g, h_1 + h_2) \in G \times H \mid (g, h_1) \in U, (g, h_2) \in V\}$$

eine Addition auf $Qhom(G,H)$ erklärt. Wegen Kommutativität ist $U + V$ ist wieder eine Gruppe (etwa Abgeschlossenheit: $(g, h_1 + h_2), (g', h_1' + h_2') \in U + V$, so $(g + g', (h_1 + h_2) + (h_1' + h_2')) \overset{kommut}{=} (g + g', (h_1 + h_1') + (h_2 + h_2')) \in U + V$, da $(g + g', h_1 + h_1') \in U$ und $(g + g', h_2 + h_2') \in V$), $+$ ist also abgeschlossen auf $Qhom(G,H)$ und macht $Qhom(G,H)$ zu einem abelschen Monoid, wobei $G \times \{0_H\}$ das Nullelement ist. Inverse muß es nicht unbedingt geben, denn für $-U = \{(g, -h) \mid (g,h) \in U\}$ ist leider i.a. nicht $U - U = 0$. Der Funktor $\mathcal{G}$ ist $+$-verträglich (d.h. wir dürfen weiterhin Homomorphismen mit ihren Graphen identifizieren).
$Qend(G)$ ist auch mit $\circ$ ein Monoid, aber $\circ$ und $+$ sind i.a. nicht miteinander verträglich, d.h. Distributivität kann verletzt sein. Man betrachte etwa die folgende Situation: $U \in Qend(G)$, 1 sei die Diagonale, dann $(g,h) \in 1 \circ U + 1 \circ U$ $\Leftrightarrow \exists h_1, h_1 : h = h_1 + h_2, (g, h_i) \in U$. Andererseits ist $(g,h) \in (1+1) \circ U$ $\Leftrightarrow \exists a : h = a + a, (g, a) \in U$. Auf diese Weise lassen sich (für geeignetes $G$ und $U$) $(g,h) \in (1 \circ U + 1 \circ U) \backslash ((1+1) \circ U)$ finden (etwa mit einem nicht divisiblen $h$). Was ich aber später noch brauchen werde, ist, daß zumindest die folgenden Inklusionen gelten (für alle Gruppen, für die die Verknüpfungen definiert sind):

$$V \circ U_1 + V \circ U_2 \subset V \circ (U_1 + U_2) \text{ und } (U_1 + U_2) \circ W \subset U_1 \circ W + U_2 \circ W$$

All die hier genannten Defizite werden schließlich nach einer geeigneten Faktorisierung verschwinden.

### 4.1.2 Kategorien regulärer Gruppen

Die Kategorie der $p$-regulären Gruppen mit typdefinierbaren Gruppenhomomorphismen ist eine Unterkategorie der abelschen Gruppen und die Kategorie $\mathcal{P}_Q$ der $p$-regulären Gruppen mit typdefinierbaren Quasigruppenhomomorphismen ist eine Unterkategorie der abelschen Gruppen$_Q$, also

$$Qhom(G,H) = \{U < G \times H \mid U \text{ ist typdefinierbar }\}$$

wobei $G$ und $H$ $p$-reguläre Gruppen sind. Solche $U$ sind also insbesondere abelsche $p$-einfache Gruppen von $p$-Gewicht $\leq 2$ und $G \times H$ ist nach 4.7 die einzige Untergruppe von $p$-Gewicht 2 ($G \times H$ ist $p$-zusammenhängend von $p$-Gewicht 2).

Der Vorspann über Kategorien mit Quasihomomorphismen diente dem Zweck, daß man ein besseres Verständnis von dieser Kategorie bekommt. Trotzdem bin ich erst am Anfang, denn $Qend(G)$ ist noch lange kein Ring. Jetzt werde ich eine neue Kategorie definieren, deren Objekte und Morphismen $p$-reguläre Gruppen sind. Da aber die Komposition (bzw. Addition) von $p$-regulären Gruppen nicht wieder $p$-regulär sein muß, muß ich ein neue Verknüpfungen einführen. Eine entscheidende Rolle spielt dabei das folgende

1.2 **Lemma**
*Es seien $G_1, ..., G_n$ p-reguläre Gruppen und $S < G \times ... \times G_n$ eine p-reguläre Untergruppe, dann gilt*
**(1)** *Alle $pr_i(S) = \{0\}$ oder $G_i$*
**(2)** *Sind alle Gruppen über B und alle $pr_i(S) = G_i$, so gilt für alle $(a_1, ..., a_n) \in S$:*

$$a_1 \sim_{cl_p^B} a_2 \sim_{cl_p^B} ... \sim_{cl_p^B} a_n$$

**Beweis**

**(1)** Jede Projektion von $S$ ist wieder $p$-zusammenhängend, aber $G_i$ hat nur die beiden trivialen $p$-zusammenhängenden Untergruppen (dieses Argument verlangt nur, daß $S$ $p$-zusammenhängend ist).
**(2)** Es sei $(a_1, ..., a_n) \in S$: ist $w_p({}^{a_1 \cdots a_n}/_B) = 0$, so gilt die Behauptung. Ist andererseits $w_p({}^{a_1 \cdots a_n}/_B) = 1$, dann ist $stp({}^{a_1 \cdots a_n}/_B)$ generisch (nach 4.7) und deshalb sind alle $stp({}^{a_i}/_B)$ generisch in $pr_i(S) \overset{Vor}{=} G_i$ und deshalb gilt die Behauptung. □

Nun werfe ich noch die Gruppen raus, deren erste Komponente (d.h. die Projektion auf die erste Komponente) trivial ist: $\mathcal{R}$ sei die Klasse der $p$-regulären Morphismen in $\mathcal{P}_Q$ mit nichttrivialer erster Komponente. $S$ und $S'$ seien (komponierbar bzw. addierbar) in $\mathcal{R}$, dann sei

$$S \cdot S' := (S \circ S')^{0,p} \qquad S \oplus S' := (S + S')^{0,p}$$

Ich sage „$S = 0$" bzw. „$S = 1$", falls die zweite Komponente von $S$ trivial bzw. $S$ eine Diagonale ist, $\mathcal{R}(G, H)$ bestehe aus den $S < G \times H$.

1.3 **Satz (Die Kategorie der $p$-regulären Gruppen)**
**(1)** *Die p-regulären Gruppen bilden mit den Morphismen $\mathcal{R}$ und $\cdot$ eine Kategorie.*
**(2)** *$\cdot$ und $\oplus$ sind distributiv.*
**(3)** *Jedes $\mathcal{R}(G, H)$ wird mit $\oplus$ zu einer abelschen Gruppe.*
**(4)** *Für alle (komponierbaren) $S, S'$ gilt $S \cdot S' = 0 \Leftrightarrow S = 0$ oder $S' = 0$ und für alle $S \neq 0$ gilt $S \cdot S^{-1} = 1$ und $S^{-1} \cdot S = 1$*

**Beweis**

Es sei $\langle\mathcal{R}\rangle$ die Klasse der Quasihomomorphismen in $\mathcal{P}_Q$, die durch $\circ$ und $+$ aus $\mathcal{R}$ erzeugt sind. Alle auftretenden Gruppen seien etwa $B$-typdefinierbar (das heißt natürlich nicht, daß alle $S \in \mathcal{R}$ $B$-Gruppen sind, erst werden die Gruppen gewählt, dann das $B$) und natürlich seien alle auftretenden Verknüpfungen definiert.

Behauptung: Für alle $U \in \langle\mathcal{R}\rangle$ gilt: $w_p(pr_1(U)) = 1$ und $\forall(a,b) \in U : b \in cl_p^B(a)$.
Beweis (induktiv): die Behauptung gilt für alle $S \in \mathcal{R}$ (das folgt aus dem Lemma oben (1.2) für $S \neq 0$, für $S = 0$ ist es klar). Es gelte nun für $U, U' \in \langle\mathcal{R}\rangle$ die Behauptung, $w_p(pr_1(U)) = 1$ bedeutet, daß die Projektion auf die erste Koordinate die ganze ("linke") Gruppe ist, dann ist klar, daß sich diese Eigenschaft auf Verknüpfungen vererbt.
(a) $U \circ U'$: $(a,b) \in U \circ U'$, etwa $(a,c) \in U$ und $(c,b) \in U'$, so nach Induktionsvoraussetzung $b \in cl_p^B(c)$ und $c \in cl_p^B(a)$, also $b \in cl_p^B(a)$.
(b) $U' \circ U$ analog
(c) $U + U'$: $(a,b) \in U + U'$, etwa $(a,b_1) \in U, (a,b_2) \in U'$ und $b = b_1 + b_2$, so nach Voraussetzung $b_i \in cl_p^B(a)$, also $b = b_1 + b_2 \in cl_p^B(a)$.

Damit ist die Behauptung bewiesen und insbesondere hat jedes $U \in \langle\mathcal{R}\rangle$ $p$-Gewicht 1 und ${}^{0,p}$ kann als Projektion von $\langle\mathcal{R}\rangle$ auf $\mathcal{R}$ aufgefasst werden, wobei die Faser von $S$ gerade die Obergruppen von $S$ (in $\langle\mathcal{R}\rangle$) sind. Nun folgt der Rest recht einfach:

**(1)** Nach Definition ist $\cdot$ eine zweistellige Verknüpfung in $\mathcal{R}$ und jede Diagonale ist in $\mathcal{R}$ und neutral. Ich muß also nur noch die Assoziativität zeigen: sind $S_1, S_2, S_3$ aus $\mathcal{R}$ und komponierbar, so $(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = ((S_1 \circ S_2)^{0,p} \circ S_3)^{0,p}$, aber $(S_1 \circ S_2)^{0,p} \circ S_3 \subset (S_1 \circ S_2) \circ S_3$ und beide Gruppen liegen in $\langle\mathcal{R}\rangle$, also $(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = (S_1 \circ S_2 \circ S_3)^{0,p}$, genauso $S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3) = (S_1 \circ S_2 \circ S_3)^{0,p}$, also $(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3)$.

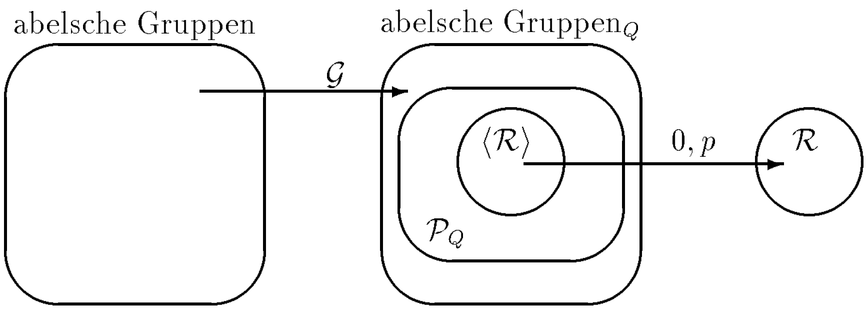
**(2)** $(S_1 \oplus S_2) \cdot S_3 \subset ((S_1 + S_2) \circ S_3)$ und $S_1 \cdot S_3 \oplus S_1 \cdot S_3 \subset S_1 \circ S_3 + S_2 \circ S_3 \overset{\text{s.o.}}{\subset} ((S_1 + S_2) \circ S_3)$, also $(S_1 \oplus S_2) \cdot S_3 = ((S_1 + S_2) \circ S_3)^{0,p} = S_1 \cdot S_3 \oplus S_1 \cdot S_3$. Wegen $S_1 \circ (S_2 + S_3) \subset S_1 \circ S_2 + S_1 \circ S_3$ folgt analog $S_1 \cdot (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \circ S_2 + S_1 \circ S_3)^{0,p} = S_1 \cdot S_2 \oplus S_1 \cdot S_3$.

