Unabhängigkeitsrelationen

Hans Scheuermann

Diplomarbeit

eingereicht beim
Institut für mathematische Logik
Mathematische Fakultät
Albrecht-Ludwigs-Universität Freiburg

vorgelegt bei
Prof. Dr. Martin Ziegler

Dezember 1996

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Die abstrakten Unabhängigkeitsrelationen, die ich im ersten Teil dieser Arbeit behandle, verallgemeinern die Forking-Unabhängigkeit in stabilen Theorien, die erstmals von Saharon Shelah [She78] dazu benutzt wurde, Sätze über die Spektrumfunktionen vollständiger Theorien zu beweisen. (Die Spektrumfunktion ordnet jeder Kardinalzahl die Anzahl der Isomorphieklassen von Modellen der betreffenden Mächtigkeit zu.)

In der letzten Zeit wurde für unterschiedliche nichtstabile Theorien gezeigt, daß die Forking-Unabhängigkeit sich dort ganz ähnlich verhält wie in den stabilen. Kürzlich hat dann Byunghan Kim in seiner Dissertation [Kim96a] aufbauend auf früheren Teilergebnissen von Shelah [She80] bewiesen, daß das für alle einfachen Theorien der Fall ist (eine Theorie heißt einfach, falls keine Formel die Baumeigenschaft hat), und aus [KP95] ergibt sich, daß die betreffenden nichtstabilen Theorien alle einfach sind. Auch alle stabilen Theorien sind einfach. In [Kim96c] demonstrierte Kim schließlich, daß sich mit Hilfe der Forking-Unabhängigkeit auch in einfachen nichtstabilen Theorien Modelle zählen lassen. Auch Shelah beginnt sich anscheinend wieder für einfache Theorien zu interessieren (vgl. [She96]).

Das Zählen von Modellen wäre wohl keine so populäre Beschäftigung unter Modelltheoretikern geworden, hätte man nicht zu Recht erwartet, daß die dazu entwickelten Werkzeuge neuartige Informationen über die Struktur der Modelle liefern würden. Vielleicht markiert Kims Dissertation den Beginn einer neuen Phase, in der die für stabile Theorien entwickelten Methoden auf beliebige vollständige Theorien verallgemeinert werden — unabhängig von Spektrumfragen.

Teil I. Abstrakte Unabhängigkeitsrelationen. In Definition 1.1.2 definiere ich in Anlehnung an [KP95, Definition 4.1] den Begriff „Unabhängigkeitsrelation“, und in Definition 1.3.3 den der „kanonischen Unabhängigkeitsrelation“. Ich vermute, daß für eine große Klasse von vollständigen Theorien gilt: Es gibt *genau* eine kanonische Unabhängigkeitsrelation.

Abschluß und Höhepunkt des **1. Kapitels** ist der Beweis des Eindeutigkeitssatzes, wonach es für jede vollständige Theorie *höchstens* eine kanonische Unabhängigkeitsrelation gibt. Im **2. und 3. Kapitel** führe ich dann vor allem jene Verallgemeinerungen von der Forkingunabhängigkeit auf beliebige Unabhängigkeitsrelationen durch, die sich quasi von selbst ergeben.

Teil II. Konkrete Unabhängigkeitsrelationen. Hier finden sich Teilergebnisse zum Beweis der *Existenz* kanonischer Unabhängigkeitsrelationen. Dabei beginne ich im **4. Kapitel** nicht mit dem Fall der einfachen Theorien, der mich dazu motiviert hat, abstrakte Unabhängigkeitsrelationen zu betrachten, sondern mit dem einfacheren Fall der Theorien, für die der Verband ACL der algebraisch abgeschlossenen Mengen modular ist. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der 1-basierten stabilen Theorien mit Imaginärenelimination: Aus Satz 1.7.4 und Satz 4.1.5 folgt unmittelbar, daß eine stabile Theorie mit Imaginärenelimination genau dann 1-basiert ist, wenn der Verband ACL modular ist. Viele grundlegende Ergebnisse über 1-basierte stabile Theorien lassen sich ohne weiteres auf ACL-modulare Theorien verallgemeinern.

Erst im **5. Kapitel** folgt dann die Behandlung der Forkingunabhängigkeit in einfachen Theorien. Höhepunkt ist hier ein Satz über abzählbare Modelle. Das kurze **6. Kapitel** skizziert einen Ansatz zu einer Verallgemeinerung der Ergebnisse des vierten Kapitels, die streng minimale und O-minimale Theorien mit einschließt.

Anhang. In **Anhang A** (wie „alt“) habe ich einige Ergebnisse gesammelt, die dokumentieren, was ich alles vorerst *nicht* im Stil des ersten und zweiten Teils verallgemeinern konnte, weil es raffiniertere Methoden erfordert. Der **Anhang B** (wie „Beispiel“) enthält einen Überblick über einige Beispiele und Klassen von Beispielen. Dabei handelt es sich allerdings fast ausschließlich um stabile Theorien.

Geschichte der Arbeit

Unter dem Titel „Monobasierte Theorien" sollte diese Arbeit ursprünglich den in der Literatur verstreuten Wissensstand über 1-basierte stabile Theorien zusammenfassen. Dabei drängte sich mir bald der Eindruck auf, daß dieses Thema (das ich schließlich nicht vollständig bearbeitet habe) sich wie folgt aufteilen läßt:

1. Grundlegende Eigenschaften 1-basierter stabiler Theorien.
2. Lokalisierungen („1-basierte" Typen und Klassen in stabilen Theorien).
3. Globale Verallgemeinerungen der 1-Basiertheit stabiler Theorien (Güte).
4. Eigenschaften stabiler Theorien, die mit 1-Basiertheit verwandt sind (Trivialität, NDOP).
5. Gruppen in 1-basierten stabilen Theorien.
6. Beispiele.

Von Anfang an interessierte mich vor allem das Phänomen, daß in 1-basierten stabilen Theorien der Verband $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ der algebraisch abgeschlossenen Teilmengen von T^{eq} eine besondere Rolle spielt. Hierbei waren keine Verbindungen zu den Punkten 2 und 5 zu erwarten, weshalb ich diese vorerst (und dann endgültig) ausklammerte. Eine wichtige Motivation für mich war die Absicht, einen Teil des „logikfreien" Kerns der Stabilitätstheorie herauszuarbeiten, wie er sich jetzt in den ersten vier Kapiteln der Arbeit findet.

Nachdem ich den größten Teil der Kapitel 3 und 4 sowie von Anhang A und Abschnitt B.2 in Rohform fertiggestellt hatte (allerdings in einer ganz anderen Reihenfolge), erfuhr ich von den eingangs erwähnten neuen Ergebnissen von Kim, erwartete aber zunächst keine Verbindung zum Thema meiner Arbeit. Letzteres änderte sich in dem Moment, als ich bemerkte, daß die Theorie des 'random graph' eine 1-basierte und triviale einfache, aber nichtstabile Theorie ist. Es stellte sich heraus, daß ein großer Teil dessen, womit ich mich bis dahin beschäftigt hatte, banal genug war, um sich wörtlich auf den Fall einer 1-basierten einfachen Theorie, die (schwache) kanonische Basen hat, zu übertragen.

Den Abschluß der Stoffsammlungsphase markierte dann die Entdeckung von Satz 1.7.4.

Hinweise für die Nichtleser

Der Kern der Arbeit findet sich gleich im ersten Kapitel. Hier geht es um *Unabhängigkeitsrelationen* und um *schwache kanonische Basen*. Ein wichtiges Werkzeug sind dabei Folgen von Indiscernibles, insbesondere *Kerne von Indiscernibles.* Im Unterschied zu den meisten anderen Kapiteln endet dieses mit einem richtigen Satz, dem *Eindeutigkeitssatz* 1.7.4. In Verbindung mit Abschnitt 4.1 ergibt sich die schon erwähnte Anwendung: Eine stabile Theorie ist schon dann 1-basiert, wenn der Verband $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ der algebraisch abgeschlossenen Teilmengen von $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ modular ist. (Für $\aleph_1$-kategorische Theorien ist dieser Satz — Satz A.0.2 — in [Hru93] erwähnt. Ich weiß nicht, ob es für beliebige stabile Theorien schon bekannt ist.)

Die Hauptaussage des zweiten Kapitels ist: U-Rang macht für beliebige Unabhängigkeitsrelationen Sinn. Wer bereit ist, das zu glauben, kann es zunächst übergehen und die Einzelheiten später nachlesen, wenn sie gebraucht werden.

Das dritte Kapitel ist leider ziemlich technisch, vor allem die beiden letzten Abschnitte über Güte. Diese lassen sich jedoch zunächst völlig gefahrlos übergehen, da sie erst im Anhang der Arbeit gebraucht werden. Mit Satz 3.2.10 enthält aber auch dieses Kapitel ein interessantes Ergebnis. Im Falle der stabilen Theorien handelt es sich um eine möglicherweise neue *Charakterisierung der Superstabilität*, genauer: Um eine Zerlegung der Superstabilität in eine schwächere stabilitätstheoretische Eigenschaft einerseits und eine rein verbandstheoretische Eigenschaft von $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ andererseits.

Das vierte Kapitel enthält einen wesentlichen Teil dessen, was ich ursprünglich über 1-basierte stabile Theorien schreiben wollte. Das Hauptergebnis ist hier Satz 4.1.5. Die beiden letzten Abschnitte ließen sich theoretisch ohne Gefahr für das Verständnis der restlichen Arbeit übergehen. Dabei würde man aber den zweiseitigen Beweis von Satz 4.6.9 verpassen.

Das fünfte Kapitel stellt einen Teil der neuen Ergebnisse von Byunghan Kim und Anand Pillay über einfache Theorien vor. Bei Satz 5.5.4 habe ich mir erlaubt, eine einfache und naheliegende Verallgemeinerung vorzunehmen, die im stabilen Fall auf Ehud Hrushovski zurückgeht.

Das sechste Kapitel ist technisch, aber kurz.

Anhang A sollte eigentlich nicht existieren, denn ich vermute, daß alles was dort gesagt wird, auch für einfache Theorien mit schwachen kanonischen Basen gilt. Aber vielleicht ist er gerade deshalb lesenswert, denn die Ergebnisse aus der „Stabilitätstheorie rund um 1-basierte Theorien", die sich hier angesammelt haben, sind natürlich weniger elementar als die im Hauptteil der Arbeit vorgestellten.

Konventionen

$\mathfrak{L}$ ist eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, ihre Signatur darf auch mehrsortig sein. T ist eine vollständige $\mathfrak{L}$-Theorie *mit unendlichen Modellen.* $\mathfrak{C}$ ist wie üblich das **Monstermodell** von T, d. h., ein κ-saturiertes Modell von T, wobei κ eine sehr große Kardinalzahl ist. Es ist immer implizit vorausgesetzt, daß alle **Elemente** und **Mengen** (abgesehen von offensichtlichen Ausnahmen wie Ordinalzahlen) aus dem Monstermodell stammen, und daß alle in den Beweisen auftretenden Mengen weniger als κ Elemente haben. Manchmal (ziemlich selten) läßt es sich aber nicht vermeiden, doch über größere Mengen zu sprechen. Diese bezeichne ich wie üblich als **Klassen** (obwohl sie natürlich im Sinne der Mengenlehre sehr wohl Mengen sind). Sie tragen typischerweise Namen wie $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$.

Mit $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ usw. bezeichne ich sowohl endliche Tupel als auch unendliche (ordinalzahlindizierte) Folgen von Elementen des Monstermodells. (Im Falle von unendlichen Folgen setze ich natürlich immer voraus, daß ihre Elemente eine „Menge“ bilden.) In beiden Fällen ist mit $\bar{a}/E$ der (vollständige) Typ von $\bar{a}$ über der Menge E gemeint. (Der Typ einer unendlichen Folge wird in der Literatur manchmal auch als $*$-Typ bezeichnet.) Wenn $\bar{a}$ und $\bar{a}'$ denselben Typ über E haben, schreibe ich dafür $\bar{a} \underset{E}{\equiv} \bar{a}'$. Ein Typ $\bar{a}'/B$ erweitert einen Typ $\bar{a}/E$, wenn $B \supseteq E$ und $\bar{a} \underset{E}{\equiv} \bar{a}'$ gilt. Wenn es nur auf die Typen (also nicht auf die Realisierungen $\bar{a}$ und $\bar{a}'$) ankommt, kann man natürlich $\bar{a} = \bar{a}'$ voraussetzen: „Sei $\bar{a}/B \supseteq E$ eine Erweiterung von $\bar{a}/E$ … “.

Aus den bisher genannten Konventionen ergibt sich, daß jeder Typ über einer Menge eine Realisierung in $\mathfrak{C}$ hat. Daraus folgt: Zu jedem partiellen Automorphismus $f : A \to A'$ des Monstermodells und jeder Menge B gibt es eine Menge B', so daß eine Fortsetzung $\tilde{f} : A \cup B \to A' \cup B'$ existiert, die ebenfalls ein partieller Automorphismus des Monstermodells ist. („Jedes κ-saturierte Modell ist κ-homogen.“) Nur um dies etwas anschaulicher zu machen, wollen wir zusätzlich annehmen, daß $\mathfrak{C}$ nicht nur κ-saturiert ist, sondern sogar **κ-groß** (vgl. [Hod93, 10.1] für die Definition). Nach [Hod93, Theorem 10.2.1] hat jede vollständige Theorie T für jede Kardinalzahl κ ein κ-großes Modell, und nach [Hod93, 10.1, Exercise 4] ist jedes κ-große Modell κ-saturiert und stark κ-homogen. Somit gilt: Jeder partielle Automorphismus $f : A \to A'$ des Monstermodells läßt sich zu einem Automorphismus $\tilde{f} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ fortsetzen.

Einen E-Automorphismus von $\mathfrak{C}$ kann man anschaulich als eine **Drehung** von $\mathfrak{C}$ um die „Drehachse“ E auffassen. Wenn wir eine Menge A um eine Achse E auf eine E-isomorphe Menge A' drehen, dann erhalten wir zu jeder weiteren Menge B ein E-isomorphes Bild B', so daß $AB \underset{E}{\equiv} A'B'$ gilt. Anschaulich gesprochen kann man also jede mit A in Verbindung stehende Menge bei einer Drehung „nachschleifen“.

Ein Typ $\bar{a}/E$ heißt algebraisch, wenn er nur endlich viele Realisierungen $\bar{a}' \underset{E}{\equiv} \bar{a}$ hat. Der Operator acl ordnet jeder Menge $E \subset \mathfrak{C}$ die Menge $\operatorname{acl} E \subset \mathfrak{C}$ derjenigen Elemente zu, die einen algebraischen Typ über E realisieren. Eine algebraisch abgeschlossene Menge ist eine Menge der Form $\operatorname{acl} E$. Natürlich ist acl ein algebraischer Abschlußoperator.

Eine algebraisch abgeschlossene Menge heißt endlich erzeugt über E, wenn sie von der Form $\operatorname{acl}(E\bar{a})$ ist, für ein endliches Tupel $\bar{a}$. Das alles überträgt sich ohne weiteres auch auf Klassen. Die endlich erzeugten algebraisch abgeschlossenen Mengen sind gerade die kompakten Elemente des Verbands ACL der algebraisch abgeschlossenen Teilklassen von $\mathfrak{C}$. Die Verbandsoperationen von ACL sind $\cup$ und $\vee$, wobei $A \vee B = \operatorname{acl}(AB)$ ist. Wenn A und E algebraisch abgeschlossene Mengen sind und $E \subseteq A$ gilt, dann bezeichnet $[E, A] \subset$ ACL das abgeschlossene und $(E, A] \subset$ ACL das nach links halboffene Intervall zwischen E und A. Mit $[E, A]_{fg}$ bezeichne ich die Teilmenge von $[E, A]$, die sich aus den über E endlich erzeugten Mengen zusammensetzt. Weil der Schnitt zweier endlich erzeugter algebraisch abgeschlossener Mengen nicht endlich erzeugt zu sein braucht, ist $[E, A]_{fg}$ i. a. kein Unter*verband* von $[E, A]$. $(E, A]_{fg}$ steht natürlich für $[E, A]_{fg} \smallsetminus \{E\}$. $A \prec B$ bedeutet $A < B$ und $[A, B] = \{A, B\}$, d. h., es gibt keine Verbandselemente, die echt zwischen A und B liegen.

Ich arbeite nicht in T^{eq}, ohne es ausdrücklich zu erwähnen. (Zur Definition und grundlegenden Eigenschaften von T^{eq} vgl. [Bue96, 4.1].) In T^{eq} kann man für jedes $n < \omega$ nicht nur n-Tupel (von Elementen derselben Sorte) in uniformer Weise codieren, sondern auch endliche Mengen (von Elementen derselben Sorte). Das Element, das die Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ codiert, bezeichne ich — mit $\{a_1, \dots, a_n\}$. (Die Sorte des codierenden Elements kommt von der $\emptyset$-definierbaren Äquivalenzrelation $\epsilon(y_1 \dots y_n, y'_1 \dots y'_n)$, die durch $\forall \bar{x}\big[(x = y_1 \vee \dots \vee x = y_n) \leftrightarrow (x = y'_1 \vee \dots \vee x = y'_n)\big]$ gegeben ist.)

Die Sprache $\mathfrak{L}$ identifiziere ich mit der Menge der $\mathfrak{L}$-Formeln. $\mathfrak{L}(E)$ bezeichnet $\mathfrak{L}$-Formeln mit Parametern aus der Menge E. Entsprechend ist $T(E)$ die vollständige $\mathfrak{L}(E)$-Theorie des Monstermodells. Wenn ich $T(A)\left[\frac{A'}{A}\right]$ schreibe, dann setzt das voraus, daß eine Bijektion zwischen A' und A gegeben ist, gemäß der man in $T(A)$ alle Elemente von A durch ein Element von A' substituieren kann.

$\bar{a} \in A$ bedeutet, daß die Elemente des Tupels $\bar{a}$ in der Menge A liegen.

Ich benutze durchgehend die üblichen mengentheoretischen Notationen, wonach beispielsweise eine Ordinalzahl λ die Menge der Ordinalzahlen ist, die kleiner als λ sind. Insbesondere ist ω die Menge der natürlichen Zahlen, und für jede natürliche Zahl $n < \omega$ ist $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

■ markiert das Ende eines Beweises — oder einer Bemerkung, deren Beweis sich unmittelbar aus dem vorherigen ergibt. ▲ steht am Ende eines aus der Literatur „importierten" Ergebnisses.

Viele Bemerkungen und Sätze in dieser Arbeit konnte ich bis auf kosmetische Änderungen und naheliegende Verallgemeinerungen direkt aus der Literatur übernehmen. Sie tragen hoffentlich alle eine Quellenangabe am Ende des Beweises. Wenn die Quellenangabe schon in der Formulierung eines Ergebnisses steht, so ist dies ein Hinweis darauf, daß es nicht genügte, den Beweis aus der angegebenen Quelle sinngemäß abzuschreiben. Ergebnisse ohne Quellenangabe sind trivial, gehören zur 'folklore' oder sind neu.

*

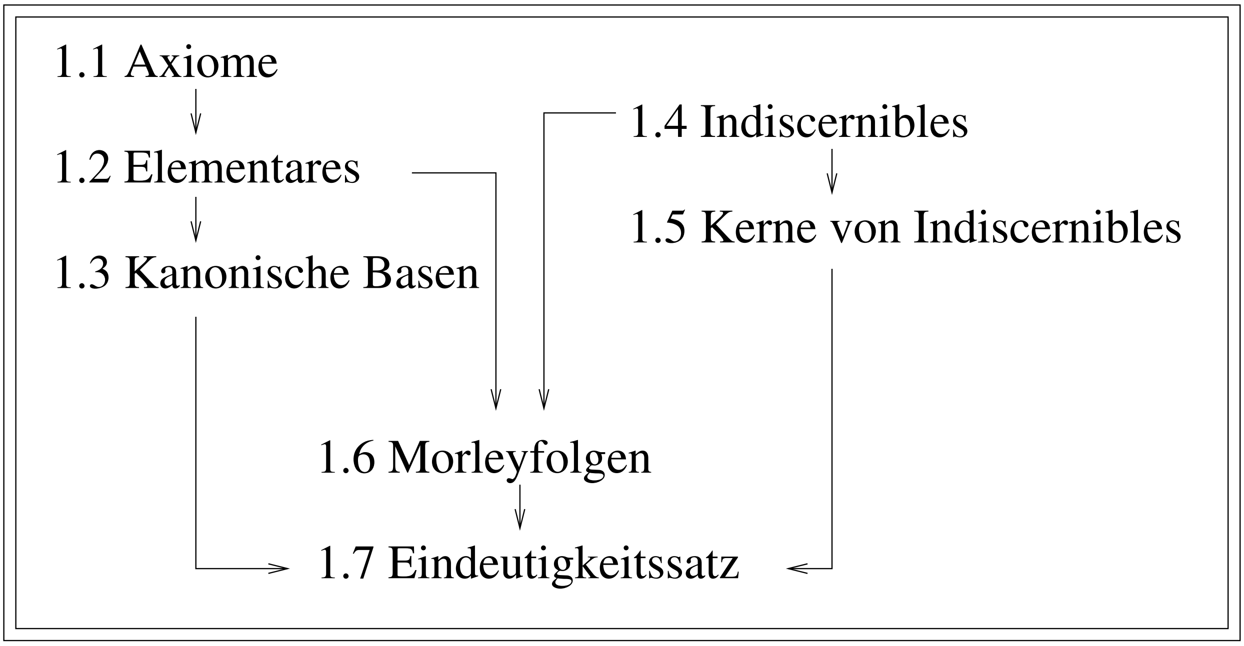
Martin Hyland rettete mich 1993/94 vor einem logiklosen Jahr in Cambridge, indem er "Model Theory" auf die Liste der Part III Essay-Themen setzte. Ich wählte die Variante über elementare Stabilitätstheorie (Satz von Morley und Satz von Baldwin-Lachlan) und lernte in kurzer Zeit selbständig mehr über Stabilitätstheorie als ich in einer Vorlesung hätte lernen können.

Nach Heidelberg zurückgekehrt, wollte ich dort so schnell wie möglich mein Diplom machen. Salma und Franz-Viktor Kuhlmann ist es zu verdanken, daß ich 1994 an dem Treffen in Manchester teilnahm, auf dem Philipp Rothmaler mich ermutigte, doch nach Freiburg zu Martin Ziegler zu gehen. Die Entscheidung war sicher richtig, auch wenn aus dem schnellen Diplom nichts wurde.

Ihnen allen danke ich — ganz besonders Professor Ziegler für ein interessantes und aktuelles Thema, das ich wohl ganz anders behandelt habe, als er sich das ursprünglich vorgestellt hatte.

Kapitel 1

Grundlagen



Das erste Kapitel behandelt die „allgemeingültigen“ Eigenschaften von strikten Unabhängigkeitsrelationen. Dazu zähle ich auch die Resultate über kanonische Unabhängigkeitsrelationen. In den Beweis des Eindeutigkeitssatzes 1.7.4, wonach es für jede Theorie höchstens eine kanonische Unabhängigkeitsrelation gibt, gehen alle vorher behandelten Methoden wesentlich ein.

Die genauen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Abschnitten sind dem obigen Leitfaden zu entnehmen.

1.1 Axiome

Beginnen wir mit dem Axiomensystem für Pseudounabhängigkeitsrelationen:

Definition 1.1.1
Eine **Pseudounabhängigkeitsrelation** auf den Teilmengen des Monstermodells ist eine dreistellige Relation $\downarrow$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

[inv] $\downarrow$ ist invariant unter Automorphismen von $\mathfrak{C}$.

[fc] $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ für alle endlichen Tupel $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} B$.

[ex0] $A \underset{E}{\downarrow} E$.

[ex0]* $E \underset{E}{\downarrow} A$.

[ext0] $A \underset{E}{\downarrow} B \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} \mathrm{dcl}(EB)$.

[ext0]* $\mathrm{dcl}(BE) \underset{E}{\downarrow} A \quad \Leftarrow \quad B \underset{E}{\downarrow} A$.

[mon1] $A \underset{E}{\downarrow} B \supseteq D \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} D$.

[mon1]* $D \underset{E}{\downarrow} A \quad \Leftarrow \quad D \subseteq B \underset{E}{\downarrow} A$.

[mon2] $A \underset{E}{\downarrow} B \supseteq D \supseteq E \quad \Rightarrow \quad A \underset{D}{\downarrow} B$.

[mon2]* $B \underset{D}{\downarrow} A \quad \Leftarrow \quad E \subseteq D \subseteq B \underset{E}{\downarrow} A$.

[trans] $A \underset{E}{\downarrow} D,\ A \underset{D}{\downarrow} B \supseteq D \supseteq E \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} B$.

