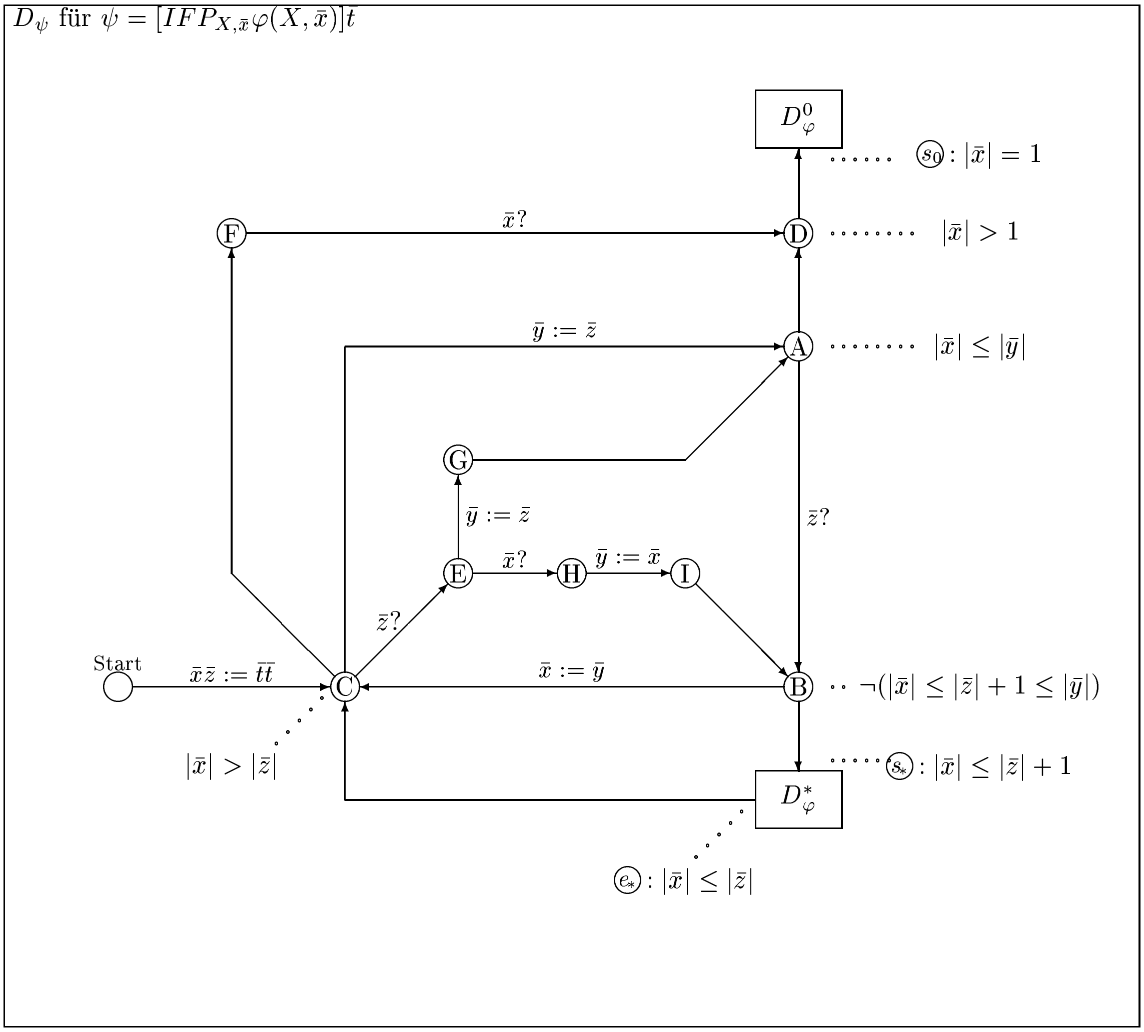
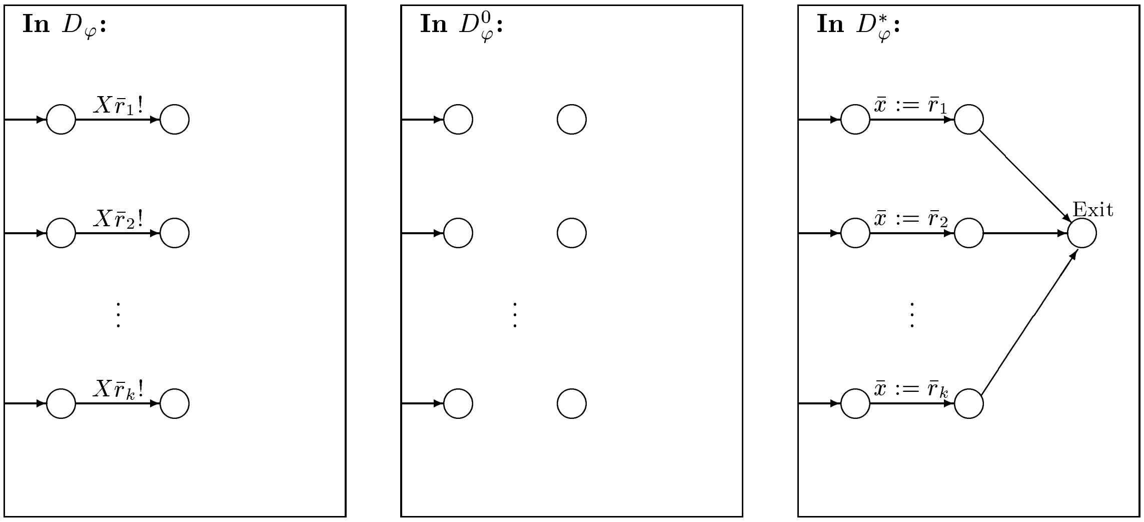
Extrablatt (nicht mit einbinden!)





Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Freiburg im Breisgau

Remisfreie Spiele, Fixpunktlogiken und Normalformen

Max Kubierschky
email: maku@mibm.ruf.uni-freiburg.de

vorgelegt als Diplomarbeit
bei Herrn Professor Dr. Jörg Flum
im Dezember 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Was bisher geschah

Fixpunktlogiken sind Erweiterungen der Logik 1.Stufe durch einen Operator für induktive Definitionen. Sie sind eng mit Komplexitätsklassen verwandt. So sind zum Beispiel die endlichen Klassen geordneter Strukturen, die in der Fixpunktlogik IFP definierbar sind, genau diejenigen, die in PTIME berechenbar sind [Var82,Imm82]. Auch andere Begriffe der Komplexitätstheorie lassen sich in die Logik übertragen, insbesondere die der Reduktion und des vollständigen Problems.
Das vollständige Problem, das uns hier interessiert, ist das Geographiespiel[1]. Geographiespiele werden auf Strukturen mit einer Kantenrelation gespielt. Die Spielerinnen ziehen von einer Startposition aus einen Spielstein abwechselnd entlang einer Kante. Wer nicht ziehen kann, hat verloren. Das Problem, zu entscheiden, wer das Geographiespiel auf einer gegebenen Struktur mit einer gegebenen Startstellung gewinnt, ist vollständig für PTIME bezüglich LOGSPACE-Reduktion[2] [JS76][3]
Die entsprechende Aussage in der Logik ist, daß das Geographiespiel auf geordneten Strukturen vollständig für IFP bezüglich DTC[4]-Reduktion ist[5]. Sie läßt sich in doppelter Weise verschärfen: Das Geographiespiel ist vollständig für IFP, sogar bezüglich quantorenfreier Reduktion auf allen endlichen Strukturen, auch ohne Ordnungsrelation [Dah87][6].

0.2 Was Sie in dieser Abhandlung lesen

Ausgangspunkt der Arbeit war die Frage, wie ausdrucksstark Fixpunktoperatoren der Form $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \exists\bar{z}\notin X\varphi(\bar{x},\bar{z})]$ mit quantorenfreiem φ sind. Diese stehen in engem Zusammenhang mit dem Geographiespiel.
Betrachtet man $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ als Definition einer Kantenrelation, so charakterisiert dieser Operator die Gewinnstellungen im zugehörigen Geographiespiel, <u>wenn</u> der Fixpunkt existiert.

---

[1]Dieser Name kommt von einem Spiel, bei dem abwechselnd z.B. eine Stadt genannt wird, die mit dem Buchstaben anfangen muß, mit dem die vorige aufgehört hat.

[2]In obiger Variante. Meistens verbietet man beim Geographiespiel Wiederholungen, das heißt der Spielstein darf nicht ein zweites mal auf ein schon benutztes Feld gezogen werden. Mit diesem Verbot ist das Geographiespiel vollständig für PSPACE (findet man in [Rei90]).

[3]In [JS76] wird dies für eine Klasse GAME gezeigt, die etwas aufwendiger definiert ist, als das Geographiespiel. Das Ergebnis läßt sich aber leicht auf das Geographiespiel übertragen.

[4]DTC ist die Erweiterung der Logik erster Stufe durch einen Operator für die transitive Hülle definierbarer deterministischer (d.h. rechtseindeutiger) Relationen.

[5]Diese Entsprechung findet man als Übung in [EF95].

[6][Dah87] bezieht sich ebenfalls auf die Klasse GAME aus [JS76].

Könnte man sich darauf verlassen, daß er existiert, so wäre es dank der Vollständigkeit des Geographiespiels leicht zu beweisen, daß solche Operatoren so ausdrucksstark sind wie IFP. Leider ist dies nicht der Fall. Er existiert nur, wenn das zugehörige Spiel remisfrei ist, d.h. wenn es keine Stellungen gibt, in denen keine der beiden Parteien eine Gewinnstrategie hat. Es stellt sich also die Frage, ob man mit solchen Formeln $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ auskommt, die remisfreie Spiele definieren. Anders formuliert: Sind die remisfreien Geographiespiele vollständig für IFP?
Die Theorie der remisfreien Spiele hat sich als fruchtbar erwiesen. Unser Programm ist folgendes: Zunächst wird ein "Hauptsatz" bewiesen, der in etwa sagt, daß die remisfreien Geographiespiele tatsächlich vollständig für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion sind. Dieser wird direkt bewiesen, also ohne Rückgriff auf Normalformen oder sonstige Sätze über Fixpunktlogiken. Aus dem Hauptsatz folgt recht einfach eine schöne Normalform für IFP, die gleichzeitig IFP=LFP beweist. Zum Schluß beantworten wir, sozusagen als Anwendung, die Ausgangsfrage in einer allgemeineren Form.

0.3 Aufbau

Hier die Kapitel im Einzelnen:
Das erste Kapitel dient dazu, die Formalitäten zu regeln. Es werden Begrifflichkeiten geklärt und Grundannahmen benannt, die in der restlichen Arbeit implizit bleiben oder verschwiegen werden. Einige Notationen und Konventionen werden festgelegt und einige Schlampigkeiten legalisiert.
Die Kapitel **Fixpunktlogiken** sowie **Reduktionen und vollständige Probleme** sind Auflistungen von Definitionen und einfachen Sachverhalten, diese Gegenstände betreffend. Sie sind weniger als Erklärung gedacht, sondern eher als Referenz. Alle Sätze sind dort ohne Beweis wiedergegeben, weil sie erstens leicht sind und zweitens allgemein bekannt. Etwas ausführlicher behandelt findet man diesen Stoff in [EF95].
Im Kapitel **Spiele** wird definiert, was wir unter Spielen und Gewinnstrategien verstehen. Es werden remisfreie Spiele eingeführt und der Hauptsatz formuliert.
Das Kapitel **Diagramme** stellt das zentrale Hilfsmittel zum Beweis des Hauptsatzes vor, nämlich Diagramme. Sie werden uns das Lesen von Formeln erschreckender Länge ersparen.
Im Kapitel **Zwischenspiel** wird ein Beweis für den Hauptsatz skizziert, der aber voraussetzt, daß bereits bewiesen ist, daß das Geographiespiel hart für IFP ist. Diese Erkenntnis gewinnt man normalerweise aus einer Normalform [Dah87], deshalb taugt er nichts für das oben beschriebene Programm. Er wird trotzdem wiedergegeben, weil er anschaulich ist und Konzepte verständlich macht, die im weniger anschaulichen **Beweis des Hauptsatzes** verwendet werden.
Im Kapitel **Normalformen für IFP** wird die Ernte eingefahren, diverse Normalformsätze und IFP=LFP werden bewiesen.
Im Kapitel **Negative PFP-Fragmente** werden die Fragmente von PFP, die von Fixpunktoperatoren der Form

$$[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi_0 \vee \exists \bar{y}_1 \in X \ldots \exists \bar{y}_l \in X\, \exists \bar{z}_1 \notin X \ldots \exists \bar{z}_m \notin X\ \varphi\ ]\bar{t}$$

für festgehaltene Werte von l und m erzeugt werden, klassifiziert und damit die im vorigen Abschnitt erwähnte Ausgangsfrage gelöst.

0.4 Sprache

- Ich verwende das geschlechtsneutrale Femininum: Mit "Spielerin" ist nicht eine spielende Person bekannntermaßen weiblichen sondern eine solche unbekannten Geschlechts gemeint. Ebenso für "Leserin" etc.

- Da ich kein Freund von Passivkonstruktionen bin und zu bescheiden, um zu häufig das Wort "ich" zu schreiben, habe ich mich nach einigem Hadern für das krankenschwesterliche "wir" entschieden. "Wir" meint hier mich selbst und die Leserin.

Kapitel 1

Allgemeine Geschäftsbedingungen

1.1 Strukturen

- Wir betrachten nur endliche Strukturen
- Wir betrachten nur Strukturen mit mindestens zwei Elementen

Die erste Einschränkung ist hier wesentlich, die zweite dient nur der Bequemlichkeit. Der Fall der einelementigen Strukturen ist leicht zu behandeln, uninteressant und führt zu weniger schönen Normalformen.

1.2 Signaturen

Eigentlich sollten wir Logiken und verwandte Dinge in Abhängigkeit von einer Signatur τ definieren. Da dies lästig ist, sei hiermit τ ein für alle mal gewählt, und alle Definitionen sind abhängig von τ, ohne daß dies erwähnt wird. Wo nicht anders vermerkt, sind Strukturen τ-Strukturen, Interpretationen τ-Interpretationen etc.

1.3 Belegungen und Interpretationen

Für eine Struktur $\mathcal{A}$ teilt eine $\mathcal{A}$-Belegung α jeder Variable (1. und 2. Stufe) einen geeigneten Wert in $\mathcal{A}$ zu. Eine Interpretation ist ein Paar $(\mathcal{A}, \alpha)$. Wo immer es Sinn macht, werden wir in Definitionen und Sätzen mit Interpretationen arbeiten statt mit Strukturen. Dies vereinfacht die Induktion über Formeln und den Umgang mit freien Parametern.

Substitutionen in Belegungen schreiben wir wie folgt: Mit $\alpha[\frac{x}{a}]$ meinen wir die Belegung, die der Variable x den Wert a zuordnet und sich ansonsten so verhält wie α. Für $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \alpha)$ sei $\tilde{\mathcal{A}}[\frac{x}{a}] := (\mathcal{A}, \alpha[\frac{x}{a}])$ und $\tilde{\mathcal{A}}(t) := \alpha(t)$. Das Entsprechende gilt für 2.Stufe Variablen.

Für die Bezeichnungen führen wir folgende Konvention ein: Auch wenn es nicht dazu gesagt wird, meint das Symbol $\tilde{\mathcal{A}}$ stets eine Interpretation $(\mathcal{A}, \alpha)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit Träger A ist.

1.4 Logiken

Eine Logik L ist für uns eine Menge $\mathcal{F}$ von Formeln zusammen mit einer Modellrelation $\models$ zwischen Interpretationen und Formeln aus $\mathcal{F}$. Für eine Formel φ ist $\mathrm{Mod}(\varphi) := \{\tilde{\mathcal{A}} \mid \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi\}$ die Modellklasse von φ. Zwei Formeln φ und ψ sind äquivalent (wir schreiben: $\varphi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi$), wenn ihre Modellklassen gleich sind. Vergleiche zwischen Logiken (z.B. LFP $\subset$ IFP, LFP $=$ IFP) sind immer als Vergleiche zwichen den Mengen von Modellklassen, die durch die jeweilige Logik definierbar sind, gemeint.
Eine Sublogik K von L nennen wir Normalform von L, wenn in diesem Sinne K=L gilt (d.h. für alle $\psi \in L$ existiert ein $\psi' \in K$ mit $\psi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi'$). Der Name Normalform macht natürlich nur Sinn, wenn sich die Formeln von K ähnlich sehen.
Wenn wir eine Logik L definieren, ist im Sinne von 1.2 diese Definition abhängig von der Signatur τ. Mit L[σ] meinen wir die entsprechende Logik für die Signatur σ, wenn wir nur L schreiben, meinen wir implizit L[τ].
FO ist die Logik der 1.Stufe, QF sind die quantorenfreien Formeln. In beiden Fällen erlauben wir freie 2.Stufe Variablen.
Wenn wir eine Definition oder eine Aussage für eine Formel φ tätigen, ohne dazuzusagen, welcher Logik diese Formel angehören soll, so ist eine beliebige Logik gemeint und nur von Belang, daß $\mathrm{Mod}(\varphi)$ definiert ist.