**(3)** $\oplus$ ist nach Definition abgeschlossen auf $\mathcal{R}(G,H)$ und mit $+$ ist auch $\oplus$ kommutativ. Die Assoziativität zeigt man wie in (1): $(S_1 \oplus S_2) \oplus S_3 = (S_1 + S_2 + S_3)^{0,p} = S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3)$. 0 ist neutral und mit $S \neq 0$ ist auch $-S$ in $\mathcal{R}(G,H)$ und $S \oplus (-S)) = (S - S)^{0,p} = 0$ (denn für $(a, b_2 - b_1) \in S - S$ ist $b_2 - b_1 \in cok(S) \subset cl_p(\emptyset)$).

**(4)** $G \overset{S'}{\to} H \overset{S}{\to} H'$: ist $S' = 0 = G \times \{0\}$, so ist $S \cdot S' = (S \circ G \times \{0\})^{0,p} = (G \times cok(S))^{0,p}$. Aber $cok(S) \subset cl_p^B(\emptyset)$ (denn jedes $b \in cok(S)$ liegt in $cl_p^B(0)$), also $(G \times cok(S))^{0,p} = G \times \{0\} = 0$. Andererseits ist $(H \times \{0\} \circ S')^{0,p} = (G \times \{0\})^{0,p} = 0$. Sind hingegen beide Gruppen $\neq 0$ und $(a,b)$ $B$-generisch

in $S{\cdot}S'$, etwa $(a,c) \in S'$ und $(c,b) \in S$, so ist $a$ $B$-generisch $pr_1(S') = G$ und aus dem Lemma oben (1.2) folgt $a \sim_{cl_p^B} c$ und $c \sim_{cl_p^B} b$, also $w_p({}^{b}/_{B}) = 1$ und $S{\cdot}S' \neq 0$.
Nun sei $S \neq 0$ und $(a,b)$ sei $B$-generisch in $S$, dann ist auch $stp({}^{b}/_{B})$ generisch und $stp({}^{a,\,a}/_{B})$ bzw. $stp({}^{b,\,b}/_{B})$ sind $p$-reguläre Typen in $S^{-1} \circ S$ bzw. $S \circ S^{-1}$ und folglich sind die ${}^{0,p}$-Projektionen dieser Gruppen gerade jeweilige Diagonale, also $S^{-1}{\cdot}S = 1$ und $S{\cdot}S^{-1} = 1$. □

Ich nenne diese Kategorie auch $\mathcal{R}$. Aus dem Beweis folgt, daß ${}^{0,p}$ ein Funktor von der Unterkategorie von $\mathcal{P}_Q$, die nur die Morphismen $\langle\mathcal{R}\rangle$ hat, auf $\mathcal{R}$ ist, der sogar die Addition erhält (${}^{0,p}$ operiert identisch auf den Objekten und ist auf den Morphismen die im Beweis gegebene Projektion $\langle\mathcal{R}\rangle \twoheadrightarrow \mathcal{R}$). Wir haben hier also insgesammt 3 verschiedene Komopsitionen und Additionen:




1.4 **Korollar**
*Für jede p-reguläre Gruppe $G$ ist $\mathcal{R}(G,G)$ ein Schiefkörper.*

$\mathcal{R}$ ist eine Invariante der Orthogonalitätsklasse von $p$, denn $p$ geht nur durch die Theorie der $p$-Einfachheit in die Konstruktion ein. Die zu allen Orthogonalitätsklassen gehörenden Kategorien kann man"disjunkt vereinigen": man findet also zu jeder stabilen Theorie (in der es reguläre Gruppen gibt) eine recht schöne Kategorie, deren Objekte gerade die regulären Gruppen sind.

### 4.1.3 Die Kategorie $\mathcal{R}_A$ und der Funktor $\sigma_A$

Der Ring $\mathcal{R}(G,G)$ ist nur von der regulären Gruppe $G$ abhängig und nicht davon, über welchen Parametern $G$ lebt. Ich werde nun parameterabhängige Unterringe einführen, die dann in den Endomorphismenring eines parameterabhängigen Quotienten von $G$ eingebettet werden und diesen Quotienten dadurch zu einem

Vektorraum machen. Ich mache diese Konstruktion wieder für die gesammte Kategorie, $G$ und $H$ seien $p$-reguläre $A$-Gruppen und $G_0 = G \cap cl_p(A)$, $H_0$ entsprechend. Man beachte, daß $G_0$ parameterabhängig ist. Der inhaltliche Kern ist das folgende

1.5 **Lemma**
*Es sei $G \overset{S}{\to} H$ $cl_p(A)$-typdefinierbar und $S \neq 0$, dann induziert $S$ durch*

$$(g,h) \in S, so\ g_{G_0} \mapsto h_{H_0}$$

*einen Gruppenisomorphismus $\sigma_S : {}^{G}\!/_{G_0} \to {}^{H}\!/_{H_0}$*

**Beweis**
Nach 1.2 ist $pr_1(S) = G$ und $pr_2(S) = H$ und für $(a,b) \in S : a \in cl_p(A) \Leftrightarrow b \in cl_p(A)$, also $a \in G_0 \Leftrightarrow b \in H_0$. Aus 1.1 folgt dann die Behauptung. □

$\mathcal{R}_A$ bestehe aus den $A$-Objekten und den $cl_p(A)$-Morphismen von $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_A$ ist dann eine Unterkategorie von $\mathcal{R}$ (auch mit Addition), denn die Verknüpfung von zwei $cl_p(A)$-Morphismen ist wieder ein $cl_p(A)$-Morphismus ($S, S'$ $cl_p(A)$-typdefinierbar, so auch $S \circ S'$ bzw. $S + S'$, dann auch $(S \circ S')^{0,p}$ bzw. $(S+S')^{0,p}$). Insbesondere sind die $\mathcal{R}_A(G,H)$ Untergruppen von $\mathcal{R}(G,H)$ und die $\mathcal{R}_A(G,G)$ Unterschiefkörper von $\mathcal{R}(G,G)$. $\sigma_A$ ordne jedem $G$ die Gruppe ${}^{G}\!/_{G_0}$ zu und jedem $S$ den Homomorphismus $\sigma_S$,

1.6 **Lemma**
*$\sigma_A$ ist ein treuer, additionsverträglicher Funktor von $\mathcal{R}_A$ in die Kategorie der abelschen Gruppen.*

**Beweis**
$\sigma_1 = id$ klar, ${}^{G}\!/_{G_0}$ ist stets eine abelsche Gruppe und $\sigma_S$ stets ein Gruppenhomomorphismus.
$G \overset{S'}{\to} G' \overset{S}{\to} H$: $\sigma_{S \cdot S'}(g_{G_0}) = (h_{H_0}) \Leftrightarrow \exists (g',h') \in S{\cdot}S' : g' \equiv g, h' \equiv h \Leftrightarrow \exists (g',a) \in S', (a,h') \in S : (g',h') \in S{\cdot}S', g' \equiv g, h' \equiv h \Leftrightarrow \sigma_{S'}(g_{G_0}) = a_{H_0'}, \sigma_S(a_{H_0'}) = h_{H_0} \Leftrightarrow (\sigma_S \circ \sigma_{S'})(g_{G_0}) = (h_{H_0})$, $\sigma_A$ ist also verträglich mit der Komposition und deshalb ein Funktor.

$G \overset{S,S'}{\to} H$: $\sigma_{S \oplus S'}(g_{G_0}) = h_{H_0} \Leftrightarrow \exists (g',h') \in S \oplus S' : g' \equiv g, h' \equiv h \Leftrightarrow \exists (g',h_1') \in S, (g',h_2') \in S' : h_1' + h_2' = h'$, $(g',h') \in S \oplus S', g' \equiv g, h' \equiv h \Leftrightarrow \sigma_S(g_{G_0}) + \sigma_{S'}(g_{G_0}) = h'_{1H_0} + h'_{2H_0}$ und $h_1' + h_2' = h \Leftrightarrow (\sigma_S + \sigma_{S'})(g_{G_0}) = h_{H_0}$, $\sigma_A$ ist also verträglich mit der Addition.
Man sieht schnell, daß $\sigma_S = 0 \Leftrightarrow S = 0$ (ist $S \neq 0$, so ist $pr_2(S)$ die ganze Zielgruppe) und wegen der Additionsverträglichkeit ist $\sigma_A$ injektiv auf jeder Morphismengruppe, also treu. □

Es folgt insbesondere, daß $\sigma_A : \mathcal{R}_A(G,H) \to Hom({}^G/_{G_0}, {}^H/_{H_0})$ eine Einbettung von abelschen Gruppen und $\sigma_A : \mathcal{R}_A(G,G) \to End({}^G/_{G_0})$ eine Einbettung von Ringen ist. Für "$\sigma_S(g_{G_0})$" schreibe ich auch "$S{\cdot}g_{G_0}$". Da $\mathcal{R}_A(G,G)$ ein Schiefkörper ist, haben wir außerdem das

1.7 **Korollar**
*Ist $G$ eine $p$-reguläre $A$-Gruppe, so ist ${}^G/_{G_0}$ auf natürliche Weise ein Vektorraum über $\mathcal{R}_A(G,G)$.*

Außerdem induziert jedes $S \in \mathcal{R}_A(G,H)^{\neq 0}$ durch $\alpha \mapsto S{\cdot}\alpha{\cdot}S^{-1}$ einen Ringisomorphismus $I_S : \mathcal{R}_A(G,G) \to \mathcal{R}_A(H,H)$, so daß wir folgende kommutative Situation haben:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_A(G,G) \times {}^G/_{G_0} \arrow[r, "I_S \times S"] \arrow[d, "\text{multipl}"'] & \mathcal{R}_A(H,H) \times {}^H/_{H_0} \arrow[d, "\text{multipl}"] \\
{}^G/_{G_0} \arrow[r, "S"'] & {}^H/_{H_0}
\end{tikzcd}$$

Man braucht dafür natürlich, daß $\mathcal{R}_A(G,H) \neq \{0\}$ und eine dafür notwendige Bedingung ist $gen(G)\|A \not\perp^a gen(H)\|A$, denn jedes generische Tupel von $S$ erfüllt diese Abhängigkeit ($stp({}^{g,h}/_{A'})$ generisch in $S$, $A \subset A' \subset cl_p(A)$, so $g \not\perp_{A'} h$, da $w_p(S) = 1$. Wären $g$ und $h$ unabhängig über $A$, so wäre $stp({}^{g,h}/_{A})$ schon $p$-semiregulär und würde nicht nach $A'$ forken und dann $g \perp_{A'} h$, Widerspruch). Im nächsten Kapitel zeige ich, daß diese Bedingung schon hinreichend ist, falls $p$ lokal modular ist.