Die Definition ist nicht symmetrisch, denn das zu [trans] duale Axiom [trans]* wird nicht gefordert. Von wirklichem Interesse sind wohl nur die Unabhängigkeitsrelationen:

Definition 1.1.2
Eine **Unabhängigkeitsrelation** auf den Teilmengen des Monstermodells ist eine dreistellige Relation $\downarrow$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

[inv] $\downarrow$ ist invariant unter Automorphismen von $\mathfrak{C}$.

[fc] $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ für alle endlichen Tupel $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} B$.

[mon1] $A \underset{E}{\downarrow} B \supseteq D \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} D$.

[mon2] $A \underset{E}{\downarrow} B \supseteq D \supseteq E \quad \Rightarrow \quad A \underset{D}{\downarrow} B$.

[trans] $A \underset{E}{\downarrow} D,\ A \underset{D}{\downarrow} B \supseteq D \supseteq E \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} B$.

[symm] $A \underset{E}{\downarrow} B \quad \Leftrightarrow \quad B \underset{E}{\downarrow} A$.

[ex] Für alle A, B gibt es $A' \underset{E}{\equiv} A$, so daß $A' \underset{E}{\downarrow} B$.

[lc] Für alle endlichen Tupel $\bar{a}$ und alle B existiert $E \subseteq B$ mit $|E| \leqslant |T|$, so daß $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} B$.

Für ein Tupel $\bar{a}$ bedeutet $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} B$ natürlich $A \underset{E}{\downarrow} B$, wobei A die von den Einträgen von $\bar{a}$ gebildete Menge ist. Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge ist, schreibe ich später analog auch $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I} \underset{E}{\downarrow} B$. Um die Lesbarkeit zu erhöhen, schreibe ich durchgehend AB für die Vereinigungsmenge $A \cup B$. Ausdrücke wie „$A \underset{E}{\downarrow} B \supseteq D$“ in [mon1] sind Abkürzungen für „$A \underset{E}{\downarrow} B$ und $B \supseteq D$“.

Übung 1.1.3
Eine beliebige Relation $\downarrow$ erfüllt genau dann [ex], wenn sie

[ex]* Für alle A, B gibt es $B' \underset{E}{\equiv} B$, so daß $A \underset{E}{\downarrow} B'$.

erfüllt. Jede Unabhängigkeitsrelation erfüllt die Regel

[ext] $A \underset{E}{\downarrow} D \subseteq B \quad \Rightarrow \quad$ es gibt $A' \underset{ED}{\equiv} A$, so daß $A' \underset{E}{\downarrow} B$.

Diese ist für beliebige Relationen $\downarrow$ äquivalent zur Regel

[ext'] $A \underset{E}{\downarrow} D \subseteq B \quad \Rightarrow \quad$ es gibt $B' \underset{ED}{\equiv} B$, so daß $A \underset{E}{\downarrow} B'$.

Bemerkung 1.1.4
Jede Unabhängigkeitsrelation ist eine Pseudounabhängigkeitsrelation.

Beweis: Die Axiome [foo]* folgen natürlich mit [symm] aus den Axiomen [foo]. [ex0] folgt aus [ex], und [ext0] folgt aus [ext] und [inv]. ■

Übung 1.1.5
Die Relation „$A \underset{E}{\downarrow} B \iff A \cap B \subseteq E$“ ist genau dann eine Unabhängigkeitsrelation, wenn $\operatorname{acl} A = A$ für alle A gilt.

Definition 1.1.6 **($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)**
Ein Typ $\bar{a}/B \supseteq E$ ist eine **freie Erweiterung** seiner Einschränkung $\bar{a}/E$, falls $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} B$ gilt.

Man kann Unabhängigkeitsrelationen auch durch freie Erweiterungen von endlichen Typen beschreiben:

Bemerkung 1.1.7
Sei $\downarrow$ eine Unabhängigkeitsrelation. Die dreistellige Relation Γ sei definiert wie folgt:
$\Gamma(\bar{a}, B, E)$ genau dann, wenn $\bar{a}$ ein endliches Tupel ist und $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} B \supseteq E$ gilt.
Dann ist Γ ein **Unabhängigkeitsbegriff** im Sinne von [KP95, Definition 4.1].

Beweis: Sei $\downarrow$ eine Unabhängigkeitsrelation. Zur besseren Übersicht wiederhole ich die zu beweisenden Axiome von Kim und Pillay hier fast wörtlich:

(Invariance) Γ ist invariant unter Automorphismen des Monstermodells.

Folgt aus [inv].

(Local Character) Für alle endlichen Tupel $\bar{a}$ und Mengen B gibt es eine Teilmenge $E \subseteq B$ mit $|E| \leqslant |T|$ und $\Gamma(\bar{a}, B, E)$.

Folgt aus [lc].

(Finite Character) $\Gamma(\bar{a}, B, E)$ gilt genau dann, wenn $B \supseteq E$ und $\Gamma(\bar{a}, E\bar{b}, E)$ für alle endlichen Tupel $\bar{b} \in B$.

“$\Rightarrow$”: Folgt aus [mon1]: $\Gamma(\bar{a}, B, E) \Rightarrow \bar{a} \underset{E}{\downarrow} B \Rightarrow \bar{a} \underset{E}{\downarrow} E\bar{b} \Rightarrow \Gamma(\bar{a}, E\bar{b}, E)$. “$\Leftarrow$”: Wenn $\Gamma(\bar{a}, E\bar{b}, E)$ — d. h., $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} E\bar{b}$ — für alle endlichen Tupel $\bar{b} \in B$ gilt, dann gilt für alle endlichen Tupel $\bar{a}'$ in der von $\bar{a}$ gebildeten endlichen Menge und alle endlichen Tupel $\bar{b} \in B$ $\bar{a}' \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ (wegen [mon1]*). Mit [fc] folgt $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} B$, also $\Gamma(\bar{a}, B, E)$.

(Extension) Für alle endlichen Tupel $\bar{a}$ und Mengen $B \supseteq E$ gibt es ein Tupel $\bar{a}'$ mit $\bar{a}/E = \bar{a}'/E$ und $\Gamma(\bar{a}', B, E)$.

Nach [ex] gibt es $\bar{a}' \underset{E}{\equiv} \bar{a}$, so daß $\bar{a}' \underset{E}{\downarrow} B$. Damit ist $\bar{a}/E = \bar{a}'/E$ und $\Gamma(\bar{a}', B, E)$.

(Symmetry) Aus $\Gamma(\bar{a}, E\bar{b}, E)$ folgt $\Gamma(\bar{b}, E\bar{a}, E)$.

Folgt aus [symm].

(Transitivity) Für $E \subseteq D \subseteq B$ gelten $\Gamma(\bar{a}, B, D)$ und $\Gamma(\bar{a}, D, E)$ genau dann, wenn $\Gamma(\bar{a}, B, E)$ gilt.

“$\Rightarrow$”: Folgt aus [trans]. “$\Leftarrow$”: Folgt aus [mon1] und [mon2]. ■

Bemerkung 1.1.8
Sei Γ ein Unabhängigkeitsbegriff. Die Relation $\downarrow$ sei definiert wie folgt:
$A \underset{E}{\downarrow} B$ genau dann, wenn $\Gamma(\bar{a}, E, EB)$ für alle endlichen Tupel $\bar{a} \in A$ gilt.
Dann ist $\downarrow$ eine Unabhängigkeitsrelation.

Beweis: **[inv]** Folgt aus (Invariance).

[fc] Wenn für alle endlichen Tupel $\bar{a} \in A$ und $\bar{b} \in B$ $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ gilt, dann auch $\Gamma(\bar{a}, E, E\bar{b})$. Also gilt wegen (Finite Character) $\Gamma(\bar{a}, E, B)$ für alle $\bar{a} \in A$, und damit auch $A \underset{E}{\downarrow} B$.

[mon1], [mon2], [trans] Folgt alles aus (Transitivity).

[symm] Wenn $A \underset{E}{\downarrow} B$ gilt, dann (links nach Definition von $\downarrow$, rechts wegen [mon1]) auch $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ für alle $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$. Es folgt $\Gamma(\bar{a}, E\bar{b}, E)$ und mit (Symmetry) $\Gamma(\bar{b}, E\bar{a}, E)$. Also ist $\bar{b} \underset{E}{\downarrow} \bar{a}$ für alle $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$, und mit [fc] folgt $B \underset{E}{\downarrow} A$.

[ex] Dieses Axiom ist überraschend schwer zu überprüfen. Wenn $A = \{a\}$ nur aus einem einzelnen Element besteht, dann folgt [ex] aus (Extension) und [mon1]. Für beliebige Mengen $A = \{a_\iota \mid \iota < \lambda\}$ kann man durch Induktion über die Ordinalzahl λ beweisen, daß eine Menge $A' \underset{E}{\equiv} A$ mit $A' \underset{E}{\downarrow} B$ existiert:

Die Induktionsbasis $\lambda = 0$ folgt direkt aus (Extension). Wenn $A_\lambda = \{a_\iota \mid \iota < \lambda\} \subseteq \{a_\iota \mid \iota < \lambda + 1\} = A_{\lambda+1}$ schon so verlegt ist, daß $A_\lambda \underset{E}{\downarrow} B$ gilt (und deshalb wegen [symm] und der Definition von $\downarrow$ auch $EA_\lambda \underset{E}{\downarrow} B$), dann kann man a_λ mittels (Extension) über EA_λ so verlegen, daß $a_\lambda \underset{EA_\lambda}{\downarrow} B$ gilt, woraus $A_{\lambda+1} = a_\lambda A_\lambda \underset{EA_\lambda}{\downarrow} B$ folgt (wieder wegen [symm] und der Definition von $\downarrow$). Mit [trans]* folgt $A_{\lambda+1} \underset{E}{\downarrow} B$ für die verlegte Menge. Der Limesschritt erfolgt mit [fc].

[lc] Folgt aus (Local Character). ■

Übung 1.1.9
Wenn man eine Unabhängigkeitsrelation $\downarrow$ wie in den vorangegangenen Bemerkungen in einen Unabhängigkeitsbegriff Γ und dann wieder in eine Unabhängigkeitsrelation übersetzt, erhält man die ursprüngliche Unabhängigkeitsrelation zurück. Wenn man einen Unabhängigkeitsbegriff Γ in eine Unabhängigkeitsrelation $\downarrow$ und zurück in einen Unabhängigkeitsbegriff übersetzt, erhält man den ursprünglichen Unabhängigkeitsbegriff zurück.

Kommentar

Bei den Axiomen für einen Unabhängigkeitsbegriff (“notion of independence”) in [KP95] handelt es sich um eine Variante des Axiomensystems von Harnik und Harrington, das die nichtforkenden Erweiterungen in stabilen Theorien charakterisiert. Aus den Axiomen (Invariance), (Transitivity), (Extension) und (Local Character) (Axiome 0 bis 3 in [HH84]) folgt zusammen mit dem Beschränktheitsaxiom (Axiom 4) die Stabilität von T. Umgekehrt gibt es in stabilen Theorien immer genau eine Relation, welche die Axiome 0 bis 4 erfüllt. Diese erfüllt dann automatisch zusätzlich (Finite Character) und (Symmetry).

In [KP95, Theorem 4.2] wird gezeigt, daß der Unabhängigkeitssatz [KP95, Theorem 3.5] für einfache Theorien eine analoge Rolle zum Axiom 4 für stabile Theorien spielt, wenn man die Axiome (Finite Character) und (Symmetry) zu den grundlegenden Axiomen 0 bis 3 hinzunimmt. Der Unabhängigkeitssatz spielt in meiner Arbeit jedoch keine Rolle.

Zur Übersetzung des Axiomensystems für freie Erweiterungen in eines für unabhängige Mengen, wie sie für die Unabhängigkeit in stabilen Theorien spätestens seit [Mak84] üblich ist, habe ich mich deshalb entschlossen, weil dieser Zugang meines Erachtens „natürlicher“ ist und übersichtlichere Beweise erlaubt.

Da die Relation „$A \underset{E}{\downarrow} B$ für alle A, B, E“ immer eine Unabhängigkeitsrelation ist, gibt es für stabile Theorien immer mindestens zwei Unabhängigkeitsrelationen. Ein weiteres Beispiel ist der in [KP95] in diesem Zusammenhang erwähnte Unabhängigkeitsbegriff in O-minimalen Theorien (vgl. Abschnitt B.1). Später werden wir sehen, wie man aus einer Unabhängigkeitsrelation $\downarrow$ mit U-Rang eine ganze Hierarchie von gröberen Unabhängigkeitsrelationen $\downarrow^{\epsilon}$ gewinnen kann.

„Pseudounabhängigkeitsrelationen“ habe ich nur definiert, um so die Eigenschaften der Teilen-Unabhängigkeit in beliebigen vollständigen Theorien prägnant zusammenzufassen (vgl. Abschnitt 5.1).

1.2 Elementares

Dieser Abschnitt enthält eine langweilige Sammlung von einfachsten Grundlagen, die ich später meist ohne explizite Erwähnung anwenden werde.

Bemerkung 1.2.1
Wenn $\downarrow$ eine Pseudounabhängigkeitsrelation oder Unabhängigkeitsrelation für T ist und $C \subseteq \mathfrak{C}$, dann ist durch $A \underset{CE}{\downarrow} B$ eine Pseudounabhängigkeitsrelation bzw. Unabhängigkeitsrelation $\underset{C}{\downarrow}$ für $T(C)$ gegeben.

Beweis: Jedes der Axiome für $\underset{C}{\downarrow}$ folgt in offensichtlicher Weise aus dem entsprechenden Axiom für $\downarrow$, wobei man in einigen Fällen ([ex0], [ext0], [mon2], [trans]) noch zusätzlich [mon1] und teilweise auch noch [ext0] braucht. Für die dualen Axiome braucht man entsprechend [mon1]* und ggf. auch [ext0]*.

[symm] für $\underset{C}{\downarrow}$ folgt direkt aus $\downarrow$-[symm]; ebenso verhält es sich bei [ex]. (E-Isomorphie bezüglich $T(C)$ ist natürlich dasselbe wie EC-Isomorphie bezüglich T.)

Um [lc] für $\underset{C}{\downarrow}$ nachzuweisen, muß man zu $\bar{a}$, B mit $\downarrow$-[lc] ein $E \subseteq BC$ mit $|E| \leqslant |T|$ wählen, so daß $\bar{a} \underset{E}{\downarrow} BC$ ist. Dann gilt auch $\bar{a} \underset{EC}{\downarrow} B$, wie gewünscht. ■

Definition 1.2.2
Wenn $\downarrow$ eine Relation auf den Mengen ist, die [fc], [mon1] und [mon1]* erfüllt, dann sei $\downarrow$ für Klassen $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ und Mengen E definiert durch $\mathbb{A} \underset{E}{\downarrow} \mathbb{B} \iff \bar{a} \underset{E}{\downarrow} \bar{b}$ für alle endlichen Tupel $\bar{a} \in \mathbb{A}$, $\bar{b} \in \mathbb{B}$.

Definition 1.2.3

- Sei I eine Indexmenge. Ein **System** $(A_\iota)_{\iota \in I}$ heißt E**-unabhängig** (bezüglich $\downarrow$), falls für alle $I_1, I_2 \subseteq I$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ gilt: $\bigcup_{\iota \in I_1} A_\iota \underset{E}{\downarrow} \bigcup_{\iota \in I_2} A_\iota$.
- Sei I eine lineare Ordnung. Eine **Folge** $(A_i)_{i \in I}$ heißt E**-unabhängig** (bezüglich $\downarrow$), falls für alle $I_1, I_2 \subseteq I$ mit $I_1 < I_2$ (d. h., $i_1 < i_2$ für alle $i_1 \in I_1$ und $i_2 \in I_2$) gilt: $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I_1} \underset{E}{\downarrow} (\bar{a}_\iota)_{\iota \in I_2}$.

Bemerkung 1.2.4 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
Sei I eine lineare Ordnung. Eine **Folge** $(A_\iota)_{\iota \in I}$ ist bereits dann E-unabhängig, wenn sie für alle $i \in I$ die Bedingung $(A_\iota)_{\iota < i} \underset{E}{\downarrow} A_i$ erfüllt.

Beweis: Wegen [fc], [mon1] und [mon1]* genügt es, die Behauptung für endliche I zu beweisen. Wir können also $I = n < \omega$ annehmen und die Behauptung durch Induktion über n beweisen. Die Induktionsbasis $n = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt von n nach $n + 1$ können wir annehmen, daß $(A_\iota)_{\iota < n}$ bereits E-unabhängig ist. Zu zeigen: Wenn $(A_\iota)_{\iota < n} \underset{E}{\downarrow} A_n$ gilt, dann ist auch $(A_\iota)_{\iota \leqslant n}$ E-unabhängig.

Wir müssen also überprüfen, daß (für $k < n$) $(A_\iota)_{\iota \leqslant k} \underset{E}{\downarrow} (A_\iota)_{k < \iota \leqslant n}$ ist. Aus $(A_\iota)_{\iota < n} \underset{E}{\downarrow} A_n$ folgt mit [mon2]* $(A_\iota)_{\iota < n} \underset{E(A_\iota)_{k<\iota<n}}{\downarrow} A_n$ und weiter $(A_\iota)_{\iota \leqslant k} \underset{E(A_\iota)_{k<\iota<n}}{\downarrow} (A_\iota)_{k < \iota \leqslant n}$. Weil $(A_\iota)_{\iota < n}$ E-unabhängig ist, ist andererseits $(A_\iota)_{\iota \leqslant k} \underset{E}{\downarrow} E(A_\iota)_{k < \iota < n}$. Mit [trans] folgt $(A_\iota)_{\iota \leqslant k} \underset{E}{\downarrow} (A_\iota)_{k < \iota \leqslant n}$, wie gewünscht. ■

Bemerkung 1.2.5 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
Wenn $\downarrow$ [symm] erfüllt und I eine lineare Ordnung ist, dann ist es für die obige Definition egal, ob man $(A_\iota)_{\iota \in I}$ als Folge auffaßt oder als ungeordnetes System.

Beweis: Sei also $(A_\iota)_{\iota \in I}$ eine E-unabhängige Folge, und $\downarrow$ erfülle [symm]. Es genügt, zu zeigen, daß $(A_\iota)_{\iota \in I}$ auch nach „Umsortieren" von I noch eine E-unabhängige Folge ist. Dafür wiederum genügt es nach der letzten Bemerkung, wenn $(A_\iota)_{\iota \in I \setminus \{i\}} \underset{E}{\downarrow} A_i$ für alle $i \in I$ gilt. Wir können die neue Ordnung nun wieder vergessen und $<$ für die ursprüngliche Ordnung auf I reservieren.

Aus $(A_\iota)_{\iota \leqslant i} \underset{E}{\downarrow} (A_\iota)_{\iota > i}$ folgt $A_i \underset{E(A_\iota)_{\iota<i}}{\downarrow} (A_\iota)_{\iota \neq i}$. Andererseits gilt auch $A_i \underset{E}{\downarrow} E(A_\iota)_{\iota < i}$ (wegen [symm]). Mit [trans] folgt $A_i \underset{E}{\downarrow} (A_\iota)_{\iota \neq i}$, und mit [symm] schließlich $(A_\iota)_{\iota \in I \setminus \{i\}} \underset{E}{\downarrow} A_i$, wie gewünscht. ■

Die folgende Bemerkung zeigt, daß Unabhängigkeitsrelationen die Welt durch die acl-Brille sehen:

Bemerkung 1.2.6 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
$A \underset{E}{\downarrow} B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{acl}(AE) \underset{\mathrm{acl}\, E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $A \underset{E}{\downarrow} B$. Wegen [ext] und [inv] ist dann $A \underset{E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$. Wegen [symm] folgt ebenso $\mathrm{acl}(AE) \underset{E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$. Mit [mon2] folgt schließlich $\mathrm{acl}(AE) \underset{\mathrm{acl}\, E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$. "$\Leftarrow$": Sei $\mathrm{acl}(AE) \underset{\mathrm{acl}\, E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$, wegen [mon1]* also $A \underset{\mathrm{acl}\, E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$. Wegen [ex0] ist andererseits $A \underset{E}{\downarrow} E$, woraus wir mit [ext] und [inv] $A \underset{E}{\downarrow} \mathrm{acl}\, E$ erhalten. Beides zusammen ergibt mit [trans] $A \underset{E}{\downarrow} \mathrm{acl}(EB)$ und führt mit [mon1] schließlich zu $A \underset{E}{\downarrow} B$. ■

1.3 Schwache kanonische Basen

Definition 1.3.1
Eine Relation $\downarrow$ heißt **strikt,** falls sie das Axiom [str] erfüllt:

[str] $A \underset{E}{\downarrow} B,\ e \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad e \in \operatorname{acl} E.$

Definition 1.3.2 **(** $\downarrow$ strikte Unabhängigkeitsrelation**)**
Eine algebraisch abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq \operatorname{acl} B$, so daß $A \underset{E}{\downarrow} B$ gilt, heißt **Basis** des Typs A/B.

Die kleinste Basis von A/B heißt **(schwache) kanonische Basis** von A/B und wird mit B_A bezeichnet (sofern sie existiert).

Definition 1.3.3
Eine **kanonische** Unabhängigkeitsrelation ist eine strikte Unabhängigkeitsrelation, so daß jeder Typ A/B eine schwache kanonische Basis hat.

Diese Definition weicht für stabile Theorien von der üblichen Definition ab. Dort definiert man (in T^{eq}) eine gewisse **definierbar** abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq \operatorname{dcl} B$, für die $A \underset{E}{\downarrow} B$ gilt, als kanonische Basis $\operatorname{cb}(A/B)$ von A/B. Es ist aber immer $B_A = \operatorname{acl}(\operatorname{cb}(A/B))$.

Bemerkung 1.3.4 **(** $\downarrow$ strikte Unabhängigkeitsrelation**)**
Wenn B_A existiert, ist $B_A = (\operatorname{acl} B)_A = B_{\operatorname{acl} A}$. ■

Bemerkung 1.3.5 **(** $\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Die folgenden Bedingungen sind für alle Mengen A, B, E äquivalent:

- $A \underset{E}{\downarrow} B$.
- $(BE)_A \subseteq \operatorname{acl} E$.
- $(BE)_A = E_A$.

Beweis: Die erste Bedingung ist äquivalent zu $A \underset{E}{\downarrow} EB$, und dies ist nach der Definition von $(EB)_A$ äquivalent zur zweiten Bedingung.

Wenn die erste und zweite Bedingung erfüllt sind, ist $(EB)_A$ eine algebraisch abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{acl} E$, die $A \underset{(EB)_A}{\downarrow} EB$ erfüllt, insbesondere also auch $A \underset{(EB)_A}{\downarrow} E$. Also ist $(EB)_A \supseteq E_A$. Andererseits ist dann E_A eine algebraisch abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{acl}(EB)$, die $A \underset{E_A}{\downarrow} B$, also (wegen $A \underset{E}{\downarrow} EB$ und [trans]) auch $A \underset{E_A}{\downarrow} EB$ erfüllt. Also ist auch $(EB)_A \subseteq E_A$. Somit folgt die dritte Bedingung aus der ersten und zweiten. Umgekehrt folgt die zweite trivialerweise aus der dritten. ■

Die folgende offensichtliche Beobachtung erlaubt es, die Definition von B_A für kanonische Relationen $\downarrow$ auch auf Klassen $\mathbb{A}$ auszuweiten und $B_{\mathbb{A}} = \bigcup_{\bar{a} \in \mathbb{A},\ \bar{a} \text{ endlich}} B_{\bar{a}}$ zu setzen:

Bemerkung 1.3.6 **(** $\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Es ist immer $B_A = \bigcup_{\bar{a} \in A,\ \bar{a} \text{ endlich}} B_{\bar{a}}$. ■

Die folgende Bemerkung (insbesondere der zweite Punkt, der überhaupt nichts aussagt) ist in Verbindung mit den späteren Bemerkungen 3.1.5, 3.1.6 und 3.3.2 zu lesen:

Bemerkung 1.3.7 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
Die folgenden Regeln gelten im Verband ACL der algebraisch abgeschlossenen Mengen (mit kleinstem Element $0 = \operatorname{acl}\emptyset$ und größtem Element $\infty = \mathfrak{C}$) immer:

- $B_\bullet : [0, \infty] \to [0, B]$ ist eine monotone Abbildung.
- $\bullet_A : [0, \infty] \to [0, \infty]$ ist eine Abbildung.
- $B_A = \min(A, B)$, falls $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$.
- $B_{A \cap A'} \subseteq B_A \cap B_{A'}$.
- $B_{A \vee A'} \supseteq B_A \vee B_{A'}$.

Beweis: Die ersten drei Punkte folgen direkt aus der Definition. Die letzten beiden Punkte folgen dann aus der Monotonie von $B_\bullet$. ■

1.4 Indiscernibles

Definition 1.4.1
Für eine lineare Ordnung I und $k < \omega$ ist $[I]^k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in I^k \mid i_1 < \cdots < i_k\}$.

Definition 1.4.2
Seien I und J unendliche lineare Ordnungen. Seien $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ zwei Folgen von Tupeln gleicher (evt. unendlicher) Länge.