1.5 Tupel

Tupel (von Objekten wie Variablen, Termen oder Elementen einer Struktur) schreiben wir in der Form $o_0 o_1 \dots o_{n-1}$ (d.h. ohne Klammern und Kommas) und kürzen sie durch $\overset{n}{o}$ ab. Dies erlaubt Schreibweisen wie $\overset{n}{o}\overset{m}{p}$ für $o_0 \dots o_{n-1} p_0 \dots p_{m-1}$. Wir schreiben auch $\bar{o}$ statt $\overset{n}{o}$, wenn die Länge n des Tupels aus dem Kontext hervorgeht oder nicht von Belang ist. Wir schrecken nicht davor zurück, Tupel nochmals zu indizieren. $\overset{n}{o}_k$ bedeutet dann $o_{k0} \dots o_{kn-1}$.

1.6 Die "Variable" d

In manchen Situationen benötigen wir Tupel aus lauter gleichen Termen, wobei egal ist, was für einen Term wir wählen. Wir verwenden dann stets $\tilde{d}$. d sei eine beliebige Variable, $\tilde{d} := dd \dots d$ (die Länge des Tupels entnimmt man jeweils aus dem Kontext). Auf diese Weise werden Formeln entstehen, in denen d frei ist, die aber nicht von d abhängen (triviales Beispiel: $d \doteq d$). Um Verwirrung zu vermeiden, faßt man d am besten als Konstante auf. Dies wollen wir aber offiziell nicht tun, da die Forderung, daß eine solche Konstante verfügbar ist, eine unnötige Einschränkung an die Signatur τ wäre.

1.7 Abhängigkeit von Variablen, Einsetzungen

Die Schreibweise $\varphi(\bar{x})$ bedeutet weder, daß die Variablen $\bar{x}$ alle frei in φ vorkommen, noch, daß φ keine anderen freien Variablen hat.
Sie dient zweierlei Zwecken. Erstens bietet sie eine einfache Möglichkeit, Substitutionen zu notieren: Für $\varphi = \varphi(\bar{x})$ ist $\varphi(\bar{y})$ die Formel, die entsteht, wenn man in φ alle x_i durch y_i substituiert. In Modellbeziehungen erlauben wir uns auch, Elemente von Strukturen einzusetzen. $\tilde{\mathcal{A}} \models \varphi(\bar{a})$ ist als Abkürzung für $\tilde{\mathcal{A}}[\frac{\bar{x}}{\bar{a}}] \models \varphi$ zu lesen.
Zweitens verwenden wir sie, um gewisse Variablen als "spezielle" Variablen auszuzeichnen, wie z.B. in der folgenden Definition:

Definition 1 **($\varphi^{\tilde{A}}(\overset{n}{x},\overset{n}{y})$)** *Für eine Formel $\varphi = \varphi(\overset{n}{x},\overset{n}{y})$ und eine Interpretation $\tilde{A}$ ist*

$$\varphi^{\tilde{A}}(\overset{n}{x},\overset{n}{y}) := \{(\overset{n}{a},\overset{n}{b}) \in A^n \times A^n \mid \tilde{A} \models \varphi(\overset{n}{a},\overset{n}{b})\}$$

$\varphi^{\tilde{A}}(\overset{n}{x},\overset{n}{y})$ hängt natürlich nicht nur von der Formel φ und von $\tilde{A}$ ab, sondern auch von der Wahl der Variablen $\overset{n}{x}$ und $\overset{n}{y}$. $\varphi(\overset{n}{x},\overset{n}{y})$ ist also je nach Kontext entweder als Formel oder als ein Tripel aus einer Formel und zwei Tupeln von Variablen aufzufassen. Wenn wir $\varphi := \varphi(\overset{n}{x},\overset{n}{y})$ schreiben, bedeutet dies, daß φ ab sofort dieses Tripel vertritt (in Kontexten, in denen ein solches gefragt ist).
Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt natürlich entsprechend für 2.Stufe-Variablen.

Kapitel 2

Fixpunktlogiken

Definition 2 (Fixpunkt, $F^\infty(R)$) *Sei eine Menge A und eine Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ gegeben.*

- **(i)** *$S \subset A^n$ heißt <u>ein</u>* Fixpunkt *von F, wenn $F(S) = S$.*
- **(ii)** *Falls für ein $R \subset A^n$ die Folge $(F^k(R))_{k\in\mathbb{N}}$ (d.h. die Folge $R, F(R), F(F(R)), \ldots$) bei einem $m \in \mathbb{N}$ stationär wird (also $F^m(R)$ Fixpunkt ist), sagen wir $F^\infty(R)$ existiert und setzen $F^\infty(R) := F^m(R)$*
- **(iii)** *$F^\infty := F^\infty(\emptyset)$ heißt <u>der</u>* Fixpunkt *von F.*

Definition 3 (induktiv, monoton, antimonoton)
$F : \mathrm{Pot}(A^n) \to \mathrm{Pot}(A^n)$ heißt:

induktiv	:⇔	$F^k(\emptyset) \subset F^{k+1}(\emptyset)$	*für alle $k \in \mathbb{N}$.*
monoton	:⇔	$R \subset S \Rightarrow F(R) \subset F(S)$	*für alle $R, S \subset A^n$.*
antimonoton	:⇔	$R \subset S \Rightarrow F(R) \supset F(S)$	*für alle $R, S \subset A^n$.*

Satz 4 *F monoton $\Rightarrow$ F induktiv* □

Satz 5 *Sei $F : \mathrm{Pot}(A^n) \to \mathrm{Pot}(A^n)$ monoton. Dann ist*

- **(i)** *$(F^k(\emptyset))_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge. $F^\infty(\emptyset)$ existiert und ist der Durchschnitt aller Fixpunkte von F.*
- **(ii)** *$(F^k(A^n))_{k\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge. $F^\infty(A^n)$ existiert und ist die Vereinigung aller Fixpunkte von F.*

□

Definition 6 ($\mathrm{lfp}(F), \mathrm{gfp}(F)$)
$\mathrm{lfp}(F) := F^\infty(\emptyset)$ heißt in diesem Fall der kleinste,
$\mathrm{gfp}(F) := F^\infty(A^n)$ der größte Fixpunkt von F.

Definition 7 ($F_{\varphi,\tilde{\mathcal{A}}}$) *Gegeben sei eine Interpretation $\tilde{\mathcal{A}}$ und eine Formel $\varphi := \varphi(X, \overset{n}{x})$, X n-stellig. Dann ist $F_{\varphi,\tilde{\mathcal{A}}}$ definiert durch:*

$$F_{\varphi,\tilde{\mathcal{A}}} : \begin{array}{l} \mathrm{Pot}(A^n) \to \mathrm{Pot}(A^n) \\ R \mapsto \{\overset{n}{a} \mid \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi(R, \overset{n}{a})\} \end{array}$$

Falls unwichtig ist oder aus dem Kontext klar wird, welche Interpretation $\tilde{\mathcal{A}}$ gemeint ist, lassen wir den Index $\tilde{\mathcal{A}}$ weg und schreiben einfach F_φ.

Definition 8 $\varphi := \varphi(X, \bar{x})$ *heißt* induktiv (monoton, antimonoton), *wenn für alle $\tilde{\mathcal{A}}$ die Abbildung $F_{\varphi,\tilde{\mathcal{A}}}$ induktiv (monoton, antimonoton) ist.*

Definition 9 (Atom) *Für alle Terme $r_1, r_2, \overset{n}{t}$ und alle n-stelligen 2.Stufe-Variablen X und Relationssymbole R sind die Formeln $r_1 \doteq r_2$, $R\overset{n}{t}$ und $X\overset{n}{t}$* Atome (atomare Formeln).

Definition 10 (PFP-Syntax) *Die Syntax der Logik PFP ist durch folgenden Kalkül gegeben:*

$$\frac{}{\varphi} \text{ wenn } \varphi \text{ Atom}; \quad \frac{\varphi}{\neg\varphi}; \quad \frac{\varphi,\psi}{(\varphi\wedge\psi)}; \quad \frac{\varphi}{\exists x\varphi}; \quad \frac{\varphi}{[\mathrm{FP}_{X\overset{n}{\bar{x}}} \ \ \varphi(X,\overset{n}{\bar{x}})]\overset{n}{t}}, \text{ wenn } X \text{ } n\text{-stellig.}$$

Die Symbole $\forall$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ betrachten wir als Abkürzungen. Klammern lassen wir gerne weg, wenn es die üblichen Vorfahrtsregeln erlauben.
Wenn wir in Zukunft eine Formel $R\bar{t}$, $X\bar{t}$ oder $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}} \ \ \varphi(X, \bar{x})]\bar{t}$ hinschreiben, nehmen wir stillschweigend an, daß die Stelligkeit von X bzw. R und die Länge von $\bar{x}$ (und $\bar{t}$) übereinstimmen.

Definition 11 (PFP-Semantik) *Die Relation $\tilde{\mathcal{A}} \models \psi$ ist auf die übliche Weise induktiv über den Aufbau von ψ definiert. Im FP-Schritt gilt:*

$$\tilde{\mathcal{A}} \models [\mathrm{FP}_{X\bar{x}} \ \ \varphi(X, \bar{x})]\bar{t} \ :\Leftrightarrow \ F^{\infty}_{\varphi(X,\bar{x})} \textit{ existiert und enthält } \tilde{\mathcal{A}}(\bar{t})$$

Definition 12 (IFP) IFP *ist diejenige Sublogik von PFP, die man erhält, wenn man im Kalkül von Definition 10 die FP-Regel auf induktive Formeln $\varphi(X, \bar{x})$ einschränkt.*

Um IFP-Formeln als solche kenntlich zu machen, schreiben wir auch $[\mathrm{IFP}_{X\bar{x}} \ \ \ldots]$ statt $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}} \ \ \ldots]$.
Die Semantik des Fixpunktoperators ist für IFP-Formeln einfacher, da der Fixpunkt stets existiert (A^n ist endlich!). Die Syntax von IFP ist weniger einfach, denn die Menge der IFP-Formeln ist bedauerlicherweise nicht entscheidbar. Diesen Umstand kann man beheben, indem man nur Formeln $\varphi(X, \bar{x})$ der Gestalt $X\bar{x} \vee \varphi'(X, \bar{x})$ zuläßt.

Definition 13 (positiv, negativ) *Eine PFP-Formel φ heißt* positiv (negativ) *in X, falls jedes freie Vorkommen von X in φ im Geltungsbereich einer geraden (ungeraden) Anzahl von Negationszeichen steht.*

Definition 14 (LFP) LFP *ist diejenige Sublogik von PFP, die man erhält, wenn man im Kalkül von Definition 10 die FP-Regel auf Formeln $\varphi(X, \bar{x})$ einschränkt, die positiv in X sind.*

Um LFP-Formeln als solche kenntlich zu machen, schreiben wir auch $[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}} \ \ \ldots]$ statt $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}} \ \ \ldots]$.

Satz 15 *Eine LFP-Formel $\varphi(X, \bar{x})$ ist monoton (antimonoton), wenn sie positiv (negativ) in X ist.* $\square$

Aus Satz 15 und Satz 4 folgt:

Satz 16 *LFP $\subset$ IFP* $\square$

Der zum LFP-Operator duale GFP-Operator ist in LFP definierbar:

Definition 17 $[\mathrm{GFP}_{X\bar{x}} \ \ \varphi(X, \bar{x})]\bar{t} := \neg[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}} \ \ \neg\varphi(\neg X, \bar{x})]\bar{t}$

Satz 18 $\tilde{\mathcal{A}} \models [\mathrm{GFP}_{X\bar{x}} \ \ \varphi(X, \bar{x})]\bar{t} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\bar{t}) \in \mathrm{gfp}(F_{\varphi,\tilde{\mathcal{A}}})$ $\square$

Kapitel 3

Reduktionen und vollständige Probleme

Definition 19 (L-Übersetzung) *Gegeben sei eine Signatur σ ohne Funktionssymbole und eine Logik L. Π heißt (n-stellige)* L-Übersetzung *von σ, wenn Π eine Abbildung ist, die jedem k-stelligen Relationssymbol $R \in \sigma$ eine L-Formel $\pi_R(\overset{n}{x}_1, \ldots, \overset{n}{x}_k)$ zuordnet, und jeder Konstante $c \in \sigma$ ein Tupel $\overset{n}{\pi}_c$ von L-Termen.*

Im Sinne von Abschnitt 1.2 ist mit L implizit L[τ] gemeint. Eine L-Übersetzung von σ ist also in Wirklichkeit eine Übersetzung von σ in τ. Eine L[σ']-Übersetzung von σ ist dann eine Übersetzung von σ in σ'.

Definition 20 ($\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$) *Eine n-stellige Übersetzung Π von σ definiert zu jeder Interpretation $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ-Struktur $\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$:*

- *Der Träger von $\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$ ist A^n*
- $R^{(\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi})} := \pi_R^{\tilde{\mathcal{A}}}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ *für alle k-stelligen $R \in \sigma$*
- $c^{(\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi})} := \tilde{\mathcal{A}}(\bar{\pi}_c)$ *für alle Konstanten $c \in \sigma$*

Wir lassen hier durchaus zu, daß $\pi_R(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ zusätzliche freie Variablen hat. In diesem Falle hängt $\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$ von α ab. Ebenso dürfen in $\bar{\pi}_c$ Variablen vorkommen. Falls $\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$ nicht von α abhängt, schreiben wir stattdessen auch $\mathcal{A}^{-\Pi}$.

Definition 21 (L-Reduktion) *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von σ-Strukturen, $\mathcal{D}$ eine Klasse von Interpretation, Π eine L-Übersetzung von σ.*
Dann heißt Π eine L-Reduktion *von $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{C}$, wenn gilt: $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi} \in \mathcal{C}$.*

Definition 22 (hart,definierbar,vollständig) *Eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen heißt für eine Logik M*

- hart *bezüglich L-Reduktion*
  $:\Leftrightarrow$ *für jede M-Formel ψ gibt es eine L-Reduktion von* $\mathrm{Mod}(\psi)$ *auf $\mathcal{C}$*
- definierbar
  $:\Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\chi)$ *für ein $\chi \in M$*
- vollständig *(vollständiges Problem) bezüglich L-Reduktion*
  $:\Leftrightarrow$ *(i) und (ii) ist der Fall*

Man kann auch umgekehrt eine L-Übersetzung zur Expansion von σ-Formeln verwenden:

Satz 23 *Sei* $M \in \{PFP, IFP, LFP, FO, QF\}$ *und* Π *eine M-Übersetzung von* σ*. Dann gibt es für jede Formel* $\psi \in M[\sigma]$ *eine M-Formel* ψ^Π *mit* $\tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi} \models \psi \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \psi^\Pi$
$\square$

Die Definition von ψ^Π ist lang und uninteressant, aber an einem Beispiel sieht man sofort, was gemeint ist:

Beispiel 24 $([\mathrm{FP}_{Xx}\ \ x \doteq v \wedge \exists y Exy]c)^\Pi = [\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \bar{x} \doteq \bar{v} \wedge \exists \bar{y} \pi_E(\bar{x}, \bar{y})]\bar{\pi}_c$

Für Informatikerinnen ist also eine Übersetzung so etwas wie eine Makro-Definition. Mit dieser Vorstellung ist folgender Satz klar:

Satz 25 *Sei* $L \in \{PFP, IFP, LFP, FO, QF\}$, Π *eine L[*σ'*]-Übersetzung von* σ, Π' *eine L-Übersetzung von* σ'*.*
Dann existiert eine L-Übersetzung $\Pi' \circ \Pi$ *von* σ *mit*

$$\psi^{\Pi' \circ \Pi} = (\psi^\Pi)^{\Pi'}$$

$\square$

Durch die Betrachtung von Übersetzungen als Expansionen von Formeln finden wir auch einen Zusammenhang zwischen vollständigen Problemen und Normalformen. Betrachten wir hierfür ein für M bezüglich L-Reduktionen vollständiges Problem $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ist definiert durch eine Formel $\chi \in M[\sigma]$. Für jede M-Formel ψ gibt es eine L-Reduktion Π von $\mathrm{Mod}(\psi)$ auf $\mathrm{Mod}(\chi)$, d.h. ein Π mit $\tilde{\mathcal{A}} \models \psi \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi} \models \chi$. Nach Satz 23 ist also $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi^\Pi$. Da sich (jedenfalls für L=QF) die χ^Π alle sehr ähnlich sind, verdient die Menge der χ^Π den Namen Normalform.
Wir fassen dies in einem Satz zusammen:

Satz 26 *Sei M wie in Satz 23, L eine Sublogik von M und* $\mathrm{Mod}(\chi)$ *hart für M bezüglich L-Reduktion. Dann ist jede M-Formel äquivalent zu* χ^Π *für eine L-Übersetzung* Π*. Ist* $\chi \in M[\sigma]$*, so ist* $\{\chi^\Pi \mid \Pi$ *ist L-Übersetzung von* $\sigma\}$ *eine Normalform für M.* $\square$

Wir werden es im Folgenden nur mit L=QF, also mit QF-Übersetzungen zu tun haben. Diese nennen wir quantorenfreie Übersetzungen.

Kapitel 4

Spiele

4.1 Definitionen

Wir wiederholen kurz die in der Einleitung gegebenen Regeln des Geographiespiels auf einer Struktur mit Kantenrelation: Die Spielerinnen ziehen von einer Startposition aus einen Spielstein abwechselnd entlang einer Kante. Wer nicht ziehen kann, hat verloren.
Wir werden die Geographiespiele und den Begriff des Gewinnens jetzt exakt definieren. Dabei werden wir Geographiespiele einfach "Spiele" nennen, und zwar, weil das Geographiespiel einen Prototyp für die Strategiespiele für zwei Personen ohne Zufallselemente darstellt. Sei hierzu $\mathcal{S}$ irgend ein solches Spiel (Mühle, Schach, Halma...). S sei die Menge aller möglichen Stellungen des Spiels. Eine Stellung soll dabei die gesamte Information über den Zustand des Spiels wiedergeben, also welche Figuren im Spiel sind, wo sie stehen, mit welcher Farbe als nächstes gezogen werden darf usw. Z sei die Menge derjenigen $(s_1, s_2) \in S \times S$, für die die Überführung des Spiels von der Stellung s_1 in die Stellung s_2 nach den Regeln des Spiels ein erlaubter Zug ist. So notiert kann man $\mathcal{S}$ als das Geographiespiel auf der Struktur mit Träger S und Kantenrelation Z auffassen[1].