## Geometrien

Ich will nun kurz schauen, was diese Ergebnisse für das Studiun der Geometrie regulärer Typen bedeuten. Ist $G$ eine $p$-reguläre $A$-Gruppe mit generischem Typ $q \in St(A)$, so trägt ${}^G/_{G_0}$ die Struktur einer modularen Prägeometrie durch die $\mathcal{R}_A(G,G)$-Vektorraumstruktur. Andererseits wird ${}^G/_{G_0}$ durch

$$h_{G_0} \in cl(g_{1G_0}, ..., g_{nG_0}) :\Longleftrightarrow h \in cl_p^A(g_1, ..., g_n)$$

zu einer Prägeometrie, wobei $({}^G/_{G_0}, cl)$ und $(q, \not\perp_A)$ dieselben Geometrien induzieren. Es erstaunt nicht, daß lineare Abhängigkeit Forkingabhängigkeit impliziert:

1.8 **Lemma**

**(1)** *Es sei* $S \in \mathcal{R}_A(G,H)^{\neq 0}$ *und* $a \in G$, $b \in H$: $S{\cdot}a_{G_0} = b_{H_0} \Rightarrow a \sim_{cl_p^A} b$

**(2)** *Für* $h, g_1, ..., g_n \in G$ *gilt:* $h_{G_0} \in span\{g_{1G_0}, ..., g_{nG_0}\} \Rightarrow h \in cl_p^B(g_1, ..., g_n)$

**Beweis**

(1) $a \equiv a' \sim_{cl_p^A} b' \equiv b$ für ein geeignetes $(a', b') \in S$.

(2) Es seien $h, g_1, ..., g_n \in G$ und $h_{G_0} \in span\{g_{1G_0}, ..., g_{nG_0}\}$, etwa $h_{G_0} = \sum S_i{\cdot}h_{iG_0}$ (für geeignete $S_i \in \mathcal{R}_A(G,G)$, OE $S_i \neq 0$). Wähle $(a_i, b_i) \in S_i$, so daß $a_{iG_0} = g_{iG_0}$ und $b_{iG_0} = S_i{\cdot}h_{iG_0}$, dann sind wegen (1) alle $b_i \sim_{cl_p^A} g_i$ und außerdem $h_{G_0} = \sum b_{iG_0} = (\sum b_i)_{G_0}$, also $h \in cl_p^A(b_1...b_n) = cl_p^A(g_1...g_n)$. □

Das Lemma besagt, daß die *span*-abgeschlossenen Mengen in ${}^{G}/_{G_0}$ in den *cl*-abgeschlossenen Mengen von ${}^{G}/_{G_0}$ enthalten sind, genauer

$$X \subset {}^{G}/_{G_0} \Rightarrow span(X) \subset cl(X)$$

Angenommen wir hätten Gleichheit, dann wäre $q$ modular und die Geometrie von $q$ wäre die eines projektiven Raumes über $\mathcal{R}_A(G,G)$. Dazu ist es sicher notwendig, daß $q$, also $p$, lokal modular ist. Daß auch hier lokale Modularität wieder hinreichend ist, zeige ich im nun folgenden Teil.

## 4.2 Lokal modulare Gruppen

Nun kehre ich endlich wieder zur lokalen Modularität zurück und zeige, daß sie die noch bestehenden Lücken schließt. Für eine $p$-einfache Gruppe $G$ sei $\mathcal{Q}$ die Menge der $p$-semiregulären Typen von $G$ (bzw. deren Stationaritätsklassen) und $\mathcal{S}$ die Menge der $p$-zusammenhängenden Untergruppen von $G$. Da sich $p$-Semiregularität auf Translate vererbt, ist $(G, \mathcal{Q})$ ein Unterraum von $(G, \hat{G})$. $p$ sei in diesem Kapitel lokal modular.

2.1 **Satz**

*Es sei $G$ eine $A$-Gruppe, $G \subset D_p(A)$. Ist $D_p(A)$ modular, dann gilt*

**(1)** *Es gibt eine kanonische 1:1 Korresopndenz zwischen $\mathcal{S}$ und den Bahnen von $(G, \mathcal{Q})_r$.*

**(2)** *Jedes $S \in \mathcal{S}$ ist eine $cl_p(A)$-Gruppe.*

**Beweis**

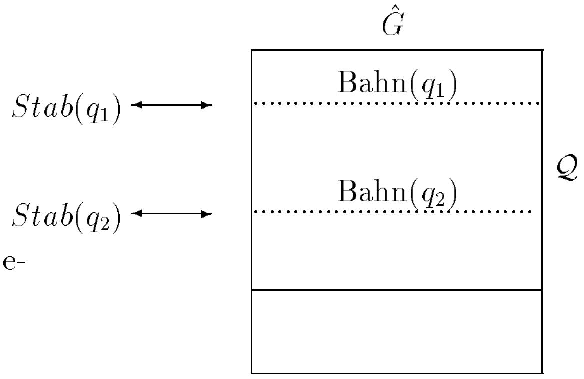
**(1)** Es sei $q = stp(^a/_B) \in \mathcal{Q}$ und $S = Stab_l(q)$.

Behauptung: $w_p(S) = w_p(q)$

Beweis: Ist $g$ ein $Ba$-generisches Element von $G$ und $C = Cb(g{\cdot}q)$, dann ist (wegen 2.23) $w_p(^C/_{B,\, g\cdot a}) = w_p(^{gs}/_{B,\, a\cdot g})$ und (wegen 4.13) $w_p(S) = w_p(q) - w_p(^C/_{B,\, a\cdot g})$. Aber $stp(^{g\cdot a}/_{Bg}) = g{\cdot}q$ ist eine $p$-semireguläre Fortsetzung von $stp(^{g\cdot a}/_B)$, deshalb gilt mit dem Modularitätslemma 3.1 $C \subset cl_p^A(g{\cdot}a)$ und es folgt die Behauptung.

Wieder mit 4.13 folgt, daß $S$ $p$-zusammenhängend ist und daß $q$ rechtstranslatiert ist zu $gen(S)$. Da zwei rechtstranslatierte Typen denselben Linksstabilisator haben, gilt also für $q, q' \in \mathcal{Q}$: $Stab_l(q) = Stab_l(q') \Leftrightarrow q$ und $q'$ liegen in derselben Bahn (von $(G, \mathcal{Q})$). Außerdem ist jede $p$-zusammenhängende Gruppe gerade der Stabilisator ihres generischen Typs (das gilt für jede zusammenhängende Gruppe), dieser ist dann nach Definition $p$-semiregulär. Wir haben also folgende schöne Situation:

Die zu $S$ gehörende Bahn hat $gen(S)$ als kanonischen Repräsentanten, dieser ist Charakterisiert durch "$S \subset q$" (als Typen)




**(2)** Es sei $S \in \mathcal{S}$ mit $q = gen(S) = stp(^a/_B) \in \mathcal{Q}$, nach 2.24 ist $C = Cb(q) \subset acl(B)$ eine kanonische Basis von $S$ über $A$.

Behauptung: für jedes $g \in G$ gilt: $C \subset cl_p^A(a \cdot g)$
Beweis: $q \cdot g = stp(^{a \cdot g}/_{Bg})$ ist eine $p$-semireguLäre Fortsetzung von $stp(^{a \cdot g}/_A)$, da $p$ lokal modular ist gilt dann $Cb(q \cdot g) \subset cl_p^A(a \cdot g)$. Aber $S = Stab_l(q) = Stab_l(q \cdot g)$, also ist $S$ $cl_p^A(a \cdot g)$-invariant und deshalb $C \subset cl_p^A(a \cdot g)$.

Wählt man nun für $g$ ein $Ba$-generisches Element von $G$, so ist auch $a \cdot g$ $Ba$-generisch und insbesondere $a \cdot g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$ und $C \subset cl_p^A(a \cdot g) \cap acl(B) \subset cl_p(A)$ und folglich ist $S$ $cl_p(A)$-invariant. □

Bevor ich diesen Satz weiter anwende mache ich eine kleine, etwas technische Bemerkung, ich werde sie einige male verwenden, wenn ich ein Element einer Nebenklasse habe, aber eines der (Unter)Gruppe selber brauche:

2.2 **Bemerkung**
*Es seien $U < G \times H$ $p$-einfache $A$-Gruppen, $H$ $p$-regulär, $pr_1(U) = G$ und $cok(U) \subset cl_p(A)$. Liegt dann $(g, h)$ in einer $cl_p(A)$-Nebenklasse von $U$, so gibt es ein $(g, h') \in U$ mit $h' \equiv h \; mod H_0$.*

**Beweis**

Es sei $X$ eine $A'$-Nebenklasse von $U$ ($A \subset A' \subset cl_p(A)$) und $(g, h) \in X$. Da $pr_1(U) = G$ ist auch $pr_1(X) = G$ und es gibt ein $d \in H$ mit $(0, d) \in X$. Wäre nun $d$ $A$-generisch in $H$, so fände man wegen der $A'$-Invarianz von $cok(X)$ ein $d' \in cok(X)$ mit $d' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A'} d$, also $d' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A d$. Dann wäre aber einerseits $d' - d$ $A$-generisch in $H$, andererseits $(0, d') - (0, d) \in U$ und $d' - d \in cok(U) \subset cl_p(A)$, Widerspruch. Also ist $d \in cl_p(A)$ und $(g, h) - (0, d) \in U$, also tut's $h' = h - d$.
□

2.3 **Korollar**
*Es seien $G$ und $H$ $p$-reguläre $A$-Gruppen und $B \supset A$:*
**(1)** *Ist $stp(^{g,h}/_B)$ $p$-regulär in $G \times H$, so $S = Stab(stp(^{g,h}/_B)) \in \mathcal{R}_A(G, H)$ und $S \cdot g_{G_0} = h_{H_0}$.*
**(2)** *$\mathcal{R}_A(G, H) \neq \{0\} \iff gen(G)\|A \not\perp^a gen(H)\|A$.*
**(3)** *$\mathcal{R}_A(G, G) = \mathcal{R}(G, G)$*

**Beweis**

(1) $S = Stab(stp(^{g,h}/_A))$ ist $p$-zusammenhängend und hat $p$-Gewicht 1, denn gen(S) ist translatiert zu $stp(^{g,h}/_A)$, also $S \in \mathcal{R}(G, H)$. Aber $G \times H$ ist eine $A$-Gruppe, also ist $S$ $cl_p(A)$-Gruppe und in $\mathcal{R}_A(G, H)$. $G$, $H$ und $(g, h)$ erfüllen die Voraussetzungen der Bemerkung, also gibt es ein $h' \equiv h$ mit $(g, h') \in S$, also $S \cdot g_{G_0} = h'_{H_0} = h_{H_0}$.
(2) Es seien $g \models gen(G)\|A$, $h \models gen(H)\|A$, $g \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A h$. Es sei $A' \subset cl_p(A)$, so daß $stp(^{g,h}/_{A'})$ $p$-semiregulär ist, also $p$-regulär, jetzt wie in (1), dann ist insbesondere $S \neq 0$, da $h \notin cl_p(A)$. Die andere Richtung ist bekannt.
(3) Jede $p$-reguläre Untergruppe von $G \times G$ ist eine $cl_p(A)$-Gruppe. □