- $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ heißt E-**bunter** als $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$, falls es für jedes $k < \omega$ und jedes aufsteigende Tupel $(j_1, \ldots, j_k) \in [J]^k$ in J ein aufsteigendes Tupel $(i_1, \ldots, i_k) \in [I]^k$ in I gibt, welches $\bar{a}_{i_1} \ldots \bar{a}_{i_k} \underset{E}{\equiv} \bar{b}_{j_1} \ldots \bar{b}_{j_k}$ erfüllt.
- $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ heißen E-**äquivalent,** falls $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ E-bunter als $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ und $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ E-bunter als $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ ist.

Natürlich ist E-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation, und die Relation „ist E-bunter als" ist eine partielle Präordnung. Wir brauchen sie nur im Zusammenhang mit der folgenden offensichtlichen

Bemerkung 1.4.3 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ E-unabhängig und E-bunter als $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$. Dann ist auch $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ E-unabhängig. ■

Definition 1.4.4
Sei I eine **unendliche** lineare Ordnung und $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von (evt. unendlichen) Tupeln. $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ heißt E-**indiscernible,** falls für je zwei aufsteigende Tupel $(i_1, \ldots, i_k), (j_1, \ldots, j_k) \in [I]^k$ in I von gleicher Länge immer $\bar{a}_{i_1} \ldots \bar{a}_{i_k} \underset{E}{\equiv} \bar{a}_{j_1} \ldots \bar{a}_{j_k}$ gilt.

Jede Folge von Indiscernibles ist also *per Definition unendlich.* Um den Unterschied zu den spezielleren **Mengen von Indiscernibles** zu unterstreichen, bei denen es auf die zugrundeliegende Ordnung nicht ankommt, bezeichnet man Folgen von Indiscernibles manchmal auch als **Ordnungsindiscernibles.**

Bemerkung 1.4.5
- Zwei Folgen $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in J}$ von E-Indiscernibles sind genau dann E-isomorph, wenn sie E-äquivalent sind und I und J als Ordnungen isomorph sind.
- Zu jeder Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ von E-Indiscernibles und jeder linearen Ordnung $I' \supseteq I$ (die auf I die ursprüngliche Ordnung induziert) gibt es eine **Verlängerung** $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I'}$.
- Eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ ist genau dann E-indiscernible, wenn sie für jedes endliche Tupel $\bar{e} \in E$ $\bar{e}$-indiscernible ist. ■

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall einer Verschärfung von [KP95, Lemma 5.3] und wahrscheinlich Folklore.

Lemma 1.4.6
Jede Folge von E-Indiscernibles ist $(\operatorname{acl} E)$-indiscernible.

Beweis: Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von E-Indiscernibles, $\psi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(E)$ eine algebraische Formel (mit $\models \exists_{\leqslant n}\bar{y}\psi(\bar{y})$) und sei $\varphi(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, \bar{y}) \in \mathcal{L}(E)$. Zu zeigen: Für je zwei aufsteigende Tupel $(i_1, \ldots, i_k), (j_1, \ldots, j_k) \in [I]^k$ gilt immer

$$\models \forall \bar{y}\Big[\psi(\bar{y}) \quad \to \quad \big(\varphi(\bar{a}_{i_1} \ldots \bar{a}_{i_k}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{a}_{j_1} \ldots \bar{a}_{j_k}, \bar{y})\big)\Big].$$

Wenn wir $\epsilon(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, \bar{x}'_1 \ldots \bar{x}'_k)$ für die Äquivalenzrelation

$$\forall \bar{y}\Big[\psi(\bar{y}) \quad \to \quad \big(\varphi(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}'_1 \ldots \bar{x}'_k, \bar{y})\big)\Big] \quad \in \quad \mathcal{L}(E)$$

schreiben, dann erhält die Behauptung die folgende Gestalt: $\models \epsilon(\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_k}, \bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_k})$ für je zwei aufsteigende Tupel $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k) \in [I]^k$. Es genügt, dies für solche Tupel zu zeigen, die $i_k < j_1$ erfüllen. (Den allgemeinen Fall erhält man aus diesem Spezialfall, indem man I ggf. vergrößert, dann $(l_1, \dots, l_k) \in [I]^k$ wählt mit $l_1 > i_k$ und $l_1 > j_k$, und schließlich die Transitivität der Äquivalenzrelation ϵ ausnutzt.) Tatsächlich genügt es sogar, dies für ein einziges solches Tupel mit $i_k < j_1$ zu zeigen. Für die andern gilt es dann auch, weil die Folge E-indiscernible ist.

Da das Problem invariant unter E-Äquivalenz ist, können wir $I = \omega \times \{1, \dots, k\}$ (mit der lexikographischen Ordnung) annehmen. Dann induziert ϵ eine Äquivalenzrelation auf ω, wonach i und j genau dann äquivalent sind, wenn $\epsilon(\bar{a}_{(i,1)} \dots \bar{a}_{(i,k)}, \bar{a}_{(j,1)} \dots \bar{a}_{(j,k)})$ gilt. Da ϵ höchstens 2^n Klassen hat, gilt dasselbe auch für die induzierte Äquivalenzrelation. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also zwei natürliche Zahlen $i < j$, die in derselben Klasse liegen:

$$\models \epsilon(\bar{a}_{(i,1)} \dots \bar{a}_{(i,k)}, \bar{a}_{(j,1)} \dots \bar{a}_{(j,k)}),$$

und wir sind fertig. ■

Für den Beweis von Satz 1.4.9 werden wir Lemma 1.4.8 brauchen, das den kombinatorischen Kern von Morleys Omitting Types Theorem [CK90, Theorem 7.2.2] ausmacht. In den Beweis des Lemmas geht der **Satz von Erdős-Rado** ein:

Satz 1.4.7
Sei X eine linear geordnete Menge, κ eine unendliche Kardinalzahl und C eine Menge von „Farben“. Sei eine „Färbung“ $[X]^{n+1} \to C$ gegeben $(n < \omega)$. Ferner gelte $|C| \leqslant \kappa$ und $|X| > \beth_n(\kappa)$.
Dann gibt es eine Farbe $c \in C$ und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $|Y| > \kappa$, so daß $[Y]^{n+1}$ monochrom von der Farbe c ist.

Beweis: Siehe **[CK90, Theorem 7.2.1].** ▲

Lemma 1.4.8
Sei X eine linear geordnete Menge, κ eine unendliche Kardinalzahl und C eine Menge von „Farben“. Sei für jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$ eine „Färbung“ $[X]^n \to C$ gegeben. Ferner gelte $|C| \leqslant \kappa$ und $|X| \geqslant \beth_{\kappa^+}$.
Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{0<n<\omega}$ in C, so daß (*) für jedes $k < \omega$ gilt:

(*) Für jedes $\alpha < \kappa^+$ gibt es eine Teilmenge $Y \subseteq X$, für die gilt:

- $[Y]^1$ ist monochrom von der Farbe c_1.
- ...
- $[Y]^k$ ist monochrom von der Farbe c_k.
- $|Y| > \beth_\alpha$.

Beweis: Es ist sicher $|C| \leqslant \kappa < \sup_{\alpha<\kappa^+} \beth_\alpha \leqslant |X|$. Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip $c_1 \in C$ und $Y \subseteq X$, so daß $|Y| = |X|$ ist und Y monochrom von der Farbe c_1 ist. Damit gilt (*) für $k = 1$.

Nehmen wir nun an, wir haben bereits Farben $c_1, \dots, c_n$ gefunden, so daß (*) für $k \leqslant n$ gilt. Dann gibt es zu jedem $\alpha < \kappa^+$ eine Menge $Y \subseteq X$ mit $[Y]^1$ monochrom von der Farbe c_1, $[Y]^2$ von der Farbe c_2 usw., bis $[Y]^k$ monochrom von der Farbe c_k, und außerdem $|Y| > \beth_{\alpha+n+1} = \beth_{n+1}(\beth_\alpha)$.

Nach Satz 1.4.7 gibt es dazu ein $c_{n+1}(\alpha) \in C$ und ein $Y' \subseteq Y$, so daß $[Y']^{n+1}$ monochrom von der Farbe $c_{n+1}(\alpha)$ ist und $|Y'| > \beth_\alpha$ gilt.

Nun ist $\sup_{c\in C}\big(\sup\{\alpha \mid \alpha < \kappa^+, c_{n+1}(\alpha) = c\}\big) = \sup\{\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} = \kappa^+$. Weil κ^+ regulär und $|C| < \kappa^+$ ist, gibt es daher ein $c_{n+1} \in C$ mit $\sup\{\alpha \mid \alpha < \kappa^+, c_{n+1}(\alpha) = c_{n+1}\} = \kappa^+$. ■

Satz 1.4.9
Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Folge und κ eine unendliche Kardinalzahl, so daß gilt:

- $2^{|\mathcal{L}(E)|} \leqslant \kappa$.
- Die Tupel $\bar{a}_i$ haben alle dieselbe Länge $\leqslant \kappa$.
- $|I| \geqslant \beth_{\kappa^+}$.

Dann gibt es eine Folge $(\bar{b}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ E-bunter ist als $(\bar{b}_\iota)_{\iota\in I}$.
Quelle: [She80, Lemma 6.3]

Beweis: Der Beweis besteht hauptsächlich in der Übersetzung von Lemma 1.4.8 in die vorliegende Situation:

- $X = I$. Damit ist $|X| = |I| \geqslant \beth_{\kappa^+} \geqslant \sup_{\alpha<\kappa^+} \beth_\alpha$.
- Die Farbe von $(i_1, \dots, i_n) \in [I]^n$ ist der vollständige Typ $\operatorname{tp}(\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}/E)$.

- C ist die Menge der Typen, die als Farben in Frage kommen. Damit ist $|C| \leqslant \kappa \cdot 2^{|\mathcal{L}(E)|} \leqslant \kappa$. (Ein Typ mit höchstens κ freien Variablen ist festgelegt durch seine höchstens κ Einschränkungen auf jeweils endlich viele Variable).

Lemma 1.4.8 liefert nun eine Folge von vollständigen Typen $p_n(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ über E, so daß I für jedes $k < \omega$ eine unendliche (tatsächlich sogar verschwenderisch große) Teilmenge $J \subseteq I$ hat, so daß für alle $(j_1, \ldots, j_n) \in [J]^n$ mit $n < k$ $\bar{a}_{j_1} \ldots \bar{a}_{j_n} \models p(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ gilt.

Das heißt aber, daß der Typ $\bigcup_{n<\omega} p_n(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ konsistent und der Typ einer Folge $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\omega}$ von Indiscernibles ist. Da die neue Folge $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\omega}$ weniger „Farben“ hat als die ursprüngliche Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$, ist sie weniger „$E$-bunt“. ■

Kommentar

Die genaue Aussage und der Beweis von Satz 1.4.9 sind in [She80] nur sehr vage angedeutet. Ich weiß nicht, ob Lemma 1.4.8 anderswo schon explizit formuliert wurde. Für einen etwas technischeren Beweis von Satz 1.4.9, der wohl noch etwas enger an [CK90, Theorem 7.2.2] angelehnt ist, vgl. [Kim96a, Lemma A.3].

1.5 Kerne von Indiscernibles

Definition 1.5.1
Der E-**Kern** einer Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles ist die Menge

$$K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) = \bigcup_{\substack{k<\omega \\ i_1<\cdots<i_k<j_1<\cdots<j_k}} \Big(\operatorname{acl}(E\bar{a}_{i_1}\ldots\bar{a}_{i_k}) \cap \operatorname{acl}(E\bar{a}_{j_1}\ldots\bar{a}_{j_k})\Big).$$

Lemma 1.5.2
Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Folge von E-Indiscernibles und $I \supseteq I_1 \cup I_2$ mit $I_1 < I_2$ (d. h., $i_1 < i_2$ für alle $i_1 \in I_1$ und $i_2 \in I_2$). Wenn I_1 und I_2 unendlich sind, dann ist

$$K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) \;=\; \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1}\big) \;\cap\; \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_2}\big).$$

Beweis: "$\supseteq$": Folgt aus dem lokalen Charakter von acl. "$\subseteq$": Da wir I falls nötig zu einer dichten Ordnung ohne Endpunkte verlängern können, genügt es, folgendes zu zeigen:

Für alle $i_1 < \cdots < i_k < j_1 < \cdots < j_k$ und $i'_1 < \cdots < i'_k < j_1$ ist

$$\operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{i_1}\ldots\bar{a}_{i_k})\big) \cap \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{j_1}\ldots\bar{a}_{j_k})\big) = \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{i'_1}\ldots\bar{a}_{i'_k})\big) \cap \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{j_1}\ldots\bar{a}_{j_k})\big).$$

Sei also $a \in \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{i_1}\ldots\bar{a}_{i_k})\big) \cap \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{j_1}\ldots\bar{a}_{j_k})\big)$. Dann ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota<j_1}$ eine Folge von $E(\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant j_1}$-Indiscernibles und deshalb auch Ea-indiscernible. Aus $a \in \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{i_1}\ldots\bar{a}_{i_k})\big)$ folgt daher $a \in \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_{i'_1}\ldots\bar{a}_{i'_k})\big)$. ■

Lemma 1.5.3
Jede Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles ist sogar indiscernible über $K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$.

Beweis: Verlängere I zu $I' = I \cup J$ mit $I < J$, J unendlich. Verlängere $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ E-indiscernible zu einer Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I\cup J}$. Dann ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ indiscernible über $E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in J}$, also auch über $\operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in J}\big) \supseteq K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$. ■

Für die Formulierung des folgenden Satzes brauchen wir den Begriff der algebraischen Unabhängigkeit, der im zweiten Teil der Arbeit noch eine ausführliche Behandlung erfahren wird:

Definition 1.5.4
Eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ ist **algebraisch unabhängig** über E, wenn für alle $I_1, I_2 \subseteq I$ mit $I_1 < I_2$ gilt:

$$\operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1}\big) \cap \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_2}\big) = \operatorname{acl} E.$$

Es ergibt sich sofort:

Satz 1.5.5
Der E-Kern $K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$ einer Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles ist invariant beim Verlängern der Folge. Er läßt sich charakterisieren als

- Die größte Teilmenge $F \subseteq \operatorname{acl}\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ F-indiscernible ist.
- Die kleinste algebraisch abgeschlossene Menge $F \supseteq E$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ algebraisch unabhängig über F ist. ■

Kommentar

Es würde mich wundern, aber es ist nicht auszuschließen, daß die einfachen Beobachtungen dieses Abschnitts neu sind.

1.6 Morleyfolgen

Definition 1.6.1 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
Eine **Morleyfolge des Typs** $\bar{a}_0/E$ ist eine E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ von E-Indiscernibles.

Bei dieser Definition setze ich implizit voraus, daß $0 \in I$ und somit $\bar{a}_0$ ein Folgenglied ist. Weil $\bar{a}_0$ nur dazu dient, den Typ $\bar{a}_0/E$ festzulegen, bedeutet das lediglich, daß die Folgenglieder E-isomorph zu $\bar{a}_0$ sind. Eine **Morleyfolge über** E ist eine Morleyfolge eines Typs über E. Es ist nicht vorausgesetzt, daß das Tupel $\bar{a}_0$ endlich ist.

Bemerkung 1.6.2 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
Die Eigenschaft einer Folge von E-Indiscernibles, eine Morleyfolge über E zu sein, ist invariant unter E-Äquivalenz.
Sei $0 < k < \omega$ beliebig. Eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ von E-Indiscernibles ist genau dann eine Morleyfolge über E, wenn $(\bar{a}_{\iota\cdot k}\bar{a}_{\iota\cdot k+1}\ldots\bar{a}_{\iota\cdot k+(k-1)})_{\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über E ist. ■

Lemma 1.6.3 ($\downarrow$ Pseudounabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ erfülle [lc]*. Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine E-unabhängige Folge von B-Indiscernibles ist mit $B \supseteq E$, dann ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \underset{E}{\downarrow} B$.

Beweis: Wegen [fc] können wir ohne Einschränkung annehmen, daß B endlich ist. Ebenfalls wegen [fc] genügt es, $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$ zu beweisen. Schließlich können wir noch annehmen, daß $I = |T|^+$ ist.

[lc]* liefert $F \subseteq (\bar{a}_\iota)_{\iota<|T|^+}$ mit $|F| < |T|^+$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota<|T|^+} \underset{F}{\downarrow} B$ ist. Wegen der Regularität von $|T|^+$ ist bereits $F \subseteq (\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}$ für ein $\lambda < |T|^+$. Mit [mon2]* und [mon2] folgt $\bar{a}_\lambda \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}E}{\downarrow} B$. Mit $\bar{a}_\lambda \underset{E}{\downarrow} (\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}$ und [trans] folgt weiter $\bar{a}_\lambda \underset{E}{\downarrow} B$.
Quelle: [Kim96d, Proposition 2.7 (i)→(iii)] ■

Korollar 1.6.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ erfülle [lc]*. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Folge von B-Indiscernibles und $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B \supseteq E$. Die Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ ist genau dann B-unabhängig, wenn sie E-unabhängig ist.

Beweis: "⇒": Wir können annehmen, daß $I = \omega$ ist. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/B$. Aus $\bar{a}_0 \underset{B}{\downarrow} \bar{a}_1\ldots\bar{a}_n$ und $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$ folgt mit [trans] $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_1\ldots\bar{a}_n$.

"⇐": Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine E-unabhängige Folge von B-Indiscernibles. Für jedes $n < \omega$ ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota<n} \underset{E(\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}}{\downarrow} B$ nach Lemma 1.6.3 und [mon2]*. Mit [ext0] folgt $(\bar{a}_\iota)_{\iota<n} \underset{E(\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}}{\downarrow} B(\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}$. Daraus und aus $(\bar{a}_\iota)_{\iota<n} \underset{E}{\downarrow} E(\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}$ folgt mit [trans] $(\bar{a}_\iota)_{\iota<n} \underset{E}{\downarrow} (\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}B$ und mit [mon2] weiter $(\bar{a}_\iota)_{\iota<n} \underset{B}{\downarrow} (\bar{a}_\iota)_{\iota\geqslant n}$. ■

Lemma 1.6.5 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $B \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_0$ gilt, dann gibt es eine E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von B-Indiscernibles.

Beweis: Wähle κ genügend groß (für Satz 1.4.9) und baue eine E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\kappa}$ von Tupeln $\bar{a}_i \underset{EB}{\equiv} \bar{a}_0$ wie folgt:

Nehmen wir an, $(\bar{a}_\iota)_{\iota<i}$ ist bereits konstruiert. Dann gibt es wegen $B \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_0$ und [ext]* ein Tupel $\bar{a}_i \underset{EB}{\equiv} \bar{a}_0$, so daß $B(\bar{a}_\iota)_{\iota<i} \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_i$ gilt.

Wenn κ groß genug ist, gibt es nach Satz 1.4.9 eine Folge von EB-Indiscernibles, die weniger EB-bunt (also auch weniger E-bunt) als $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\kappa}$ und deshalb ebenfalls E-unabhängig ist.
Quelle: [Kim96d, Proposition 2.4] ■

Satz 1.6.6 (**$\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)
Sei $B \supseteq E$. Dann sind äquivalent:

- $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$.
- Jede Morleyfolge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von $\bar{a}_0/B$ ist auch eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/E$.
- Es gibt eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$, die zugleich Morleyfolge von $\bar{a}_0/B$ und $\bar{a}_0/E$ ist.

Beweis: Die Richtung von der ersten zur zweiten Bedingung ist Korollar 1.6.4. Aus der zweiten Bedingung folgt die dritte mittels Lemma 1.6.5 (anzuwenden auf $B \underset{B}{\downarrow} \bar{a}_0$!). Von der dritten Bedingung kommen wir schließlich mit Lemma 1.6.3 zur ersten. ■

Korollar 1.6.7 (**$\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)
Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/B$. Für $E \subseteq B$ gilt $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$ genau dann, wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ E-unabhängig ist. ■

Satz 1.6.6 ist in mehr als einer Hinsicht bemerkenswert. Bevor wir ihn für den Beweis der Eindeutigkeit kanonischer Unabhängigkeitsrelationen benutzen, möchte ich noch darauf hinweisen, daß wir beim Beweis von Satz 1.6.6 an keiner Stelle das Axiom [symm] benutzt haben, sondern mit den übrigen Axiomen für Unabhängigkeitsrelationen und ihren jeweiligen dualen Axiomen (wie z. B. [ext]* in Lemma 1.6.5) ausgekommen sind. Dennoch können wir [symm] nun ganz einfach aus Lemma 1.6.5 und Satz 1.6.6 herleiten. Wir erhalten das

Korollar 1.6.8
Jede Relation $\downarrow$, die [inv], [fc], [mon1], [mon1]*, [mon2], [mon2]*, [trans], [ext0], [ext]* und [lc]* erfüllt, ist eine Unabhängigkeitsrelation. ■

1.7 Eindeutigkeitssatz

Bemerkung 1.7.1 **(**$\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/B$. Dann ist $B_{\bar{a}_0}$ die kleinste algebraisch abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq \operatorname{acl} B$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ E-unabhängig ist.

Beweis: $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ ist auch eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/\operatorname{acl} B$. ■

Für eine Verschärfung von Lemma 1.6.3 brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.7.2 **(**$\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Folge von B-Indiscernibles ist und $B \supseteq E$, dann ist $\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)_B \subseteq K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$.

Beweis: Indem wir sonst $T(E)$ und $\underset{E}{\downarrow}$ anstelle von T und $\downarrow$ betrachten, können wir $E = \emptyset$ annehmen. Ferner genügt es, die Behauptung für endliches B zu beweisen. Sei $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 < I_2$, mit $I_1 = |T|^+$ und I_2 isomorph zu $(|T|^+)^{op}$ ($|T|^+$ mit der umgekehrten Ordnung).

Wegen [lc]* gibt es eine Menge $F \subseteq (\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1}$ mit $|F| < |T|^+$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1} \underset{F}{\downarrow} B$ ist. Weil $I_1 = |T|^+$ regulär ist, gibt es eine Ordinalzahl $\lambda < |T|^+$, so daß $F \subseteq (\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}$. Mit [mon2]* folgt $(\bar{a}_\iota)_{\lambda\leqslant\iota<|T|^+} \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}}{\downarrow} B$.

Nun ist $(\bar{a}_\iota)_{\lambda\leqslant\iota\in I}$ eine Folge von $B(\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}$-Indiscernibles. Wir können das dazu benutzen, mit Hilfe von [fc] auf $(\bar{a}_\iota)_{\lambda\leqslant\iota\in I} \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}}{\downarrow} B$ zu schließen. Weiter folgt $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota<\lambda}}{\downarrow} B$ und schließlich $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1}}{\downarrow} B$.

Also ist $\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)_B \subseteq \operatorname{acl}\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_1}\big)$. Aus Symmetriegründen ist ebenso $\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)_B \subseteq \operatorname{acl}\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I_2}\big)$, und mit Lemma 1.5.2 folgt die Behauptung. ■

Satz 1.7.3 **(**$\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Jede algebraisch E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles ist bereits eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/E$.

Beweis: Algebraische Unabhängigkeit der Folge über E bedeutet $\operatorname{acl} E = K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$. Ergänze $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ zu einer Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I\cup\{\infty\}}$ von E-Indiscernibles. Dann ist $\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)_{\bar{a}_\infty} \subseteq K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) = \operatorname{acl} E$ nach Lemma 1.7.2. Also ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_\infty$. ■

Satz 1.7.4
Für jede vollständige Theorie gibt es höchstens eine kanonische Unabhängigkeitsrelation.
Wenn es eine kanonische Unabhängigkeitsrelation gibt, dann ist sie die gröbste strikte Unabhängigkeitsrelation.

Beweis: Wegen Satz 1.6.6 sind zwei Unabhängigkeitsrelationen genau dann identisch, wenn für sie dieselben Folgen Morleyfolgen sind. Nach Satz 1.7.3 ist das für zwei kanonische Unabhängigkeitsrelationen immer der Fall.

Tatsächlich ergibt sich aus Satz 1.6.6, daß eine Unabhängigkeitsrelation umso gröber ist, je mehr Morleyfolgen sie hat. Für eine strikte Unabhängigkeitsrelation kommen als Morleyfolgen nur die algebraisch unabhängigen Folgen von Indiscernibles in Frage. Weil diese für die kanonische Unabhängigkeitsrelation alle Morleyfolgen sind, ist die kanonische Unabhängigkeitsrelation die gröbste strikte Unabhängigkeitsrelation. ■

Bemerkung 1.7.5 **(**$\downarrow$ strikte Unabhängigkeitsrelation**)**
Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Morleyfolge über B ist und $B \supseteq E$, dann ist $K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) \subseteq \operatorname{acl} B$.

Beweis: Nach Satz 1.5.5 ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ $BK_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$-indiscernible. Mit Lemma 1.6.3 folgt $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \underset{B}{\downarrow} K_E\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$. Die Behauptung folgt nun aus der Striktheit. ■

Satz 1.7.6 **(**$\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Für eine Morleyfolge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ über B ist $B_{\bar{a}_0} = K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$.