Definition 27 **(σ_s)** *$\sigma_s := \{Z, s\}$, Z zweistelliges Relationssymbol, s Konstante.*

Definition 28 (Spiel) *Eine σ_s-Struktur $\mathcal{S} = (S, Z, s)$ heißt* Spiel.
Die Elemente von S nennen wir Stellungen*, die Elemente von Z die* erlaubten Züge*, und s die* Startstellung *von $\mathcal{S}$.*

Definition 29 (Strategie) *Eine* Strategie *für ein Spiel $\mathcal{S} = (S, Z, s)$ ist eine partielle Abbildung $Str : S \to S$, deren Graph Teilmenge von Z ist.*

D.h. eine Strategie Str bildet Stellungen auf Stellungen ab, so daß $(a, Str(a))$ ein erlaubter Zug ist. Es handelt sich um eine partielle Funktion, da nicht immer ein Zug möglich ist. Daß eine Strategie für eine Stellung keinen Zug definiert, erlauben wir in obiger Definition auch dann, wenn einer möglich wäre. Man kann das so interpretieren, daß die Spielerin, die diese Strategie verfolgt, in dieser Stellung aufgibt.

[1] Für die Endstellungen des Spiels, also solche, die anzeigen, daß eine der beiden Parteien verloren hat, muß man sich die Sache natürlich so zurechtbasteln, daß es paßt: Züge in eine solche Stellung sollen nur erlaubt sein, wenn man mit diesem Zug gewinnt, denn beim Geographiespiel soll ja gewinnen, wer zuletzt zieht

Definition 30 (gewinnt, Gewinnstrategie, Gewinnstellung, Verluststellung) *Sei ein Spiel $\mathcal{S} = (S, Z, s)$ und eine Stellung $a \in S$ gegeben.*

- I gewinnt in a in k Halbzügen
  $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Strategie Str_I, so daß es für alle Strategien Str_{II} eine ungerade Zahl $0 < j < k$ gibt, für die $Str_I \circ (Str_{II} \circ Str_I)^{\frac{j-1}{2}}(a)$ existiert, aber nicht im Definitionsbereich von Str_{II} liegt.*

  In diesem Fall heißt:

  - Str_I Gewinnstrategie für I in a
  - a Gewinnstellung von $\mathcal{S}$.

- II gewinnt in a in k Halbzügen
  $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Strategie Str_{II}, so daß es für alle Strategien Str_I eine gerade Zahl $0 \leq j < k$ gibt, für die $(Str_{II} \circ Str_I)^{\frac{j}{2}}(a)$ existiert, aber nicht im Definitionsbereich von Str_I liegt.*

  In diesem Fall heißt:

  - Str_{II} Gewinnstrategie für II in a
  - a Verluststellung von $\mathcal{S}$.

- I gewinnt $\mathcal{S}$ $:\Leftrightarrow$ *s ist Gewinnstellung von $\mathcal{S}$*

- II gewinnt $\mathcal{S}$ $:\Leftrightarrow$ *s ist Verluststellung von $\mathcal{S}$*

Definition 31 ($\mathcal{GAME}$) *Die Menge der Spiele, die I gewinnt, heißt $\mathcal{GAME}$.*

Bemerkungen:

- "I(II) gewinnt a in k Halbzügen" ist oben so definiert, daß in Partien, die mit einer entsprechenden Gewinnstrategie gespielt werden, höchstens $k-1$ mal gezogen wird. Der Zug, der nicht mehr möglich ist, wird also mitgezählt. Dies hat rechnerische Vorteile.

- Eine Quelle möglicher Verwirrung soll hier präventiv genannt werden:
  "I gewinnt a" bedeutet nach obiger Definition, daß diejenige gewinnt, die am Zug ist. Einen Halbzug später ist aber die Andere am Zug. Deshalb wird bei jedem Halbzug I in II umbenannt und umgekehrt. Dieser Mißstand ist hier nicht vermeidbar, da wir zulassen (und auch verwenden werden), daß ein und die selbe Stellung beiden Spielerinnen zugänglich ist.
  Der langen Rede kurzer Sinn: Diejenige die dran ist heißt I, nicht diejeige die am Anfang des Spiels dran war.
  Wenn wir die Strategie einer Spielerin über mehrere Züge hinweg verfolgen, werden wir andere Wege finden, diese zu benennen.

4.2 Remisfreie Spiele

Unser Programm ist es (siehe Einleitung) zu zeigen, daß $\mathcal{GAME}$ vollständig für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion ist, um daraus Normalformen für IFP zu gewinnen, die IFP=LFP beweisen. Hierbei ergibt sich eine Komplikation: Will man durch Induktion für jede IFP-Formel eine quantorenfreie Reduktion auf $\mathcal{GAME}$ angeben, bekommt man Schwierigkeiten mit der Negation. Denn die Negation von "I gewinnt $\mathcal{S}$" ist <u>nicht</u> "II gewinnt $\mathcal{S}$". Denn nicht in jeder Stellung gibt es für eine der beiden Parteien eine Gewinnstrategie. Anders ausgedrückt: Remis ist möglich. Die Schwierigkeit besteht also darin, zweiwertige Formeln (wahr/falsch) auf dreiwertige Spiele (gewinnt/remis/verliert) abzubilden. Der listige Ausweg besteht darin, sich auf Spiele zu beschränken, bei denen Remis nicht möglich ist.

Definition 32 (Remisstellung, entschieden, remisfrei)
Für ein Spiel $\mathcal{S} = (S, Z, s)$ *heißt* $a \in S$ Remisstellung, *wenn* a *weder Gewinn- noch Verluststellung ist.*
$\mathcal{S}$ *heißt* entschieden, *wenn* s *keine Remisstellung ist.*
$\mathcal{S}$ *heißt* remisfrei, *wenn kein* $a \in S$ *Remisstellung ist.*

An dieser Stelle ist es wichtig, kurz über den Unterschied zwischen den Eigenschaften "entschieden" und "remisfrei" zu meditieren. Nicht alle entschiedenen Spiele sind remisfrei.

Definition 33 ($\mathcal{RF}$) $\mathcal{RF}$ *ist die Menge der remisfreien Spiele.*

4.3 Der Hauptsatz

Unsere zentrale Behauptung ist es, daß man tatsächlich mit remisfreien Spielen auskommt. Genauer gesagt, daß $\mathcal{GAME}$ hart für IFP ist, und zwar vermittels solcher quantorenfreier Reduktionen, die auf remisfreie Spiele abbilden.

Definition 34 *Eine Übersetzung* Π *von* σ_s *heißt* remisfrei (entschieden), *wenn für alle* $\tilde{A}$ *das Spiel* $\tilde{A}^{-\Pi}$ *remisfrei ist.*

Hauptsatz 35 *Für jede IFP-Formel* ψ *gibt es eine remisfreie quantorenfreie Übersetzung* Π *von* σ_s*, die eine Reduktion von* $\mathrm{Mod}(\psi)$ *auf* $\mathcal{GAME}$ *ist.*
Zusatz: *Man kann* Π *mit* $\bar{\pi}_s = \tilde{d}$ *wählen.*

Es folgt sofort:

Korollar 36 $\mathcal{GAME}$ *ist hart für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion.* $\Box$

Korollar 37 $\mathcal{RF} \cap \mathcal{GAME}$ *ist hart für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion.* $\Box$

Korollar 37 ist um eine Spitzfindigkeit schwächer als der Hauptsatz: Der Hauptsatz liefert für jede IFP-Formel ψ eine quantorenfreie Übersetzung Π mit

$$\tilde{A}^{-\Pi} \text{ ist remisfrei} \wedge (\text{I gewinnt } \tilde{A}^{-\Pi} \Leftrightarrow \tilde{A} \models \psi),$$

Korollar 37 liefert higegen Π mit

$$(\tilde{A}^{-\Pi} \text{ ist remisfrei} \wedge \text{I gewinnt } \tilde{A}^{-\Pi}) \Leftrightarrow \tilde{A} \models \psi.$$

Wir werden zwei Beweise für den Haupsatz angeben. Der erste, "vorläufige" (im Kapitel **Zwischenspiel**) verwendet, daß $\mathcal{GAME}$ hart für IFP ist. D.h. er reduziert Spiele auf remisfreie Spiele. Er ist also nicht tauglich für unser Programm, einen neuen Beweis für IFP=LFP zu liefern. Wir führen ihn trotzdem aus, weil er anschaulich ist und Konzepte klar macht, die im zweiten "endgültigen" Beweis benutzt werden.
Im übrigen ist der Hauptsatz stärker formuliert als notwendig ist, um daraus IFP=LFP zu erhalten. Hierfür wäre es ausreichend, entschiedene Spiele zu betrachten, wodurch sich der Beweis (geringfügig) vereinfachen würde. Daß es dennoch interessant ist, die Spiele remisfrei zu halten, zeigt die Anwendung in Kapitel 9.

Kapitel 5

Diagramme

5.1 Definition

Für den Beweis des Hauptsatzes werden wir zu jeder IFP-Formel eine quantorenfreie Übersetzung von σ_s angeben müssen. Da dies zu recht langen und unleserlichen quantorenfreien Formeln führt, werden wir so vorgehen: Wir wandeln IFP-Formeln zunächst in (noch zu definierende) Diagramme um und geben eine Vorschrift an, wie man aus einem solchen Diagramm eine quantorenfreie Übersetzung von σ_s gewinnt. Stellvertretend für die zugehörige Übersetzung von σ_s wird ein Diagramm zu jeder Struktur ein Spiel definieren, das über die Gültigkeit der einer IFP-Formel entscheidet.
Diagramme haben den Vorteil, daß sie leichter zu lesen und beweistechnisch leichter handhabbar sind als quantorenfreie Übersetzungen.

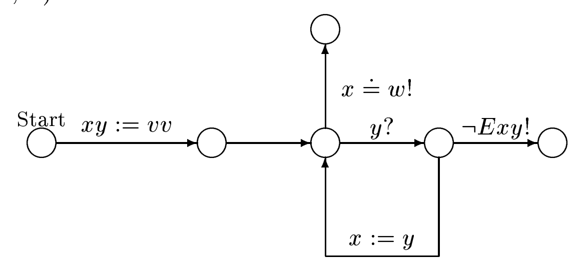
Definition 38 (Diagramm) *Ein* σ-Diagramm D *besteht aus einer endlichen Menge von* Feldern *und einer Menge von beschrifteten oder unbeschrifteten* Pfeilen *zwischen diesen Feldern. Eines der Felder ist mit "Start" beschriftet und heißt das* Startfeld *von* D. *Die Beschriftung jedes beschrifteten Pfeils hat eine der folgenden Formen:*

- *"*$\bar{v}$*?" für ein Tupel* $\bar{v}$ *von Variablen*
- *"*$\bar{v} := \bar{t}$*" für gleichlange Tupel* $\bar{v}$ *von Variablen und* $\bar{t}$ *von Termen.*
- *"*ψ*!" für ein* $\psi \in QF[\sigma]$*.*

Wenn die Signatur eines Diagramms nicht explizit genannt wird, meinen wir ein τ-Diagramm.

Beispiel 39

$D(v,w) :=$



ist ein $\{E\}$-Diagramm.

Definition 40 (Figur von D) *Sei D ein Diagramm. Dann heißen die Variablen, die in einer Beschriftung "$\bar{x}$?" oder "$\bar{x} := \bar{t}$" im Tupel $\bar{x}$ auftauchen,* Figuren *von D.*

Zu Beispiel 39: Die Figuren von $D(v,w)$ sind x und y.

Definition 41 ($\tilde{\mathcal{A}}^D$) *Ein σ-Diagramm D definiert zu jeder σ-Interpretation $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \alpha)$ ein Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^D$:*

- *Die Stellungen dieses Spiels sind die Paare (ⓕ, β), wobei ⓕ ein Feld von D ist und β eine $\mathcal{A}$-Belegung, die alle Variablen außer den Figuren von D so belegt wie α (D.h wenn $\bar{x}$ die Figuren von D sind, so ist $\beta = \alpha[\frac{\bar{x}}{\bar{a}}]$ für irgendwelche Elemente $\bar{a}$ von $\mathcal{A}$).*
- *Die Startstellung ist (Start,α).*
- *((ⓕ, β), (ⓕ', β')) ist ein erlaubter Zug,*
  wenn es in D einen Pfeil von ⓕ nach ⓕ' gibt so daß eine der folgenden Aussagen zutrifft:
  - *Der Pfeil ist unbeschriftet und $\beta' = \beta$.*
  - *Der Pfeil ist mit "$\bar{v}$?" beschriftet und $\beta' = \beta[\frac{\bar{v}}{\bar{a}}]$ für irgendwelche $\bar{a} \in A$.*
  - *Der Pfeil ist mit "$\bar{v} := \bar{t}$" beschriftet und $\beta' = \beta[\frac{\bar{v}}{\beta(\bar{t})}]$*
  - *Der Pfeil ist mit "ψ!" beschriftet, $\beta' = \beta$ und $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi$*

Man stellt sich das Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^D$ am besten so vor:
Gespielt wird auf einem Spielbrett, das aus zwei Teilen besteht, $\mathcal{A}$ und D. Die Figuren von D sind Spielfiguren, die sich auf $\mathcal{A}$ bewegen, d.h. die Elemente von A sind die möglichen Positionen dieser Spielfiguren. Ein zusätzlicher Spielstein bewegt sich nur auf den Feldern von D. Er wird von den beiden Spielerinnen abwechselnd entlang eines Pfeils gezogen. Die Beschriftung des Pfeils gibt an, wie währenddessen die Figuren auf $\mathcal{A}$ von der jeweiligen Spielerin bewegt werden dürfen. Lies "$\bar{v}$?" als "Stelle die Figuren $\bar{v}$ in beliebige Positionen" und "$\bar{v} := \bar{t}$" als "Stelle die Figuren $\bar{v}$ in die Positionen $\bar{t}$". Entlang eines mit "ψ!" beschrifteten Pfeiles darf nur gezogen werden, wenn ψ für die aktuelle Position der Figuren erfüllt ist.
Wer nicht mehr ziehen kann, hat verloren.

Beispiel 42 Für das Diagramm $D(v,w)$ aus Beispiel 39 und für alle $\{E\}$-Interpretationen $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \gamma)$ gilt:[1]

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{G}}^{D(v,w)} \Leftrightarrow \text{ es gibt einen Weg von } \gamma(v) \text{ nach } \gamma(w)$$

Anders ausgedrückt: I gewinnt $\tilde{\mathcal{G}}^{D(v,w)} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \models \psi(v,w)$, mit

$$\psi(v,w) := [\mathrm{IFP}_{Xx}\ \ x \doteq w\ \vee\ \exists y(Exy \wedge Xy)]v$$

An diesem Beispiel kann man die Rolle der verschiedenen Variablen in Diagrammen studieren.
Die Belegung von v und w ändert sich während des Spiels nicht. Wer das Spiel gewinnt, hängt davon ab, wie v und w durch die vorgegebene Belegung γ interpretiert werden. Dies entspricht der Tatsache, daß v und w frei in $\psi(v,w)$ sind.

[1] Das Beispiel funktioniert natürlich nur, wenn x, y, v und w tatsächlich verschiedene Variablen bezeichnen. Wir nehmen ab jetzt stets an, daß je zwei verschiedene Variablennamen, die zusammen explizit in einem Diagramm auftauchen, dort auch verschiedene Variablen bezeichnen (damit das nicht falsch verstanden wird: zwei verschiedene Variablen können natürlich gleich belegt werden.).

Die Figuren x und y von $D(v,w)$ entsprechen gebundenen Variablen von $\psi(v,w)$. Ihre Belegung ändert sich im Laufe des Spiels. Wer das Spiel gewinnt, hängt nicht von $\gamma(x)$ und $\gamma(y)$ ab. Wir werden Diagramme in der Regel so angeben, daß der Ausgang des Spiels nicht davon abhängt, wie die Figuren zu Beginn des Spiels belegt sind. Diagramme, die das beachten, nennen wir "brav":

Definition 43 (brav) *Ein Diagramm D heißt* brav, *wenn für alle $\tilde{A}$, jede Figur x von D und alle $a \in A$ gilt:*

$$\text{I (II) gewinnt } \tilde{A}^D \Leftrightarrow \text{ I (II) gewinnt } \tilde{A}[\frac{x}{a}]^D$$

Daß ein Diagramm brav ist, erreichen wir dadurch, daß wir jeder Figur x durch eine Beschriftung "$x := t$" einen sinnvollen Anfangswert zuweisen, bevor sie anderweitig benutzt wird.