Den Existenzsatz sowie das Korollar werde ich nun ständig unerwähnt gebrauchen. Man beachte auch, daß alle von $p$-regulären Gruppen $G$ gewonnenen Schiefkörper $\mathcal{R}(G,G)$ isomorph sind, denn je zwei solche Gruppen $G,H$ sind nicht orthogonal, also nicht fast-orthogonal über einem geeigneten $a$-Modell $\mathcal{M}$. Wegen Teil (2) des Korollars gibt es ein $S \in \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(G,H)^{\neq\{0\}}$ und $S$ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(G,G) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(H,H)$. Mit Teil (3) des Korollars folgt die Behauptung. Bis auf (nicht kanonische) Isomorphie gibt es also in der zu $p$ gehörenden Kategorie $\mathcal{R}$ nur einen Schiefkörper. Da für lokal modulare, nicht modulare Typen die Kategorie $\mathcal{R}$ nicht leer ist (3.12), kann man also bei jedem solchen Typ von "dem zu der Orthogonalitätsklasse gehörenden Schiefkörper" sprechen.
Noch ein kurzer Blick auf die noch bleibende Parameterabhängigkeit:
der Schiefkörper ist zwar parameterunabhängig, aber der Funktor $\sigma_A$ natürlich nicht, insbesondere bekommt man für verschiedene Parameter verschiedene Vektorräume. Ist $G$ eine $p$-reguläre $A$-Gruppe und $B \supset A$, so sei $G_A = G \cap cl_p(A)$ und $G_B = G \cap cl_p(B)$. Dann gilt $G_A < G_B < G$ als Gruppen und deshalb ${}^{G}\!/_{G_B} \cong ({}^{G}\!/_{G_A})/({}^{G_B}\!/_{G_A})$ als Gruppen. Außerdem ist $0 = {}^{G_A}\!/_{G_A} < {}^{G_B}\!/_{G_A} < {}^{G}\!/_{G_A}$ als Vektorräume (über dem Schiefkörper von $p$), denn man sieht schnell, daß ${}^{G_B}\!/_{G_A}$ abgeschlossen ist (da die Verknüpfungen "in $cl_p(B)$ bleiben"). Insgesammt bekommt man, daß ${}^{G}\!/_{G_B}$ ein Vektorraumquotient von ${}^{G}\!/_{G_A}$ ist:

$$\begin{tikzcd}
gen(G) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & G \arrow[r] \arrow[d, dash] & K \\
gen(G)\|B \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & {}^{G}\!/_{G_B} \arrow[d, dash] & {}^{G}\!/_{G_B} \cong ({}^{G}\!/_{G_A})/({}^{G_B}\!/_{G_A}) \text{ als VR über } K \\
gen(G)\|A \arrow[r, leftrightarrow] & {}^{G}\!/_{G_A} &
\end{tikzcd}$$

Ich werde nun zeigen, daß im lokal modularen Fall auch das zweite Desideratum erfüllt ist: Forkingabhängigkeit und lineare Abhängigkeit stimmen auf den Geometrien überein.

2.4 **Satz**
*Es sei $G$ eine $p$-reguläre $A$-Gruppe, dann sind äquivalent:*
**(1)** *$G$ ist lokal modular*
**(2)** *$G$ ist modular über $A$*
**(3)** $({}^{G}\!/_{G_0}, span) \sim ({}^{G}\!/_{G_0}, cl_p^A)$

**Beweis**
(3) $\Rightarrow$ (2): Die Prägeometrie $({}^{G}\!/_{G_0}, span)$ ist modular und $({}^{G}\!/_{G_0}, cl_p^A) \sim (gen(G)\|A, \not\perp_A)$, aus (3) folgt also die Modularität von $(gen(G)\|A, \not\perp_A)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ist klar

(1) $\Rightarrow$ (3): Es sei $G$ lokal modular und $h, g_1, ..., g_n \in G$, dann ist zu zeigen:

$$h \in cl_p^A(g_1, ..., g_n) \iff h_{G_0} \in span(g_{1G_0}, ..., g_{nG_0})$$

"$\Leftarrow$" gilt nach 1.8 sowieso und für " $\Rightarrow$ " reicht es, generische Elemente zu betrachten. Seien also $h, g_1, ...g_n \models gen(G) \| A$ und $h \in cl_p^A(g_1, ..., g_n)$, OE $g_1, ..., g_n$ unabhängig über $A$.

Behauptung: Es gibt $b_1, ..., b_n \in G$, so daß $h \equiv \sum b_i \ modG_0$ und $b_i \in cl_p^A(g_i)$.
Beweis: Es sei $A' := dcl^A(\bar{g}, h) \cap cl_p(A)$, dann ist $stp(\bar{g}, h/A')$ ein $p$-semiregulärer Typ in der $A'$-Gruppe $G^n \times G \subset D_p(A)$ und von $p$-Gewicht n. Also gibt es eine $p$-zusammenhängende $A'$-Gruppe $S < G^n \times G$, so daß $stp(\bar{g}, h/A')$ generisch in einer $A'$-Nebenklasse $X$ von $S$ ist. Im generischen Typ von $S$ gelten dann dieselben Abhängigkeiten wie in $stp(\bar{g}, h/A')$, insbesondere ist $pr_1(S) = G^n$ und $cok(S) \neq G$, also $cok(S) \subset G_0$. Dann gibt es für jedes $g_i$ ein $b_i \in G$, so daß $(0, ..., g_i, ...0, b_i) \in S$, dann ist für $b = \sum b_i$ $(\bar{g}, b) \in S$ und folglich ist $(0, ...0, b - h) \in X$. Wegen der Bemerkung ist dann $b - h \in G_0$, d.h. $h \equiv \sum b_i \ modG_0$. Außerdem liegt $(0, ..., 0, b_i)$ in der $A'g_i$-Nebenklasse $S - (0, ..., g_i, ..., 0, 0)$, also wieder mit der Bemerkung, angewendet auf die Parameter $A'g_i$, gilt $b_i \in cl_p(A'g_i) = cl_p^A(g_i)$.

Es sei nun $A_i = dcl^A(g_i, b_i) \cap cl_p(A)$, dann ist $stp(g_i, b_i/A_i)$ $p$-regulär, also der generische Typ einer Nebenklasse einer $A_i$-Gruppe $S_i \in \mathcal{R}_A(G, G)$. Dann ist $b_{iG_0} = S_i \cdot g_{iG_0}$ und folglich gilt

$$h_{G_0} = (\sum b_i)_{G_0} = \sum b_{iG_0} = \sum S_i \cdot g_{iG_0} \in span(g_{1G_0}, ..., g_{nG_0})$$

$\square$

Lokal modulare Gruppen sind also modular und ihre Geometrie ist die des zu ihrem generischen Typ gehörenden projektiven Raumes.

Zum Schluß noch eine interessante Tatsache, die ich allerdings nicht mehr verwenden werde: Jedes $S \in \mathcal{S}$ ist abelsch. Um das einzusehen, wendet man den Satz auf die $cl_p(A)$-Gruppe $S \times S \subset D_p(A)$ an. OE ist $S$ $A$-Gruppe. Für $g \models q$ sei $I_g$ der Graph des inneren Automorphismus $h \mapsto g^{-1} \cdot h \cdot g$, dann ist $I_g$ eine typdefinierbare Untergruppe von $S \times S$.
Behauptung: Für alle $g, h \models q$ ist $I_g = I_h$.
Beweis: $I_g$ ist $p$-zusammenhängend, denn $I_g$ ist durch die Projektion auf die erste Koordinate $Ag$-isomorph zu $S$. $I_g$ ist also eine $p$-zusammenhängende Untergruppe der $A$-Gruppe $S \times S \subset D_p(A)$, ich habe aber gerade gezeigt, daß solche Gruppen $cl_p(A)$-typdefinierbar sind, also hängt $I_g$ nur von $stp(g/cl_p(A)) = q|cl_p(A)$ ab, d.h. nur von $q$ (denn $q \models q|cl_p(A)$), daraus folgt die Behauptung.
Aus $I_g = I_h$ aber folgt, daß $g$ und $h$ kommutieren und da $S$ von $q^{\mathcal{C}}$ erzeugt wird, ist $S$ abelsch.

## 4.3 Die Geometrie lokal modularer Typen

3.1 **Definition**
*Einen regulären (stationären) Typ nenne ich* affin, *wenn er lokal modular und nicht modular ist. Ich nenne ihn* projektiv, *wenn er modular und nichttrivial ist.*

Ein lokal modularer Typ ist entweder trivial, projektiv oder affin. Trivialität ist eine Eigenschaft der gesammten Orthogonalitätsklasse, d.h. es gibt für die Orthogonalitätsklassen lokal modularer Typen genau die beiden Möglichkeiten:

(1) alle Typen der Klasse sind trivial
(2) kein Typ der Klasse ist trivial

Betrachtet man Fall (2), so gibt es in jeder Parallelitätsklasse wieder zwei Möglichkeiten:

(2a) der Typ ist schon über seiner kanonischen Basis projektiv
(2b) der Typ ist über seiner kanonischen Basis affin

In diesem Kapitel wende ich mich dem Fall (2b) zu und werde zeigen, daß die Geometrie eines affinen Typs die eines affinen Raumes ist und daß eine eine nichtforkende Fortsetzung eines affinen Typs affin bleibt, solange man (mopulo $cl_p$) keine Realisierung des Typs zu den Parametern tut. Um einige Zusammenhänge in ein klareres Licht zu stellen, werde ich den Hilfsbegriff der ,,Projektifizierung" einführen. Für das gesammte Kapitel sei $p \in St(A)$ ein affiner Typ und $P = p^{\mathfrak{C}}$.

### 4.3.1 Einstimmung

Zur Einstimmung möchte ich die geometrischen Intuitionen etwas auffrischen und sie auf unsere Situation anwenden.

#### Affine Operationen

Ein affiner Raum über dem Vektorraum $V$ ist eine reguläre Gruppenoperation der additiven Gruppe von $V$ auf einer Menge. Man hat also einen (Schief)Körper, der auf einer abelschen Gruppe operiert (sie zum Vektorraum macht) und die Operation der Gruppe auf einer Menge. Ich will kurz schauen, was passiert, wenn keine Körper im Hintergrund ist, denn diese Situation tritt nachher ein. Eine Operation $(G, X)$ nenne ich affin, wenn $G$ eine abelsche Gruppe ist und die Operation regulär ist. Ich schreibe die Operation dann additiv und von rechts. Wegen der Regularität gibt es eine Abbildung $- : X \times X \to G$, die durch die Eigenschaft

$$g = b - a \iff a + g = b$$

definiert ist. Der einzige Unterschied zwischen einer affinen Operation und einem affinen Raum ist also, daß im letzten Fall die Gruppe ein Vektorraum sein muß, aber davon „weiß" die reguläre Operation nichts. Daher ist es nicht erstaunlich, daß viele Rechenregeln, die in affinen Räumen gelten und dort eine geometrische Interpretation haben, auch in dem allgemeineren Kontext hier gelten:

$$(a+h)-(a+g)=h-g,\ (b+g)-(a+g)=b-a$$
$$(b+h)-(a+g)=(b-a)+(h-g),\ (b'-a')-(b-a)=(b'-b)-(a'-a)$$

Man kann sich diese Formeln in der affinen Ebene veranschaulichen, grundlegend dafür ist die „Assoziativität" $(a+g)+h=a+(g+h)$:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g+h"] & \\
a+g \arrow[r, "h"'] & (a+g)+h=a+(g+h)
\end{tikzcd}$$