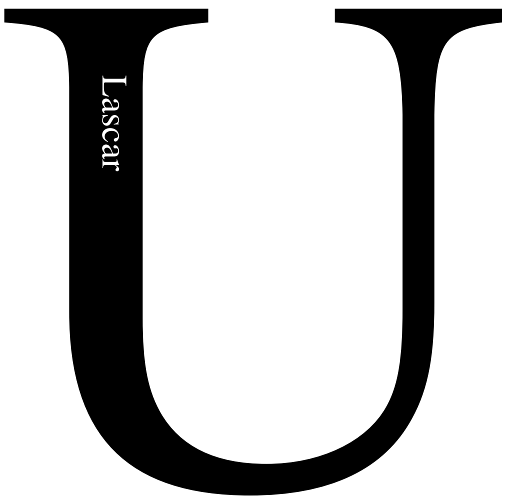
Beweis: $B_{\bar{a}_0}$ ist die kleinste algebraisch abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq \operatorname{acl} B$, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/E$ ist. Insbesondere ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ algebraisch $B_{\bar{a}_0}$-unabhängig.

$K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$ ist nach Satz 1.5.5 die kleinste algebraisch abgeschlossene Menge F, so daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ algebraisch F-unabhängig ist. Also ist $K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) \subseteq B_{\bar{a}_0}$.

Nach Satz 1.5.5 ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ $K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$-indiscernible. Andererseits ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ nach Satz 1.7.3 eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$. Und nach der Bemerkung ist $K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) \subseteq B$. Also ist $B_{\bar{a}_0} \subseteq K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$. ■

Kapitel 2

Rang



Für stabile Theorien gibt es viele verschiedene Ränge für Typen. In dieser Arbeit interessiere ich mich lediglich für den U-Rang. Dieser läßt sich auf beliebige Unabhängigkeitsrelationen verallgemeinern.

Nach der absolut unoriginellen Durchführung dieser Verallgemeinerung enthält dieses Kapitel noch einen Abschnitt, der die von Pillay in [Pil87] benutzten Eigenschaften des U-Rangs zusammenfaßt: Für jede Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang und jede Ordinalzahl ϵ werden wir dort die „ϵ-Unabhängigkeit“ definieren.

In stabilen Theorien mit Imaginärenelimination kann man beliebige Typen bis auf Dominationsäquivalenz in endlich viele reguläre Typen zerlegen. Ich vermute, daß das mit geeigneten Definitionen für Dominationsäquivalenz und Regularität für alle kanonischen Unabhängigkeitsrelationen mit U-Rang richtig ist. Deshalb habe ich auch den Abschnitt über Gewicht in dieses Kapitel eingeordnet.

Abschnitt 3.2 im nächsten Kapitel wird sich ebenfalls mit U-Rang befassen.

2.1 U-Rang

Definition 2.1.1 ($\mathop{\downarrow}$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Sei $\bar{a}/E$ ein *endlicher* Typ. Der **U-Rang** $U(\bar{a}/E)$ von $\bar{a}/E$ ist die kleinste Ordinalzahl (oder ∞), so daß $U(\bar{a}/E) \geqslant \alpha$ gilt:

- $U(\bar{a}/E) \geqslant 0$ für alle Typen.
- $U(\bar{a}/E) \geqslant \alpha + 1$ genau dann, wenn $\bar{a}/E$ eine forkende Erweiterung $\bar{a}/B$ hat mit $U(\bar{a}/B) \geqslant \alpha$.
- $U(\bar{a}/E) \geqslant \lambda$ (λ eine Limeszahl) genau dann, wenn $U(\bar{a}/E) \geqslant \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$ gilt.

Quelle: [Las76, 5]

Definition 2.1.2 ($\mathop{\downarrow}$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Der **U-Rang** einer Menge A über einer Menge B ist definiert durch $U(A/B) = \sup_{\bar{a} \in A} U(\bar{a}/B)$.

Definition 2.1.3 ($\mathop{\downarrow}$ **Unabhängigkeitsrelation)**
$U(\mathop{\downarrow}) = \sup \left\{ U(\bar{a}/\emptyset) \mid \bar{a} \in \mathfrak{C},\ U(\bar{a}/\emptyset) < \infty \right\}$.

Bemerkung 2.1.4 ($\mathop{\downarrow}$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Für $B \supseteq E$ und endliche Tupel $\bar{a}$ gilt:

- $U(\bar{a}/B) \leqslant U(\bar{a}/E)$.
- Es ist $U(\bar{a}/B) = U\left(\operatorname{acl}(B\bar{a})/\operatorname{acl} B\right)$.
- $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B \quad \Leftarrow \quad U(\bar{a}/B) = U(\bar{a}/E) < \infty$.
- $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B \quad \Rightarrow \quad U(\bar{a}/B) = U(\bar{a}/E)$.

Beweis: Die ersten drei Behauptungen folgen direkt aus der Definition. Für die letzte Behauptung zeigen wir durch Induktion nach α:

$$\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B \supseteq E,\ U(\bar{a}/E) \geqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad U(\bar{a}/B) \geqslant \alpha.$$

Die Induktionsbasis $\alpha = 0$ und der Limesschritt sind trivial. Nehmen wir an, die Behauptung stimme für α, und sei $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B \supseteq E$ sowie $U(\bar{a}/E) \geqslant \alpha + 1$. Dann gibt es eine Menge $C \supseteq E$, so daß $\bar{a} \not\mathop{\downarrow}_E C$ und $U(\bar{a}/C) \geqslant \alpha$. Verlege B auf ein E-isomorphes Bild B', so daß $C \mathop{\downarrow}_E B'$ gilt. Dann ist $\bar{a} \mathop{\downarrow}_C B'$ (denn mit $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B'$ und [trans]* folgt $\bar{a}C \mathop{\downarrow}_E B'$) und $\bar{a} \not\mathop{\downarrow}_{B'} C$ (denn sonst würde aus $\bar{a} \mathop{\downarrow}_{B'} C$ und $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E B'$ mit [trans] $\bar{a} \mathop{\downarrow}_E C$ folgen). Also ist

$$U(\bar{a}/B) = U(\bar{a}/B') > U(\bar{a}/B'C) \geqslant \alpha$$

wegen $U(\bar{a}/C) \geqslant \alpha$, $\bar{a} \mathop{\downarrow}_C B'$ und der Induktionsvoraussetzung. ■

Bemerkung 2.1.5 ($\mathop{\downarrow}$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Für einen Typ $\bar{a}/E$ sind äquivalent:

- $U(\bar{a}/E) < \infty$.
- $U(\bar{a}/E) \leqslant U(\mathop{\downarrow})$.
- Es gibt keine unendliche Kette $E = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ mit $\bar{a} \not\mathop{\downarrow}_{E_i} E_{i+1}$.
- Für alle $B \supseteq E$ gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq B$, so daß $\bar{a} \mathop{\downarrow}_{EF} B$ gilt.

Beweis: Die beiden ersten Bedingungen sind nach der Definition von $U(\mathop{\downarrow})$ äquivalent. Als nächstes werden wir das benutzen, um zu zeigen: $U(\bar{a}/E) = \infty$ genau dann, wenn es eine unendliche Kette $E = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ gibt mit $\bar{a} \not\mathop{\downarrow}_{E_i} E_{i+1}$.

"$\Rightarrow$": Wenn $U(\bar{a}/E) = \infty$ ist, läßt sich eine solche Kette konstruieren, die zusätzlich noch $U(\bar{a}/E_i) = \infty$ erfüllt. Zu gegebenem E_i mit $U(\bar{a}/E_i) = \infty \geqslant U(\downarrow) + 2$ braucht man nur ein $E_{i+1} \supseteq E_i$ mit $U(\bar{a}/E_{i+1}) \geqslant U(\downarrow) + 1$ zu wählen. Wir wissen bereits, daß dann auch $U(\bar{a}/E_{i+1}) = \infty$ ist.

"$\Leftarrow$": Wenn eine solche Kette gegeben ist, kann man durch Induktion die folgende Aussage für alle Ordinalzahlen α beweisen: $U(\bar{a}/E_i) \geqslant \alpha$ für alle $i < \omega$.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß auch die letzten beiden Bedingungen äquivalent sind: Aus einer unendlichen Kette $E = E_0 \subset E_1 \subset \ldots$ mit $\bar{a} \underset{E_i}{\not\downarrow} E_{i+1}$ erhält man eine Menge $B = \bigcup_{i<\omega} E_i$, so daß $\bar{a} \underset{EF}{\downarrow} B$ für keine endliche Teilmenge $F \subseteq B$ (weil diese schon in einem E_i enthalten sein müßte). Umgekehrt kann man aus einer solchen Menge B eine unendliche Kette $E = E_0 \subset E_1 \subset \ldots$ gewinnen, indem man E_{i+1} zu gegebenem E_i so wählt, daß $\bar{a} \underset{E_i}{\not\downarrow} E_{i+1}$ gilt und $E_{i+1} \setminus E_i$ endlich ist. ∎

Definition 2.1.6 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ **hat U-Rang,** falls $U(\bar{a}/B) < \infty$ für alle endlichen Tupel $\bar{a}$ und alle Mengen B gilt.

Bemerkung 2.1.7 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\downarrow$ U-Rang hat, dann ist $U(A/B) < U(\downarrow)$ für alle Mengen A und B.

Wenn $\downarrow$ U-Rang hat und $C \subseteq \mathfrak{C}$ eine beliebige Menge ist, dann hat auch $\underset{C}{\downarrow}$ (für $T(C)$) U-Rang, und es gilt $U(\underset{C}{\downarrow}) = U(\downarrow)$. ∎

2.2 Lascar'sche Ungleichungen

U-Rang ist **zusammenhängend**:

Bemerkung 2.2.1 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Zu jedem $\beta < U(\bar{a}/E) < \infty$ gibt es eine Menge $B \supseteq E$, so daß $U(\bar{a}/B) = \beta$.

Beweis: Beweis durch Induktion nach $\alpha = U(\bar{a}/E)$. Der Induktionsanfang $\alpha = 0$ und der Limesschritt α Limeszahl sind trivial. Sei die Behauptung also richtig für α, und es sei $U(\bar{a}/E) = \alpha + 1$. Nach der Definition des U-Rangs gibt es dann eine Menge $B \supseteq E$ mit $\bar{a} \underset{E}{\not\downarrow} B$ und $U(\bar{a}/B) \geqslant \alpha$. Wegen $U(\bar{a}/B) < U(\bar{a}/E) = \alpha + 1$ ist dann $U(\bar{a}/B) = \alpha$. Im Falle $\beta = \alpha$ ist die Behauptung damit bewiesen. Sonst wende die Induktionsvoraussetzung auf $\bar{a}/B$ an. ∎

Satz 2.2.2 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $U(\bar{a}/\bar{b}) < \infty$ ist, gilt die Regel:

$$U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) \oplus \gamma \quad \Rightarrow \quad U(\bar{b}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}) + \gamma.$$

Beweis: Induktion über $U(\bar{a})$. Sei $U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) \oplus \gamma$. Zu zeigen: $U(\bar{b}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}) + \gamma$. Wir können $U(\bar{b}/\bar{a}) < \infty$ annehmen, weil die Behauptung sonst trivial ist. Dann bleibt noch zu zeigen: $U(\bar{b}) > U(\bar{b}/\bar{a}) + \gamma'$ für alle $\gamma' < \gamma$.

Für jedes $\gamma' < \gamma$ wähle ein Tupel $\bar{e}$, so daß

$$U(\bar{a}) > U(\bar{a}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) \oplus \gamma'.$$

(Insbesondere ist dann $\bar{a} \not\downarrow \bar{e}$). Wenn nötig, verlege $\bar{e}$ über $\bar{b}$ so, daß $\bar{e} \underset{\bar{a}}{\downarrow} \bar{b}$ und damit auch

$$U(\bar{b}/\bar{a}) = U(\bar{b}/\bar{a}\bar{e})$$

gilt.

Aus $U(\bar{a}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}\bar{e}) \oplus \gamma'$ liefert die Induktionsvoraussetzung $U(\bar{b}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}\bar{e}) + \gamma'$. Im Falle $\bar{b} \not\downarrow \bar{e}$ ist diese Ungleichung bereits scharf genug, denn es folgt

$$U(\bar{b}) > U(\bar{b}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}) + \gamma',$$

wie gewünscht.

Wenn dagegen $\bar{b} \downarrow \bar{e}$ ist, dann folgt $\bar{a} \underset{\bar{b}}{\not\downarrow} \bar{e}$ (denn aus $\bar{a} \underset{\bar{b}}{\downarrow} \bar{e}$ und $\bar{b} \downarrow \bar{e}$ würde mit [trans]* $\bar{a} \downarrow \bar{e}$ folgen), und wir können wegen $U(\bar{a}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) \oplus \gamma' > U(\bar{a}/\bar{b}\bar{e}) \oplus \gamma'$ mit der schärferen Ungleichung

$$U(\bar{a}) > U(\bar{a}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}\bar{e}) \oplus \gamma' + 1$$

anfangen. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$U(\bar{b}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{e}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}\bar{e}) + \gamma' + 1.$$

Das ergibt nun auch im zweiten Fall den Induktionsschluß.
Quelle: [Las76, 5, Theorem 6] ∎

Korollar 2.2.3 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $U(\bar{a}/\bar{b}) < \infty$ und $U(\bar{b}/\bar{a}) < \infty$ ist, gilt die Regel:

$$U(\bar{a}) < U(\bar{a}/\bar{b}) + \omega^\epsilon \cdot n \quad \Leftrightarrow \quad U(\bar{b}) < U(\bar{b}/\bar{a}) + \omega^\epsilon \cdot n.$$

Beweis: Sei $U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) + \omega^\epsilon \cdot n$. Für jede Ordinalzahl $\gamma < \omega^\epsilon \cdot n$ ist dann $U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{b}) \oplus \gamma$. Mit Satz 2.2.2 folgt $U(\bar{b}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}) + \gamma$. Da das für alle $\gamma < \omega^\epsilon \cdot n$ gilt, folgt schließlich $U(\bar{b}) \geqslant U(\bar{b}/\bar{a}) + \omega^\epsilon \cdot n$.
Quelle: [Las76, 5, Corollary 7] ■

Satz 2.2.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Es gelten die **Lascar'schen Ungleichungen:**

$$U(\bar{b}/\bar{a}) + U(\bar{a}) \leqslant U(\bar{a}\bar{b}) \leqslant U(\bar{b}/\bar{a}) \oplus U(\bar{a}).$$

Beweis: Linke Seite: Wegen $U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{a}\bar{b}) \oplus U(\bar{a})$ und $U(\bar{a}/\bar{a}\bar{b}) = 0 < \infty$ ist $U(\bar{a}\bar{b}) \geqslant U(\bar{a}\bar{b}/\bar{a}) + U(\bar{a}) = U(\bar{b}/\bar{a}) + U(\bar{a})$.

Rechte Seite: Der Fall $U(\bar{b}/\bar{a}) = \infty$ ist trivial. Sei also $U(\bar{b}/\bar{a}) < \infty$. Aus $U(\bar{a}\bar{b}) \geqslant U(\bar{a}\bar{b}/\bar{a}) \oplus U(\bar{a}) + 1$ würde $U(\bar{a}) \geqslant U(\bar{a}/\bar{a}\bar{b}) + U(\bar{a}) + 1$ folgen.
Quelle: [Las76, 5, Theorem 8] ■

Korollar 2.2.5 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Es gilt die Regel

$$\bar{a} \downarrow \bar{b} \quad \Rightarrow \quad U(\bar{a}\bar{b}) = U(\bar{a}) \oplus U(\bar{b}).$$

Beweis: "$\leqslant$": Folgt aus Satz 2.2.4. "$\geqslant$": Induktion nach $U(\bar{a}) \oplus U(\bar{b})$.

Es genügt, $U(\bar{a}\bar{b}) > \alpha \oplus U(\bar{b})$ für alle $\alpha < U(\bar{a})$ und $U(\bar{a}\bar{b}) > U(\bar{a}) \oplus \beta$ für alle $\beta < U(\bar{b})$ zu zeigen. Aus Symmetriegründen können wir uns auf die erste Behauptung beschränken.

Für jedes $\alpha < U(\bar{a})$ können wir nach Bemerkung 2.2.1 eine Menge E wählen, so daß $U(\bar{a}/E) = \alpha$ ist. Damit ist $\bar{a} \not\downarrow E$. Zudem können wir E über $\bar{a}$ so drehen, daß $E \underset{\bar{a}}{\downarrow} \bar{b}$ ist. Mit $\bar{a} \downarrow \bar{b}$ und [trans]* folgt dann $\bar{a}E \downarrow \bar{b}$. Es ist

$$U(\bar{a}/E) \oplus U(\bar{b}/E) \leqslant \alpha \oplus U(\bar{b}) < U(\bar{a}) \oplus U(\bar{b}).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist also

$$U(\bar{a}/E) \oplus U(\bar{b}/E) = U(\bar{a}\bar{b}/E).$$

Mit $U(\bar{a}/E) = \alpha$, $U(\bar{b}/E) = U(\bar{b})$ und $U(\bar{a}\bar{b}/E) < U(\bar{a}\bar{b})$ folgt schließlich

$$\alpha \oplus U(\bar{b}) < U(\bar{a}\bar{b}),$$

was zu beweisen war. ■

Übung 2.2.6 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Für endliche Tupel $\bar{a}$ gilt die Regel $U(\bar{a}/E) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad U(\bar{a}/E) < U(\downarrow)$.

Der folgende Satz sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Satz 2.2.7 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Sei $U(\bar{a}) = \omega^{\epsilon_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\epsilon_m} \cdot k_m$ die Cantorentwicklung von $U(\bar{a})$, und sei $1 \leqslant n \leqslant m$. Dann gibt es ein Tupel $\bar{a}' \in \mathrm{acl}(\bar{a})$, so daß $U(\bar{a}/\bar{a}') = \omega^{\epsilon_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\epsilon_n} \cdot k_n$ und $U(\bar{a}') = \omega^{\epsilon_{n+1}} \cdot k_{n+1} + \cdots + \omega^{\epsilon_m} \cdot k_m$.

Beweis: Siehe [Bue96, Lemma 6.3.4]. ■

2.3 ϵ-Unabhängigkeit

Definition 2.3.1
$\alpha \ll \beta$ bedeutet, daß in der Cantorentwicklung der Ordinalzahlen α und β der größte Exponent von α immer noch kleiner ist als der kleinste von β.

Quelle: [Bue96, 6.1]

Definition 2.3.2
$\gamma \approx_\alpha \gamma'$ steht für $\gamma + \omega^\alpha = \gamma' + \omega^\alpha$.

Quelle: [Bue96, 6.1]

(Zur Cantorentwicklung von Ordinalzahlen siehe [Poi85, 19.b].)
Natürlich ist $\approx_\alpha$ immer eine mit $\leqslant$ verträgliche Äquivalenzrelation.

Bemerkung 2.3.3
Wenn $\gamma \approx_\alpha \gamma'$ gilt, dann gibt es sogar ein $\delta < \omega^\alpha$, so daß $\gamma + \delta = \gamma' + \delta$ ist. ■

Bemerkung 2.3.4
$\alpha \ll \beta$ gilt genau dann, wenn $\alpha + \beta = \beta$ und $\beta + \alpha = \beta \oplus \alpha$ ist. ■

*

Definition 2.3.5 (↓ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Für jede Klasse $\mathbb{B}$ sei $\mathrm{U}(\bar{a}/\mathbb{B}) = \min\left\{ \mathrm{U}(\bar{a}/B_0) \;\middle|\; B_0 \subseteq \mathbb{B} \right\} = \min\left\{ \mathrm{U}(\bar{a}/\bar{b}) \;\|\; \bar{b} \in \mathbb{B},\ \bar{b} \text{ endlich} \right\}$.

Definition 2.3.6 (↓ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Sei ϵ eine Ordinalzahl. Für jede Klasse $\mathbb{A}$ sei $\mathbb{CL}_\epsilon \mathbb{A}$ die Klasse $\left\{ a \;\middle|\; \mathrm{U}(a/\mathbb{A}) < \omega^\epsilon \right\}$.

Quelle: [Pil87, Notation 0.2]

Definition 2.3.7 (↓ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Für jede Ordinalzahl ϵ sei die Relation $\downarrow^\epsilon$ definiert durch

$$A \underset{E}{\downarrow^\epsilon} B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{U}(\bar{a}/E) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}/EB) \text{ für alle } \bar{a} \in A.$$

Insbesondere ist $\mathbb{CL}_0 = \mathrm{acl}$ im Falle einer strikten Unabhängigkeitsrelation, und für $\epsilon < \delta$ ist $\mathbb{CL}_\epsilon A \subseteq \mathbb{CL}_\delta A$.

Bemerkung 2.3.8 (↓ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
$\mathbb{CL}_\epsilon$ ist ein algebraischer Abschlußoperator.

Beweis: Der Operator $\mathbb{CL}_\epsilon$ ist offensichtlich monoton. Wegen der Lascarschen Ungleichungen ist er auch idempotent. Schließlich liefert Bemerkung 2.1.5 den endlichen Charakter. ■

Bemerkung 2.3.9 (↓ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Wenn ein endliches Tupel $\bar{a}$ die Bedingung $\mathrm{U}(\bar{a}/E) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}/EB)$ erfüllt, dann ist bereits $\bar{a} \underset{E}{\downarrow^\epsilon} B$.

Beweis: Sei $\mathrm{U}(\bar{a}/EB) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}/E)$. Dann ist $\mathrm{U}(\bar{a}/E\bar{b}) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}/E)$ für alle $\bar{b} \in B$ und daher auch $\mathrm{U}(\bar{b}/E\bar{a}) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{b}/E)$ für alle $\bar{b} \in B$. Es folgt $\mathrm{U}(\bar{b}/E\bar{a}') \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{b}/E)$ für alle $\bar{b} \in B$ und alle Teiltupel $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$. Also ist auch $\mathrm{U}(\bar{a}'/E\bar{b}) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}'/E)$ für alle $\bar{b} \in B$ und alle Teiltupel $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$. Es folgt $\mathrm{U}(\bar{a}'/EB) \approx_\epsilon \mathrm{U}(\bar{a}'/E)$ für alle Teiltupel $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$. ■

Insbesondere ist $\downarrow^0 = \downarrow$, und für $\epsilon < \delta$ ist $\downarrow^\epsilon \subseteq \downarrow^\delta$.

Satz 2.3.10 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
$\downarrow^{\epsilon}$ ist eine Unabhängigkeitsrelation.

Beweis: **[inv], [fc], [mon1]** Klar.

[mon2] Sei $\bar{a} \in A$ und $\bar{b} \in B$. Wähle $\bar{d} \in D$, so daß $U(\bar{a}/E\bar{d}\bar{b}) = U(\bar{a}/D\bar{b})$. Dann ist $U(\bar{a}/D\bar{b}) = U(\bar{a}/E\bar{d}\bar{b}) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/E) \geqslant U(\bar{a}/D)$, also $U(\bar{a}/D\bar{b}) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/D)$.

[trans] : Sei $\bar{a} \in A$ und $\bar{b} \in B$. Wähle $\bar{c} \in C$, so daß $U(\bar{a}/E\bar{c}) = U(\bar{a}/C)$. Dann ist $U(\bar{a}/E) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/E\bar{c}) = U(\bar{a}/C) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/C\bar{b}) < U(\bar{a}/E\bar{b})$ und daher auch $U(\bar{a}/E) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/E\bar{b})$.

[symm] : Folgt mittels [fc] aus Korollar 2.2.3.

[ex], [lc] : Folgt wegen $\downarrow^{\epsilon} \supseteq \downarrow$ daraus, daß $\downarrow$ diese Axiome erfüllt. ■

Bemerkung 2.3.11 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
$A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B \quad \Rightarrow \quad \mathbb{CL}_{\epsilon} A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B$.

Beweis: Wegen $U(\mathbb{CL}_{\epsilon} A/A) \approx_{\epsilon} 0$ gilt $\mathbb{CL}_{\epsilon} A \underset{AE}{\downarrow^{\epsilon}} B$. Mit $AE \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B$ und [trans]* folgt $\mathbb{CL}_{\epsilon} A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B$. ■

Bemerkung 2.3.12 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation mit U-Rang)
Sei $B \supseteq E$, und sei B eine algebraisch abgeschlossene Menge. Dann gilt $A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B \quad \Leftrightarrow \quad B_A \subseteq \mathbb{CL}_{\epsilon} E$.
Quelle: [Pil87, Proposition 1.3]

Beweis: "$\Leftarrow$": Es gilt immer $A \underset{EB_A}{\downarrow} B$ und damit auch $A \underset{EB_A}{\downarrow^{\epsilon}} B$. Wenn $B_A \subseteq \mathbb{CL}_{\epsilon} E$ ist, gilt zusätzlich auch $A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B_A$, so daß mit [trans] $A \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B$ folgt.