Definition 44 *Ein Diagramm D heißt* remisfrei (entschieden), *wenn für alle Interpretationen $\tilde{A}$ das Spiel $\tilde{A}^D$ remisfrei (entschieden) ist.*

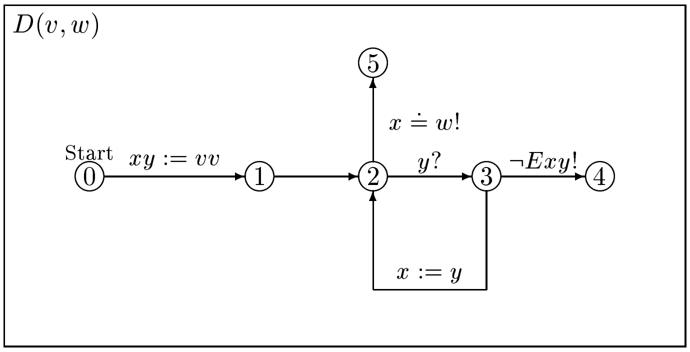
5.2 Diagramme und quantorenfreie Übersetzungen

Satz 45 *Für jedes brave Diagramm D gibt es eine quantorenfreie Übersetzung* Π *von σ_s mit*

$$\text{I (II) gewinnt } \tilde{A}^{-\Pi} \Leftrightarrow \text{ I (II) gewinnt } \tilde{A}^D$$

und $\bar{\pi}_s = \tilde{d}$. Wenn D remisfrei ist, ist auch Π *remisfrei.*

Beweis: Wir verzichten auf einen formalen Beweis und zeigen an unserem Beispiel $D(v,w)$, wie man ein Diagramm in eine quantorenfreie Übersetzung umsetzt: Numeriere zunächst die Felder des Diagramms, das Startfeld erhält die Nummer 0.



Setze nun

$$\begin{array}{rcll}
\pi_Z(\overset{6}{u}xy, \overset{6}{u}'x'y') & = & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 0”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 1\text{”} \wedge x' \doteq v \wedge y' \doteq v &) \\
& \vee & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 1”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 2\text{”} \wedge x' \doteq x \wedge y' \doteq y &) \\
& \vee & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 2”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 3\text{”} \wedge x' \doteq x &) \\
& \vee & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 3”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 4\text{”} \wedge x' \doteq x \wedge y' \doteq y \wedge \neg Exy &) \\
& \vee & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 3”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 2\text{”} \wedge x' \doteq y \wedge y' \doteq y &) \\
& \vee & (\text{“}\overset{6}{u}\text{= 2”} \wedge \text{“}\overset{6}{u}' = 5\text{”} \wedge x' \doteq x \wedge y' \doteq y \wedge x \doteq w &)
\end{array}$$

Hierbei sei

$$\text{“}\overset{6}{u}\text{= } k\text{”} := \begin{cases} \bigwedge_{0<j<6} u_0 \doteq u_j & \text{falls k=0} \\ (\bigwedge_{0<j<k} u_0 \doteq u_j) \wedge u_0 \not\doteq u_k & \text{falls } 0 < k < 6 \end{cases}$$

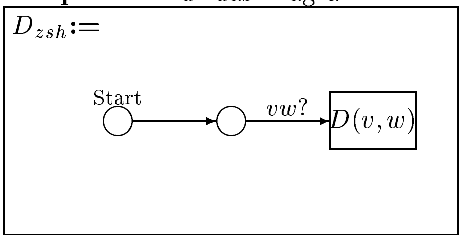
Jedes Disjunktionsglied der Formel $\pi_Z(\overset{6}{u}\; xy, \overset{6}{u}'x'y')$ entspricht einem Pfeil im Diagramm und gibt an, welche Bewegungen des Spielsteins und der Figuren durch den Pfeil erlaubt werden.
Die erlaubten Züge in $\tilde{\mathcal{G}}^{-\Pi}$ entsprechen also erlaubten Zügen in $\tilde{\mathcal{G}}^{D_{vw}}$ und umgekehrt. Man beachte, daß in jeder Interpretation für genau ein $0 \leq k < 6$ die Formel "$\overset{6}{u}= k$" erfüllt ist. Deshalb korrespondiert *jede* Stellung von $\tilde{\mathcal{G}}^{-\Pi}$ zu einer von $\tilde{\mathcal{G}}^{D(v,w)}$. Setzt man außerdem $\bar{\pi}_s := dddddddd$, beginnt das Spiel tatsächlich bei Start (denn in jeder Interpretation gilt $\overset{6}{u}\doteq dddddd \rightarrow$ "$\overset{6}{u}= 0$").
Da das Diagramm brav ist, kommt es auf die Startposition von x und y nicht an, wir können also ebenfalls jeweils d wählen.

Dieses Verfahren läßt sich ohne weiteres auf jedes brave Diagramm übertragen. □

5.3 Subdiagramme

Bei der Wiedergabe von Diagrammen werden wir bereits definierte Diagramme als Subdigramme verwenden. Pfeile, die in ein solches Subdiagramm führen, sollen dabei immer an dessen Startfeld enden.

Beispiel 46 Für das Diagramm



und alle Graphen $\mathcal{G}$ gilt:

$$\text{I gewinnt } \mathcal{G}^D_{zsh} \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend.}$$

Außerdem wollen wir auch Pfeile wieder aus einem Subdiagramm herausführen. Dazu werden wir in diesem ein Exitfeld ausweisen, an dem alle Pfeile starten, die aus dem Subdiagramm herausführen.

Kapitel 6

Zwischenspiel

In diesem Kapitel skizzieren wir einen Beweis für folgenden Satz:

Satz 47 *Es gibt eine remisfreie quantorenfreie Reduktion von* $\mathcal{GAME}^1$ *auf* $\mathcal{GAME}$.

Aus Satz 47 kann man den Hauptsatz (ohne den Zusatz) folgern, wenn man voraussetzt, daß folgende Behauptung schon bewiesen ist:

($\diamondsuit$) $\mathcal{GAME}$ ist hart für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion.

Beweis des Hauptsatzes auf Basis von ($\diamondsuit$) und Satz 47: Sei ψ eine IFP-Formel. ($\diamondsuit$) liefert eine quantorenfreie Reduktion von $\mathrm{Mod}(\psi)$ auf $\mathcal{GAME}$, Satz 47 eine remisfreie quantorenfreie Reduktion Π' von $\mathcal{GAME}$ auf $\mathcal{GAME}$. Dann ist $\Pi \circ \Pi'$ eine remisfreie quantorenfreie Reduktion von $\mathrm{Mod}(\psi)$ auf $\mathcal{GAME}$. □

Im nächsten Kapitel werden wir den Hauptsatz direkt beweisen, woraus ($\diamondsuit$) sofort folgt (in der Tat haben wir ($\diamondsuit$) schon Korollar 36 genannt). Man erhält ($\diamondsuit$) aber auch aus Normalformsätzen für IFP (z.B. in [Dah87] oder auch Bemerkung 57).

Beweis (-Skizze) für Satz 47 Nach Satz 45 genügt es, ein remisfreies braves σ_s-Diagramm D_{rf} anzugeben mit[2]

$$\text{I gewinnt } \mathcal{S} \Leftrightarrow \text{I gewinnt } \mathcal{S}^{D_{rf}}$$

Die Felder aller Diagramme in diesem Kapitel sind schwarz-weiß gefärbt. Wir stellen uns hierzu vor, daß das Spiel $\mathcal{S}^{D_{rf}}$ von zwei Spielerinnen namens "Weiß" und "Schwarz" gespielt wird. Auf Grund der alternierenden Färbung ist Weiß immer auf den weißen Feldern am Zug, Schwarz auf den schwarzen. Weiß beginnt. Wir basteln D_{rf} also so, daß Weiß das Spiel $\mathcal{S}^{D_{rf}}$ gewinnt, wenn I das Spiel $\mathcal{S}$ gewinnt.

Um das Spiel remisfrei zu machen, müssen wir es auf irgend eine Weise in der Länge beschränken. Auf geordneten Strukturen ist dies einfach. Man kann eine Figur als Zähler verwenden, der bei jedem Halbzug dekrementiert wird. Ist der Zähler

[1] Wir hatten Reduktionen so definiert, daß von einer Klasse von Interpretationen auf eine Klasse von Strukturen reduziert wird. Korrekter müßten wir also definieren:

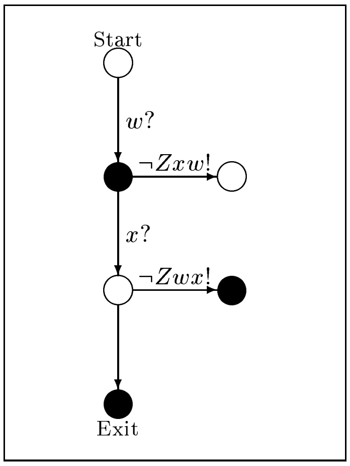
$$\widetilde{\mathcal{GAME}} := \{(\mathcal{S}, \beta) \mid \mathcal{S} \in \mathcal{GAME}, \beta\ \sigma_s\text{-Belegung}\}$$

und Satz 47 so formulieren:
Es gibt eine remisfreie quantorenfreie Reduktion von $\widetilde{\mathcal{GAME}}$ auf $\mathcal{GAME}$.

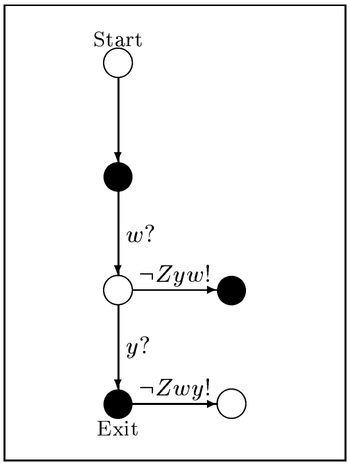
[2] Im Sinne der vorigen Fußnote müßten wir hier eigentlich "I gewinnt $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ I gewinnt $\tilde{\mathcal{S}}^{D_{rf}}$" schreiben. Wir müssen darauf achten, daß der Ausgang des Spiels $\tilde{\mathcal{S}}^{D_{rf}}$ nicht von der zur Interpretation $\tilde{\mathcal{S}}$ gehörigen Belegung abhängt. Dies ist gewährleistet, wenn alle Variablen, die in D_{rf} auftauchen, Figuren sind und D_{rf} brav ist.

abgelaufen bevor jemand gewonnen hat, so gewinnt Schwarz.[3] Auf ungeordneten Strukturen fehlt uns die Möglichkeit zu zählen. Wir brauchen also eine andere Art der Zeitmessung. Hierzu verwenden wir ein parallel gespieltes Spiel größtmöglicher endlicher Länge (auf der selben Struktur $\mathcal{S}$). Um zwei parallel gespielte Spiele innerhalb von $\mathcal{S}^{D_{rf}}$ simulieren zu können, definieren wir zwei Bausteine:

$\boxed{\text{1 Runde(x)}}$:=



$\boxed{\text{1 Runde(y)}}$:=



Man mache sich klar, daß diese beiden Diagramme jeweils eine Runde (d.h. zwei Halbzüge) im ursprünglichen Spiel $\mathcal{S}$ simulieren, wobei x (bzw. y) auf dem Startfeld mit der Stellung vor dieser Runde belegt ist, auf dem Exitfeld mit der Stellung nach dieser Runde. w ist eine Hilfsvariable und taucht außerhalb dieser Subdiagramme nicht auf.
Man bemerke, daß in $\boxed{\text{1 Runde(x)}}$ Weiß zuerst zieht, in $\boxed{\text{1 Runde(y)}}$ hingegen Schwarz (im simulierten Spiel, nicht im Diagramm!).
Zu Zwecken des Vergleichs der beiden Spiele brauchen wir noch folgende Definition:

Für eine Stellung $a \in \mathcal{S}$ sei

$$l(a) := \begin{cases} \min\{k \mid \text{ I gewinnt } \mathcal{S} \text{ in } a \text{ in } 2k \text{ Halbzügen}\}, & \text{falls } a \text{ Gewinnstellung} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$l(a)$ nennen wir die "Länge" von a. Die Länge einer Stellung ist also die Anzahl der Runden, die bei optimaler Strategie schlimmstenfalls nötig ist, um das Spiel von dieser Stellung aus zu gewinnen.
Man überlege sich, daß Weiß in $\boxed{\text{1 Runde(x)}}$ gewinnt, wenn zuvor $l(x) = 1$ war. Schwarz gewinnt in $\boxed{\text{1 Runde(y)}}$, wenn zuvor $l(y) = 1$ war.

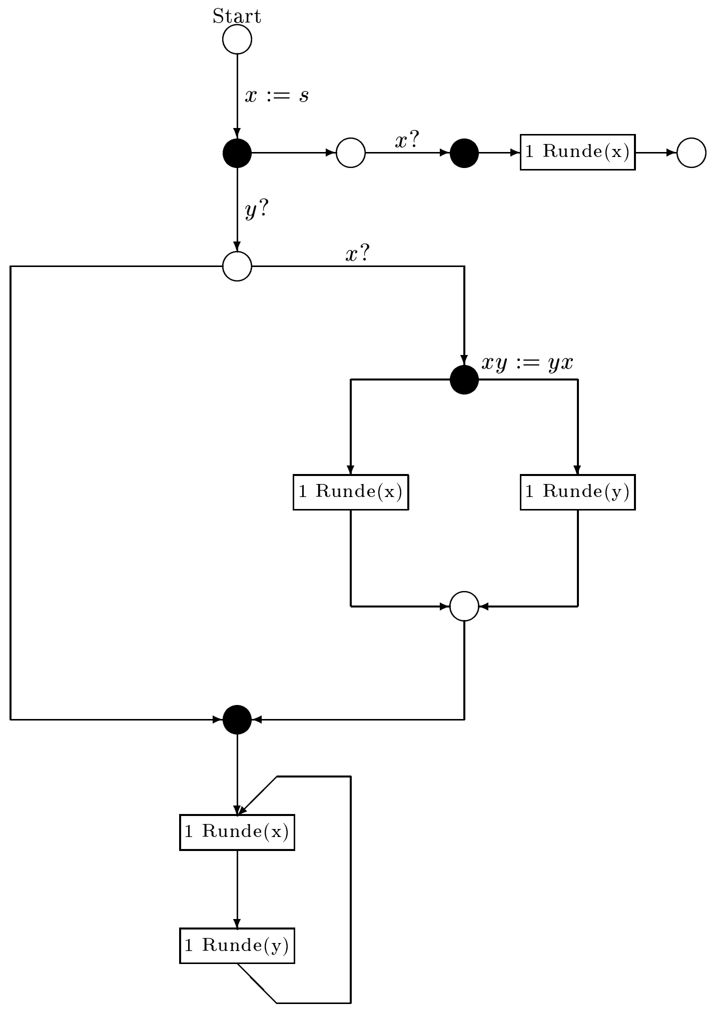
Wir betrachten nun zunächst ein entschiedenes Diagramm D_{ent} mit der Eigenschaft

$$(*) \text{ I gewinnt } \mathcal{S} \Leftrightarrow \text{ I gewinnt } \mathcal{S}^{D_{ent}}$$

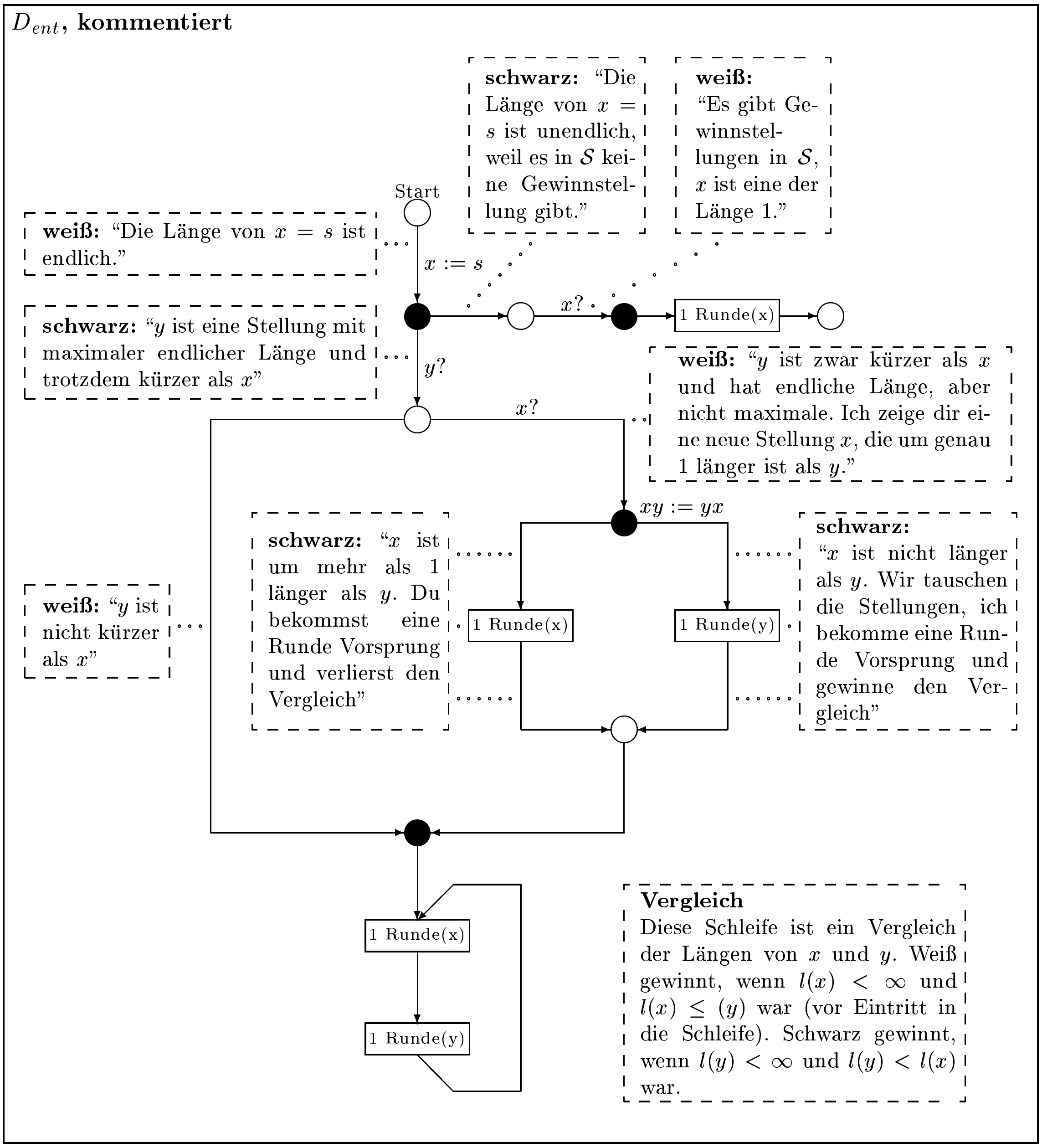
um dieses dann nachträglich zu einem remisfreien Diagramm auszubauen.