Noch ein paar Worte zum Faktorisieren von Operationen:
Ist $(G,X)$ eine beliebige Gruppenoperation, $N \lhd G$ und $E$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, so faktorisiert $(G,X)$ genau dann nach $({}^{G}/_{N}, {}^{X}/_{E})$, wenn für alle $g,h \in G$ und $a,b \in X$ gilt: $g \equiv_N h$ und $aEb$, so $(g{\cdot}a)E(h{\cdot}b)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $(g_N,\tilde{a}) \mapsto \widetilde{g{\cdot}a}$ wohldefiniert ist, auf diese Weise wird ${}^{X}/_{E}$ zu einem ${}^{G}/_{N}$-Raum. Insbesondere induziert $N$ die Äquivalenzrelation $E_N$, „x und y liegen in derselben $N$-Bahn". $E_N$ ist dann die feinste Äquivalenzrelation durch die man (mit $N$) teilen kann. Transitivität vererbt sich auf Quotienten, Regularität nur, wenn $E=E_N$ und das ist genau dann der Fall, wenn auch die zugehörige Subtraktion $X \times X \to G$ faktorisiert.

$$\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "\text{multpil}"] \arrow[d, "pr"'] & X \arrow[d, "pr"] \\
{}^{G}/_{N} \times {}^{X}/_{E} \arrow[r, "\text{multipl}"'] & {}^{X}/_{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\text{minus}"] \arrow[d, "pr"'] & G \arrow[d, "pr"] \\
{}^{X}/_{E} \times {}^{X}/_{E} \arrow[r, "\text{minus}"'] & {}^{G}/_{N}
\end{tikzcd}$$

Ist dann zufälligerweise $V={}^{G}/_{N}$ ein Vektorraum über $K$, so ist $A={}^{X}/_{E}$ ein affiner Raum über $V$.

$$\begin{tikzcd}
 & G \times X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
K \times V \times A \arrow[r] & V \times A \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

### Affine Geraden und Vektorgeraden

Es sei $q \in St(A)$ ein projektiver Typ, der nichtorthogonal zu $p$ ist (also $p$-projektiv). Dann gilt $p \perp^a q$ und sogar $p \perp^a q^{(\omega)}$. Ist also $P = p^{\mathcal{C}}$ und $Q = q^{\mathcal{C}}$, so ist $P = (p|Q')^{\mathcal{C}}$ für jede Teilklasse $Q'$ von $cl_p^A(Q)$, anders gesagt $\forall a \in P$ : $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A cl_p^A(Q)$. Andererseits ist für jedes $a \in P$ der Typ $p|a$ modular und nichtorthogonal zu $q$, also $p|a \not\perp^a q|a$, und zu jedem $b \models p|a$ gibt es ein $v \in Q$, so daß $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{Aa} v$. $(a, b, v)$ ist dann minimal abhängig über $A$ und jedes Tripel $(a', b', v') \in P \times P \times Q$ mit $a'b' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A v$ ist minimal abhängig (wären $a', b'$ abhängig, so gäbe es kein abhängiges $v$). Andererseits lassen sich je zwei unabhängige Einträge zu einen (minimal) abhängigen Tripel ergänzen.

$$\forall (a, b) \in P^{(2)}: \ cl_p^A(ab) \cap Q \neq \emptyset \text{ und } \forall a \in P: \ P \subset cl_p^A(Qa)$$

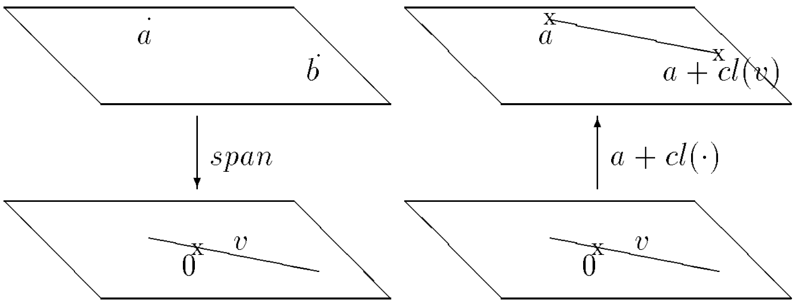
$$Q \subset cl_p^A(P), \text{ obwohl } cl_p^A(Q) \cap P = \emptyset$$

Übrigens bleibt jede nichtforkende Fortsetzung von $p$ nach Parametern aus $Q$ affin, denn wäre $(P, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{AQ'})$ modular, so wäre $p|Q' \not\perp^a q|Q'$ und $P \cap Q \neq \emptyset$.
Ich werde diese Situation nun geometrisch interpretieren, wobei ich natürlich die Standardbeispiele als Leitbilder im Hinterkopf habe. Es sei $A = \emptyset$, $v \in Q$ und $(a, b) \in P^{(2)}$: $cl(ab) := cl_p(ab) \cap P$, $cl(v) := cl_p(v) \cap Q$, dann nenne ich die $cl(ab)$ "affine Geraden" und die $cl(v)$ "Vektorgeraden" (obwohl letztere nur Gewicht 1 haben: die Vektorgeraden sind gerade die Punkte der projektiven Geometrie von $Q$). Nun werde ich jeder affinen Gerade eine Vektorgerade zuordnen und jede Vektorgerade durch Fixierung eines affinen Punktes zu einer affinen Geraden machen:

$$span(ab) := cl_p(ab) \cap Q \qquad\qquad a + cl(v) := cl_p(a, v) \cap P$$

Das sind tatsächlich affine Geraden und Vektorgeraden:

$$span(ab) = cl(v) \Leftrightarrow v \in span(ab) \Leftrightarrow b \in a + cl(v) \Leftrightarrow a + cl(v) = cl(ab)$$



Außerdem induziert jedes $a \in P$ durch $cl(ab) \mapsto span(ab)$ eine Bijektion der affinen Geraden durch $a$ und der Vektorgeraden (die Umkerhabbildung ist natürlich $cl(v) \mapsto a + cl(v)$) und zwei sich schneidende affine Geraden sind genau dann identisch, wenn ihre zugehörigen Vektorgeraden identisch sind:

$$cl(ab) \cap cl(cd) \neq \emptyset, \text{ so } cl(ab) = cl(cd) \Leftrightarrow span(ab) = span(cd)$$

Alle Beweise bestehen nur aus definitorischen Unformungen und elementaren Forkingrechnungen, wobei die oben erwähnten (Un)Abhängigkeiten ständig ausgenutzt werden.
Zwei affine Geraden $cl(ab), cl(cd)$ sind genau dann parallel, wenn sie entweder identisch sind, oder wenn $w_p({}^{abcd}/_A) = 3$ und $cl(ab) \cap cl(cd) = \emptyset$ (in $D_p(A)$ schneiden sich die Geraden, denn $D_p(A)$ ist modular: $cl_p(ab) \cap cl_p(cd) \neq \emptyset$). Das induziert eine Äquivalenzrelation auf $P^{(2)}$:

$$(a,b) \| (c,d) \iff w_p({}^{abcd}/_A) = 2 \text{ oder } w_p({}^{abcd}/_A) = 3 \wedge cl_p^A(ab) \cap cl_p^A(cd) \cap P \neq \emptyset$$

Aus dem oben gesagten folgt dann, daß zwei Geraden parallel sind, wenn sie dieselbe Vektorgerade induzieren (denn das gemeinsame Gewicht der Geraden ist höchstens 3 und falls sie sich schneiden, so sind sie schon identisch):

$$span(ab) = span(cd) \Rightarrow (a,b) \| (c,d)$$

Aber Achtung, über die Umkehrung kann ich nichts sagen: ob zwei parallele Geraden dieselbe Vektorgerade induzieren, kann ich unter diesen schwachen Voraussetzungen nicht zeigen. Wir haben also in dieser Allgemeinheit leider noch keine 1:1 Korrespondenz zwischen Vektorgeraden und Parallelitätsklassen affiner Geraden. Im nächsten Abschnitt zeige ich, daß es genau diese fehlende Richtung ist, welche die Theorie zum laufen bringt.
Übrigens gehört die Klasse ${}^{P^{(2)}}/_{\|}$ zu der Geometrie von $(P, \not\angle_A)$, das heißt, daß für $A' \supset A$ mit $(P|A', \not\angle_{A'}) = (P, \not\angle_A)$ auch ${}^{(P|A')^{(2)}}/_{\|} = {}^{P^{(2)}}/_{\|}$; ist $p' \not\angle^a p$ ($p'$ regulär), so induziert $\not\angle_A$ eine Bijektion ${}^{(P')^{(2)}}/_{\|} \sim {}^{P^{(2)}}/_{\|}$.

## 4.3.2 Projektifizierbare affine Typen

Ich werde nun die oben gelassene Lücke durch den Begriff der „schwachen Projektifizierung" füllen und zeigen, wie weit uns das bringt. Um zu zeigen, daß affine Typen affine Geometrien haben, brauche ich zusätzlich noch eine affine Operation, also eine „starke Projektifizierung". Die Unterscheidung der Begriffe ist nur dazu da, die Voraussetzungen klarer zu machen, die ich für die jeweiligen Ergebnisse brauche. Am Schluß wird die schwache Projektifizierung überflüssig, denn ich werde zeigen, daß jede starke Projektifizierung auch eine schwache ist und daß jeder affine Typ (modulo $\not\angle^a$) eine starke Projektifizierung hat.

3.2 **Definition**

**(1)** *Ein Typ $q$ heißt eine* schwache Projektifizierung von $p$, *wenn*
*(1)* $q \in St(A')$ *für ein* $A'$ *mit* $A \subset A' \subset cl_p(A)$.
*(2)* $q$ *ist projektiv und* $q \not\angle p$.
*(3) Für jedes* $Q_0 \subset q^{\mathcal{C}}$ *induziert* $\not\angle_{A'Q_0}$ *eine Bijektion zwischen den Parallelklassen in* $p|Q_0$ *und der Geometrie von* $q|Q_0$.

**(2)** *Eine zusammenhängende Gruppe* $G$ *heißt* starke Projektifizierung von $p$, *wenn*
*(1)* $G$ *ist eine* $A'$*-Gruppe für ein* $A'$ *mit* $A \subset A' \subset cl_p(A)$.
*(2)* $G$ *ist projektiv und* $G \not\angle p$.
*(3) Es gibt eine affine* $A'$*-Gruppenoperation von* $G$ *auf* $p$.

Ist $p' \in St(A)$ ein weiterer affiner Typ mit $p' \not\angle^a p$, so ist $q$ auch eine schwache Projektifizierung von $p'$. Für starke Projektifizierungen ist das natürlich falsch, da $G$ nicht auf $p'$ operiert. Das macht aber nichts, denn alle Aussagen, die wir mittels einer starken Projektifizierung über die Geometrie von $p$ machen können, gelten dann auch für die isomorphe Geometrie von $p'$. Da lokal modulare Gruppen modular sind (2.4), braucht man an Stelle von (2.2) nur zu fordern, daß $G$ $p$-regulär ist ($G$ ist dann lokal modular und nicht orthogonal zu $p$). Für $Q_0 \subset q^{\mathcal{C}}$ ist $G$ auch eine starke Projektifizierung von $p|Q_0$, da $p|Q_0^{\mathcal{C}} = p^{\mathcal{C}}$.