"$\Rightarrow$": Weil B_A von den $B_{\bar{a}}$ mit $\bar{a} \in A$ erzeugt wird, genügt es, $\bar{a} \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B \quad \Rightarrow \quad B_{\bar{a}} \subseteq \mathrm{cl}_{\epsilon}\, E$ zu zeigen. Nehmen wir also ein $\bar{b} \in B_{\bar{a}}$, und zeigen wir $U(\bar{b}/E) < \omega^{\epsilon}$.

Sei $(\bar{a}_i)_{i<\omega}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}/EB_{\bar{a}}$, und sei $k < \omega$ so groß, daß $B_{\bar{a}} \subseteq \mathrm{acl}(E\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1})$. Dann ist

$$U(\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1}/EB_{\bar{a}}) = U(\bar{a}/EB_{\bar{a}}) \cdot k \approx_{\epsilon} U(\bar{a}/E) \cdot k \geqslant U(\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1}/E)$$

und deshalb auch $U(\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1}/EB_{\bar{a}}) \approx_{\epsilon} U(\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1}/E)$. Das bedeutet aber $\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{k-1} \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B_{\bar{a}}$. Wegen der Wahl von k bedeutet das $\bar{b} \underset{E}{\downarrow^{\epsilon}} B_{\bar{a}} \ni \bar{b}$, also $\bar{b} \subseteq \mathrm{cl}_{\epsilon}\, E$. ■

Kommentar

Die ϵ-Unabhängigkeit wurde von Pillay in [Pil87] benutzt, aber nicht explizit als solche eingeführt. Ein wesentlicher Teil von Pillay's Ergebnissen findet sich in Abschnitt A.4 (in einer Darstellung, die auf diesem Abschnitt aufbaut).

2.4 Gewicht

Definition 2.4.1 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
A **dominiert** B über E, in Zeichen $A \underset{E}{\trianglerighteq} B$, falls die Regel

$$X \underset{E}{\downarrow} A \quad \Rightarrow \quad X \underset{E}{\downarrow} B$$

gilt.

Definition 2.4.2 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
A und B heißen **dominationsäquivalent** über E, in Zeichen $A \underset{E}{\sqsubseteq\!\!\sqsupseteq} B$, falls $A \underset{E}{\trianglerighteq} B$ und $B \underset{E}{\trianglerighteq} A$ gilt.

Definition 2.4.3 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Das **Prägewicht** des Typs $\bar{a}/E$ ist die Kardinalzahl

$$\text{p-wt}(\bar{a}/E) = \sup \left\{ |I| \;\middle|\; \text{Es gibt ein } E\text{-unabhängiges System } (A_\iota)_{\iota \in I} \text{ mit } \bar{a} \underset{E}{\not\downarrow} A_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Das **Gewicht** von $\bar{a}/E$ ist

$$\text{wt}(\bar{a}/E) = \sup \left\{ \text{p-wt}(\bar{a}/EF) \;\middle|\; \bar{a} \underset{E}{\downarrow} F \right\}.$$

Die heutige Definition von Gewicht und Prägewicht scheint als Verallgemeinerung aus der ursprünglichen Definition [She78, V, Definition 3.2] hervorgegangen zu sein, die vor allem für den superstabilen Fall gedacht war, in dem alle Typen endliches Gewicht haben.

In allgemeineren Theorien ist es ein Problem, daß man dem Prägewicht nicht ansieht, ob das Supremum in der Definition ein Maximum ist. (Selbst im Falle der stabilen Theorien mit DFC und im Falle der supereinfachen Theorien weiß man noch nicht, ob das richtig ist.) Dann liefert die folgende Variante mehr Information:

Definition 2.4.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Das **Präübergewicht** $\text{p-wt}^+(\bar{a}/E)$ von $\bar{a}/E$ ist die kleinste Kardinalzahl κ, so daß es keine E-unabhängige Folge $(A_\iota)_{\iota<\kappa}$ mit $\bar{a} \underset{E}{\not\downarrow} A_i$ für alle $i < \kappa$ gibt.
Das **Übergewicht** $\text{wt}^+(\bar{a}/E)$ von $\bar{a}/E$ ist

$$\text{wt}^+(\bar{a}/E) = \sup \left\{ \text{p-wt}^+(\bar{a}/EF) \;\middle|\; \bar{a} \underset{E}{\downarrow} F \right\}.$$

Bemerkung 2.4.5 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Es ist immer $\text{p-wt}(\bar{a}/E) = \left(\text{p-wt}^+(\bar{a}/E)\right)^-$ und $\text{wt}(\bar{a}/E) = \left(\text{wt}^+(\bar{a}/E)\right)^-$.
(κ^- ist λ, so daß $\lambda^+ = \kappa$, falls ein solches λ existiert, κ sonst.) ■

Bemerkung 2.4.6 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Für ein endliches Tupel $\bar{a}$ ist immer $\text{p-wt}^+(\bar{a}/E) \leqslant \text{wt}^+(\bar{a}/E) \leqslant |T|^+$ und $\text{p-wt}(\bar{a}/E) \leqslant \text{wt}(\bar{a}/E) < |T|^+$.

Beweis: Die rechten Ungleichungen folgen mit dem für stabile Theorien üblichen Argument aus [lc]. ■

Wenn ein Typ überabzählbares Prägewicht hat, gibt es eine **dichte forkende Kette**:

Bemerkung 2.4.7 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\text{p-wt}^+(\bar{a}/E) > \aleph_0$ ist, dann gibt es eine Folge $(B_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$, so daß für $i < j$ $B_i \subseteq B_j$ gilt und $\bar{a}/B_j$ eine nichtfreie Erweiterung von $\bar{a}/B_i$ ist.

Beweis: Wenn p-wt$^+(\bar{a}/E) > \aleph_0$ ist, gibt es E-ein unabhängiges System $(\bar{b}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$, so daß $\bar{a}\underset{E}{\not\downarrow}\bar{b}_i$ für alle $i \in \mathbb{Q}$. Die Behauptung ergibt sich, indem man $B_i = \{b_\iota \mid \iota \leqslant i\}$ setzt.
Quelle: [Hru89, Theorem 1] ■

Umgekehrt können wir auch über Typen mit abzählbarem Übergewicht etwas aussagen. Dazu brauchen wir ein technisches

Lemma 2.4.8 ($\downarrow$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Wenn

$$\bar{a} \underset{E_{n-1}}{\not\downarrow} \bar{b},\ \bar{a} \underset{E_{n-1}}{\not\downarrow} \bar{c},\ \bar{b} \underset{E_{n-1}}{\downarrow} \bar{c}$$

gilt, dann gibt es eine Menge $E_n \supseteq E_{n-1}$, so daß $\bar{a} \underset{E_{n+1}}{\downarrow} E_n$ sowie

$$\bar{a}\underset{E_n}{\not\downarrow}\bar{b},\ \bar{a}\underset{E_n}{\not\downarrow}\bar{c},\ \bar{b}\underset{E_n}{\downarrow}\bar{c}$$

gilt und es keine Menge D gibt, die

$$\bar{a}\underset{E_n}{\downarrow}D,\ \bar{b}\underset{E_n}{\downarrow}\bar{c}D,\ \bar{c}\underset{E_n}{\not\downarrow}D$$

erfüllt.

Beweis: Sei $D_0 = E_{n-1}$, und betrachten wir stetige (d. h., $D_\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} D_\iota$ für Limeszahlen $\lambda < \alpha$) Folgen $(D_\iota)_{\iota<\alpha}$, so daß für alle i mit $i+1 < \alpha$ gilt:

$$D_{i+1} \supset D_i,\ \bar{a}\underset{D_i}{\downarrow}D_{i+1},\ \bar{b}\underset{D_i}{\downarrow}cD_{i+1},\ \bar{c}\underset{D_i}{\not\downarrow}D_{i+1}.$$

Wegen [lc] und der letzten Bedingung gibt es keine solche Folge mit $\alpha = |T|^+ + 1$ (das übliche Argument mit der Regularität von $|T|^+$). Sei $(D_\iota)_{\iota<\alpha}$ eine maximale solche Folge, und sei $E_n = \bigcup_{\iota<\alpha} D_\iota \supseteq D_0 = E_{n-1}$.

Aus [trans] und [fc] folgt $\bar{a} \underset{E_{n-1}}{\downarrow} E_n$ und $\bar{b} \underset{E_{n-1}}{\downarrow} E_n$. Schließlich überzeugt man sich leicht, daß E_n alle geforderten Eigenschaften hat.
Quelle: [Bue96, Proposition 5.6.6] ■

Satz 2.4.9 ($\downarrow$ **Unabhängigkeitsrelation)**
Sei $\bar{a}/E$ ein nichtalgebraischer Typ. Wenn wt$^+(\bar{a}/E) \leqslant \aleph_0$ ist, dann gibt es eine freie Erweiterung $\bar{a}/F \supseteq E$ von $\bar{a}/E$ und einen Typ $\bar{c}/F$ vom Gewicht wt$(\bar{c}/F) = 1$, so daß $\bar{a} \underset{F}{\trianglerighteq} \bar{c}$.

Beweis: Weil $\bar{a}/E$ nichtalgebraisch ist, ist wt$(\bar{a}/E) > 0$. Wenn wt$(\bar{a}/E) = 1$ ist, ist die Behauptung trivial. Sonst sei $\bar{a}/E_1 \supseteq E_0$ eine freie Erweiterung von $\bar{a}/E$, so daß p-wt$(\bar{a}/E_1) = $ wt$(\bar{a}/E) > 1$ ist.

Dann gibt es Tupel $\bar{b}_1, \bar{c}_1$, so daß

$$\bar{a}\underset{E_1}{\not\downarrow}\bar{b}_1,\ \bar{a}\underset{E_1}{\not\downarrow}\bar{c}_1,\ \bar{b}_1\underset{E_1}{\downarrow}\bar{c}_1.$$

Wenn wt$(\bar{c}_1/E_1) = 1$ ist, dann sind wir fertig.

Sonst sei $E_2 \supseteq E_1$ wie im Lemma. Indem wir bei Bedarf E_2 durch ein $E_2' \supseteq E_2$ mit $E_2'\underset{E_2}{\downarrow}\bar{a}\bar{b}_1\bar{c}_1$ ersetzen, können wir p-wt$(\bar{a}/E_2) = $ wt$(\bar{a}/E_1) > 1$ annehmen. Also gibt es Tupel $\bar{b}_2, \bar{c}_2$, so daß

$$\bar{c}_1\underset{E_2}{\not\downarrow}\bar{b}_2,\ \bar{c}_1\underset{E_2}{\not\downarrow}\bar{c}_2,\ \bar{b}_2\underset{E_2}{\downarrow}\bar{c}_2.$$

Wir können sie so legen, daß $\bar{b}_2\bar{c}_2 \underset{E_2\bar{c}_1}{\downarrow} \bar{a}\bar{b}_1$ ist. Dann folgt

$$\bar{a}\underset{E_2}{\not\downarrow}\bar{b}_2,\ \bar{a}\underset{E_2}{\not\downarrow}\bar{c}_2,\ \bar{b}_2\underset{E_2}{\downarrow}\bar{c}_2.$$

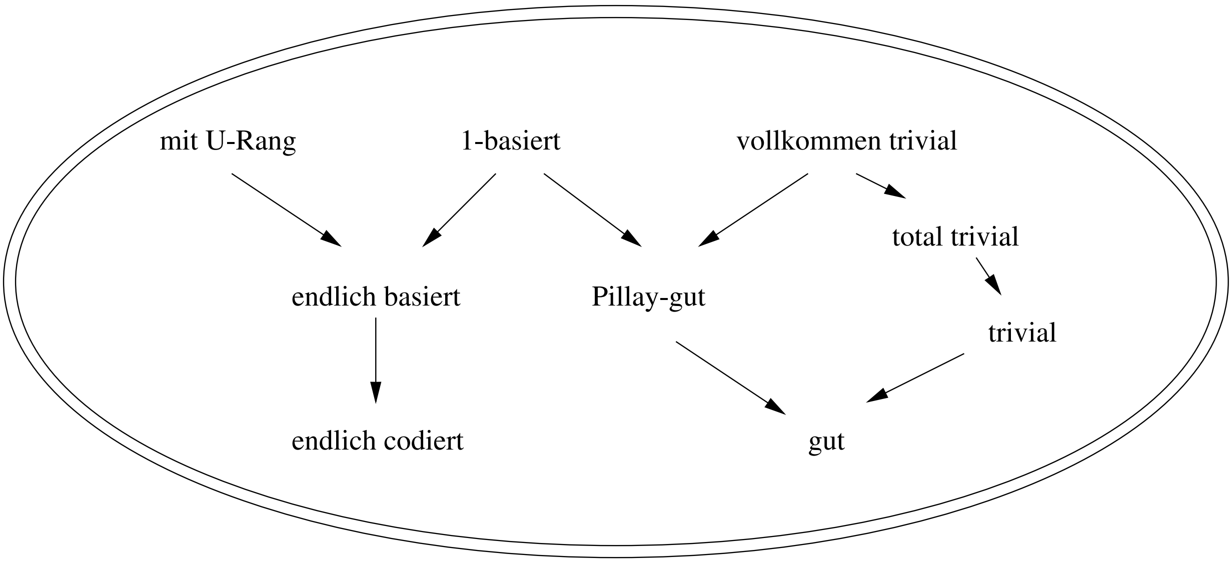
Wenn wt$(\bar{c}_2/E_2) = 1$ ist, dann sind wir fertig.

Sonst können wir $E_3 \supseteq E_2$ wie im Lemma wählen usw. ...

Würde das Verfahren nicht abbrechen, dann wäre $(c_n)_{1<n<\omega}$ eine über $F = \bigcup_{1<n<\omega} E_n$ unabhängige Folge, $\bar{a}\underset{E}{\downarrow}F$ und $\bar{a}\underset{F}{\not\downarrow}\bar{c}_n$ für alle n. Also wäre wt$^+(\bar{a}/E) > \aleph_0$, entgegen der Voraussetzung.
Quelle: [Bue96, Proposition 5.6.6]; s. a. [Pil96b, 4, Lemma 3.9] ■

Kapitel 3

Strukturelle Einfachheit



Dieses Kapitel behandelt verschiedene Möglichkeiten des Wohlverhaltens von Unabhängigkeitsrelationen. Grob vereinfachend kann man sagen, daß 1-Basiertheit und Trivialität in gewisser Weise dual sind. Ihr Zusammentreffen hat besonders starke Konsequenzen. Güte ist andererseits eine gemeinsame Verallgemeinerung von 1-Basiertheit und Trivialität.

Die Pfeile im obigen Diagramm stehen für die Implikationen zwischen den verschiedenen Eigenschaften im Falle von kanonischen Unabhängigkeitsrelationen. Dabei wird deutlich, daß es drei unterschiedlich starke Versionen der Trivialität und zwei Definitionen der Güte gibt. (Die Umkehrungen der Implikationen sind, mit einer möglichen Ausnahme, i. a. selbst für die Forking-Unabhängigkeit in stabilen Theorien falsch, vgl. Abschnitt B.4. Nur eine gute, nicht Pillay-gute stabile Theorie ist wohl immer noch nicht bekannt.)

Endlichbasiertheit und Endlichcodiertheit stellen ein Bindeglied zu der grundsätzlich anderen Art der strukturellen Einfachheit dar, die im letzten Kapitel behandelt wurde.

3.1 Trivialität

Definition 3.1.1 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)

- $\downarrow$ heißt **trivial,** falls folgende Regel gilt:

$$A \underset{E}{\downarrow} B,\ A \underset{E}{\downarrow} C,\ B \underset{E}{\downarrow} C \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} BC.$$

Quelle: [Goo91, §1]

- $\downarrow$ heißt **total trivial,** falls folgende Regel gilt:

$$A \underset{E}{\downarrow} B,\ A \underset{E}{\downarrow} C \quad \Rightarrow \quad A \underset{E}{\downarrow} BC.$$

Quelle: [Goo91, §2]

- $\downarrow$ heißt **vollkommen trivial,** falls die folgende Regel gilt:

$$A \underset{E}{\downarrow} B,\ F \supseteq E \quad \Rightarrow \quad A \underset{F}{\downarrow} B.$$

Quelle: [Goo91, §3]

Bemerkung 3.1.2
Jede vollkommen triviale Unabhängigkeitsrelation $\downarrow$ ist total trivial.

Beweis: Seien A, B, C, E gegeben mit $A \underset{E}{\downarrow} B$ und $A \underset{E}{\downarrow} C$. Wenn $\downarrow$ vollkommen trivial ist, gilt $A \underset{EC}{\downarrow} B$. Daraus und aus $A \underset{E}{\downarrow} C$ folgt mit [trans] $A \underset{E}{\downarrow} BC$. ■

Bemerkung 3.1.3 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann trivial, wenn jedes über einer Menge E paarweise unabhängige System von Mengen tatsächlich sogar E-unabhängig ist. ■

Quelle: [Goo91, Lemma 1]

Bemerkung 3.1.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann total trivial, wenn gilt: Wenn $(B_\iota)_{\iota \in I}$ ein System von Mengen ist, so daß $A \underset{E}{\downarrow} B_i$ für alle $i \in I$ gilt, dann ist auch $A \underset{E}{\downarrow} (B_\iota)_{\iota \in I}$. ■

Quelle: [Goo91, Lemma 4]

Für kanonische Unabhängigkeitsrelationen gibt es noch Charakterisierungen der totalen und der vollkommen Trivialität mit Hilfe der kanonischen Basen (vgl. Bemerkung 1.3.7):

Bemerkung 3.1.5 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann total trivial, wenn die folgenden, äquivalenten Regeln im Verband ACL gelten:

- $B_{A \vee A'} = B_A \vee B_{A'}$.
- $B_{A \vee A'} = B_A \vee B_{A'}$, falls $B_A = B_{A'}$.
- $(B \vee B')_A \subseteq B_A \vee B'_A$, falls $B_A = B'_A$.

Beweis: Es ist immer $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B_{A'}} B$ und $A' \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B_{A'}} B$. Wenn $\downarrow$ total trivial ist, dann folgt $AA' \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B_{A'}} B$ und damit auch $B_{A \vee A'} \subseteq B_A \vee B_{A'}$. Da die umgekehrte Inklusion ohnehin immer richtig ist, folgt die erste Bedingung: $B_{A \vee A'} = B_A \vee B_{A'}$.

Umgekehrt folgt aus der schwächeren zweiten Bedingung totale Trivialität: Sei $A \mathop{\downarrow}\limits_{E} B$ und $A' \mathop{\downarrow}\limits_{E} B$, wobei ohne Einschränkung $A, B \supseteq E$. Dann ist $B_{A \vee A'} = B_A \vee B_{A'} = E \vee E = E$, also auch $AA' \mathop{\downarrow}\limits_{E} B$.

Die dritte Bedingung läßt sich analog zur zweiten behandeln. ■

Bemerkung 3.1.6 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann vollkommen trivial, wenn die folgende Regel für alle algebraisch abgeschlossenen Mengen gilt:

- $(B \vee B')_A \subseteq B_A \vee B'_A$.

Beweis: Sei zunächst $\downarrow$ vollkommen trivial. Wegen $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A} B$ und $A \mathop{\downarrow}\limits_{B'_A} B'$ folgt dann $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B'_A} B$ und $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B'_A} B'$. Weil $\downarrow$ dann auch total trivial ist, folgt $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A \vee B'_A} BB'$. Wegen $B_A \vee B'_A \subseteq B \vee B'$ bedeutet dies gerade $(B \vee B')_A \subseteq B_A \vee B'_A$.

Gelte nun umgekehrt die obige Regel, und sei $A \mathop{\downarrow}\limits_{D} B$, $D \subseteq E$, ferner ohne Einschränkung auch $A, B \supseteq D$. Dann ist $(B \vee E)_A \subseteq B_A \vee E_A \subseteq D \vee E = E$, und es folgt $A \mathop{\downarrow}\limits_{E} B$. Also ist $\downarrow$ vollkommen trivial. ■

3.2 Endlichbasiertheit, Endlichcodiertheit und Rang

Wie man dem Diagramm am Anfang des Kapitels entnehmen kann, kommen wir jetzt erst einmal zu etwas ganz anderem. Der Definition der Endlichbasiertheit liegt die Beobachtung zugrunde, daß jede kanonische Unabhängigkeitsrelation im folgenden Sinne „abzählbar basiert“ ist:

Bemerkung 3.2.1 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
Jede Folge von $\emptyset$-Indiscernibles ist unabhängig über jedem unendlichen Anfangsstück.

Beweis: Sei $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 < I_2$ und I_1 unendlich. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von $\emptyset$-Indiscernibles. Dann ist für jedes $i \in I_2$

$$\big((\bar{a}_\iota)_{\iota<i}\big)_{\bar{a}_i} \subseteq K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota<i}\big) = K_\emptyset\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big) \subseteq \operatorname{acl}\big((\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}\big)$$

und folglich $(\bar{a}_\iota)_{\iota<i} \underset{(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}}{\downarrow} \bar{a}_i$. ■

Definition 3.2.2 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
Eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ von E-Indiscernibles ist **n-basiert (über E),** falls $(\bar{a}_\iota)_{n\leqslant\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über $E\bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1}$ ist. Sie ist **endlich basiert,** falls sie n-basiert ist für ein $n < \omega$. $\downarrow$ ist **n-basiert** bzw. **endlich basiert,** falls (für jedes E) jede Folge von E-Indiscernibles n-basiert bzw. endlich basiert ist (über E).

Quelle: [Hru89]

(Für allgemeinere Folgen $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles überträgt man die Definition durch E-Äquivalenz.)

Bemerkung 3.2.3 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
Jede n-basierte Folge von E-Indiscernibles ist $(n + 1)$-basiert. ■

Bemerkung 3.2.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
Sei $C \subseteq \mathfrak{C}$ und $n < \omega$. $\downarrow$ ist genau dann n-basiert, wenn $\underset{C}{\downarrow}$ (für $T(C)$) n-basiert ist.

Beweis: “$\Rightarrow$”: Trivial. “$\Leftarrow$”: Sei $\underset{C}{\downarrow}$ für $T(C)$ n-basiert. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Folge von E-Indiscernibles. Mit den üblichen Methoden (erst enorm verlängern, dann unabhängig drehen und schließlich mit Satz 1.4.9 eine weniger EC-bunte Folge von EC-Indiscernibles wählen) können wir sie über E so drehen, daß sie EC-indiscernible wird und $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega} \underset{E}{\downarrow} C$ erfüllt.

Weil $\underset{C}{\downarrow}$ n-basiert ist, ist $(\bar{a}_\iota)_{n\leqslant\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über $EC\bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1}$. Wegen $\bar{a}_n \underset{E\bar{a}_0\dots\bar{a}_{n-1}}{\downarrow} EC\bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1}$ ist sie nach Korollar 1.6.4 auch eine Morleyfolge über $E\bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1}$. Also ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ auch für $\downarrow$ n-basiert. ■

Dasselbe gilt natürlich auch mit „endlich basiert“ statt „n-basiert“.

*

Definition 3.2.5 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
$\downarrow$ ist **endlich codiert,** wenn jeder Typ eine freie Erweiterung hat, die über einer endlichen Menge frei ist.

Quelle: [Hru89]

Bemerkung 3.2.6 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
Wenn die Unabhängigkeitsrelation $\downarrow$ endlich basiert ist, dann ist sie endlich codiert. ■

Bemerkung 3.2.7 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation**)**
$\downarrow$ hat genau dann U-Rang, wenn für jede Menge B und jedes endliche Tupel $\bar{a}$ die kanonische Basis $B_{\bar{a}}$ eine *endlich erzeugte* algebraisch abgeschlossene Menge ist.

Beweis: “$\Rightarrow$”: Sei $B_{\bar a}$ nicht endlich erzeugt. Dann können wir eine unendliche Kette $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ von endlichen Mengen $E_i \subset B_{\bar a}$ mit $\bar a \not\downarrow_{E_i} E_{i+1}$ bauen: Wenn E_i schon konstruiert ist, dann gilt $\bar a \not\downarrow_{E_i} B_A$, weil sonst $\bar a \downarrow_{E_i} B$ folgen würde und daher $B_{\bar a} = \operatorname{acl} E_i$ endlich erzeugt wäre. Mit Bemerkung 2.1.5 folgt wegen der Endlichkeit von $\bar a$, daß $U(\bar a/\emptyset) = \infty$ ist.
“$\Leftarrow$”: Wenn es ein Tupel $\bar a$ gibt mit $U(\bar a/\emptyset) = \infty$, dann gibt es nach Bemerkung 2.1.5 eine unendliche Kette von Mengen $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ mit $\bar a \not\downarrow_{E_i} E_{i+1}$. Natürlich können wir annehmen, daß die Mengen E_i algebraisch abgeschlossen sind. Sei $B = \bigcup_{\iota<\omega} E_\iota$. Dann ist jede endlich erzeugte algebraisch abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq B$ bereits in einer der Mengen E_i enthalten, und es folgt $\bar a \not\downarrow_F B$. Also kann $B_{\bar a}$ nicht endlich erzeugt sein. ■

Definition 3.2.8
Der algebraische Verband ACL heißt **schwach arithmetisch,** falls der Durchschnitt zweier endlich erzeugter algebraisch abgeschlossener Mengen endlich erzeugt ist.