[3]Für geordnete Strukturen zeigt man auf diese Weise leicht, daß schon die azyklichen Spiele vollständig für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion sind.

$D_{ent} :=$



Um das Spiel $\mathcal{S}^{D_{ent}}$ zu verstehen, bilden wir dieses Diagramm in einer kommentierten Version auf der nächsten Seite nochmal ab.



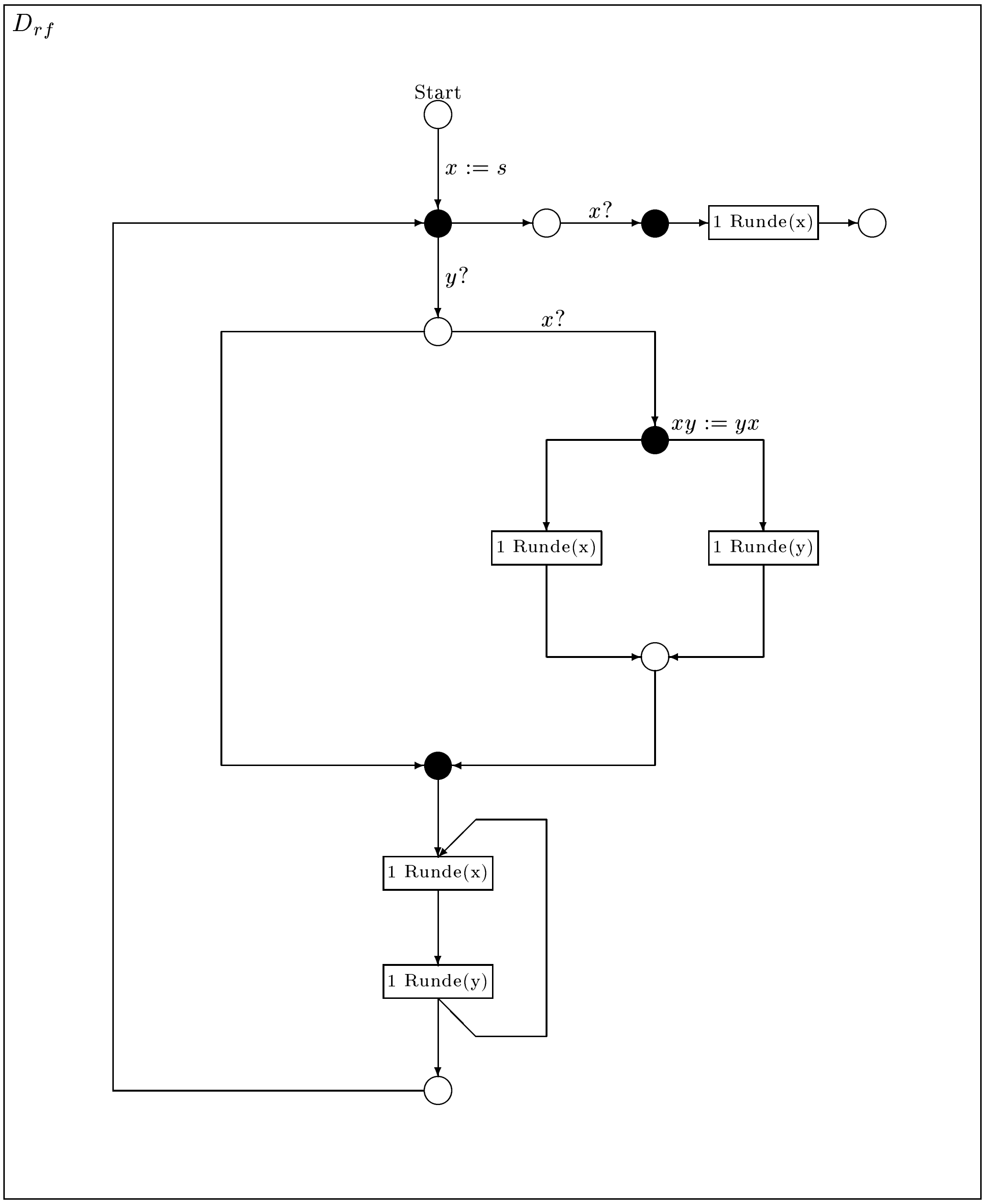
Die Texte im Diagramm sind als Dialoge zu lesen. Sie geben das wieder, was die jeweilige Spielerin durch die Benutzung des zugehörigen Pfeiles implizit behauptet. Zu Beginn des Spiels steht Aussage gegen Aussage: Weiß behauptet "I gewinnt $\mathcal{S}$", Schwarz behauptet, daß das nicht der Fall ist.
Man prüfe nach, daß

- jede Behauptung die zuvor von der Gegnerin aufgestellte Behauptung widerlegt,

- im Fall, daß eine Behauptung falsch ist, sie in einer der angegebenen Weisen widerlegt werden kann,

- jede der beiden Spielerinnen in der Vergleichsschleife (unten) gewinnen kann, wenn sie mit allen Behauptungen recht hatte.

Auf diese Weise sollte es klar werden, daß D_{ent} $(*)$ erfüllt und entschieden ist.
Nun ist aber D_{ent} nicht remisfrei, denn dazu dürfte keine Stellung (f, β) von $\mathcal{S}^{D_{ent}}$ eine Remisstellung sein. Sei nun f z.B. das erste Feld der Vergleichsschleife, und β belege x und y mit Remisstellungen (von $\mathcal{S}$). Dann ist offensichtlich (f, β) Remisstellung von $\mathcal{S}^{D_{ent}}$.
Wir müssen Schwarz also in jeder Runde von neuem die Gelegenheit geben, x als Remisstellung zu entlarven. Dies leistet das folgende Diagramm D_{rf}:



Schwarz kann im Spiel $\mathcal{S}^{D_{rf}}$ nach jedem beliebigen Durchlauf der Vergleichs-Schleife das zuvor dargestellte Verfahren bemühen, um zu gewinnen, wenn x keine Gewinnstellung in $\mathcal{S}$ ist. Wenn hingegen x eine Gewinnstellung in $\mathcal{S}$ ist, kann Schwarz das Spiel nicht dadurch verzögern, daß sie dieses Verfahren von vorne aufrollt: Wählt sie $l(y) \geq l(x)$, so kann dies von Weiß ignoriert werden (linker Pfeil). Wählt sie $l(y) < l(x)$, so muß Weiß zwar den rechten Pfeil nehmen, wählt aber x mit

$l(x) = l(y) + 1$, also jedenfalls so, daß die Länge von x nicht größer ist als vorher. Weiß verliert also nichts, wenn x Gewinnstellung war. $\square$

Ich hoffe, diese Skizze hat es einigermaßen klar gemacht, daß D_{rf} tatsächlich das gewünschte leistet. Die Tätigkeit des induktiven Angebens von Gewinnstrategien, wie sie für einen exakteren Beweis notwendig wäre, wollen wir hier nicht üben, da wir ihrer schon im nächsten Kapitel in ermüdender Ausführlichkeit huldigen werden.

Kapitel 7

Beweis des Hauptsatzes

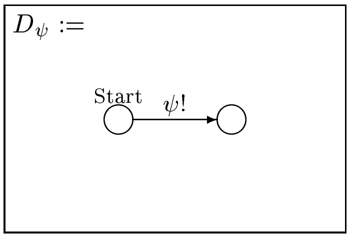
Satz 48 *Für jede IFP-Formel ψ gibt es ein braves, remisfreies Diagramm D_ψ mit*

$$I \textit{ gewinnt } \tilde{A}^{D_\psi} \Leftrightarrow \tilde{A} \models \psi$$

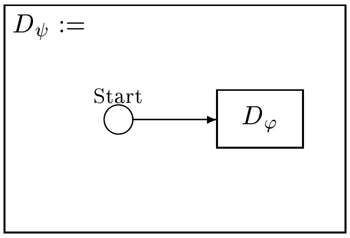
Aus diesem Satz folgt mit Satz 45 der Hauptsatz (inclusive Zusatz). Der Rest des Kapitels besteht aus dem Beweis von Satz 48.

Wir definieren D_ψ induktiv über den Aufbau von ψ:

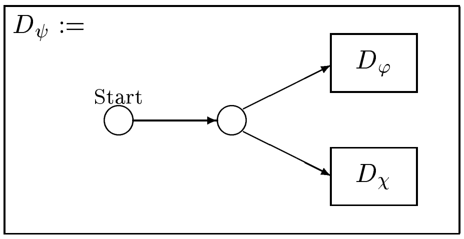
(a)<u>falls ψ Atom</u>



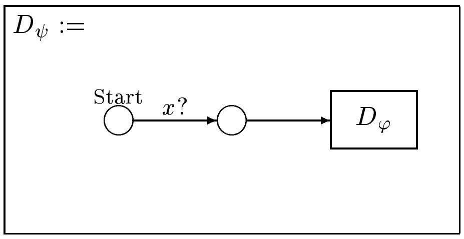
(b) <u>falls $\psi = \neg\varphi$</u>



(c) <u>falls $\psi = (\varphi \wedge \chi)$</u>

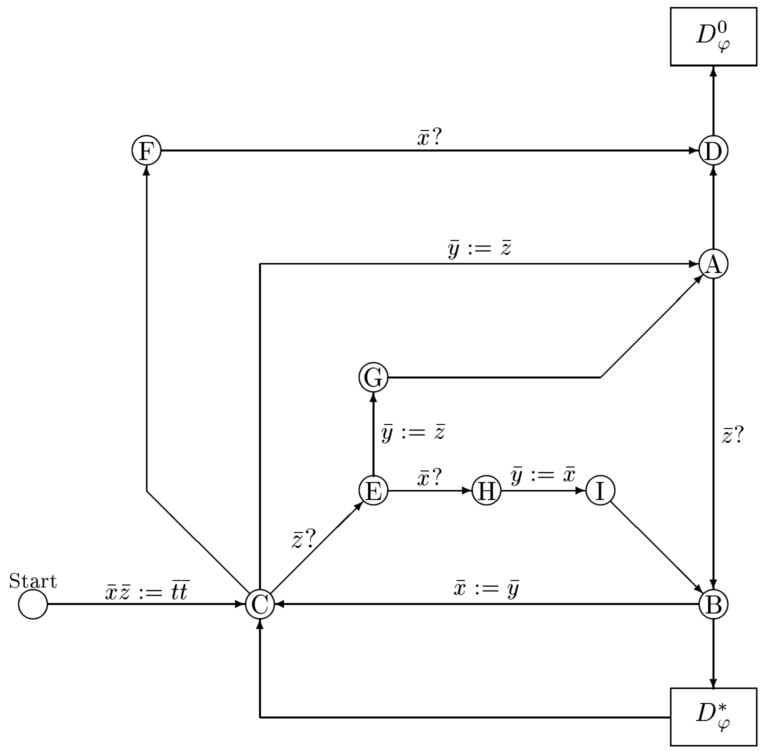


(d) <u>falls $\psi = \exists x\varphi$</u>



(e) falls $\psi = [\mathrm{IFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi(X, \bar{x})]\bar{t}$

$D_\psi :=$

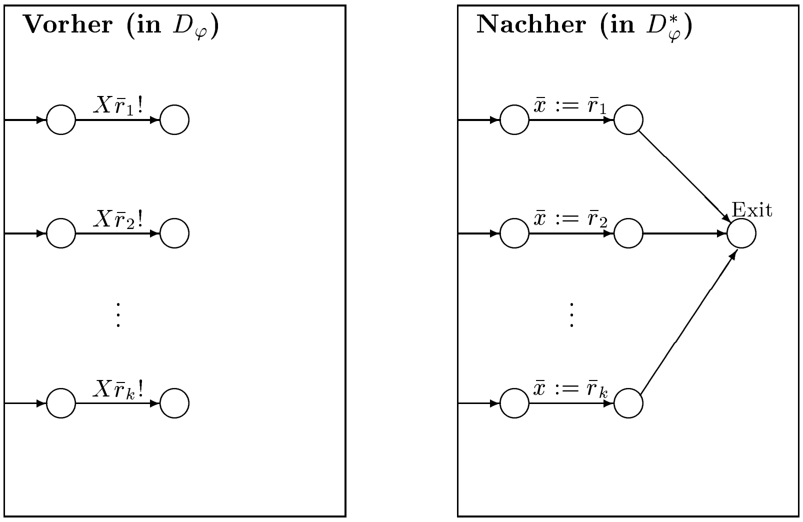


- $\bar{y}$ und $\bar{z}$ seien Tupel von Variablen, die in D_φ nicht vorkommen. Ihre Länge sei die selbe wie die von $\bar{x}$.
- D^0_φ sei das Diagramm, das aus D_φ entsteht, wenn man für alle Terme $\bar{r}$ jeden mit "$X\bar{r}$!" beschrifteten Pfeil entfernt.
- D^*_φ sei das Diagramm, das aus D_φ entsteht, wenn man
  - ein neues Feld namens Exit (bzw. Exitfeld) hinzufügt,
  - für alle Terme $\bar{r}$ jeden mit "$X\bar{r}$!" beschrifteten Pfeil durch einen Pfeil ersetzt, der mit "$\bar{x} := \bar{r}$" beschriftet ist,
  - von jedem Feld, das am Ende eines solchermaßen abgeänderten Pfeiles liegt, einen Pfeil zum Exitfeld hinzufügt.

Siehe auch die Skizze auf der nächsten Seite.

Die Konstruktion von D^0_φ und D^*_φ mag hier etwas seltsam anmuten. Diese Subdiagramme werden in Übung 2 auf Seite 33 näher erläutert. Hier sei soviel verraten, daß D^0_φ die Formel $\varphi(\emptyset, \bar{x})$ vertritt und D^*_φ die Abbildung F_φ.

Aus der Konstruktion wird klar, daß in jedem der induktiv definierten Diagramme Beschriftungen der Form "ψ!" nur mit atomarem ψ vorkommen, und daß solchermaßen beschriftete Pfeile immer an einem Feld enden, von dem aus es nicht mehr weiter geht.
Folgende Skizze gibt also die Verhältnisse in D^*_φ korrekt wieder:



Wir erinnern uns außerdem, daß der Pfeil von D^*_φ nach C (im Diagramm auf der vorigen Seite) am Exitfeld von D^*_φ anfängt (siehe Abschnitt 5.3).

Soweit die Definition der Diagramme.

In den Fällen (a) bis (d) sieht man sofort, daß D_ψ die geforderten Eigenschaften erfüllt, wenn sie für D_φ (und D_χ) gelten.
Bleibt also Fall (e). Für den Rest des Kapitels sei $\psi = [\mathrm{IFP}_{X,\bar{x}} \;\; \varphi(X,\bar{x})]\bar{t}$ und D_ψ das zugehörige Diagramm. D_ψ ist offensichtlich brav, wenn D_φ brav ist. Wir müssen noch zeigen, daß das Diagramm D_ψ remisfrei ist und daß gilt:

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \psi$$

Als Induktionsvoraussetzung haben wir, daß D_φ remisfrei ist und daß gilt:

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{D_\varphi} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi(X,\bar{x})$$

Ebenfalls für den Rest des Kapitels sei $\tilde{\mathcal{A}}$ fest gewählt.

s_0 und s_* seien die Startfelder von D^0_φ bzw. D^*_φ, e_* das Exitfeld von D^*_φ.

Um das Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$ zu erklären definieren wir $X_k := F^k_\varphi(\emptyset)$ (die X_k sind also die Iterationsstufen von X in ψ). Außedem sei

$$|\bar{a}| := \begin{cases} k & \text{, wenn } \bar{a} \in X_k \backslash X_{k-1} \\ \infty & \text{, wenn } \bar{a} \notin X_\infty \end{cases}$$

Wir schreiben auch $\beta \models |\bar{x}| = k$ statt $|\beta(\bar{x})| = k$, $\beta \models |\bar{x}| \leq |\bar{y}|$ statt $|\beta(\bar{x})| \leq |\beta(\bar{y})|$ usw. Wenn wir uns auf eine bestimmte Stellung (f, β) beziehen, schreiben wir auch einfach, daß die Gleichung/Ungleichung gilt, und meinen damit, daß β diese erfüllt. Wir verwenden die üblichen Konventionen für ∞, insbesondere gilt $k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Ab hier wird der Beweis sehr formal, länglich und wenig aufschlußreich. Deshalb schieben wir zunächst ein paar Übungen ein, anhand derer die Leserin das Diagramm D_ψ verstehen kann. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, daß ich Erklärungen in einer Reihenfolge angeben kann, die zwar beweistechnisch ungünstig ist, aber von höherem Erklärungswert. Wer nicht mit Übungen behelligt werden will, kann auf Seite 35 weiterlesen.