### Wodurch ein affiner Typ projektiv wird

Es sei nun $q \in St(A)$ eine schwache Projektifizierung von $p$ und $Q = q^{\mathcal{C}}$, ihr Hauptnutzen kommt in dem folgenden Lemma zum Ausdruck:

3.3 **Lemma**
*Es sei* $\bar{a} \subset P$, $B$ *eine Menge,* $X = cl_p^A(\bar{a}) \cap cl_p^A(B)$:

$$X \cap P = \emptyset \Rightarrow w_p(\bar{a}/A, X \cap Q) = w_p(\bar{a}/AB)$$

**Beweis**

Sei zuerst $B \subset P$ endlich. Man kann annehmen, daß $X \cap Q = \emptyset$ (sonst arbeite man über $A' = A \cup (X \cap Q)$, dann gelten für $p' = p|A'$ und $q' = q|A'$ dieselben Voraussetzungen, im Falle der schwachen Projektifizierung nach Definition. Außredem gilt für $X' := cl_p^{A'}(\bar{a}) \cap cl_p^{A'}(B)$: $X' \cap P' = X \cap P = \emptyset$ und $X' \cap Q = X \cap Q \subset A'$, also sogar $X' \cap Q' = \emptyset$.)

Zu zeigen ist also, daß $\bar{a}$ und $B$ $p$-unabhängig sind. Nun sind nach Voraussetzung $cl_p^A(\bar{a}) \cap P$ und $cl_p^A(B) \cap P$ fast disjunkte Unterräume von $(P, \not\angle_A)$. Da $q$ eine schwache Projektifizierung von $p$ ist, kann es keine parallelen Geraden $g_1 \subset cl_p^A(\bar{a}) \cap P$ und $g_2 \subset cl_p^A(B) \cap P$ geben (denn sonst gäbe es ein $v \in X \cap Q$). Die $p$-Unabhängigkeit der Räume folgt dann aus dem allgemeinen

Lemma: Zwei fast disjunkte Unterräume $X, Y$ einer lokal modularen Prägeometrie $(U, cl)$ sind genau dann abhängig, wenn es parallele Geraden $g_1 \subset cl(X)$ und $g_2 \subset cl(Y)$ gibt.

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Es seien nun $X$ und $Y$ abhängig, etwa $dim(X) > 2$, wähle ein unabhängiges $a \in X$, dann sind $X$ und $Y$ abhängig über $a$. Aber $(U, cl_a)$ ist eine modulare Prägeometrie, deshalb gibt es ein $b \in cl_a(X) \cap cl_a(Y) \backslash cl(a)$. Es sei dann $g_1 = cl(ac)$ und man kann $X$ durch $g_1$ ersetzen. Entsprechend findet man $g_2 \subset cl(Y)$.

Sei nun $B$ beliebig (endlich), wegen dem Vorherigen reicht es zu zeigen, daß es ein $\bar{b} \subset P$ gibt, so daß $w_p(\bar{a}/AB) = w_p(\bar{a}/A\bar{b})$ und $cl_p^A(\bar{a}) \cap cl_p^A(\bar{b}) = cl_p^A(\bar{a}) \cap cl_p^A(B)$. Das ist leicht: es sei $C = Cb^s(\bar{a}/\tilde{cl}_p(AB))$ und $\bar{b} \models stp(\bar{a}/AC)|\bar{a}$,

Behauptung: $\bar{b}$ tut's.

Beweis: Es ist $C = Cb^s(\bar{b}/AC) \subset cl_p^A(\bar{b})$ (da $p$ lokal modular und $stp(\bar{b}/AC)$ semiregulär), also $\bar{a} \downarrow_{cl_p^A(\bar{b})} C$ und $\bar{a} \downarrow_{cl_p^A(\bar{b})} B$, deshalb $stp(\bar{a}/\tilde{cl}_p(AB)) \| stp(\bar{a}/cl_p^A(\bar{b}))$ und $cl_p^A(a) \cap cl_p^A(B) = cl_p^A(C) = cl_p^A(a) \cap cl_p^A(\bar{b})$, fertig. □

3.4 **Korollar**
*Für jede Parametermenge $B \supset A$ mit $cl_p^A(B) \cap P = \emptyset$ gilt:*

$$P \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(B) \cap Q)} \tilde{cl}_p(AB) \qquad (p|B, \not\downarrow_B) = (P, \not\downarrow_{A, cl_p^A(B) \cap Q})$$

**Beweis**
Wegen des Lemmas gilt für jedes $\bar{a} \subset P$: $\bar{a} \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(\bar{a}) \cap cl_p^A(B) \cap Q)} \tilde{cl}_p(AB)$, aber $cl_p^A(cl_p^A(\bar{a}) \cap cl_p^A(B) \cap Q) \subset cl_p^A(cl_p^A(B) \cap Q) \subset \tilde{cl}_p(AB)$, folglich $\bar{a} \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(B) \cap Q)} \tilde{cl}_p(AB)$, also $P \downarrow_{cl_p^A(cl_p^A(B) \cap Q)} \tilde{cl}_p(AB)$. Daraus folgt, daß $(p|B, \not\downarrow_B) = (p|cl_p^A(B) \cap Q, \not\downarrow_{cl_p^A(B) \cap Q})$, und da $(p|cl_p^A(B) \cap Q)^{\mathcal{C}} = P$ folgt der zweite Teil. □

Da $(P, \not\downarrow_{AQ_0})$ für jede Teilklasse $Q_0$ von $Q$ affin ist, folgt insbesondere der

3.5 **Satz**
*Ist $p \in St(A)$ ein affiner, schwach projektifizierbarer Typ und $B \supset A$, dann gilt:*

$$p|B \textit{ ist modular} \iff cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$$

Der Satz besagt, daß ein affiner (schwach projektifizierbarer) Typ nur dadurch modular werden kann, daß man einen Punkt auszeichnet (das heißt, eine Realisierung zu den Parametern – modulo $cl_p$ – hinzunimmt). Nun hat man einen klaren Überblick über alle möglichen Prägeometrien nichtforkender Fortsetzungen affiner (schwach projektifizierbarer) Typen, es gibt nämlich nur zwei Möglichkeiten: Lokalisierung nach Teilmengen von $P$ oder nach Teilmengen von $Q$.

Fall 1: $cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}} = \emptyset$,
dann bleibt $p|B$ affin und seine Prägeometrie ist die Prägeometrie von $p|B_Q$, wobei $B_Q = cl_p^A(B) \cap Q$, also eine Lokalisierung nach Vektorgeraden.
Fall 2: etwa $a \in cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}}$,
dann ist die Prägeometrie von $p|B$ gerade die von $(p|a)|cl_p^A(B)$. Aber $p|a$ ist modular, also ist die Prägeometrie von $(p|a)|cl_p^A(B)$ genau die von $(p|a)|(cl_p^{Aa}(cl_p^A(B)) \cap (p|a)^{\mathcal{C}})$ (siehe 3.9). Die Prägeometrie von $p|B$ ist also eine echte Lokalisierung von $p$.

### Die Geometrie affiner Typen

Ist $G$ eine $p$-reguläre $A$-Gruppe mit $q = gen(G)\|A$, so ist $q$ schon modular und wegen $G \subset cl_p^A(q^{\mathcal{C}})$ gilt

$$\forall a \in P: \ a \underset{A}{\perp} G \text{ und } P \cap cl_p^A(G) = \emptyset$$

3.6 **Satz**
*Es sei $G$ eine starke Projektifizierung von $p$, so gilt*
**(1)** *$(G,P)$ faktorisiert nach $({}^{G}/_{G_0}, \tilde{P})$ und $\tilde{P}$ wird so zu einem affinen Raum über ${}^{G}/_{G_0}$.*
**(2)** $(\tilde{P}, span) = (\tilde{P}, \not\perp_A)$

**Beweis**

**(1)**
$G$ ist modular und ${}^{G}/_{G_0}$ ein Vektorraum über $\mathcal{R}(G,G)$ und Abhängigkeit (über $A$) in $gen(G)$ ist nach 2.4 das gleiche wie lineare Abhängigkeit in ${}^{G}/_{G_0}$. Außerdem sind $a$ und $b$ interdefinierbar über $A, b-a$.

Behauptung: Für alle $a, b \in P$ gilt:

$$a \underset{A}{\not\perp} b \iff b - a \in G_0$$

Beweis: Es ist $a \in cl_p^A(b, b-a)$, also $a \in cl_p^A(b)$, falls $b - a \in cl_p(A)$ und (Semiregularität) deshalb $a \not\perp_A b$. Ist andererseits $b-a \notin cl_p(A)$, so ist $b-a$ $A$-generisch in $G$ und, da $b-a \in G \perp_A a$ (und $(G,P)$ transitiv), $a+(b-a) \perp_A a$, also $a \perp_A b$.

Behauptung: Die Zuordnung $(\tilde{a}, g_{G_0}) \mapsto \widetilde{a+g}$ macht $\tilde{P}$ zu einem affinen Raum über ${}^{G}/_{G_0}$.

Beweis: ich zeige, daß für beliebige $a, b, a', b' \in P$, $g, h \in G$ gilt:

$$g \equiv h \; mod G_0 \text{ und } a \underset{A}{\not\perp} b, \text{ so } a + g \underset{A}{\not\perp} b + h$$

$$a \underset{A}{\not\perp} a' \text{ und } b \underset{A}{\not\perp} b', \text{ so } b-a \underset{A}{\not\perp} b'-a'$$

Mit dem Wissen über Faktoren regulärer Operationen folgt dann die Behauptung.

$g \equiv h \; mod G_0$ und $a \not\perp_A b \Leftrightarrow g-h \in G_0$ und $b-a \in G_0 \Leftrightarrow (a+g)-(a+h) \in G_0$ und $(b+h)-(a+h) \in G_0 \Leftrightarrow a+g \not\perp_A a+h$ und $a+h \not\perp_A b+h$ $\Rightarrow a+g \not\perp_A b+h$.

$a \not\perp_A a'$ und $b \not\perp_A b'$, so $a'-a \in G_0$, $b'-b \in G_0$ und $(b'-a')-(b-a) = (b'-b)-(a'-a) \in G_0$, also $b-a \not\perp_A b'-a'$.