Er heißt **stark arithmetisch,** falls für alle Mengen E gilt: Der Durchschnitt zweier über E endlich erzeugter algebraisch abgeschlossener Obermengen von E ist über E endlich erzeugt.

Quelle: [GHK$^+$80, I, Definition 4.6]

Lemma 3.2.9
ACL ist genau dann schwach arithmetisch, wenn jede algebraisch abgeschlossene Teilmenge einer endlich erzeugten algebraisch abgeschlossenen Menge selbst endlich erzeugt ist.

Beweis: “$\Leftarrow$”: Trivial. “$\Rightarrow$”: Hierzu muß ich auf den zweiten Teil verweisen: In Abschnitt 4.1 werden wir sehen, daß die Relation $\downarrow^a$, definiert durch $A \downarrow^a_E B \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl}(EB) = \operatorname{acl} E$, immer das Axiom [ex] erfüllt.

Sei nun A eine endlich erzeugte algebraisch abgeschlossene Menge, und sei $E \subseteq A$ ebenfalls algebraisch abgeschlossen. Dann gibt es wegen [ex] für $\downarrow^a$ eine Menge $A' \equiv_E A$, so daß $A \downarrow^a_E A'$, d. h., $A \cap A' = E$ gilt. Wenn ACL schwach arithmetisch ist, ist somit auch E endlich erzeugt. ■

Satz 3.2.10 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- $\downarrow$ hat U-Rang.
- ACL ist stark arithmetisch und $\downarrow$ ist endlich basiert.
- ACL ist schwach arithmetisch und $\downarrow$ ist endlich codiert.

Beweis: Wenn $\downarrow$ U-Rang hat, dann ist ACL stark arithmetisch: Wenn ACL nicht stark arithmetisch ist, dann gibt es algebraisch abgeschlossene Mengen $E \subseteq B \subseteq A$, so daß $A = \operatorname{acl}(E\bar a)$ über E endlich erzeugt ist, nicht jedoch B. Dann ist $E \vee B_{\bar a} = B_A = B$ nicht endlich erzeugt über E. Also ist schon $B_{\bar a}$ nicht endlich erzeugt, und nach Bemerkung 3.2.7 hat $\downarrow$ keinen U-Rang.

Wenn $\downarrow$ U-Rang hat, dann ist $\downarrow$ endlich basiert: Sei $(\bar a_\iota)_{\iota\leqslant\omega}$ eine Folge von Indiscernibles über einer Menge E. Weil mit $\downarrow$ auch $\downarrow_C$ (für $T(C)$) U-Rang hat, können wir $E = \emptyset$ annehmen. Sei $n < \omega$ so groß, daß $(\bar a_\iota)_{\iota<\omega} \downarrow_{\bar a_0\dots\bar a_{n-1}} \bar a_\omega$ ist (Bemerkung 2.1.5). Dann sieht man leicht ein, daß $(\bar a_\iota)_{\iota<\omega}$ über $\bar a_0 \dots \bar a_{n-1}$ unabhängig, also n-basiert ist.

Wenn $\downarrow$ endlich codiert ist, ist die kanonische Basis $B_{\bar a}$ in einer endlich erzeugten algebraisch abgeschlossenen Menge enthalten. Wenn ACL außerdem schwach arithmetisch ist, muß sie daher selbst endlich erzeugt sein. ■

Kommentar

In [GHK$^+$80] wird ein algebraischer Verband als arithmetisch bezeichnet, wenn er im Sinne von Definition 3.2.8 schwach arithmetisch ist. Satz 3.2.10 ist eine naheliegende Verallgemeinerung und Fortführung von [Low94, Remark 4 (a)], wonach für jede 1-basierte superstabile Theorie ACL^{eq} schwach arithmetisch ist, und der bekannten Tatsache, daß jede superstabile Theorie endlich basiert ist (vgl. [Hru89]).

3.3 1-Basiertheit

Satz 3.3.1 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann 1-basiert, wenn $B_A = A \cap B$ für alle algebraisch abgeschlossenen Mengen A, B gilt.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\downarrow$ kanonisch und 1-basiert. Zu zeigen: Für jeden Typ $\bar{a}/B$, B algebraisch abgeschlossen, ist $B_{\bar{a}} \subseteq \operatorname{acl}(\bar{a})$. Sei dazu $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}/B$.

Dann ist $B_{\bar{a}}$ die kleinste algebraisch abgeschlossene Teilmenge von B, über welcher $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ — oder auch nur $(\bar{a}_\iota)_{1\leqslant\iota<\omega}$ — noch eine Morleyfolge ist. Zu zeigen: Das ist $\operatorname{acl}(\bar{a}_0) \cap \operatorname{acl}(\bar{a}_1)$.

Weil $\downarrow$ 1-basiert ist, ist $(\bar{a}_i)_{2\leqslant i<\omega}$ eine Morleyfolge sowohl über $\bar{a}_0$ als auch über $\bar{a}_1$ als auch über $\bar{a}_0\bar{a}_1$. Weil $\downarrow$ kanonisch ist, ist sie es auch über $\operatorname{acl}(\bar{a}_0) \cap \operatorname{acl}(\bar{a}_1)$. Wegen $\operatorname{acl}(\bar{a}_0) \cap \operatorname{acl}(\bar{a}_1) \subseteq B_{\bar{a}}$ folgt daraus $\operatorname{acl}(\bar{a}_0) \cap \operatorname{acl}(\bar{a}_1) = B_{\bar{a}}$ und damit die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei $\downarrow$ kanonisch mit $B_A = A \cap B$ für alle algebraisch abgeschlossenen Mengen A, B. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Folge von E-Indiscernibles. Zu zeigen: Sie ist 1-basiert, d. h., $(\bar{a}_\iota)_{1\leqslant\iota<\omega}$ ist eine Morleyfolge über $E\bar{a}_0$.

Sei $B = \operatorname{acl}(E\bar{a}_0) \cap \operatorname{acl}(E\bar{a}_1)$. Es genügt, zu zeigen, daß die ursprüngliche Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ B-unabhängig ist — denn dann ist $(\bar{a}_\iota)_{1\leqslant\iota<\omega}$ $B\bar{a}_0$-unabhängig.

Dafür wiederum genügt es, $\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \underset{B}{\downarrow} \bar{a}_n$ für alle $n < \omega$ nachzuprüfen. Tatsächlich ist

$$\big(\operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1})\big)_{E\bar{a}_n} = \operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}) \cap \operatorname{acl}(E\bar{a}_n) \subseteq \operatorname{acl}(E\bar{a}_n)$$

und ebenso

$$\big(\operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1})\big)_{E\bar{a}_n} = \big(\operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1})\big)_{E\bar{a}_{n+1}} = \operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}) \cap \operatorname{acl}(E\bar{a}_{n+1}) \subseteq \operatorname{acl}(E\bar{a}_{n+1}),$$

somit also

$$\big(\operatorname{acl}(B\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1})\big)_{E\bar{a}_n} \subseteq \operatorname{acl}(E\bar{a}_n) \cap \operatorname{acl}(E\bar{a}_{n+1}) = B. \quad \blacksquare$$

Der Beweis zeigt nebenbei auch, daß eine kanonische Unabhängigkeitsrelation bereits dann 1-basiert ist, wenn alle Folgen von $\emptyset$-Indiscernibles es sind.

Die 1-basierten kanonischen Unabhängigkeitsrelationen werden Gegenstand des nächsten Kapitels sein. Für den Rest dieses Abschnitts können wir uns also auf ein paar „triviale" Beobachtungen beschränken ... In Verbindung mit den früheren Bemerkungen 1.3.7, 3.1.5 und 3.1.6 zeigt die folgende Bemerkung, daß 1-Basiertheit mit der Trivialität verwandt („dual?") ist:

Bemerkung 3.3.2 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
$\downarrow$ ist genau dann 1-basiert, wenn die folgenden, äquivalenten, Regeln gelten:

- $B_A = A \cap B$.
- $B_A = A_B$.
- $\bullet_A : [0,1] \to [0,1]$ ist monoton.
- $\bullet_A : [0,1] \to [0,A]$.
- $B_{A\cap A'} = B_A \cap B_{A'}$.
- $(B \cap B')_A = B_A \cap B'_A$.
- $(B \cap B')_A \subseteq B_A \cap B'_A$.
- $(B \vee B')_A \supseteq B_A \vee B'_A$.

Beweis: Aus der ersten Regel folgen natürlich alle übrigen. Da für alle kanonischen Unabhängigkeitsrelationen $A \cap B \subseteq B_A \subseteq B$ gilt, ist nur zu zeigen, daß aus jeder der übrigen Bedingungen $B_A \subseteq A$ folgt. Es folgt aus der zweiten: $B_A = A_B \subseteq A$. Aus der dritten: $B_A \subseteq (A \vee B)_A = A$. Im Falle der vierten Bedingung ist es trivial. Es folgt aus der fünften: $B_A = B_A \cap B = B_A \cap B_B = B_{A\cap B} = A \cap B$. Aus der sechsten und siebten: $B_A = (B \cap (A \vee B))_A \subseteq B_A \cap (A \vee B)_A = B_A \cap A$. Aus der achten: $B_A \subseteq B_A \vee A_A \subseteq (B \vee A)_A = A$. $\blacksquare$

Bemerkung 3.3.3 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\downarrow$ 1-basiert und trivial ist, dann ist $\downarrow$ sogar total trivial.

Beweis: Es genügt, für algebraisch abgeschlossene Mengen A, B, C, E mit $E \subseteq A$, $E \subseteq B$ und $E \subseteq C$ die Regel $A \underset{E}{\downarrow} B,\ A \underset{E}{\downarrow} C \;\Rightarrow\; A \underset{E}{\downarrow} BC$ zu beweisen. Sei $F = B \cap C$. Nach Satz 3.3.1 gilt dann $B \underset{E}{\downarrow} C$. Folglich sind A, B und C paarweise E-unabhängig und wegen Trivialität von $\downarrow$ auch E-unabhängig, woraus $A \underset{E}{\downarrow} BC$ folgt. $\blacksquare$

Satz 3.3.4 ($\downarrow$ kanonische Unabhängigkeitsrelation)
Folgende Bedingungen an $\downarrow$ und an T sind äquivalent:

- $\downarrow$ ist 1-basiert und trivial;
- $\downarrow$ ist 1-basiert und vollkommen trivial;
- ACL ist distributiv.

Beweis: Nach Satz 3.3.1 und Bemerkungen 3.1.5 und 3.1.6 ist klar, daß eine 1-basierte kanonische Unabhängigkeitsrelation genau dann total trivial ist, wenn ACL distributiv ist, und ebenso, daß sie genau dann vollkommen trivial ist, wenn ACL distributiv ist. Mit Bemerkung 3.3.3 folgt, daß jede 1-basierte triviale kanonische Unabhängigkeitsrelation sogar vollkommen trivial ist.

Zu zeigen bleibt: Wenn $\downarrow$ kanonisch und ACL distributiv ist, dann ist $\downarrow$ 1-basiert. Sei dazu B algebraisch abgeschlossen und $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$ eine Morleyfolge über B. Dann ist

$$B_{\bar{a}_0} = \mathrm{acl}\left((\bar{a}_\iota)_{\iota<0}\right) \cap \mathrm{acl}\left((\bar{a}_\iota)_{\iota>0}\right) = \mathrm{acl}(\bar{a}_{-1}) \cap \mathrm{acl}(\bar{a}_{+1}) \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a}_0). \quad \blacksquare$$

Am Anfang des nächsten Kapitels wird die folgende Verallgemeinerung von Satz 3.3.4 stehen: Eine kanonische Unabhängigkeitsrelation ist genau dann 1-basiert, wenn ACL modular ist.

Bemerkung 3.3.5
Wenn $\downarrow$ eine kanonische Unabhängigkeitsrelationfür T^{eq} ist, deren Einschränkung auf T 1-basiert ist, dann ist sie selbst 1-basiert.

Beweis: Zunächst einmal ist klar, daß man immer eine Unabhängigkeitsrelation erhält, wenn man eine Unabhängigkeitsrelation für T^{eq} auf das Monstermodell von T einschränkt.

Sei nun $E \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$ eine Menge im Monstermodell von T^{eq} und a_0 eine Äquivalenzklasse einer $\emptyset$-definierbaren Äquivalenzrelation. Zu zeigen: $E_{a_0} \subseteq \mathrm{acl}^{eq}(a_0)$. Dafür können wir annehmen, daß E bereits im Monstermodell $\mathfrak{C}$ von T liegt. (Sonst brauchen wir $E \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$ nur durch $E' \subseteq \mathfrak{C}$ mit $E' \underset{E}{\downarrow} a_0$ und $\mathrm{acl}^{eq} E \subseteq \mathrm{acl}^{eq} E'$ zu ersetzen.)

Seien $\bar{b}_0, \bar{c}_0$ zwei Vertreter der Klasse a_0, die $\bar{b}_0 \underset{a_0}{\downarrow} \bar{c}_0$ erfüllen. Sei $(a_\iota \bar{b}_\iota \bar{c}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine E-Morleyfolge. Weil $\downarrow$ 1-basiert ist, ist $(\bar{b}_\iota)_{1<\iota<\omega}$ eine $\bar{b}_0$-Morleyfolge und ebenso $(\bar{c}_\iota)_{1<\iota<\omega}$ eine $\bar{c}_0$-Morleyfolge — in $\mathfrak{C}$, also auch in $\mathfrak{C}^{eq}$. Also ist

$$E_{a_0} = E_{\mathrm{acl}^{eq}(\bar{b}_0)\cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{c}_0)} \subseteq E_{\bar{b}_0} \cap E_{\bar{c}_0} \subseteq \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b}_0) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{c}_0) = \mathrm{acl}^{eq}(a_0)$$

(unter Verwendung von Bemerkung 1.3.7 und Satz 1.7.6). $\blacksquare$

Kommentar

Die Bemerkungen 3.1.5, 3.1.6 und 3.3.2 zeigen, daß Trivialität und 1-Basiertheit verwandte („duale"?) Bedingungen an eine kanonische Unabhängigkeitsrelation sind. Die einzige Regel im Stil der drei Bemerkungen, die fehlt, ist $(B \cap B')_A \supseteq B_A \cap B'_A$.

Wenn ACL distributiv ist, dann folgt aus Satz 4.1.5, daß es auch tatsächlich eine (1-basierte und triviale) Unabhängigkeitsrelation gibt. Mit ACL-distributiven (genauer: mit ACL^{eq}-distributiven $\aleph_0$-kategorischen), nicht notwendigerweise stabilen, Theorien befaßt sich auch Alexander Ivanov [Iva95].

3.4 Güte

Definition 3.4.1 ($\downfree$ Unabhängigkeitsrelation)
Der Typ $\bar{a}_0/E$ heißt **gut** oder **Buechler-gut**, falls gilt:
Jede paarweise E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von E-Indiscernibles ist bereits eine Morleyfolge über E.
$\downfree$ heißt gut, falls alle Typen gut sind.
Quelle: [Goo91, §4]

Nach Lemma 1.6.3 gilt: Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine E-unabhängige Folge von Indiscernibles über $B \supseteq E$ ist, dann ist $\bar{a}_0 \underset{E}{\downfree} B$. Güte ist äquivalent zu einer Verschärfung dieser Aussage:

Bemerkung 3.4.2 ($\downfree$ Unabhängigkeitsrelation)
$\bar{a}_0/E$ ist genau dann gut, wenn gilt:
Ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine paarweise E-unabhängige Folge von Indiscernibles über $B \supseteq E$, so ist $\bar{a}_0 \underset{E}{\downfree} B$.
Quelle: [Goo91, Lemma 11]

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt aus Lemma 1.6.3.
"$\Leftarrow$": Wir können $I = \omega$ annehmen. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine paarweise E-unabhängige Folge von E-Indiscernibles. Zu zeigen: $\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \underset{E}{\downfree} \bar{a}_n$ für alle $n < \omega$. Das folgt daraus, daß $(\bar{a}_\iota)_{n\leqslant\iota<\omega}$ über $E(\bar{a}_\iota)_{\iota<n}$ indiscernible ist. ■

Bemerkung 3.4.3 ($\downfree$ Unabhängigkeitsrelation)
Jede freie Erweiterung $\bar{a}_0/F \supseteq E$ eines guten Typs $\bar{a}_0/E$ ist gut.

Beweis: Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine paarweise F-unabhängige Folge von F-Indiscernibles. Dann ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ auch paarweise E-unabhängig, denn aus $\bar{a}_i \underset{F}{\downfree} \bar{a}_j$ $(i \neq j)$ folgt mit $\bar{a}_i \underset{E}{\downfree} F$ und [trans] $\bar{a}_i \underset{E}{\downfree} \bar{a}_j$. Weil $\bar{a}_0/E$ gut ist, ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine E-unabhängige Folge von F-Indiscernibles. Nach Korollar 1.6.4 ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ auch F-unabhängig. ■

Güte ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von Trivialität und 1-Basiertheit:

Bemerkung 3.4.4 ($\downfree$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\downfree$ trivial oder 1-basiert ist, dann ist $\downfree$ auch gut.

Beweis: Natürlich folgt Güte aus Trivialität.

Sei nun $\downfree$ 1-basiert und $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine paarweise E-unabhängige Folge von E-Indiscernibles. Dann ist $(\bar{a}_\iota)_{1\leqslant\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über $E\bar{a}_0$. Für jedes $n < \omega$ ist daher $\bar{a}_0\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} \underset{E\bar{a}_0}{\downfree} \bar{a}_n$. Weil $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ paarweise E-unabhängig ist, ist andererseits $\bar{a}_0 \underset{E}{\downfree} \bar{a}_n$. Zusammen ergibt das mittels [trans]* $\bar{a}_0\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} \underset{E}{\downfree} \bar{a}_n$. Also ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über E. ■

Bemerkung 3.4.5 ($\downfree$ Unabhängigkeitsrelation)
Sei $\bar{a} \underset{E}{\sqsubseteq} \bar{a}^*$. Wenn $\bar{a}/E$ gut ist, ist auch $\bar{a}^*/E$ gut.

Beweis: Seien $\bar{a}_0$, $\bar{a}_0^*$ gegeben mit $\bar{a}_0 \underset{E}{\sqsubseteq} \bar{a}_0^*$. Angenommen, $\bar{a}_0^*/E$ ist gut und $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ ist indiscernible über $B \supseteq E$ und paarweise E-unabhängig.

Sei die Folge $(\bar{a}_\iota\bar{a}_\iota^*)_{\iota\in I}$ ebenfalls B-indiscernible. (Man erhält so eine Folge, indem man $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ genügend verlängert, jedes $\bar{a}_i$ mit einem $\bar{a}_i^*$ versieht, so daß $(\bar{a}_i\bar{a}_i^*) \underset{B}{\equiv} (\bar{a}_0\bar{a}_0^*)$, und Satz 1.4.9 anwendet.) Damit ist $(\bar{a}_\iota^*)_{\iota\in I}$ B-indiscernible und paarweise E-unabhängig. Somit ist $\bar{a}_0^* \underset{E}{\downfree} B$, und folglich auch $\bar{a}_0 \underset{E}{\downfree} B$. ■

3.5 Pillay-Güte

Pillay-Güte ist eine etwas stärkere Variante von Güte. Es gibt Situationen, in denen man ohne die Erwähnung von Indiscernibles auskommt, indem man mit Pillay-Güte statt mit Güte arbeitet. Ich kenne keine Anwendung von Pillay-Güte, in der man nicht mit Güte auskommt und keine gute Theorie, die nicht Pillay-gut ist.

Definition 3.5.1 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Sei E algebraisch abgeschlossen. Der Typ $\bar{a}_0/E$ heißt **Pillay-gut**, falls gilt:

$$B \supseteq E, \quad \bar{a}_0 \underset{\mathrm{acl}\, B}{\equiv} \bar{a}_1, \quad \bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B.$$

$\downarrow$ heißt Pillay-gut, wenn alle Typen Pillay-gut sind.

Quelle: [Goo91, §4]

Bemerkung 3.5.2 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\bar{a}/\,\mathrm{acl}\, E$ Pillay-gut ist, dann ist $\bar{a}/E$ gut.
Wenn $\downarrow$ Pillay-gut ist, dann ist $\downarrow$ auch gut.

Beweis: Folgt mit Lemma 1.4.6 aus den Definitionen. ■

Bemerkung 3.5.3 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Jede freie Erweiterung $\bar{a}_0/F \supseteq E$ eines Pillay-guten Typs $\bar{a}_0/E$ ist Pillay-gut.

Beweis: Sei $B \supseteq F \supseteq E$, $\bar{a}_0 \underset{\mathrm{acl}\, B}{\equiv} \bar{a}_1$ und $\bar{a}_0 \underset{F}{\downarrow} \bar{a}_1$. Dann ist $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_1$ (wegen $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} F$ und [trans]) und daher auch $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$, woraus mit [mon2] $\bar{a}_0 \underset{F}{\downarrow} B$ folgt.
Quelle: [Pil96b, Lemma 2.1] ■

Pillay-Güte ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von vollkommener Trivialität und 1-Basiertheit:

Bemerkung 3.5.4 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Wenn $\downarrow$ vollkommen trivial oder kanonisch und 1-basiert ist, dann ist $\downarrow$ auch Pillay-gut.
Quelle: [Goo91, Proposition 10]

Beweis: Sei $\downarrow$ zunächst vollkommen trivial, und seien $\bar{a}_0, \bar{a}_1, B \supseteq E$ gegeben mit $\bar{a}_0 \underset{B}{\equiv} \bar{a}_1$ und $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_1$. Da $\downarrow$ vollkommen trivial ist, gilt auch $\bar{a}_0 \underset{B}{\downarrow} \bar{a}_1$. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Morleyfolge über B. Wegen der Trivialität von $\downarrow$ ist sie auch eine Morleyfolge über E. Also gilt $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$.

Sei $\downarrow$ nun kanonisch und 1-basiert, und seien $\bar{a}_0, \bar{a}_1, E, B$ gegeben wie in der Definition der Pillay-Güte. Wegen $\bar{a}_0 \underset{B}{\equiv} \bar{a}_1$ ist

$$\mathrm{acl}(\bar{a}_0) \cap \mathrm{acl}\, B = \mathrm{acl}(\bar{a}_1) \cap \mathrm{acl}\, B \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a}_0) \cap \mathrm{acl}(\bar{a}_1).$$

Wegen $\bar{a}_0 \overset{a}{\underset{E}{\downarrow}} \bar{a}_1$ ist

$$\mathrm{acl}(\bar{a}_0) \cap \mathrm{acl}(\bar{a}_1) \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a}_0 E) \cap \mathrm{acl}(\bar{a}_1 E) = \mathrm{acl}\, E. \quad ■$$

Übung 3.5.5 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation)
Sei $\bar{a} \underset{E}{\sqsubseteq} \bar{a}^*$. Wenn $\bar{a}/E$ gut ist, ist auch $\bar{a}^*/E$ gut.

Tess of the d'Urbervilles

Setzen wir unsern Streifzug durch das Werk von Thomas Hardy mit *Tess of the d'Urbervilles* fort. Wer würde bei der folgenden Szene aus dem fünften Kapitel von [Har12] an stabile Theorien denken?

> Everything on this snug property was bright, thriving, and well kept; acres of glass houses stretched down the inclines to the copses at their feet. Everything looked like money - like the last coin issued from the Mint. The *stables,* partly screened by Austrian pines and evergreen oaks, and fitted with every late appliance, were as dignified as Chapels-of-Ease. On the extensive lawn stood an ornamental tent, its door being towards her.

Bis zur Schlüsselszene des zehnten Kapitels läßt Thomas Hardy sich Zeit, bevor er erstmals andeutet, worum es in dem Roman wirklich geht:

> 'Well, my Beauty, what are you doing here?'
>
> She was so tired after her long day and her walk that she confided her trouble to him — that she had been waiting ever since he saw her to have their company home, because the road at night was strange to her. 'But it seems they will never leave off, and I really think I will wait no longer.'
>
> 'Certainly do not. I have only a saddle-horse here to-day; but come to "The Flower-de-Luce", and I'll hire a trap, and drive you home with me.'
>
> $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$, though flattered, had never quite got over her original mistrust of him, and, despite their tardiness, she preferred to walk home with the work folk. So she answered that she was much obliged to him, but would not trouble him. 'I have said that I will wait for 'em, and they will expect me to now.'
>
> 'Very well, *Miss Independence.* Please yourself ... Then I shall not hurry ... My good Lord, what a kick-up they are having there!'