Übungen

In diesen Übungen erlauben wir uns, außer quantorenfreie Formeln auch andere Bedingungen an β an die Pfeile zu schreiben. "$|\bar{x}| = 1!$" heißt hier z.B: dieser Pfeil darf nur gezogen werden, wenn $|\bar{x}| = 1$.

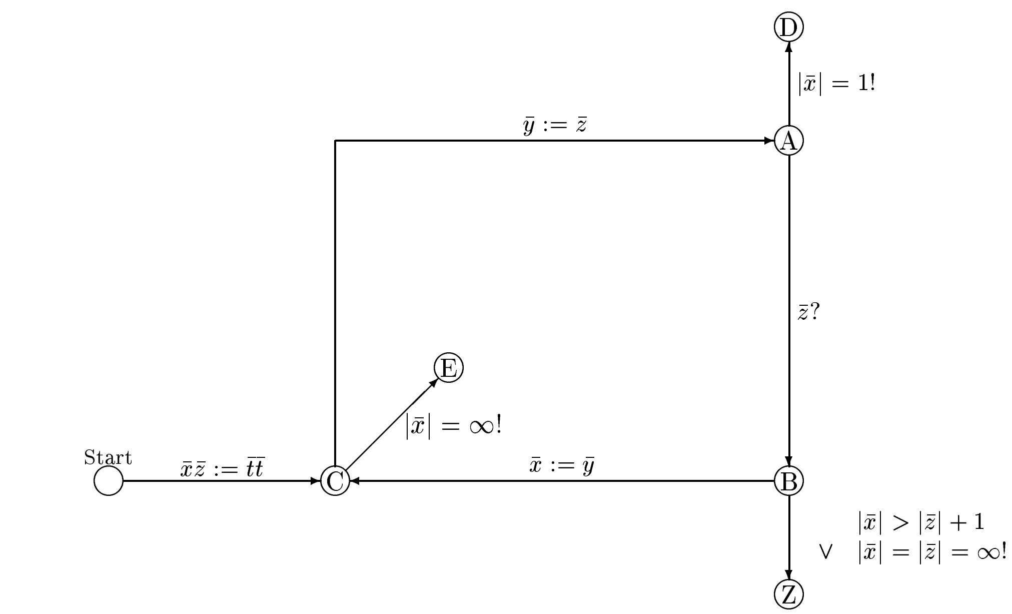
Übung 1: Zeigen Sie für das folgende Diagramm D_1, daß es remisfrei ist und daß für alle β gilt:

(i) I gewinnt in $(A, \beta) \Leftrightarrow \beta \models |\bar{x}| \leq |\bar{y}| \wedge |\bar{x}| < \infty$

(ii) I gewinnt in $(B, \beta) \Leftrightarrow \beta \models (|\bar{y}| \leq |\bar{z}| \wedge |\bar{y}| < \infty) \vee (|\bar{x}| > |\bar{z}| + 1 \vee |\bar{x}| = \infty)$

(iii) I gewinnt in $(C, \beta) \Leftrightarrow \beta \models |\bar{x}| > |\bar{z}| \vee |\bar{x}| = \infty$

$D_1 :=$

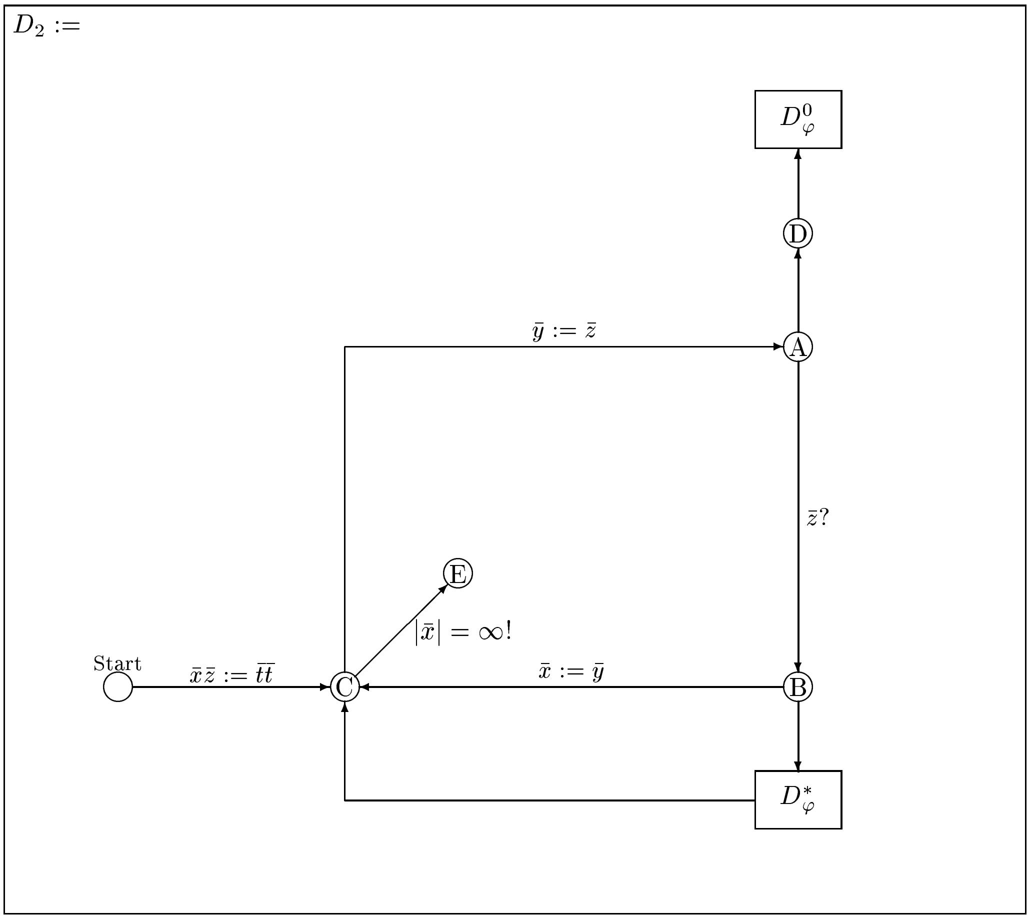


Hinweis: Man überlege sich dies zunächst für Stellungen, in denen $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ endlich sind, und zwar mit folgender Idee: In jeder Runde $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$ tauschen die Spielerinnen die Rollen. Immer abwechselnd darf im Zug $A \longrightarrow B$ ein Tupel $\bar{z}$ gewählt werden. Dieses darf dem Betrag nach um höchstens 1 kleiner sein, als das von der selben Spielerin 2 Runden zuvor gewählte (welches inzwischen $\bar{x}$ heißt), sonst bestraft das die Gegnerin mit einem Zug nach Z. Wer zuerst beim Betrag 1 angekommen ist kann das nächste mal nach D ziehen und gewinnen. Auf diese Weise werden die Beträge zweier Tupel verglichen.

Bemerkung: Aus (iii) kann schließen, daß gilt:

$$\text{I gewinnt } \mathcal{A}^{D_1} \Leftrightarrow \bar{t} \in X_\infty \; (\Leftrightarrow \tilde{A} \models \psi)$$

Übung 2: Zeigen Sie dasselbe für D_2:



Hinweise:

- Da in D^0_φ genau die Kanten gelöscht sind, die in D_φ mit "$X\bar{r}$!" beschriftet waren, gilt:

$$\begin{aligned}\text{I gewinnt } (\mathcal{A},\beta)^{D^0_\varphi} &\Leftrightarrow \text{I gewinnt } (\mathcal{A},\beta[\tfrac{X}{\emptyset}])^{D_\varphi}\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{A},\beta[\tfrac{X}{\emptyset}]) \models \varphi \qquad \text{(das hatten wir für } D_\varphi \text{ vorausgesetzt)}\\ &\Leftrightarrow |\bar{x}| = 1\end{aligned}$$

  Der Zug nach D ist also genau dann vorteilhaft, wenn $|\bar{x}| = 1$.

- Wer auf dem Exitfeld von D^*_φ am Zug ist, gewinnt, wenn $|\bar{z}|$ endlich ist, genau dann, wenn $|\bar{x}| \leq |\bar{z}|$ (also wenn $\bar{x} \in X_{|\bar{z}|}$), weil es noch zwei Züge bis A sind. Wenn man sich die Definition von D^*_φ ansieht, sieht man, daß deshalb

$$\begin{aligned}\text{I gewinnt } (s_*,\beta) &\Leftrightarrow \text{I gewinnt } (\mathcal{A},\beta[\tfrac{X}{X_{|\bar{z}|}}])^{D_\varphi}\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{A},\beta[\tfrac{X}{X_{|\bar{z}|}}]) \models \varphi\\ &\Leftrightarrow |\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1\end{aligned}$$

  Wenn $|\bar{z}|$ endlich ist, ist der Zug nach s_* also genau dann vorteilhaft, wenn $|\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1$. Wenn $|\bar{z}| = \infty$ ist, argumentiere entsprechend für X_∞.

- Man mache sich klar, daß es sich bei der Argumentation im vorigen Punkt nicht um einen Zirkelschluß handelt, weil die Voraussetzung für A nur für den nächstkleineren Betrag von $\bar{x}$ benötigt wird.

Übung 3: Zeigen Sie dasselbe für D_ψ auf Seite 30 (oder auf dem Extrablatt).

Hinweis: Wer auf Ⓒ mit $|\bar{x}| = \infty$ am Zug ist, zieht nach Ⓕ, wenn $X_\infty = \emptyset$, andernfalls nach Ⓔ und wählt $\bar{z}$ so daß $|\bar{z}|$ endlich, aber maximal ist. Aus (i) und (ii) folgt, das keine mögliche Gegenstrategie eine Chance hat (verwende $|\bar{x}| = \infty$!). Ist umgekehrt $|\bar{x}| < \infty$, so bringt der Zug nach Ⓔ keine Vorteile. Falls dabei $\bar{z}$ mit $|\bar{z}| < |\bar{x}|$ gewählt wird, kann die Gegnerin nach Ⓗ ziehen und $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| = |\bar{z}| + 1$ wählen, andernfalls kann sie nach Ⓖ ziehen.

Bemerkung: Wie schon in Übung 1 bemerkt erhält man aus (iii):

$$\tilde{A}^{D_\psi} \Leftrightarrow \tilde{A} \models \psi,$$

also das, was zum Beweis des Hauptsatzes noch fehlt.

Wer die Übungen erfolgreich absolviert hat, darf auf Seite 39 weiterlesen. Wer nicht, muß mit mir durch einen kleinen Morast von Hilfssätzen waten.

Wir erinnern uns kurz an die Situation vor Einschub der Übungen:
Wir haben $\psi = [\mathrm{IFP}_{X,\bar{x}}\ \varphi(X,\bar{x})]\bar{t}$ und D_ψ das zugehörige Diagramm (auf Seite 30 oder auf dem Extrablatt). Wir müssen zeigen, daß das Diagramm D_ψ remisfrei ist und daß gilt:

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \psi$$

Als Induktionsvoraussetzung haben wir die entsprechenden Eigenschaften für D_φ. $\tilde{\mathcal{A}}$ ist fest gewählt. s_0 und s_* sind die Startfelder von D^0_φ bzw. D^*_φ, e_* das Exitfeld von D^*_φ.

Stellungen seien ab jetzt, wenn nichts anderes gesagt wird, Stellungen von $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$, Belegungen $\mathcal{A}$-Belegungen.

Hilfssatz 1 *Für alle* $f \in D^0_\varphi$ *und alle* β *gilt:*
I (II) gewinnt in (f, β) *(im Spiel* $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$*)*
$\Leftrightarrow$ *I (II) gewinnt in* $(f, \beta[\frac{X}{\emptyset}])$ *im Spiel* $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\varphi}$

Beweis: Da X in D_ψ nicht vorkommt, spielt die Belegung von X im Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$ keine Rolle. O.B.d.A ist also $\beta = \beta[\frac{X}{\emptyset}]$. D^0_φ unterscheidet sich von D_φ nur durch die weggelassenen Pfeile, die in D_φ mit $X\bar{r}!$ beschriftet sind. Diese dürfen aber mit $\beta(X) = \emptyset$ sowieso nicht gezogen werden. □

Hilfssatz 2 *I gewinnt in* (s_0, β)*, wenn* $\beta \models |\bar{x}| = 1$*, II sonst.*

Beweis: $|\bar{x}|$=1 bedeutet nach Definition dasselbe wie $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi(\emptyset, \bar{x})$, bzw. $(\mathcal{A}, \beta[\frac{X}{\emptyset}]) \models \varphi$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dies genau dann, wenn I gewinnt $(\mathcal{A}, \beta[\frac{X}{\emptyset}])^{D_\varphi}$, Nach Hilfssatz 1 ist dies genau dann der Fall, wenn (s_0, β) Gewinnstellung von $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$. Daß andernfalls II gewinnt, folgt aus der Remisfreiheit von D_φ. □

Rezept 49 (Schokoladenmakronen I [Haa94])

8 große Eiklar 500g Puderzucker 500g Mandeln 100-200g Schmelz-Schokolade 1 Vanillezucker	Man stellt mit ungeschält geriebenen Mandeln und geriebener Schokolade eine Makronenmasse her. Mit zwei Kaffeelöffeln formt man Makronen.

Rezept 50 (Schokoladenmakronen II [Haa94])

8 Eiklar 500g Sandzucker 1 Zitronensaft 500g Mandeln 300g Schokolade	Bei dieser Makronenmasse geht man von ungeschlagenem Eiklar aus. Die Mandeln werden nicht geschält. Man formt kleine Kugeln. *Hinweis:* Man erhält 80-90 Stück

[Haa94] gibt für Makronen 30-45 Minuten Backzeit bei $140 - 160°$C an, zuzüglich 5-10 Minuten Nachhitze.

Hilfssatz 3 *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) *I gewinnt in* (A, β), *wenn* $\beta \models |\bar{x}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| \leq |\bar{y}|$
(ii) *II gewinnt in* (C, β), *wenn* $\beta \models |\bar{x}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| \leq |\bar{z}|$
(iii) *I gewinnt in* (e_*, β), *wenn* $\beta \models |\bar{x}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| \leq |\bar{z}|$
(iv) *I gewinnt in* (B, β), *wenn* $\beta \models |\bar{y}| \leq k \ \wedge \ \neg(|\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1 \leq |\bar{y}|)$
(v) *II gewinnt in* (A, β), *wenn* $\beta \models |\bar{y}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| > |\bar{y}|$
(vi) *I gewinnt in* (C, β), *wenn* $\beta \models |\bar{z}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| > |\bar{z}|$
(vii) *II gewinnt in* (e_*, β), *wenn* $\beta \models |\bar{z}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| > |\bar{z}|$
(viii) *Für alle*[1] $f \in D^*_\varphi$ *gilt: I (II) gewinnt in* (f, β) *(im Spiel* $\tilde{A}^{D_\psi}$*), wenn* $|\bar{z}| \leq k$ *und I (II) gewinnt in* $(f, \beta[\frac{X}{X_{|\bar{z}|}}])$ *im Spiel* $\tilde{A}^{D_\varphi}$
(ix) *I gewinnt in* (s_*, β), *wenn* $\beta \models |\bar{z}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1$
(x) *II gewinnt in* (s_*, β), *wenn* $\beta \models |\bar{z}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| > |\bar{z}| + 1$
(xi) *II gewinnt in* (B, β), *wenn* $\beta \models |\bar{z}| \leq k \ \wedge \ |\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1 \leq |\bar{y}|$

Der Übersichtlichkeit halber ist für einige Felder von D_ψ in der Abbildung auf dem Extrablatt je eine Ungleichung angegeben. Der Hilfssatz sagt dann (bis auf Endlichkeitsbedingungen): I gewinnt auf einem Feld, wenn die zugehörige Ungleichung erfüllt ist, II gewinnt, wenn sie nicht erfüllt ist.

Beweis: Wir zeigen alle Behauptungen simultan durch Induktion über k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen, da $X_0 = \emptyset$. Wir nehmen nun an, daß die Behauptungen für $k-1$ schon bewiesen sind und zeigen sie der Reihe nach für k. Hierzu geben wir jeweils die behauptete Gewinnstrategie in Form einer Anleitung wieder.

(i) Falls $|\bar{x}| = 1$ ist, ziehe nach D. Du bist auf s_0 wieder am Zug und gewinnst gemäß Hilfssatz 2. Falls $|\bar{x}| > 1$ ist, ziehe nach B, wähle $\bar{z}$ mit $|\bar{z}| = |\bar{x}| - 1$ und gewinne gemäß (xi) für $k-1$.

(ii) **Fall 1** Die Gegnerin zieht nach A:
Gewinne gemäß (i)

Fall 2 Die Gegnerin zieht nach F:
Ziehe nach D und wähle $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| = 1$. Das geht, denn wäre $X_1 = \emptyset$ so wäre auch $X_\infty = \emptyset$ und $|\bar{x}| \leq k$ unmöglich. Du bist auf s_0 wieder am Zug und gewinnst gemäß Hilfssatz 2.

Fall 3 Die Gegnerin zieht nach E und wählt $\bar{z}$ mit $|\bar{x}| \leq |\bar{z}|$:
Ziehe nach G (dann ist $|\bar{x}| \leq |\bar{y}|$), du bist auf A wieder am Zug und gewinnst gemäß (i)

Fall 4 Die Gegnerin zieht nach E und wählt $\bar{z}$ mit $|\bar{x}| > |\bar{z}|$:
Ziehe nach H, wähle $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| = |\bar{z}| + 1$. ($|\bar{z}|$ kann nicht maximal sein, denn sonst wäre $|\bar{x}| > |\bar{z}|$ nicht möglich gewesen). Dann ist auf B die Gegnerin am Zug, $|\bar{x}| = |\bar{z}| + 1 = |\bar{y}|$ und du gewinnst gemäß (xi) für $k-1$ ($|\bar{z}| \leq k-1$, denn nach Voraussetzung dieses Falles wurde im Zug nach E $\bar{z}$ mit $|\bar{z}| < |\bar{x}| \leq k$ gewählt).