**(2)**
Es gilt für $b_0, \ldots, b_n \in P$:

$$\begin{array}{lcl}
\tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_n \text{ sind lin. abh.} & \Leftrightarrow & \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_n - \tilde{b}_0 \text{ sind lin. abh. in } {}^{G}/_{G_0} \\
\text{in } (\tilde{P}, span) & \Leftrightarrow & \widetilde{b_1 - b_0}, \ldots, \widetilde{b_n - b_0} \text{ sind lin. abh. in } {}^{G}/_{G_0} \\
 & \Leftrightarrow & \widetilde{b_1 - b_0}, \ldots, \widetilde{b_n - b_0} \text{ sind } p\text{-abh. in } {}^{G}/_{G_0} \\
 & \Leftrightarrow & b_1 - b_0, ..., b_n - b_0 \text{ sind } p\text{-abh. über } A \\
\tilde{b}_0, ..., \tilde{b}_n \text{ sind abhängig} & \Leftrightarrow & b_0, ..., b_n \text{ sind abhängig in } P \\
\text{in } (\tilde{P}, \not\perp_A) & &
\end{array}$$

Es reicht, paarweise unabhängige $b_i$ zu betrachten (denn $b_i \not\perp_A b_j \Leftrightarrow \tilde{b}_i = \tilde{b}_j$ und dann ist die Sache klar), dann sind die $b_i - b_0$ in $G_1$ und $p$-Abhängigkeit ist für sie dasselbe, wie Abhängigkeit. Es reicht also zu zeigen: sind $b_0, ..., b_n$ paarweise unabhängig in $P$, dann

$$b_0, ..., b_n \text{ abhängig über } A \iff b_1 - b_0, ..., b_n - b_0 \text{ abhängig über } A$$

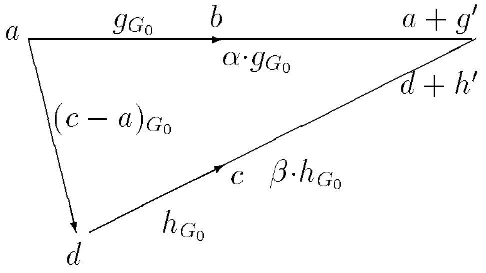
Beweis: $b_0, ..., b_n$ abhängig über $A \Leftrightarrow b_1, ..., b_n$ abhängig über $Ab_0 \overset{interdefbar}{\Leftrightarrow}$ $b_1 - b_0, ..., b_n - b_0$ abhängig über $Ab_0 \overset{b_0 \perp b_1 - b_0, \ldots, b_n - b_0}{\Leftrightarrow} b_1 - b_0, ..., b_n - b_0$ abhängig über $A$. □

3.7 **Lemma**
*Ist $G$ eine starke Projektifizierung von $p$, so ist $gen(G) \| A$ eine schwache Projektifizierung von $p$.*

**Beweis**

Da $G$ auch eine starke Projektifizierung von $p|Q_0$ ist für $Q_0 \subset Q$, reicht es, die 1:1 Korrespondenz von Parallelklassen und Vektorgeraden nur über $A$ zu zeigen, daß also für $(a,b)$ und $(c,d)$ in $P^{(2)}$ gilt: $w_p({}^{abcd}/_{A}) = 3$ und $cl_p^A(ab) \cap cl_p^A(cd) \cap P = \emptyset$, so $b-a \not\perp_A d-c$. Angenommen $w_p({}^{abcd}/_{A}) = 3$ und $b-a \perp_A d-c$. Ist $g = b-a, h = d-c$, so $g \perp_A c-a \perp_A h$, aber $(g, h, c-a)$ ist abhängig über $A$.

Da $g \perp_A h$ nach Voraussetzung, ist $c - a \not\perp_A g, h$, es gibt also $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(G, G)$, so daß $\alpha{\cdot}g_{G_0} = (c-a)_{G_0} + \beta{\cdot}h_{G_0}$ (im Vektorraum ${}^{G}\!/\!{}_{G_0}$). Es seien $g', h' \in G$, so daß $g'_{G_0} = \alpha{\cdot}g_{G_0}$ und $h'_{G_0} = \beta{\cdot}h_{G_0}$.




Behauptung: $a + g' \in cl_p^A(ab) \cap cl_p^A(cd) \cap P$
Beweis: $(c+h') - (a+g') = (c-a) + h' - g' \in G_0$, da $((c-a)+h'-g')_{G_0} = (c-a)_{G_0} + h'_{G_0} - g'_{G_0} = 0$, also $a + g' \not\perp_A c + h'$. Wegen $g'_{G_0} = \alpha{\cdot}(b-a)_{G_0}$ ist $g' \in cl_p^A(ab)$ und genauso $h' \in cl_p^A(cd)$, deshalb ist $a + g' \in cl_p^A(cd)$, damit folgt die Behauptung. □

Man beachte, daß ich für den Beweis nicht nur die Regularität der Operation gebraucht habe, sondern auch die Tatsache, daß ${}^{G}\!/\!{}_{G_0}$ ein Vektorraum ist, in dem lineare Abhängigkeit und Abhängigkeit über $A$ dasselbe sind.

### 4.3.3 Die Existenz der starken Projektifizierung

Es bleibt noch zu zeigen, daß jeder affine Typ (modulo $\not\perp^a$) eine starke Projektifizierung hat.

3.8 **Satz**
*Es sei $p \in St(A)$ ein affiner Typ, dann gibt es ein $A' \subset cl_p(A)$ und einen affinen Typ $p' \in St(A')$, so daß $p'$ stark projektifizierbar ist und $p' \not\perp^a p|A'$.*

Der Beweis macht einige Arbeit und ich werde ihn in zwei Schritten führen. Zuerst zeige ich, daß es "in der Nähe" von $p$ einen projektiven Typ gibt, das ist die Hauptarbeit. Mit Hilfe dieses Typs konstruiere ich dann die gewünschte Gruppe als Bindungsgruppe.

3.9 **Satz**
*Es sei $p \in St(A)$ ein affiner Typ, dann gibt es ein $A' \supset A$ und einen projektiven Typ $q \in St(A')$, so daß $A' \subset cl_p(A)$ und $q \not\perp p$.*

**Beweis**

Ich werde $A'$ nacheinander alle benötigten Parameter aus $cl_p(A)$ zufügen, ohne dabei die Bezeichnung "$A'$" zu ändern. Außerdem wird $A'$ immer algebraisch abgeschlossen sein.

**Schritt 1** : Konstruktion des Typen

Da $p$ lokal modular ist, gibt es mit 3.12 ein $E \supset A$ und eine modulare, zusammenhängende $E$-Gruppe $G$, so daß $E, G \subset D_p(A)$ und $w_p({}^{E}\!/\!{}_{A}) = 1$.

$$A' = A \cup (acl(AE) \cap cl_p(A))$$

Also ist $stp(E/A')$ $p$-regulär und $p \models p|A'$, OE $E \supset A'$. Es sei $E' \equiv_{A'} E$ und $E' \downarrow_{A'} E$, $G'$ sei die entsprechende $E'$-Gruppe (also ein Konjugat von $G$). Da $gen(G)\| \not\perp p \not\perp gen(G')$ und beide Gruppen modular sind, ist $gen(G)\|EE' \not\perp^a gen(G')\|EE'$ und folglich gibt es (2.3) eine $p$-reguläre $D'$-Gruppe $H' < G \times G'$ mit $pr_1(H') = G$, $pr_2(H') = G'$ und $EE' \subset D' \subset cl_p^A(EE')$. Es sei $(a,b)$ $D'$-generisch in $H'$, so gilt

$stp(ab/D')$ ist $p$-regulär, $a$ ist $D'$-generisch in $G$, $b$ ist $D'$-generisch in $G'$, insbesondere $a \downarrow_E D'$ und $Ea \downarrow_{A'} E'$, $b \downarrow_{E'} D'$ und $E'b \downarrow_{A'} E$, aber $a \not\downarrow_{EE'} b$. $w_p(Ea/A') = w_p(a/E) + w_p(E/A') = 2 = w_p(E'b/A')$.

Behauptung: Es gibt ein $d \in cl_p^A(Ea) \cap cl_p^A(E'b)$ mit $w_p(d/A') = 1$
Beweis: Da $p$ lokal modular ist, gilt $Cb^s(Ea/acl(EaE'b) \cap cl_p^A(E'b)) \subset cl_p^A(Ea) \cap cl_p^A(E'b)$ und $w_p(Cb/A') = w_p(Ea/E'b) - w_p(Ea/acl(EaE'b) \cap cl_p^A(E'b))$, aber $w_p(Ea/acl(EaE'b) \cap cl_p^A(E'b)) = w_p(Ea/E'b) = w_p(EE'ab/A') - w_p(E'b/A') = 3 - 2 = 1$ also $w_p(Cb/A') = 1$ und ein geeignetes Element aus dieses kanonischen Basis tut's.

$$A' = A' \cup (acl(A'd) \cap cl_p(A'))$$

Dann ist $stp(d/A')$ $p$-regulär und die $p$-Regularität der anderen Typen sowie die relevanten Abhängigkeiten bleiben erhalten und es gilt (OE $E \supset A'$)

$E \downarrow_{A'} E'bd$, $E' \downarrow_{A'} Ead$, insbes. ist $\{E, E', d\}$ unabhängig über $A'$ und $d \downarrow_{A'} cl_p^A(EE')$, also $d \downarrow_{A'} D'$. Außerdem $d \not\downarrow_{A'} Ea$ und $d \not\downarrow_{A'} E'b$, also $d \not\downarrow_E a$ und $d \not\downarrow_E b$.

**Schritt 2** : $stp(d/A')$ erfüllt das Gewünschte

Da $stp(d/A')$ $p$-Gewicht 1 hat, ist $stp(d/A') \not\perp p$ und folglich nicht-trivial, außerdem ist $A' \subset cl_p(A)$. Ich muß also noch zeigen, daß $stp(d/A')$ modular ist. Es sei $F = acl(Ead) \cap cl_p^A(E)$, dann ist $stp(ad/F)$ $p$-regulär, $ad \downarrow_F D'$ (da $w_p(ad/D') = 1$), $a \not\downarrow_F d$, $Fad \downarrow_{A'} E'$ (da $Ead \downarrow_{A'} E'$) und $w_p(F/A') = 1$. Man beachte, daß $F$ algebraisch abgeschlossen ist.

$$A' = A' \cup (acl(A'F) \cap cl_p(A'))$$

OE $A' \subset E$ (also auch $A' \supset E'$), das alles ändert wieder nichts an den relevanten Daten und $F \downarrow_{A'} E'$. Es sei nun $\mathcal{M} \supset E'$ ein $|E'|^+$-saturiertes Modell, so daß $\mathcal{M} \downarrow_{E'} F$, dann $F \downarrow_{A'} cl_p(\mathcal{M})$. Es sei $G_0 = G \cap cl_p^A(F)$ und $G_1 = G \backslash G_0$, also $G_1 = (gen(G)\|F)^{\mathcal{C}} = (gen(G)\|E)^{\mathcal{C}}$ und $(G_1, \not\downarrow_F) = (G_1, \not\downarrow_E)$ ist eine modulare Prägeometrie.

$$\begin{array}{rcl} Q & := & stp(d/F)^{cl_p^A(\mathcal{M})} \\ X & := & \{a' \in G_1 \mid a' \not\downarrow_F d' \text{ für ein } d' \in Q\} \\ Y & := & \{a' \in G_1 \mid a'd' \equiv_F ad \text{ für ein } d' \in Q\} \end{array}$$

Man sieht schnell, daß $Y \subset X$, $cl_p^F(X) = cl_p^F(Q) = cl_p^F(Y)$ und $X = X + G_0$ (d.h. $X$ ist die Vereinigung von $G_0$-Nebenklassen in $G$): $a' \in X$, etwa $a' \not\downarrow_F d' \in Q$, so $a' \in cl_p^F(d')$, also $X \subset cl_p^F(Q)$. $d' \in Q$, etwa $a'd' \equiv_F ad$ für ein $a' \in Y$, so $d' \in cl_p^F(a')$, also $Q \subset cl_p^F(Y)$. $Y \subset X$, da $a \not\downarrow_F d$. Ist $a' \in X$ (etwa $a' \not\downarrow_F d' \in Q$) und $g \in G_0$, so $a' + g \not\downarrow_F a' \not\downarrow_F d'$, also $a' + g \not\downarrow_F d'$ und $a' + g \in X$.