Spätestens jetzt weiß der aufmerksame Leser die nachfolgende Episode aus dem zweiten Kapitel rückblickend einzuordnen:

> 'I've-got-a-gr't-family-vault-at-Kingsbere — and knighted-forefathers-in-lead-coffins-there!'
>
> The clubbists tittered, except the girl called $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$ — in whom a slow heat seemed to rise at the sense that her father was making himself foolish in their eyes.
>
> 'He's tired, that's all,' she said hastily, 'and he has got a lift home, because our own horse has to rest to-day.'
>
> 'Bless thy *simplicity,* $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$,' said her companions. 'He's got his market-nitch. Haw-haw!'

Ist $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$ vielleicht sogar 1-basiert? Die Worte "modular" und "lattice" sucht man jedenfalls vergeblich. Eine mögliche Erklärung dafür deutet sich im fünfunddreißigsten Kapitel an (vgl. Satz 4.3.2):

> He turned away to descend; then, irresolute, faced round to her door again. In the act he caught sight of one of the d'Urberville dames, whose portrait was immediately over the entrance to $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$'s bedchamber. In the candlelight the painting was more than unpleasant. *Sinister design* lurked in the woman's features, a concentrated purpose of revenge on the other sex — so it seemed to him then. The Caroline bodice of the portrait was low — precisely as $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$'s had been when he tucked it in to show the necklace; and again he experienced the distressing sensation of a resemblance between them.

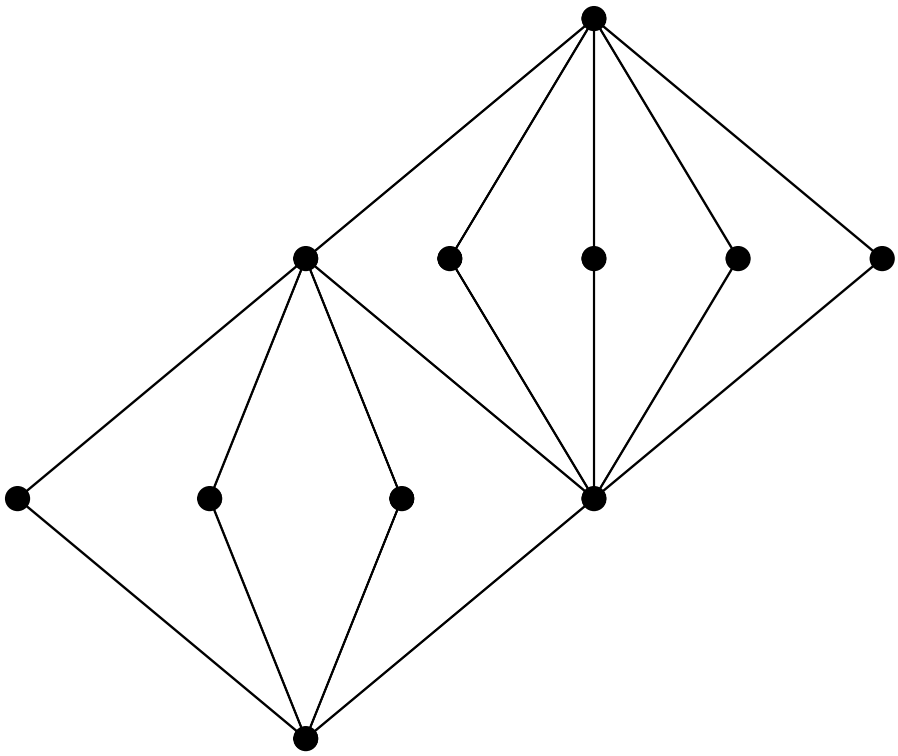
Wer sich für die Bekehrung Clare's zur *goodness* interessiert, mag selbst im fünfundvierzigsten Kapitel nachschlagen. Das einzige, was wir über $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$ sicher wissen, ist jedenfalls ihre Einfachheit. Diese wird allerdings erst im fünfzigsten Kapitel benutzt:

> Nobody looked at his or her companions. The eyes of all were on the soil as its turned surface was revealed by the fires. Hence as $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$ stirred the clods, and sang her foolish little songs with scarce now a hope that Clare would ever hear them, she did not for a long time notice the person who worked nearest to her — a man in a long smockfrock who, she found, was *forking* the same plot as herself, and whom she supposed her father had sent there to advance the work. She became more conscious of him when the direction of his digging brought him closer. Sometimes the smoke *divided* them; then it swerved, and the two were visible to each other but *divided* from all the rest.
>
> $\mathrm{T}_{\mathrm{ess}}$ did not speak to her fellow-worker, nor did he speak to her. Nor did she think of him further than to recollect that he had not been there when it was broad daylight, and that she did not know him as any one of the Marlott labourers, which was no wonder, her absences having been so long and frequent of late years. By-and-by he dug so close to her that the fire-beams were reflected as distinctly from the steel prongs of his fork as from her own. On going up to the fire to throw a pitch of dead weeds upon it, she found that he did the same on the other side. The fire flared up, and she beheld the face of d'Urberville.

Gegen Ende des Romans dominieren dann wieder die nichtmathematischen Themen.

Kapitel 4

Modulare Theorien



Im Abschnitt über 1-Basiertheit im ersten Teil der Arbeit, Abschnitt 3.3, haben wir gesehen, daß eine kanonische Unabhängigkeitsrelation genau dann 1-basiert ist, wenn die kanonischen Basen die Gleichung $B_A = \operatorname{acl} A \cap \operatorname{acl} B$ erfüllen. Damit ist klar, wie die 1-basierten kanonischen Unabhängigkeitsrelationen aussehen: Sie fallen mit der algebraischen Unabhängigkeit zusammen. Wie sich in Abschnitt 4.1 herausstellen wird, ist die algebraische Unabhängigkeit genau dann tatsächlich eine (1-basierte kanonische) Unabhängigkeitsrelation, wenn ACL modular ist.

Der Rest des Kapitels untersucht, was sich für die algebraische Unabhängigkeit in ACL-modularen Theorien über die Ergebnisse von Kapitel 2 und 3 des ersten Teils hinaus sagen läßt.

4.1 Algebraische Unabhängigkeit

Die algebraische Unabhängigkeit (Definition 1.5.4) liefert uns die folgende Relation:

Definition 4.1.1
$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{E} B \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl}(BE) = \operatorname{acl} E.$

Bemerkung 4.1.2
Wenn $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist, dann ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}$ die gröbste strikte Unabhängigkeitsrelation. ■

Beginnen wir mit einem kombinatorischen

Lemma 4.1.3
Seien $\mathfrak{A}$ eine Menge von höchstens n-elementigen Mengen und $\mathfrak{B}$ eine Menge von endlichen Mengen, so daß $A \cap B \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und alle $B \in \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit einer echten Teilmenge $A_* \subsetneqq A$, so daß $A_* \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathfrak{B}$.

Beweis: Sei A_* maximal, so daß $\mathfrak{A}_* = \{A \in \mathfrak{A} \mid A_* \subseteq A\}$ unendlich ist. (Hier geht die uniforme Beschränktheit für die Kardinalitäten der $A \in \mathfrak{A}$ ein.) Damit ist A_* (echte) Teilmenge von unendlich vielen $A \in \mathfrak{A}$. Es bleibt zu zeigen, daß $A_* \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathfrak{B}$.

Angenommen, es gäbe ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $A_* \cap B = \emptyset$. Dann ließe sich eine Folge $(c_k)_{k<\omega}$ paarweise verschiedener Elemente von B konstruieren (was wegen der Endlichkeit von B absurd ist):

Sei dazu erst einmal $c_0 \in B$ beliebig. Sind $c_0, \dots, c_k$ bereits konstruiert, so ist wegen $\{c_0, \dots, c_k\} \subseteq B$ zwangsläufig $A_* \cap \{c_0, \dots, c_k\} = \emptyset$. Nach Maximalität von A_* ist $A \cap \{c_0, \dots, c_k\} \neq \emptyset$ nur für endlich viele $A \in \mathfrak{A}_*$. (Schubfachprinzip). Insbesondere gibt es ein $A \in \mathfrak{A}_*$ mit $A \cap \{c_0, \dots, c_k\} = \emptyset$. Wähle $c_{k+1} \in A \cap B$. ■

Lemma 4.1.4
$\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}$ erfüllt immer die folgenden Axiome:
[inv], [fc], [ex0], [ext0], [mon1], [trans], [symm], [ex] und [lc].

Beweis: **[inv], [fc], [ex0], [ext0], [mon1]** Klar.

[trans] Sei $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{E} D$ und $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{D} B \supseteq D \supseteq E$. Dann ist $\operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl}(BE) = \operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl}(AD) \cap \operatorname{acl}(BE) \subseteq \operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl}(AD) \cap \operatorname{acl}(BD) = \operatorname{acl}(AE) \cap \operatorname{acl} D \subseteq \operatorname{acl} E$, also $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{E} B$.

[symm] Klar.

[ex] Es genügt, zu zeigen: Es gibt keine Mengen A, B, E, so daß E algebraisch abgeschlossen ist und $A \cap E = \emptyset$ sowie $A \cap B' \neq \emptyset$ für alle $B' \equiv_E B$ gilt. Nach dem Kompaktheitssatz reicht es, dies für endliche A, B zu zeigen.

Sei A, B ein Gegenbeispiel mit minimalem $n = |A|$, und sei $\mathfrak{A} = \{A' \mid A' \equiv_D A\}$, $\mathfrak{B} = \{B' \mid B' \equiv_E B\}$. Dann sind die Voraussetzungen von Lemma 4.1.3 erfüllt, und dieses liefert eine Teilmenge $A_* \subsetneqq A$, so daß $A_* \cap B' \neq \emptyset$ ist für alle $B' \equiv_E B$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von A.

[lc] Klar. ■

Satz 4.1.5
$\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}$ ist genau dann eine Unabhängigkeitsrelation, wenn ACL modular ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}$ eine Unabhängigkeitsrelation. Zu zeigen: Für alle algebraisch abgeschlossenen Mengen $B \supseteq D$ und A gilt $B \cap (A \vee D) = (B \cap A) \vee D$. Die nichttriviale Richtung ist "$\subseteq$". Tatsächlich:

$$B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{B\cap A} A \;\Rightarrow\; B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{(B\cap A)\vee D} A \;\Rightarrow\; B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{(B\cap A)\vee D} AD.$$

(Der erste Schluß benutzt $D \subseteq B$, der zweite die triviale Richtung der Gleichung).

"$\Leftarrow$": Nach Lemma 4.1.4 fehlt nur noch:

[mon2] Sei $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{a}_{E} B \supseteq D \supseteq E$. Dann ist $\operatorname{acl}(AD) \cap \operatorname{acl}(BD) = \operatorname{acl} B \cap \operatorname{acl}(AD) = \big(\operatorname{acl} B \cap \operatorname{acl}(AE)\big) \vee \operatorname{acl} D = \operatorname{acl} D$ wegen Modularität von ACL und $\operatorname{acl} D \subseteq \operatorname{acl} B$. ■

Korollar 4.1.6
T hat genau dann eine 1-basierte kanonische Unabhängigkeitsrelation, wenn ACL modular ist.
Wenn sie existiert, dann handelt es sich um $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 1.7.4, Satz 3.3.1 und Satz 4.1.5. ∎

Kommentar

Die Definition von $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}$ habe ich noch nirgends gesehen. Damit dürfte auch Satz 4.1.5 aus trivialen Gründen neu sein. Bemerkenswert an diesem Satz ist eigentlich nur, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}$ das Axiom [ex] erfüllt. Für stabile Theorien ist das nichts Neues, weil die Forking-Unabhängigkeit [ex] erfüllt und feiner als $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}$ ist. Für beliebige Theorien sieht es nur auf den ersten Blick trivial aus. Wahrscheinlich handelt es sich um Folklore.

4.2 Fundierungsrang und Arithmetizität

Konvention
Alle in diesem Abschnitt genannten Mengen sind algebraisch abgeschlossen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

In ACL-modularen Theorien hat der U-Rang eine besonders einfache Definition:

Definition 4.2.1
Der $\mathrm{U^a}$**-Rang** oder **Fundierungsrang** $\mathrm{U^a}(A/E) \in \mathrm{On} \cup \{\infty\}$ von A/E ist für $A \supseteq_{\mathrm{fg}} E$ rekursiv definiert wie folgt:

- $\mathrm{U^a}(A/E) \geqslant 0$ für alle $A \supseteq E$.
- $\mathrm{U^a}(A/E) \geqslant \alpha + 1$ genau dann, wenn es ein $F \in (E, A]_{\mathrm{fg}}$ gibt mit $\mathrm{U^a}(A/F) \geqslant \alpha$.
- $\mathrm{U^a}(A/E) \geqslant \lambda$ (λ eine Limeszahl) genau dann, wenn $\mathrm{U^a}(A/E) \geqslant \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$ gilt.

Definition 4.2.2
Für algebraisch abgeschlossene $A \supseteq E$ ist

$$\mathrm{U^a}(A/E) = \sup \left\{ \mathrm{U^a}(A_0/E) \;\middle|\; A_0 \in [E, A]_{\mathrm{fg}} \right\}.$$

Definition 4.2.3
Für beliebige Mengen A, E ist

$$\mathrm{U^a}(A/E) = \mathrm{U^a}\left(\mathrm{acl}(AE)/\mathrm{acl}(E)\right).$$

Bemerkung 4.2.4
- Für jede strikte Unabhängigkeitsrelation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ mit zugehörigem U-Rang U ist $\mathrm{U^a} \leqslant \mathrm{U}$.
- Wenn ACL modular ist, ist $\mathrm{U^a}$ der U-Rang bezüglich $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}$. ∎

Bemerkung 4.2.5
ACL ist genau dann stark arithmetisch, wenn alle $A \supseteq E$ beschränkten U^a-Rang haben, d. h., $U^a(A/E) < \infty$ erfüllen.

Beweis: Zunächst eine Vorüberlegung: Analog zu $U(\downarrow)$ in Abschnitt 2.1 können wir

$$U^a(E) = \sup\left\{ U^a(A/E) \,\middle|\, A \supseteq E,\ U^a(A/E) < \infty \right\}$$

definieren so daß für alle $A \supseteq E$ gilt: $U^a(A/E) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad U^a(A/E) \leqslant U^a(E)$.

"$\Rightarrow$": Sei ACL stark arithmetisch. Es ist zu zeigen, daß $U^a(A/E) < \infty$ für alle $A \supseteq E$ gilt. Dafür wiederum genügt es, daß $U^a(A_0/E) < \infty$ ist für alle $A_0 \in [E, A]_{\mathrm{fg}}$. Wir können also gleich $A \supseteq_{\mathrm{fg}} E$ annehmen.

Wäre $U^a(A/E) = \infty$, dann gäbe es $A_1 \in (E, A]_{fg}$ mit $U^a(A/A_1) \geqslant \sup\left\{ U^a(F) \,\middle|\, F \in [E, A]\right\} + 1$, also $U^a(A/A_1) = \infty$. Das Argument liesse sich iterieren, um eine unendliche aufsteigende Kette $E = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots \subset A$ von algebraisch abgeschlossenen Mengen zu konstruieren. Damit wäre $\bigcup_{\iota<\omega} A_\iota \in [E, A] \setminus [E, A]_{\mathrm{fg}}$, was nach Lemma 3.2.9 der starken Arithmetizität von ACL widerspricht.

"$\Leftarrow$": Klar. ∎

U^a-Rang ist natürlich immer in einem starken Sinne zusammenhängend (vgl. Bemerkung 2.2.1):

Bemerkung 4.2.6
Sei $A \supseteq_{\mathrm{fg}} E$ und $U^a(A/E) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\alpha < U^a(A/E)$ ein $F \in [E, A]$, so daß $U(A/F) = \alpha$ ist. ∎

4.3 Quasidesigns

Definition 4.3.1
Ein **Quasidesign** ist eine zweistellige Relation $R \subseteq P \times Q$, so daß gilt:

- Für alle $a \in P$ gibt es unendlich viele $b \in Q$, so daß $a\,R\,b$.
- Für alle $b \in Q$ gibt es unendlich viele $a \in P$, so daß $a\,R\,b$.
- Für je zwei verschiedene $b_1, b_2 \in Q$ gibt es nur endlich viele $a \in P$, so daß $a\,R\,b_1$ und $a\,R\,b_2$.

Quelle: [Pil96b, 4, Definition 1.6]

Bemerkung 4.3.2
Wenn ACL modular ist, gibt es keine durch vollständige Typen (von endlichen Tupeln) über einer Menge definierbaren Quasidesigns.

Beweis: Sei ACL modular, und seien $\bar a, \bar b_0, E$ gegeben mit $\bar a \notin \mathrm{acl}(E\bar b_0)$ und $\bar b_0 \notin \mathrm{acl}(E\bar a)$. Zu zeigen: $\mathrm{tp}(\bar a, \bar b_0/E) \supset \mathrm{tp}(\bar a/E) \cup \mathrm{tp}(\bar b_0 E)$ definiert kein Quasidesign.

Sei $E' = \mathrm{acl}(E\bar a) \cap \mathrm{acl}(E\bar b_0)$. Sei $(\bar b_\iota)_{\iota \in I}$ eine Morleyfolge (im Sinne von $\mathop{\downarrow}^{a}$) über $E'\bar a$. Wegen $\bar b_0 \mathop{\downarrow}^{a}_{E'} \bar a$ ist sie auch eine Morleyfolge über E'. Also ist $(\bar b_\iota)_{\iota\in I} \mathop{\downarrow}^{a}_{E'} \bar a$ nach Lemma 1.6.3. Aus $\bar a \notin E'$ folgt schließlich $\bar a \notin \mathrm{acl}(E(\bar b_\iota)_{\iota \in I})$. ∎

Satz 4.3.3 (ACL modular)
Wenn $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{a}$ endlichen U-Rang hat, dann gibt es nicht einmal unvollständige Typen $r(\bar{x},\bar{y}) \supseteq p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ über einer Menge, die ein Quasidesign definieren.

Beweis: Nehmen wir an, ACL ist modular und $r(\bar{x},\bar{y}) \supseteq p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ sind solche unvollständige Typen über einer Menge E. Zu zeigen: T hat unendlichen U^a-Rang.

Für alle $(\bar{a},\bar{b}) \models r(\bar{x},\bar{y})$ ist dann $\bar{a} \in \operatorname{acl}(E\bar{b})$ oder $\bar{b} \in \operatorname{acl}(E\bar{a})$ — denn sonst wäre durch $\operatorname{tp}(\bar{a},\bar{b}/E)$ ein Quasidesign definiert, und das ist nicht möglich nach Bemerkung 4.3.2.

Mit dem Kompaktheitssatz folgt, daß es eine $\bar{x}$-algebraische Formel $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{L}(E)$ gibt, so daß

$$T(E) \cup r(\bar{x},\bar{y}) \cup \left\{\text{“}\bar{y} \notin \operatorname{acl}(E\bar{x})\text{”}\right\} \vdash \varphi(\bar{x},\bar{y}).$$

Ebenso gibt es eine $\bar{y}$-algebraische Formel $\psi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{L}(E)$, so daß

$$T(E) \cup r(\bar{x},\bar{y}) \cup \left\{\text{“}\bar{x} \notin \operatorname{acl}(E\bar{y})\text{”}\right\} \vdash \psi(\bar{x},\bar{y}).$$

Für jedes $\bar{a} \models p(\bar{x})$ gibt es unendlich viele (und daher unbeschränkt viele) $\bar{b}$, so daß $(\bar{a},\bar{b}) \models r(\bar{x},\bar{y})$. Ebenso gibt es umgekehrt für jedes $\bar{b} \models q(\bar{y})$ unbeschränkt viele $\bar{a}$, so daß $(\bar{a},\bar{b}) \models r(\bar{x},\bar{y})$. Wir können also eine Folge $(\bar{a}_\iota\bar{b}_\iota)_{\iota<\omega}$ konstruieren mit

$$\begin{aligned} (\bar{a}_i,\bar{b}_i) &\models r(\bar{x},\bar{y}); & \bar{b}_i &\notin \operatorname{acl}(E\bar{a}_0\bar{b}_0\ldots\bar{a}_{i-1}\bar{b}_{i-1}\bar{a}_i); \\ (\bar{a}_{i+1},\bar{b}_i) &\models r(\bar{x},\bar{y}); & \bar{a}_{i+1} &\notin \operatorname{acl}(E\bar{a}_0\bar{b}_0\ldots\bar{a}_i\bar{b}_i). \end{aligned}$$

Nach Kompaktheit gibt es daher eine Folge $(\bar{c}_\iota\bar{d}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Z}}$, die ebenfalls

$$\begin{aligned} &\models \varphi(\bar{c}_i,\bar{d}_i); & \bar{d}_i &\notin \operatorname{acl}(E\ldots\bar{c}_{i-1}\bar{d}_{i-1}\bar{c}_i); \\ &\models \psi(\bar{c}_{i+1},\bar{d}_i); & \bar{c}_{i+i} &\notin \operatorname{acl}(E\ldots\bar{c}_{i-1}\bar{d}_{i-1}\bar{c}_i\bar{d}_i) \end{aligned}$$

erfüllt. Insbesondere gilt $\bar{c}_i \in \operatorname{acl}(E\bar{c}_{i+1})$, aber $\bar{c}_{i+1} \notin \operatorname{acl}(E\bar{c}_i)$, d. h., wir haben eine Kette

$$\ldots \subsetneqq \operatorname{acl}(E\bar{c}_{-2}) \subsetneqq \operatorname{acl}(E\bar{c}_{-1}) \subsetneqq \operatorname{acl}(E\bar{c}_0)$$

von algebraisch abgeschlossenen Mengen konstruiert. Also ist $U^a(\bar{c}_0/E) \geqslant \omega$.
Quelle: [Pil96b, Proposition 4.6.3]. ■

*

Definition 4.3.4
Eine **Pseudoebene** ist eine zweistellige Relation $R \subseteq P \times Q$, so daß sowohl R als auch $R^{op} \subseteq Q \times P$ Quasidesigns sind.

Quelle: [Pil96b, 4, Definition 1.6]

Da jede Pseudoebene ein Quasidesign ist, gibt es in ACL-modularen Theorien auch keine durch vollständige Typen definierbaren Pseudoebenen. Für Theorien mit Imaginärenelimination ist diese Aussage nicht schwächer als Bemerkung 4.3.2:

Bemerkung 4.3.5 (in T^{eq})
Wenn durch den vollständigen E-Typ $r(\bar{x},\bar{y}) \supset p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ ein Quasidesign definiert wird, dann gibt es Realisierungen $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n \models p(\bar{x})$ und $\bar{b} \models q(\bar{y})$, so daß durch $\operatorname{tp}\left(\{\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_{n-1}\},\bar{b}/E\right) \supset \operatorname{tp}\left(\{\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_{n-1}\}/E\right) \cup \operatorname{tp}(\bar{b}/E)$ sogar eine Pseudoebene definiert wird.
Quelle: [Pil96b, 4, Proposition 1.7 (iii)→(ii)]

Beweis: Da der unvollständige Typ

$$\bigcup_{i<\omega} r(\bar{x}_i,\bar{y}_1) \cup \bigcup_{i<\omega} r(\bar{x}_i,\bar{y}_2) \cup \left\{\bar{x}_i \neq \bar{x}_j \,\middle|\, i<j<\omega\right\} \cup \left\{\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2\right\}$$

inkonsistent ist, gibt es nach Kompaktheit ein größtes $n<\omega$, so daß der unvollständige Typ

$$\bigcup_{i<n} r(\bar{x}_i,\bar{y}_1) \cup \bigcup_{i<n} r(\bar{x}_i,\bar{y}_2) \cup \left\{\bar{x}_i \neq \bar{x}_j \,\middle|\, i<j<n\right\} \cup \left\{\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2\right\}$$

gerade noch konsistent ist. Dabei ist $n \geqslant 1$. Sei $\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_{n-1},\bar{b}_1,\bar{b}_2$ eine Realisierung dieses Typs. Dann ist durch $\operatorname{tp}\left(\{\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_{n-1}\},\bar{b}_1/E\right)$ eine Pseudoebene definiert. ■

4.4 Trivialität

Wenn $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist, dann sind nach Satz 3.3.4 Trivialität, totale Trivialität und vollkommene Trivialität von $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$ äquivalent. Dieser Abschnitt dient dem Beweis, daß die Trivialität dann sogar aus einer noch schwächeren Eigenschaft folgt.

Definition 4.4.1 ($\downarrow$ Unabhängigkeitsrelation**)**
Ein **algebraisches Dreieck** über E ist ein paarweise E-unabhängiges System $\{A, B, C\}$, so daß $A \subseteq \operatorname{acl}(EBC)$, $B \subseteq \operatorname{acl}(EAC)$ und $C \subseteq \operatorname{acl}(EBC)$ gilt.

Quelle: [Bue96, S. 208]

(Sei ACL modular und seien $A, B, C \in$ ACL. $\{A, B, C\}$ ist genau dann ein algebraisches Dreieck über $A \cap B \cap C$ bezüglich $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$, wenn $\{A, B, C\}$ ein 2-Diagonalsystem im Sinne von [Mei96, Definition 2.1] ist.)