(iii) Folgt aus (ii).

(iv) **Fall 1** $|\bar{z}| + 1 > |\bar{y}|$ (also $|\bar{y}| \leq |\bar{z}|$):
Ziehe nach C und gewinne gemäß (ii)

Fall 2 $|\bar{z}| + 1 \leq |\bar{y}|$ und $|\bar{x}| > |\bar{z}| + 1$:
Da nach Voraussetzung $|\bar{y}| \leq k$ ist, ist $|\bar{z}| \leq k-1$. Ziehe nach s_* und gewinne gemäß (x) für $k-1$.

[1] Fast: Alle außer Exit und denen, die am Ende eines der abgeänderten Pfeile liegen

(v) Da $|\bar{x}| > |\bar{y}|$ ist, ist $|\bar{x}|$ mindestens 2. Zieht die Gegnerin nach (D), so ist sie auf (s_0) wieder am Zug und du gewinnst gemäß Hilfssatz 2. Zieht sie nach (B), gewinne gemäß (iv) ($|\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1 \leq |\bar{y}|$ geht nicht wegen $|\bar{x}| > |\bar{y}|$!)

(vi) und (vii) Folgen aus (v)

(viii) Sei Str eine Gewinnstrategie für I (II) für ((f), $\beta[\frac{X}{X_{|\bar{z}|}}]$) im Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\varphi}$. Wir geben eine Gewinnstrategie für I (II) für ((f), β) im Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$ an:

Verfahre innerhalb von D^*_φ stets gemäß Str. Ziehst du dabei einen Pfeil, der in D_φ mit "$X\bar{r}$" beschriftet war, so gilt $|\bar{r}| \leq |\bar{z}|$, sonst wäre Str keine Gewinnstrategie gewesen. Da in D^*_φ dieser Pfeil mit "$\bar{x} := \bar{r}$" beschriftet ist, gilt nach diesem Zug $|\bar{x}| \leq |\bar{z}|$. Du bist auf (e_*) wieder am Zug und gewinnst gemäß (iii).
Zieht die Gegnerin einen abgeänderten Pfeil, so gilt nach diesem Zug: $|\bar{x}| > |\bar{z}|$, sonst wäre Str ebenfalls keine Gewinnstrategie gewesen. Die Gegnerin ist dann auf (e_*) wieder am Zug und du gewinnst gemäß (vii).

(ix) Wegen $|\bar{x}| \leq |\bar{z}| + 1$ gilt $\beta(\bar{x}) \in F_\varphi(X_{|\bar{z}|})$, also $(\mathcal{A}, \beta[\frac{X}{X_{|\bar{z}|}}]) \models \varphi$ und damit I gewinnt $(\mathcal{A}, \beta[\frac{X}{X_{|\bar{z}|}}])^{D_\varphi}$. Mit (viii) für (f) = ($s_0$) folgt die Behauptung.

(x) Analog zu (ix), die Remisfreiheit von D_φ ausnutzend

(xi) Falls die Gegnerin nach (s_*) zieht, gewinne gemäß (ix). Falls sie nach (C) zieht, ist dann $|\bar{z}| + 1 \leq |\bar{x}|$, also $|\bar{x}| > |\bar{z}|$ und du gewinnst gemäß (vi).

□

Hilfssatz 4 *I gewinnt ((C), β) wenn dort gilt:* $|\bar{x}| = \infty$

Beweis: Wir geben eine Gewinnstrategie für I an:

Fall 1 $X_\infty = \emptyset$:
Ziehe nach (F). Die Gegnerin ist auf (s_0) wieder am Zug. Unabhängig von der Wahl von $\bar{x}$ ist dort $|\bar{x}| = \infty$ und du gewinnst gemäß Hilfssatz 2

Fall 2 $X_\infty = X_m \neq X_{m-1}$:
Ziehe nach (E) und wähle $\bar{z}$ mit $|\bar{z}| = m$ (also maximal).

Fall 2.1 Die Gegnerin zieht nach (H) und wählt $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| < \infty$:
Du bist auf (B) wieder am Zug. Dort ist dann $|\bar{y}| = |\bar{x}| < \infty$ und deshalb $|\bar{z}| + 1 > |\bar{y}|$, weil $|\bar{z}|$ maximal war. Gewinne gemäß Hilfssatz 3(iv).

Fall 2.2 Die Gegnerin zieht nach (H) und wählt $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| = \infty$:
Du bist auf (B) wieder am Zug. Ziehe[2] nach (s_*) und gewinne gemäß Hilfssatz 3(x).

Fall 2.3 Die Gegnerin zieht nach (G):
Danach gilt $|\bar{y}| = m$ und $|\bar{x}| = \infty$, also $|\bar{x}| > |\bar{y}|$ Die Gegnerin ist auf (A) wieder am Zug, und du gewinnst gemäß Hilfssatz 3(v)

□

[2]Hier ist deshalb ein weiterer Zug notwendig, weil Hilfssatz 3(iv) ungeschickt formuliert ist.

Hilfssatz 5 *Für alle*[3] $ⓕ \in D^*_\varphi$ *und alle* β *mit* $\beta \models |\bar{z}| = \infty$ *gilt:*
I (II) gewinnt $(ⓕ, \beta)$ *(in* $\tilde{\mathcal{A}}[\frac{X}{X_\infty}]^{D_\varphi}$*)* $\Rightarrow$ *I (II) gewinnt* $(ⓕ, \beta)$ *in* $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Hilfssatz 3(viii), was uns nicht daran hindert, ihn nochmal hinzuschreiben.[4] Sei Str eine Gewinnstrategie für I (II) für $(ⓕ, \beta[\frac{X}{X_\infty}])$ im Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\varphi}$.
Wir geben eine Gewinnstrategie für I (II) für $(ⓕ, \beta)$ im Spiel $\tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi}$ an:
Verfahre innerhalb von D^*_φ stets gemäß Str. Ziehst du dabei einen der abgeänderten Pfeile, so gilt in der Stellung nach diesem Zug $|\bar{x}| < \infty$, sonst wäre Str keine Gewinnstrategie gewesen. Du bist auf $ⓔ_*$ wieder am Zug und gewinnst gemäß Hilfssatz 3(iii). (Nach Voraussetzung war $|\bar{z}| = \infty$).
Zieht die Gegnerin einen abgeänderten Pfeil, so gilt in der Stellung nach diesem Zug: $|\bar{x}| = \infty$, sonst wäre Str ebenfalls keine Gewinnstrategie gewesen. Die Gegnerin ist dann auf $ⓔ_*$ wieder am Zug, zieht nach Ⓒ und du gewinnst gemäß Hilfssatz 4 □

Wir zeigen jetzt, daß D_ψ remisfrei ist, indem wir die Ergebnisse der Hilfssätze zusammentragen.
$(Ⓒ, \beta)$ ist Gewinnstellung, wenn $|\bar{x}| > |\bar{z}|$ (Hilfssatz 3(vi)) oder wenn $|\bar{x}| = \infty$ (Hilfssatz 4). Andernfalls ist $(Ⓒ, \beta)$ Verluststellung (Hilfssatz 3(ii)), also jedenfalls keine Remisstellung.
Für ⓕ in D^*_φ ist $(ⓕ, \beta)$ keine Remisstellung (wenn $|\bar{z}|$ endlich nach Hilfssatz 3(viii) und wenn $|\bar{z}|$ unendlich nach Hilfssatz 5. Beachte zu beidem: D_φ ist remisfrei!)).
Für ⓕ in D^0_φ ist $(ⓕ, \beta)$ ebenfalls keine Remisstellung (Hilfssatz 1).
Da von einer beliebigen Stellung aus nach spätestens 4 Halbzügen eine der vorgenannten Stellungen erreicht ist, ist D_ψ remisfrei.

Wer gewinnt nun das Spiel insgesamt (d.h. in der Startstellung)?
Nach dem ersten Halbzug ist die Stellung $(Ⓒ, \alpha[\frac{\bar{x}}{\bar{t}}, \frac{\bar{y}}{\bar{t}}])$, also $|\bar{x}| = |\bar{z}| = |\bar{t}|$. Wenn nun $\tilde{\mathcal{A}}(\bar{t}) \in X_\infty$, also $|\bar{t}|$ endlich, ist dies eine Verluststellung (Hilssatz 3(ii)) also die Startstellung eine Gewinnstellung. Andernfalls verhält sich dies umgekehrt (Hilfssatz 4). Wir haben also:

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{D_\psi} \Leftrightarrow \alpha(\bar{t}) \in X_\infty \quad (\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \psi)$$

□

[3] Wie vorher: Alle außer Exit und denen, die am Ende eines der abgeänderten Pfeile liegen
[4] Redundanz ist gut. Redundanz ist gut. Redundanz ist gut.

Kapitel 8

Normalformen für IFP

8.1 Vollständigkeit von $\mathcal{GAME}$

Mit dem Hauptsatz haben wir gezeigt, daß $\mathcal{GAME}$ hart für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion ist (= Kor 36). Wir zeigen nun, daß $\mathcal{GAME}$ sogar in LFP definierbar ist.

Satz 51 *Für alle σ_s-Strukturen $\mathcal{S}$ gilt:*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} \in \mathcal{GAME} \Leftrightarrow \mathcal{S} \models [\mathrm{LFP}_{Xux} & & (u \doteq x \wedge \exists vy(Zxy \wedge v \neq y \wedge Xvy)) \\ & \vee & (u \neq x \wedge \forall y(Zxy \rightarrow Xyy)) \qquad]ss \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathcal{S}$ fest gewählt und $\varphi := \varphi(X, ux)$ der 1.Stufe-Anteil der Formel im Satz. Man zeigt leicht durch Induktion über k, daß

- falls k gerade ist, gilt:
  I gewinnt (S, Z, a) in k Halbzügen $\Leftrightarrow aa \in F^k_\varphi(\emptyset)$
- falls $b \neq a$ ist und k ungerade, gilt:
  II gewinnt (S, Z, a) in k Halbzügen $\Leftrightarrow ba \in F^k_\varphi(\emptyset)$

(Idee: In den ungeraden Iterationsstufen kommen nur Stellungen x hinzu, in denen ich gewinne, wenn ich nicht dran bin. Diese werden mit $u \neq x$ markiert. In den geraden Iterationsstufen kommen nur Stellungen x hinzu, in denen ich gewinne, wenn ich dran bin. Letztere werden mit $u = x$ markiert.)

Es folgt $ss \in F^\infty_\varphi(\emptyset) \Leftrightarrow$ I gewinnt $\mathcal{S}$ □

$\mathcal{GAME}$ ist also definierbar in LFP. Insgesamt haben wir also:

Satz 52 *$\mathcal{GAME}$ ist vollständig für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion.* □

8.2 Skolemsche Normalform, IFP=LFP

Wir nutzen nun den in Kapitel 3 besprochenen Zusammenhang zwischen vollständigen Problemen und Normalformen:

Satz 53 (Skolemsche Normalform für IFP [Dah87])
Jede IFP-Formel ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt
$[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \varphi]\bar{t}$ *mit einer Δ_2-definierbaren 1.Stufe-Formel φ.*

Beweis: Sei χ die Formel aus Satz 51. Diese definiert ein vollständiges Problem für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion. Nach Satz 26 ist dann $\{\chi^\Pi \mid \Pi$ ist quantorenfreie Übersetzung von $\sigma_s\}$ eine Normalform für IFP. Der 1.Stufe-Anteil von χ und damit auch der von χ^Π ist Δ_2-definierbar.[1] Also haben alle χ^Π die geforderte Gestalt □

Bemerkung: Die Übersetzung Π im obigen Beweis wird letztlich durch den Hauptsatz geliefert. Verwendet man den Zusatz, so kann man in der Normalform $\bar{t} = \tilde{d}$ erreichen (zur Variable d siehe auch Abschnitt 1.6). Obwohl d dann frei in der Formel $[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi]\tilde{d}$ vorkommt, hängt diese nicht von der Belegung von d ab. Wer aus weltanschaulichen oder definitionstechnischen Gründen keine unquantifizierten Variablen duldet, kann d auch mit $\forall$, $\exists$ oder einem anderen Quantor eigener Wahl abquantifizieren.
Das hier gesagte gilt auch für alle weiteren Normalformen in diesem Aufsatz.

Aus Satz 53 folgt unmittelbar:

Satz 54 ([GS86]) *IFP=LFP* □

8.3 Beschränkte Skolemsche Normalform

Nach dem selben Schema erhalten wir noch weitere Normalformen für IFP.

Satz 55 *Für alle σ_s-Strukturen $\mathcal{S}$ gilt:*

- **(a)** *I gewinnt* $\mathcal{S} \Leftrightarrow [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \exists y(Zxy \wedge \forall z(Zyz \rightarrow Xz))]s$
- **(b)** *II gewinnt* $\mathcal{S} \Leftrightarrow [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \forall y(Zxy \rightarrow \exists z(Zyz \wedge Xz))]s$

Beide Teile des Satzes sind leicht einzusehen. Außerdem werden wir in Abschnitt 9.4 einen Beweis nachliefern.

Satz 56 (Beschränkte Skolemsche Normalform für IFP [Gro94]) *Jede IFP-Formel ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt*

- **(a)** $[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \ \exists\bar{y}\forall\bar{z}(X\bar{z} \vee \varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))]\bar{t}$ *und einer Formel der Gestalt*
- **(b)** $[\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi_0(\bar{x}) \vee \forall\bar{y}\exists\bar{z}(X\bar{z} \wedge \varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))]\bar{t},$

wobei $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ (und $\varphi_0(\bar{x})$) jeweils eine quantorenfreie Formel ist, in der X nicht vorkommt.

Beweis:
zu (a) Sei χ die Formel aus Satz 55(a). $Zxy \wedge \forall z(Zyz \rightarrow Xz)$ ist äquivalent zu $\forall z(Xz \vee (Zxy \wedge \neg Zyz))$, unter der Voraussetzung, daß es ein z gibt mit $\neg Xz$. Dies aber ist in jeder Iterationsstufe von X der Fall, denn sonst wären alle Stellungen Gewinnstellungen (sagt Satz 55(a)). Also ist χ äquivalent zu

$$\tilde{\chi} := [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \exists y\forall z(Xz \vee (Zxy \wedge \neg Zyz))]s$$

Damit ist $\tilde{\chi}$ eine Definition von $\mathcal{GAME}$. Nach Satz 26 sind die Formeln $\tilde{\chi}^\Pi$ dann eine Normalform für IFP. Sie haben die geforderte Gestalt.

zu (b) Der Beweis ist sozusagen dual zu dem von (a), mit einer kleinen Zusatzkomplikation. Sei diesmal χ die Formel aus Satz 55(b). $Zxy \rightarrow \exists z(Zyz \wedge Xz)$ ist äquivalent zu $\exists z(Xz \wedge (Zxy \rightarrow Zyz))$, unter der Voraussetzung, daß es bereits ein

[1] Sogar eine Boolesche Kombination von Σ_1-Formeln, falls das jemand interessiert.

z gibt mit Xz. Dies ist ärgerlicherweise für $X_0 = \emptyset$ nicht der Fall. Deshalb müssen wir uns künstlich einen Induktionsanfang verschaffen. χ ist äquivalent zu

$$\tilde{\chi} := [\mathrm{LFP}_{Xux} \;\; u \neq x \;\vee\; \forall y \exists w z (Xwz \wedge (Zxy \;\rightarrow\; Zyz \wedge w \doteq z))]ss$$

Sei nun $\psi \in IFP$ gegeben. Dann liefert uns der Hauptsatz für $\neg\psi$ eine remisfreie quantorenfreie Übersetzung Π von σ_s mit

$$\tilde{\mathcal{A}} \models \neg\psi \Leftrightarrow \text{ I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$$

Da Π remisfrei ist, gilt auch

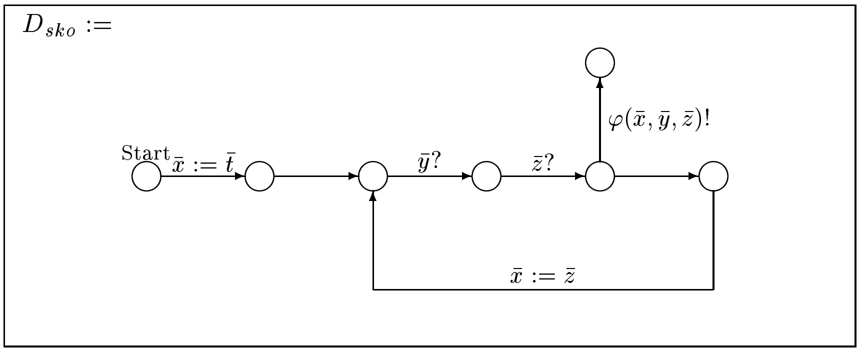
$$\tilde{\mathcal{A}} \models \psi \Leftrightarrow \text{ II gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi}$$

Wegen $\tilde{\chi} \mathrel{=\!\mid\!\models} \chi$ und Satz 55(b) haben wir insgesamt:

$$\tilde{\mathcal{A}} \models \psi \Leftrightarrow \text{ II gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{-\Pi} \models \tilde{\chi} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \tilde{\chi}^{\Pi}$$

Also ist $\tilde{\chi}^{\Pi}$ äquivalent zu ψ. $\tilde{\chi}^{\Pi}$ hat die geforderte Gestalt. $\square$

Bemerkung 57 Aus Teil (a) der beschränkten Skolemschen Normalform bekommt man auch leicht wieder die Vollständigkeit von $\mathcal{GAME}$ bezüglich quantorenfreier Reduktion.
Für das Diagramm



gilt:

$$\text{I gewinnt } \tilde{\mathcal{A}}^{D_{sko}} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models [\mathrm{LFP}_{X\bar{x}} \;\; \forall \bar{y} \exists \bar{z} (X\bar{z} \vee \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))]\bar{t}$$

Grohe beweist in [Gro94] die beschränkte Skolemsche Normalform rein auf Formelbasis. Zusammen mit dem Beweis in Kapitel 6 ergibt sich dadurch eine weitere Möglichkeit unseren Hauptsatz zu beweisen.