**Schritt 2a)**: $Y/G_0 \cup \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $G/G_0$

Ich werde nun zeigen, daß $Y/G_0 \cup \{0\}$ ein Untervektorraum von $G/G_0$ ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß $Y/G_0 \cup \{0\}$ ein Kegel (in $G/G_0$) ist (d.h. abgeschlossen gegen Skalarmultiplikation) und daß $Y$ abgeschlossen unter generischer Addition (in $G$) ist. Denn ist $v \in span(Y/G_0)^{\neq 0}$, etwa $v = \sum \alpha_i v_i$, wobei $v_i \in Y/G_0$ und $\alpha_1 v_1, ..., \alpha_n v_n$ linear unabhängig in $G/G_0$, dann sind die $\alpha_i v_i \in Y/G_0$, etwa $\alpha_i v_i = a_{iG_0}$ mit $a_i \in Y$ und $a_1, ..., a_n$ sind unabhängig in $Y$. Dann ist aber $a = \sum a_i \in Y$, also $v = \sum a_{iG_0} = a_{G_0} \in Y/G_0$, folglich ist $span(Y/G_0) \subset Y/G_0 \cup \{0\}$ und $Y/G_0 \cup \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $G/G_0$.

Vorerst noch eine technische Vorbetrachtung, die ich in beiden Beweisen brauche:

Behauptung: Es seien $a_1, ..., a_n \in Y$, etwa $a_i d_i \equiv_F ad$ für geeignete $d_i \in Q$, dann gibt es ein $E'' \subset \mathcal{M}$ und ein $D''$, so daß

$$E'' \equiv_{A'dd_1...d_n} E, \quad EE'' \subset D'' \subset cl_p^A(EE'') \text{ und } D'ad \equiv_F D''a_i d_i$$

Beweis: Wähle erst eine kleine Parametermenge $B$, so daß $A' \subset B \subset \mathcal{M}$ und $Edd_1...d_n \downarrow_B \mathcal{M}$, realisiere dann $stp(E/B)$ in $\mathcal{M}$ durch $E''$. Dann $Edd_1...d_n \downarrow_B E''$ und wegen $E \downarrow_{A'} cl_p(\mathcal{M})$ gilt $E \downarrow_{\mathcal{M}} dd_1...d_n$, $E \downarrow_B dd_1...d_n$, $E \downarrow_{A'} B$ und $E'' \downarrow_{A'} B$, also $E \downarrow_{A'} dd_1...d_n$ und $E'' \downarrow_{A'} dd_1...d_n$ und folglich $E'' \equiv_{A'dd_1...d_n} E$ (da $dd_1...d_n$ nicht in $\mathcal{M}$ liegen muß, konnten wir $stp(E/A'dd_1...d_n)$ nicht sofort in $\mathcal{M}$ realisieren). Da $F \downarrow_{A'} cl_p^A(\mathcal{M})$ und $E''dd_1...d_n$ in $cl_p^A(\mathcal{M})$ liegen, ist $F \downarrow_{A'} E''dd_1...d_n$ und $\{F, E'', (dd_1...d_n)\}$ ist unabhängig über $A'$ ($E'' \downarrow_{A'} dd_1...d_n$). Weil $stp(E''/A')$ $p$-regulär ist und $a_i \in cl_p^A(Fd_i)$, gilt

$$E'' \underset{A'}{\downarrow} Fada_1d_1...a_nd_n$$

Da $Fad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A'} E'$ und $Fad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A'} E''$ (und $E' \equiv'^{s}_{A} E''$) ist $E' \equiv^{s}_{Fad} E''$. Wähle $D''$ so, daß

$$E'D' \equiv^{s}_{Fad} E''D'' \text{ und } EE'' \subset D'' \subset cl_p^A(EE'')$$

Nun ist $ad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} E''$ und $a_i d_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} E''$, folglich $ad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} D''$ und $a_i d_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} D''$, denn $stp({}^{ad}/_{F})$ ist $p$-regulär, $ad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} E''$ (da $ad \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F} E'$) und $D'' \subset cl_p(FE'')$ (um diese Unabhängigkeit zu gewährleisten, mußte ich von $E$ zu $F$ übergegangen werden). Da $ad \equiv^{s}_{F} a_i d_i$, ist $ad \equiv^{s}_{FD''} a_i d_i$. Insgesammt haben wir also $D'ad \equiv_F D''ad \equiv_F D''a_i d_i$ und die Behauptung ist bewiesen.

Nun komme ich endlich zu der versprochenen Behauptung:
(1) Ist $a' \in Y$ und $\alpha \in R_G^{\neq 0}$, so ist $\alpha \cdot a'_{G_0} \in {}^{Y}/_{G_0}$
(2) Sind $a_1, ..., a_n$ unabhängig über $F$ in $Y$, so ist $\sum a_i \in Y$

Beweis:
(1) Es sei $d' \in Q$, so daß $a'd' \equiv_F ad$, wähle (mit der Vorbetrachtung) $E'' \subset \mathcal{M}$ und $D'' \supset E''$, so daß $D'ad \equiv_F D''a'd'$. Wähle nun ein $b'$ derart, daß $D'abd \equiv_F D''a'b'd'$, dann ist $b' \in cl_p^A(E''d') \subset cl_p^A(\mathcal{M})$. Es sei $H''$ die entsprechende $D''$-Gruppe, also $H'' < G \times G''$, wobei $G''$ das zu $E''$ gehörige Konjugat von $G$ ist. Es sei $a'' \in G$, so daß $a''_{G_0} = \alpha \cdot a'_{G_0}$, $b'' \in G''$ sei derart, daß $b''_{G_0} = H'' \cdot a''_{G_0}$, dann ist $(a'', b'')$ $D''$-generisch in $H''$. Aber auch $(a', b')$ ist $D''$-generisch in $H''$, also $a'b' \equiv_{D''} a''b''$ und $b'_{G_0} = H'' \cdot a'_{G_0}$, also $b''_{G_0} = H'' \cdot \alpha \cdot a'_{G_0} = H'' \cdot \alpha \cdot H''^{-1} \cdot b'_{G_0}$ und deshalb $b'' \in cl_p(E''(b') \subset cl_p(\mathcal{M})$. Wähle $d''$ mit $E'abd \equiv_F E''a''b''d''$, dann ist $d'' \in cl_p(E''b'') \subset cl_p(\mathcal{M})$, also $d'' \in Q$, $a'' \in Y$ und $\alpha \cdot a'_{G_0} = a''_{G_0} \in {}^{Y}/_{G_0}$.

(2) $d_i$ gehöre zu $a_i$, OE n=2: wähle wieder $E'' \subset \mathcal{M}$, $D'' \supset E''$ und $b_i$, so daß $D'abd \equiv_F D''a_i b_i d_i$. Dann sind $(a_1, b_1)$ und $(a_2, b_2)$ unabhängige generische (über $D''$) in der $D''$-Gruppe $H'' < G \times G''$ und $b_i \in cl_p(\mathcal{M})$, insbesondere ist auch $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ $D''$-generisch in $H''$, also $E'', a_1 + a_2, b_1 + b_2 \equiv_F E'', a_i, b_i \equiv_F E, a, b$ und $b_1 + b_2 \in cl_p(\mathcal{M})$. Wähle nun $d'$, so daß $E'', a_1 + a_2, b_1 + b_2, d' \equiv_F E'abd$, dann ist $d' \in cl_p(E'', b_1 + b_2) \subset cl_p(\mathcal{M})$, also $d' \in Q$ und folglich $a_1 + a_2 \in Y$.

Ich habe also gezeigt, daß ${}^{Y}/_{G_0} \cup \{0\}$ ein Untervektorraum von ${}^{G}/_{G_0}$ ist. Nun bin ich fast fertig:

**Schrit 2b)**: $stp({}^{d}/_{A'})$ ist modular

Es sei $a' \in cl_p^F(X) \cap G_1$, dann $a' \in cl_p^F(Y) \cap G_1$, also $a'_{G_0} \in span({}^{Y}/_{G_0})^{\neq 0} \subset {}^{Y}/_{G_0}$, also $a' \in Y + G_0 \subset X + G_0 = X$. $(X, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F})$ ist also ein abgeschlossener Unterraum der modularen Prägeometrie $(G_1, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F})$ und somit modular. Dann ist aber auch $(Q, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F})$ modular, denn $\not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F}$ induziert einen Isomorphismus der Geometrien. Da aber $F \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A'} cl_p^A(\mathcal{M})$, ist $(Q, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{F}) = (stp({}^{d}/_{A'})^{cl_p^A(\mathcal{M})}, \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A'})$. Da $\mathcal{M}$ hinreichend saturiert ist, ist dann auch $stp({}^{d}/_{A'})$ modular. $\square$

3.10 **Lemma**

*Es seien $p, q \in St(A)$, $p$ affin, $q$ projektiv und $q \not\perp p$. Dann gibt es einen affinen Typ $p' \in S(acl(A))$ und eine affine $acl(A)$-Gruppenoperation $(G, p')$, wobei $p' \not\perp^a p$ und $G$ eine zusammenhängende $p$-modulare $acl(A)$-Gruppe ist.*

**Beweis**

OE $A = acl(A)$. Da $p \not\perp q$ gibt es wegen 1.8 ein nicht algebraisches $p' \in dcl(p)$, welches $q$-intern ist. Mit $p$ ist dann auch $p'$ regulär und offensichtlich $p' \not\perp^a p$, $p'$ ist also affin. OE $p' = p$. $G$ sei dann die Bindungsgruppe $G(Q)$ von $(p, q)$, wobei $Q := cl_p^A(q^{\mathcal{C}})$ ($Q$ ist $A$-invariant und algebraisch abgeschlossen). $(G, P)$ sei die zugehörige $A$-Gruppenoperation. Da $q$ projektiv, $p$ aber nur affin ist, haben alle Elemente von $P$ den gleichen Typ über $Q$ (denn ihr Typ ist die nichtforkende Fortsetzung von $p$ nach $Q$). Folglich sind alle Elemente von $P$ über $Q$ konjugiert (1.14) und $(G, P)$ ist transitiv. Andererseits ist $p|a \not\perp^a q|a$ und deshalb ist $b \not\perp_A Qa$ für jedes $b \models p$, also $P \subset cl_p^Q(a)$.

Behauptung: $G$ ist $p$-regulär und $(G, P)$ ist affin.
Beweis: Es sei $\bar{c} \subset P$ eine Fundamentallösung, dann sind $gen(G)$ und $stp(\bar{c}/Q)$ interdefinierbar. Aber für $a \in \bar{c}$ gilt (s.o.) $a \sim_{cl_p^Q} \bar{c}$, also $w_p(\bar{c}/Q) = w_p(a/Q) = w_p(a/A) = 1$. Da $Q$ $cl_p^A$-abgeschlossen ist, ist $stp(\bar{c}/Q)$ $p$-semiregulär, also $p$-regulär. Dann ist $G$ abelsch und $(G, P)$ ist treu und transitiv, also regulär (das ist reine Algebra: der Schnitt der (1-Punkt-) Stabilisatoren ist trivial ("treu") und alle Stabilisatoren sind in $G$ konjugiert (im Gruppensinn, folgt aus "transitiv"), also identisch ("abelsch"), folglich ist jeder Stabilisator trivial, d.h. die Operation ist fixpunktfrei). $\square$

Es folgt, daß jeder affine Typ schwach projektifizierbar ist, also

3.11 **Satz**

*Ist $p \in St(A)$ ein affiner Typ und $B \supset A$, dann gilt:*

$$p|B \text{ ist modular} \iff cl_p^A(B) \cap p^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$$

Das war's