Kapitel 9

Negative PFP-Fragmente

Grohe betrachtet in [Gro94] unter anderem Formeln der Gestalt

$$[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi_0 \vee \exists \bar{y}_1{\in}X \ldots \exists \bar{y}_l{\in}X\, \exists \bar{z}_1{\notin}X \ldots \exists \bar{z}_m{\notin}X\ \varphi\ ]\bar{t}$$

mit quantorenfreien Formeln φ_0 und φ, in denen X nicht vorkommt. $\exists \bar{v}{\in}X\varphi$ ist hierbei eine Abkürzung für $\exists \bar{v}(X\bar{v} \wedge \varphi)$ und $\exists \bar{v}{\notin}X\varphi$ eine Abkürzung für $\exists \bar{v}(\neg X\bar{v} \wedge \varphi)$.
Diese Formeln sind im allgemeinen Fall (d.h l und m unbeschränkt) eine Normalform für PFP. Beschränkt man l und m durch konkrete Zahlenwerte, so erhält man verschiedene interessante Fragmente von PFP.

Definition 58 (PFPNF(l,m)) *Für alle $l, m \in \mathbb{N}$ ist ψ eine* PFPNF(l,m)-Formel, *wenn sie die Gestalt*

$$[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi_0 \vee \exists \bar{y}_1{\in}X \ldots \exists \bar{y}_{l'}{\in}X \exists \bar{z}_1{\notin}X \ldots \exists \bar{z}_{m'}{\notin}X\ \varphi\ ]\bar{t}$$

hat, mit $l' \leq l, m' \leq m$ und quantorenfreien Formeln φ_0 und φ.
PFPNF(l,m) *ist die hierdurch definierte Sublogik von PFP.*

9.1 Definition

Definition 59 (PFP(l,m)) *Für alle $l, m \in \mathbb{N}$ ist* PFP(l,m) *die durch folgenden Kalkül definierte Sublogik von PFP:*

$\dfrac{}{\varphi}$ wenn φ Atom; $\quad \dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$; $\quad \dfrac{\varphi,\psi}{(\varphi\wedge\psi)}$;

$\dfrac{\varphi_0,\varphi}{[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \varphi_0 \vee \exists \bar{y}_1{\in}X \ldots \exists \bar{y}_{l'}{\in}X \exists \bar{z}_1{\notin}X \ldots \exists \bar{z}_{m'}{\notin}X\ \varphi\ ]\bar{t}}$, wenn $l' \leq l, m' \leq m$ und X nicht frei in φ_0, φ .

Die Logik PFP(l,m) ist also die stratifizierte Variante von PFPNF(l,m).

9.2 Klassifizierung

Für jeden Wert von l und m ist PFP(l,m) bzw. PFPNF(l,m) genauso ausdrucksstark wie eine wohlbekannte Logik:

PFPNF(l,m) =

l \ m	0	≥ 1
0	QF	LFP
1	$\exists$TC	PFP
≥ 2	$\exists$LFP	PFP

PFP(l,m) =

l \ m	0	≥ 1
0	QF	LFP
1	TC	PFP
≥ 2	SFP	PFP

Hierbei ist TC die Logik mit einem Operator für die transitive Hülle einer definierbaren 2k-stelligen Relation, ∃TC deren existentielles Fragment, ∃LFP das existentielle Fragment von LFP und SFP die stratifizierte Variante von ∃LFP. Wir wollen diese Logiken nicht definieren, da sie hier nicht Gegenstand der Diskussion sind.
Alle Fälle mit $l > 0$ sind in [Gro94] abgehandelt. PFPNF(0,0)=PFP(0,0)=QF ist trivial. Es bleibt also zu zeigen, daß PFPNF(0,m)=PFP(0,m)=LFP für alle $m \geq 1$.

9.3 negPFP

Zunächst zeigen wir PFP(0,m) $\subset$ LFP. Hierzu definieren wir eine Logik, die oberhalb aller PFP(0,m) liegt.

Definition 60 (negPFP) negPFP *ist die Sublogik von PFP, die durch folgenden Kalkül gegeben ist:*

$\frac{}{\varphi}$ wenn φ Atom; $\frac{\varphi}{\neg\varphi}$; $\frac{\varphi,\psi}{(\varphi\wedge\psi)}$; $\frac{\varphi}{\exists x\varphi}$;

$\frac{\varphi}{[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}^{n}\ \varphi]\bar{t}^{n}}$, wenn φ negativ in X ist und X nicht frei im Geltungsbereich eines Fixpunktoperators innerhalb von φ vorkommt .

In negPFP wirken Fixpunktoperatoren nur auf Formeln die negativ und damit antimonoton sind. Deshalb untersuchen wir jetzt antimonotone Abbildungen.

Satz 61 *Sei* $F : \mathrm{Pot}(A^n) \to \mathrm{Pot}(A^n)$ *antimonoton. Dann gilt*

(i) F^2 *ist monoton*

(ii) $(F^{2k}(\emptyset))_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine aufsteigende Folge. Ihr Grenzwert ist* $\mathrm{lfp}(F^2)$.

(iii) $(F^{2k}(A^n))_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine absteigende Folge. Ihr Grenzwert ist* $\mathrm{gfp}(F^2)$.

(iv) $(F^{2k+1}(\emptyset))_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine absteigende Folge. Ihr Grenzwert ist* $\mathrm{gfp}(F^2)$.

(v) $F^\infty(\emptyset)$ *existiert* $\Leftrightarrow \mathrm{lfp}(F^2) = \mathrm{gfp}(F^2)$

(vi) *Wenn* $F^\infty(\emptyset)$ *existiert, gilt für alle* $R \subset A^n$*:*
$F^\infty(R)$ *existiert und* $F^\infty(R) = F^\infty(\emptyset)$

Beweis:

(i) klar.

(ii) und (iii) Siehe Satz 5, Definition 6.

(iv) Aus $\emptyset \subset F(A^n)$ folgt $A^n \supset F(\emptyset) \supset F^2(A^n)$. Durch Iteration erhalten wir allgemein $F^{2k}(A^n) \supset F^{2k+1}(\emptyset) \supset F^{2k+2}(A^n)$. Mit (iii) folgt die Behauptung.

(v) folgt aus (ii) und (iv).

(vi) Sei $F^\infty(\emptyset) = F^{2m}(\emptyset)$ der Fixpunkt von F. Aus $\emptyset \subset F(R) \subset F(\emptyset)$ erhalten wir dann für alle $k \geq m$: $F^\infty(\emptyset) = F^{2k}(\emptyset) \subset F^{2k+1}(R) \subset F^{2k+1}(\emptyset) = F^\infty(\emptyset)$.

□

Definition 62 $(\varphi^2(X,\bar{x}))$ *Sei* $\varphi(X,\bar{x})$ *eine PFP-Formel und die Stelligkeit von* X *gleich der Länge von* $\bar{x}$*. Dann ist* $\varphi^2(X,\bar{x})$ *die Formel, die man erhält, wenn man in* $\varphi(X,\bar{x})$ *alle Subformeln der Form* $X\bar{r}$ *durch* $\varphi(X,\bar{r})$ *ersetzt.*

Für Freunde und Bekannte der Notation mit dem Unterstrich: $\varphi^2(X,\bar{x}) = \varphi(\varphi(X,\_),\bar{x})$.

Folgende Eigenschaften der Formel $\varphi^2(X,\bar{x})$ sind leicht zu sehen:

Satz 63 *Sei $\varphi := \varphi(X,\bar{x})$ eine PFP-Formel und die Stelligkeit von X gleich der Länge von $\bar{x}$. Dann gilt:*

- **(i)** $F_{\varphi^2} = F_\varphi^2$
- **(ii)** *φ ist negativ in $X \Rightarrow \varphi^2$ ist positiv in X*
- **(iii)** $\varphi \in LFP \Rightarrow \varphi^2 \in LFP$ □

Satz 64 *negPFP $\subset$ LFP*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jede Formel $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi(X,\bar{x})]\bar{t}$ äquivalent zu einer LFP-Formel ist, wenn $\varphi := \varphi(X,\bar{x})$ eine in X negative LFP-Formel ist. (Dann können wir in einer gegebenen negPFP-Formel von innen nach außen nacheinander alle Fixpunktoperatoren durch LFP-Formeln ersetzen).
Nach Satz 15 ist φ antimonoton, weil negativ in X. Nach Satz 61(v) existiert F_φ^∞ genau dann, wenn $\mathrm{lfp}(F_\varphi^2) = \mathrm{gfp}(F_\varphi^2)$. So das der Fall ist, gilt $F_\varphi^\infty = \mathrm{lfp}(F_\varphi^2)$. Insgesamt ist also $[\mathrm{FP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi(X,\bar{x})]\bar{t}$ äquivalent zur Formel

$$\forall\bar{v}\big([\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi^2(X,\bar{x})]\bar{v} \leftrightarrow [\mathrm{GFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi^2(X,\bar{x})]\bar{v}\big) \quad \wedge \quad [\mathrm{LFP}_{X\bar{x}}\ \ \varphi^2(X,\bar{x})]\bar{t}$$

Die Fixpunktoperatoren in obiger Formel sind tatsächlich LFP-Operatoren, da nach Satz 63 φ^2 eine LFP-Formel ist und positiv in X. Zur Definition des GFP-Operators siehe Definition 17 und Satz 18. □

9.4 PFPNF(0,1)

Um die Logiken PFPNF(0,m) und PFP(0,m) nach unten abzuschätzen zeigen wir, daß bereits PFPNF(0,1) $\supset$ IFP.

Satz 65 *Sei $\varphi := \varphi(X,x) := \exists y(Zxy \wedge \neg Xy)$. Dann gilt für alle Spiele $\mathcal{S} = (S,Z,s)$ und alle $a \in S$:*

- **(i)** *Falls k gerade: $a \in F_{\varphi,\mathcal{S}}^k(\emptyset) \Leftrightarrow$ I gewinnt (S,Z,a) in k Halbzügen*
  Falls k ungerade: $a \in F_{\varphi,\mathcal{S}}^k(\emptyset) \Leftrightarrow$ II gewinnt (S,Z,a) nicht in k Halbzügen
- **(ii)** *$a \in \mathrm{lfp}(F_{\varphi,\mathcal{S}}^2) \Leftrightarrow a$ ist Gewinnstellung von $\mathcal{S}$*
- **(iii)** *$a \in \mathrm{gfp}(F_{\varphi,\mathcal{S}}^2) \Leftrightarrow a$ ist nicht Verluststellung von $\mathcal{S}$*
- **(iv)** *Der Fixpunkt von $F_{\varphi,\mathcal{S}}$ existiert genau dann, wenn $\mathcal{S}$ remisfrei ist. In diesem Fall ist er gleich der Menge der Gewinnstellungen von $\mathcal{S}$.*

Beweis:

(i) Sieht man leicht durch Induktion über k.

(ii) φ ist antimonoton, weil negativ in X. Nach Satz 61(ii) ist $\mathrm{lfp}(F_{\varphi,\mathcal{S}}^2)$ der Grenzwert der aufsteigenden Folge $(F_{\varphi,\mathcal{S}}^{2k}(\emptyset))_{k\in\mathbb{N}}$. Nach (i) ist dies die Menge der Gewinnstellungen von $\mathcal{S}$.

(iii) Analog mit Satz 61(iv).

(iv) φ ist antimonoton, weil negativ in X. Nach Satz 61(v) existiert der Fixpunkt von $F_{\varphi,\mathcal{S}}$ genau dann, wenn $\mathrm{lfp}(F^2_{\varphi,\mathcal{S}}) = \mathrm{gfp}(F^2_{\varphi,\mathcal{S}})$. Mit (ii) und (iii) ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $a \in \mathcal{S}$ gilt: a ist Gewinnstellung $\Leftrightarrow$ a ist nicht Verluststellung, also wenn $\mathcal{S}$ remisfrei ist.

□

Wir tragen nun den in Abschnitt 8.3 angekündigten Beweis von Satz 55 nach:

Beweis von Satz 55: Sei $\varphi(X,x) := \exists y(Zxy \wedge \neg Xy)$, wie im vorigen Satz. Dann gilt nach (ii) und (iii):

(a) I gewinnt $\mathcal{S} \Leftrightarrow [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \varphi^2(X,x)]s$

(b) II gewinnt $\mathcal{S} \Leftrightarrow \neg[\mathrm{GFP}_{Xx}\ \ \varphi^2(X,x)]s$

Man rechnet nach, daß

$$[\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \varphi^2(X,x)]s \quad = \quad [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \exists y(Zxy \wedge \forall z(Zyz \rightarrow Xz))]s \qquad \text{und}$$

$$\neg[\mathrm{GFP}_{Xx}\ \ \varphi^2(X,x)]s \quad = \quad [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \forall y(Zxy \rightarrow \exists z(Zyz \wedge Xz))]s.$$

Dies sind erfreulicherweise die Formeln aus Satz 55.
(Zu letzterem verwende man $\neg[\mathrm{GFP}_{Xx}\ \ \varphi^2(X,x)]s = [\mathrm{LFP}_{Xx}\ \ \neg\varphi^2(\neg X,x)]s$) □

Definition 66 ($\chi_\cap$) $\chi_\cap := [\mathrm{FP}_{Xx}\ \ \exists y(\neg Xy \wedge Zxy)]s$

Satz 67 $\mathrm{Mod}(\chi_\cap) = \mathcal{GAME} \cap \mathcal{RF}$

Beweis: Folgt aus Satz 65(iv). □

Satz 68 *$\mathcal{GAME} \cap \mathcal{RF}$ ist in LFP definierbar.*

Beweis: $\chi_\cap \in \mathrm{negPFP} \subset \mathrm{LFP}$ (nach Satz 64). □

Satz 69 *Jede IFP-Formel ist äquivalent zu ${\chi_\cap}^\Pi$ für eine quantorenfreie Übersetzung Π von σ_s*

Beweis: Nach Korollar 37 ist $\mathrm{Mod}(\chi_\cap) = \mathcal{GAME} \cap \mathcal{RF}$ hart für IFP bezüglich quantorenfreier Reduktion. Satz 26 liefert die Behauptung. □

Es handelt sich hier nicht um eine Normalform für IFP. Zwar sind alle IFP-Formeln äquivalent zu einem ${\chi_\cap}^\Pi$, aber diese Formeln sind im Allgemeinen keine IFP-Formeln. Der Iterationsprozess ist bei ihnen nur in pathologischen Fällen induktiv. Dafür ist es eine Normalform für negPFP, da $\chi_\cap \in$ negPFP ist und negPFP=IFP, wie wir gleich sehen werden.

Satz 70 *IFP $\subset$ PFPNF(0,1)*

Beweis: Dies folgt aus dem vorigen Satz, da die Formeln ${\chi_\cap}^\Pi$ offensichtlich PFPNF(0,1)-Formeln sind. □

9.5 Happy End

Satz 71 *LFP = IFP = PFPNF(0,m) = PFP(0,m) für alle $m \in \mathbb{N}$*

Beweis: Mit Satz 70 und Satz 64 haben wir:
LFP = IFP $\subset$ PFPNF(0,1) $\subset$ PFPNF(0,m) $\subset$ PFP(0,m) $\subset$ negPFP $\subset$ LFP □

Anhang A

Literatur

[Dah87] E.Dahlhaus. Skolem normal forms concering the least fixed point. In E.Börger (Hg) *Computation Theory and Logic*, 270, *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 20-36. Springer-Verlag, 1987

[EF95] H.-D. Ebbinghaus und J. Flum. Finite Model Theory. Springer-Verlag, 1995

[Gro94] M. Grohe. The Structure of Fixed-Point Logics, Dissertation an der Universität Freiburg i. Br. 1994

[GS86] Y. Gurevich und S. Shelah. Fixed point extensions of first order logic. In *Annals of pure and applied logic*, 32, pp. 265-280, 1986

[Haa94] L. Haarer. Kochen und Backen nach Grundrezepten - Neuausgabe mit farbigen Phasenfotos. Schneider Verlag Hohengehren, 1994

[Imm82] N. Immerman, Relational Queries Computable in Polynomial Time. In *Proceedings of 14th ACM symposion on the theory of computing*, pp. 147-152, 1982

[JL76] N.D. Jones und W.T.Laaser. Complete problems for deterministic polynomial time. In *Theoretical Computer Science*, 3, pp. 105-117, 1976

[Rei90] K.R. Reischuk. Einführung in die Komplexitätstheorie. Teubner, 1990

[Var82] M. Vardi. The complexity of relational query languages. In *Proceedings of 14th ACM symposion on the theory of computing*, pp. 137-146, 1982

Index