Bemerkung 4.4.2 (ACL modular)
Wenn $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$ nicht trivial ist, dann gibt es ein algebraisches Dreieck $\{A, B, C\}$ über einer Menge E.

Beweis: Nehmen wir an, $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$ ist nicht trivial. Dann gibt es ein **Dreieck** $\{A, B, C\}$ über E, nämlich ein über E abhängiges aber paarweise unabhängiges System. Wir können zudem annehmen, daß A, B, C, E algebraisch abgeschlossen sind und daß A, B, C die Basismenge E enthalten. Arbeiten wir also gleich in ACL.

Sei nun $A' = A \cap (B \vee C)$, $B' = B \cap (A \vee C)$, $C' = C \cap (A \vee B)$. Dann ist $\{A', B', C'\}$ ein paarweise unabhängiges System echter Obermengen von E. Wegen

$$\begin{aligned} A' &= A' \cap (B \vee C) = A' \cap \left[(A \vee C) \cap (B \vee C)\right] = A' \cap \Big[\big((A \vee C) \cap B\big) \vee C\Big] \\ &= A' \cap (B' \vee C) = A' \cap \left[(A \vee B) \cap (C \vee B')\right] = A' \cap \Big[\big((A \vee B) \cap C\big) \vee B'\Big] \\ &= A' \cap (B' \vee C') \end{aligned}$$

ist tatsächlich $A' \subseteq B' \vee C'$, und entsprechend mit vertauschten Variablen.
Quelle: [Pil96b, 4, Lemma 2.5] ■

Lemma 4.4.3 (ACL modular)
Wenn $\mathop{\downarrow}\limits^{a}$ nicht trivial ist, dann gibt es ein algebraisches Dreieck $\{A, B, C\}$ über einer Menge E, so daß die Typen A/E, B/E und C/E minimal sind.

Beweis: Sei $\{A, B, C\}$ ein algebraisches Dreieck über E. Wir können wieder annehmen, daß A, B, C, E algebraisch abgeschlossen sind und daß A, B, C die Basismenge E enthalten.

Sei $D \in [E, A)$ so daß $U^a(A/D) = 1$ ist (das geht nach dem Zorn'schen Lemma). Dann ist A/E minimal. Damit gilt nun

(*) $A \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{D} BD, \quad A \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{D} CD$

(**) $B \not\subseteq CD, \quad C \not\subseteq BD$. (Sonst wäre z.B. $A \subseteq BC \subseteq CD$, im Widerspruch zu (*).)

Sei $E' = BD \cap CD$, $A' = AE'$, $B' = BE'$, $C' = CE'$. Natürlich gilt dann $A' \subseteq B'C'$, $B' \subseteq A'C'$, $C' \subseteq A'B'$, und wegen (**) gilt $B', C' \supsetneq E'$. Wegen $A \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{D} E'$ (folgt aus $A \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{D} BD$) und $U(A/D) = 1$ ist auch $U(A'/E') = 1$. Aus (*) folgt schließlich $A' \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{E'} B'$, $A' \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{E'} C'$; $B' \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{E'} C'$ gilt ohnehin nach der Definition von E'.

Schlielich ist auch

$$U(B/E) = U(BC/C) = U(AC/C) = U(A/E) = 1$$

(beachte $B \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{E} C$, $A \vee C = B \vee C$ und $A \mathop{\downarrow}\limits_{E} C$) und ebenso $U(C/E) = 1$.
Quelle: [Pil96b, 4, Lemma 2.5] ■

4.5 Gewicht

Konvention
Alle in diesem Abschnitt genannten Mengen sind algebraisch abgeschlossen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

Was die Voraussetzungen für eine lokale Analyse im Sinne von regulären Typen angeht, verhalten sich die ACL-modularen Theorien sogar noch angenehmer, als die stabilen. Die wenigen Andeutungen dazu in diesem Abschnitt mögen genügen. Halten wir zunächst eine bekannte einfache Eigenschaft modularer Verbände fest:

Bemerkung 4.5.1 (ACL modular)
Seien $A \supseteq E \subseteq B$ gegeben mit $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$. Dann sind die Abbildungen

$$[E, A] \quad \to \quad [B, A \vee B], \qquad X \mapsto X \vee B$$

und

$$[F, A \vee B] \quad \to \quad [E, A], \qquad Y \mapsto Y \cap A$$

zueinander inverse Verbandsisomorphismen. ∎

Bemerkung 4.5.2 (ACL modular)
Sei $(A_\iota)_{\iota \in I}$ ein maximales E-unabhängiges System von Elementen des Intervalls $(E, A]$. Dann ist $A \underset{E}{\underline{\Box}} (A_\iota)_{\iota \in I}$.

Beweis: $A \underset{E}{\trianglerighteq} (A_\iota)_{\iota \in I}$ gilt wegen $A_i \subseteq A$ trivialerweise. Wenn umgekehrt $(A_\iota)_{\iota \in I} \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$ gilt, dann folgt $(A_\iota)_{\iota \in I} \underset{E}{\downarrow} A \cap (E \vee B)$. Wegen Maximalität von $(A_\iota)_{\iota \in I}$ ist das nur möglich, wenn $A \cap (E \vee B) = E$, also $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$ ist. ∎

Bemerkung 4.5.3 (ACL modular)
Für $A \supseteq E$ ist

$$\mathrm{wt}(A/E) = \text{p-wt}(A/E) = \max\left\{ |\mathfrak{A}| \;\middle|\; \mathfrak{A} \subseteq (E, A] \text{ } E\text{-unabhängig} \right\}.$$

Quelle: [Low94, Lemma 15]

Beweis: Wegen Bemerkung 4.5.1 genügt es, $\text{p-wt}(A/E) = \sup\left\{ |\mathfrak{A}| \;\middle|\; \mathfrak{A} \subseteq (E, A] \text{ } E\text{-unabhängig} \right\}$ zu beweisen. “$\geqslant$” ist klar. Für “$\leqslant$” genügt die Beobachtung, daß man aus jedem E-unabhängigen System $(A_\iota)_{\iota \in I}$, das $A \underset{E}{\overset{a}{\not\downarrow}} A_i$ für alle $i \in I$ erfüllt, $\mathfrak{A} = \{(A_\iota \vee E) \cap A \mid \iota \in I\}$ gewinnen kann. ∎

Übung 4.5.4
Das Supremum in Bemerkung 4.5.3 wird angenommen.

Lemma 4.5.5 (ACL modular)
Wenn $A \supsetneq E$ und $\mathrm{wt}^+(A/E) \leqslant \aleph_0$ ist, dann gibt es $A_0 \in (E, A]$ mit $\mathrm{wt}(A_0/E) = 1$.

Beweis: Nach Satz 2.4.9 gibt es $F \supseteq E$ mit $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} F$ und $C \supseteq F$ mit $\mathrm{wt}(C/F) = 1$ und $A \underset{F}{\overset{a}{\not\downarrow}} C$. Dann ist mit $A_0 = A \cap C$ auch $\mathrm{wt}(A_0/E) = 1$ wegen der Isomorphie von $[F, C]$ mit $[A \cap F, A \cap C] = [E, A_0]$ und Bemerkung 4.5.3. ∎

Satz 4.5.6 (ACL modular)
Wenn $\mathrm{wt}^+(A/E) \leqslant \aleph_0$ ist, dann gibt es E-unabhängige $A_0, \ldots, A_{n-1} \in (E, A]$ mit $\mathrm{wt}(A_i/E) = 1$, so daß $A \underset{E}{\underline{\Box}} A_0 \ldots A_{n-1}$ ist. Insbesondere ist dann $\mathrm{wt}(A/E) = n < \aleph_0$.

Beweis: Nach Lemma 4.5.5 gibt es ein $A_0 \in (E, A]$ mit $\mathrm{wt}(A_0/E) = 1$. Sei $A_0^* \in [E, A]$ maximal, so daß $A_0 \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} A_0^*$. Wenn $A_0^* = E$ ist, ist $A \underset{E}{\underline{\Box}} A_0$ und wir sind fertig.

Andernfalls liefert Lemma 4.5.5 ein $A_1 \in (E, A]$ mit $\mathrm{wt}(A_1/E) = 1$. Sei $A_1^* \in [E, A]$ maximal, so daß $A_0 A_1 \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} A_1^*$. Wenn $A_1^* = E$ ist, ist $A \underset{E}{\underline{\Box}} A_0 A_1$ und wir sind fertig.

Sonst liefert Lemma 4.5.5 ein A_2 usw …

Das Verfahren muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, weil wir sonst eine unendliche E-unabhängige Folge $(A_\iota)_{\iota < \omega}$ in $(E, A]$ bekämen, im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathrm{wt}^+(A/E) \leqslant \aleph_0$. ∎

Für ein Ergebnis, das Lemma 4.5.5 sehr ähnlich ist (Bemerkung 4.6.5), brauchen wir die

Definition 4.5.7 (ACL modular)
Für $A \supseteq E$ sei die **v-Weite** von A/E definiert durch

- $v(A/E) \geqslant 0$ immer;
- $v(A/E) \geqslant \lambda$ (λ Limeszahl) falls $v(A/E) \geqslant \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.
- $v(A/E) \geqslant \alpha + 1$ falls es $A_1, A_2 \in (E, A]_{fg}$ gibt mit $A_1 \underset{E}{\not\downarrow} A_2$ und $v(A_1/E) \geqslant \alpha$ und $v(A_2/E) \geqslant \alpha$.

Übung 4.5.8 (ACL modular)
Sei v' definiert wie v, jedoch mit „$(E, A]$" anstelle von „$(E, A]_{fg}$". Dann gilt $v'(A/E) < \infty \iff wt(A/E) < \aleph_0 \iff v'(A/E) < \aleph_0$ und im Falle $wt(A/E) < \aleph_0$ gilt auch $v'(A/E) = v(A/E)$.

Bemerkung 4.5.9 (ACL modular)
$wt(A/E) < \aleph_0 \Rightarrow v(A/E) < \infty$. ■

Bemerkung 4.5.10 (ACL modular)
$v(A/E) = 0$ gilt genau dann, wenn $A = E$ oder $wt(A/E) = 1$ ist.

Beweis: $v(A/E) \geqslant 1$ gilt genau dann, wenn es $A_1, A_2 \in (E, A]_{fg}$ mit $A_1 \underset{E}{\downarrow} A_2$ gibt, also nach Bemerkung 4.5.3 genau dann, wenn $wt(A/E) \geqslant 2$ ist. ■

Bemerkung 4.5.11 (ACL modular)
Wenn $E \subsetneqq A$ und $v(A/E) < \infty$ ist, dann gibt es eine Menge $A_0 \in (E, A]_{fg}$ mit $wt(A_0/E) = 1$.

Beweis: Sei $A_0 \in (E, A]_{fg}$ so, daß $v(A_0/E)$ minimal ist. Wie man aus der Definition von v ersieht, ist dann $v(A_0/E) = 0$, also $wt(A/E) = 1$. ■

4.6 Weite

Konvention
Alle in diesem Abschnitt genannten Mengen sind algebraisch abgeschlossen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist. Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$ stehen in diesem Abschnitt nicht für Elemente von $\mathfrak{C}$, sondern für endlich erzeugte algebraisch abgeschlossene Mengen.

In diesem Abschnitt brauchen wir die lokale Variante von Definition 3.2.8:

Definition 4.6.1
Ein Intervall $[E, A]$ von ACL heißt **schwach arithmetisch,** falls $[E, A]_{fg}$ ein Unter*verband* von $[E, A]$ ist.

Bemerkung 4.6.2 (ACL modular)
$\not\downarrow$ hat genau dann U-Rang, wenn für jede endlich erzeugte algebraisch abgeschlossene Menge a das Intervall $[0, a]$ schwach arithmetisch ist.

Beweis: $\not\downarrow$ ist 1-basiert, also endlich basiert. Nach Satz 3.2.10 hat $\not\downarrow$ daher genau dann U-Rang, wenn ACL schwach arithmetisch ist. Letzteres ist äquivalent dazu, daß die endlich erzeugten Mengen einen Unterverband von ACL bilden. ■

Definition 4.6.3 (ACL modular)
Für $A \supseteq E$ sei die **Weite** von A/E definiert durch

- $w(A/E) \geqslant 0$ immer;
- $w(A/E) \geqslant \lambda$ (λ Limeszahl) falls $w(A/E) \geqslant \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.
- $w(A/E) \geqslant \alpha+1$ falls es $A_1, A_2 \in (E, A]_{fg}$ gibt mit $w(A_1/A_1 \cap A_2) \geqslant \alpha$ und $w(A_2/A_1 \cap A_2) \geqslant \alpha$.

Quelle: [Low94]

Bemerkung 4.6.4 (ACL modular)

- $E \subseteq E' \subseteq A' \subseteq A \quad \Rightarrow \quad w(A/E) > w(A'/E')$.
- $w(A/E) \geqslant v(A/E)$.
- $w(A \vee B/A) \geqslant w(B/A \cap B)$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition. Durch Induktion sieht man ohne weiteres ein, daß für alle α gilt: $v(A/E) \geqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad w(A/E) \geqslant \alpha$. Deshalb ist auch die zweite Behauptung richtig. Für die dritte ist für $E = A \cap B$ und für alle Ordinalzahlen α zu zeigen: $w(B/E) \geqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad w(A \vee B/A) \geqslant \alpha$. Induktionsbasis und Limesschluß beim induktiven Beweis dieser Aussage sind trivial. Hier ist der Schluß von α auf $\alpha + 1$:

Sei also $w(B/E) \geqslant \alpha + 1$, und die Behauptung richtig für α. (Wir werden diese Induktionsvoraussetzung überhaupt nicht brauchen!) Dann gibt es $B_1, B_2 \in (E, B]_{fg}$ mit $w(B_i/B_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$. Wegen der Modularität von ACL ist $B \cap (A \vee B_i) = (B \cap A) \vee B_i = B_i$ und deshalb $B_1 \cap B_2 = \big((A \vee B_1) \cap (A \vee B_2)\big) \cap B$. Damit haben wir also $A \vee B_1, A \vee B_2 \in [A, A \vee B]_{fg}$ gefunden mit

$$w\left(A \vee B_1/(A \vee B_1) \cap (A \vee B_2)\right) = w(A \vee B_1/B_1 \cap B_2) \geqslant w(B_1/B_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$$

und ebenso $w\left(A \vee B_2/(A \vee B_1) \cap (A \vee B_2)\right) \geqslant \alpha$. Folglich ist $w(A \vee B/A) \geqslant \alpha + 1$.

Quelle: [Low94, Lemma 10(a),(b)] ■

Korollar 4.6.5 (ACL modular)
Wenn $E \subsetneq A$ und $w(A/E) < \infty$ ist, dann gibt es für alle $E' \in [E, A)$ ein $A_0' \in (E', A]$ mit $wt(A_0'/E') = 1$.
Quelle: [Low94, Theorem 19]

Beweis: Wenn $E' \in [E, A)$ ist, erfüllt $E' \subset A$ die Voraussetzungen von Bemerkung 4.5.11. ■

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen für Korollar 4.6.10, eine teilweise Umkehrung von Korollar 4.6.5.

Bemerkung 4.6.6
$[a, b]_{fg} = [0, b]_{fg} \cap [a, b]$.

Beweis: Sei $C \in [a, b]$. Wenn C über a endlich erzeugt ist, dann auch über 0, weil a ebenfalls endlich erzeugt ist. Wenn umgekehrt C endlich erzeugt ist, dann ist C natürlich über jeder Teilmenge endlich erzeugt, insbesondere auch über a. ■

Lemma 4.6.7 (ACL modular)
Wenn $[0, a \vee b]$ schwach arithmetisch ist, dann gilt $w(a \vee b/a) = w(b/a \cap b)$.

Beweis: Zu zeigen ist nach Bemerkung 4.6.4 nur noch $w(a \vee b/a) \leqslant w(b/a \cap b)$. Dazu beweisen wir durch Induktion für alle Ordinalzahlen α: Wenn $[0, a \vee b]$ schwach arithmetisch ist und $w(a \vee b/a) \geqslant \alpha$, dann ist auch $w(b/a \cap b) \geqslant \alpha$.

Der Limesschritt und die Induktionsbasis $\alpha = 0$ sind trivial. Nehmen wir also an, die Behauptung sei für ein α richtig, und beweisen wir, daß für a, b, so daß $[0, a \vee b]$ schwach arithmetisch ist und $w(a \vee b/a) \geqslant \alpha + 1$ gilt, $w(b/a \cap b) \geqslant \alpha + 1$ folgt.

Nach der Definition von w gibt es $B_1, B_2 \in (a, a \vee b]_{fg}$, so daß $w(B_1/B_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$ und $w(B_2/B_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$ ist. Nach der letzten Bemerkung sind mit B_1 und B_2 auch $b_1 = B_1 \cap b$ und $b_2 = B_2 \cap b$ endlich erzeugt. Nach dem Modularitätsgesetz gilt $B_1 = B_1 \cap (b \vee a) = (B_1 \cap b) \vee a = a \vee b_1$ und ebenso $B_2 = a \vee b_2$.

Aus $w(B_1/B_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$ und der Induktionsvoraussetzung folgt $w(B_1 \vee B_2/B_2) \geqslant \alpha$. Wegen $b_1 \vee B_2 = b_1 \vee a \vee B_2 = B_1 \vee B_2$ ist also $w(b_1 \vee B_2/B_2) \geqslant \alpha$. Wieder mit der Induktionsvoraussetzung folgt $w(b_1/b_1 \cap b_2) = w(b_1/b_1 \cap B_2) \geqslant \alpha$. Ebenso ist $w(b_2/b_1 \cap b_2) \geqslant \alpha$. Es folgt $w(b/a \cap b) \geqslant \alpha + 1$. ■

Lemma 4.6.8 (ACL modular)
Sei $c \supseteq b \supseteq a$ und sei $[0, c]$ schwach arithmetisch. Dann gilt $w(c/a) \leqslant w(b/a) + w(c/b)$.

Beweis: Die Behauptung ist klar, wenn $w(c/b) = 0$ ist. Gilt sie aber für $w(c/b) < \alpha$, so auch für $w(c/b) = \alpha$: Für beliebige $e_1, e_2 \in (a, b]_{fg}$ ist dann nämlich

$$w(e_1/e_1 \cap e_2) = w(e_1 \vee e_2/e_2) < w(b/a) + w(c/b),$$

weil

$$w\left((b \vee e_2) \cap (e_1 \vee e_2)/e_2\right) \leqslant w\left((b \vee e_2)/e_2\right) = w\left((b \vee e_1)/(b \vee e_1) \cap (b \vee e_2)\right) < w(c/b)$$

sowie

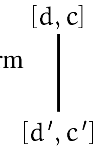
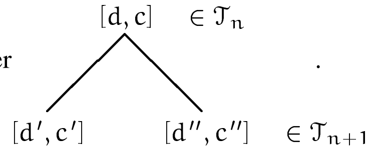
$$w\left((e_1 \vee e_2)/(b \vee e_2) \cap (e_1 \vee e_2)\right) = w\left(b \vee e_1 \vee e_2/b \vee e_2\right) = w\left(b \vee e_1/(b \vee e_1) \cap (b \vee e_2)\right) < w(b/a)$$

ist.

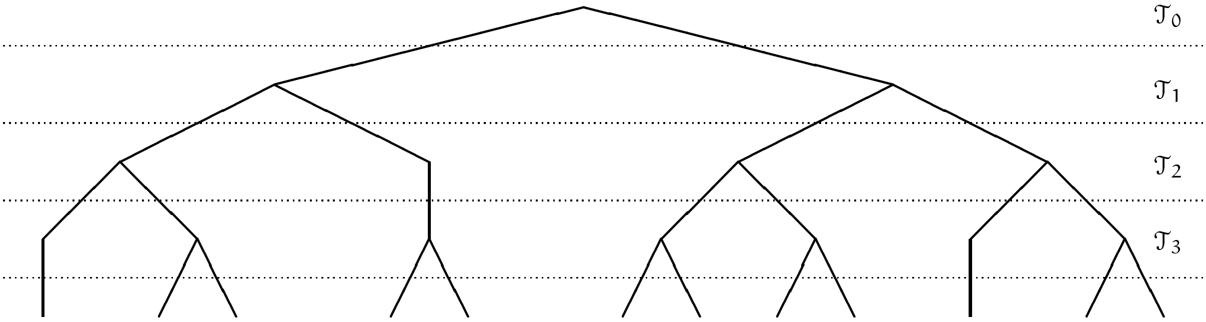
Quelle: [Low94, Lemma 10(c)] ■

Satz 4.6.9 (ACL modular)
Sei $[0, a]$ schwach arithmetisch und $[0, a]_{\mathrm{fg}}$ abzählbar.
Ist $w(a/0) = \infty$, so gibt es ein $E \subsetneqq a$, so daß $\mathrm{wt}(A_0/E) = \infty$ für alle $A_0 \in (E, a]$.

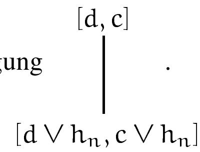
Beweis: Sei $(h_n)_{n<\omega}$ eine Aufzählung von $[0, a]_{\mathrm{fg}}$. Wir konstruieren einen Baum $\mathcal{T}$ von Teilintervallen $[d, c] \subseteq [0, a]$ in Schichten $\mathcal{T}_n$, mit den folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{T}_0 = \{[0, a]\}$. Alle Zweige haben die Länge ω. Es ist $w(c/d) = \infty$ für alle $[d, c] \in \mathcal{T}$.
- Alle Verzweigungen sind von der Form  oder  .

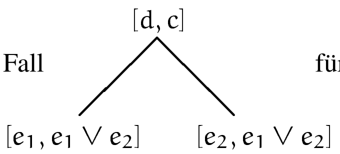
- Wenn $[d', c']$ unter $[d, c]$ liegt, dann gilt $[d', c'] \subseteq [d, d' \vee c]$. (Es genügt, dies für den Fall nachzuprüfen, daß $[d', c'] \in \mathcal{T}_{n+1}$ unmittelbar auf $[d, c] \in \mathcal{T}_n$ folgt.)



Konkret sieht die von $[d, c] \in \mathcal{T}_n$ ausgehende Verzweigung abhängig von $w(c \vee h_n/d \vee h_n)$ so aus:

Typ I: Wenn $w(c \vee h_n/d \vee h_n) = \infty$ ist, ist die Verzweigung  .

Typ II: Sonst ist nach Lemma 4.6.7 $w\left(c/(d \vee h_n) \cap c\right) = w(d \vee h_n \vee c/d \vee h_n) = w(c \vee h_n/d \vee h_n) < \infty$. Nach Lemma 4.6.8 ist $\infty = w(c/d) \leqslant w\left((d \vee h_n) \cap c/d\right) + w\left(c/(d \vee h_n) \cap c\right)$, woraus $w\left((d \vee h_n) \cap c/d\right) = \infty$ folgt. Daher gibt es ein Paar $e_1, e_2 \in \left(d, (d \vee h_n) \cap c\right]$ mit $w(e_i/e_1 \cap e_2) = \infty$ für $i = 1, 2$, also (nach Lemma 4.6.7) auch $w(e_1 e_2/e_i) = \infty$.

Die Verzweigung sei in diesem Fall  für *ein* solches Paar.

Man überzeugt sich leicht, daß damit die oben aufgeführten Bedingungen erfüllt sind.

Wir haben nun eine Folge $\bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_0} d \subseteq \bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_1} d \subseteq \ldots$. Sei $E = \bigvee_{n<\omega} \bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_n} d \subseteq a$. Man sieht leicht ein, daß $E \subsetneqq a$ ist: Für alle $n < \omega$ ist nämlich $w(a/\bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_n} d) \geqslant w(a/d_n) \geqslant w(c_n/d_n) = \infty$, mit einem beliebigen Intervall $[d_n, c_n] \in \mathcal{T}_n$, also $\bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_n} d \subsetneqq a$.

Der Satz ist nun eine einfache Folge von

Behauptung 1 Für $A_0 \in (E, a]$ ist $\mathrm{wt}(A_0/E) > 1$.

Sei also $A_0 \in (E, a]$, und sei h_n so gewählt, daß $h_n \subseteq A_0$ und $h_n \not\subseteq E$. Zum Beweis der Behauptung genügt der Nachweis, daß $\mathrm{wt}(h_n/E) > 1$ ist.

Wegen $h_n \not\subseteq E$ ist insbesondere $h_n \not\subseteq \bigcap_{[d,c]\in\mathcal{T}_{n+1}} d$. Also muß mindestens eine der von $\mathcal{T}_n$ ausgehenden Verzweigungen vom Typ II sein. Seien $[d_1, c_1], \ldots, [d_{2m}, c_{2m}]$ alle Elemente von $\mathcal{T}_{n+1}$, die von einer Verzweigung vom Typ II in $\mathcal{T}_n$ herkommen. Sei $g_i = d_i \cap h_n$ für $i = 1, \ldots, 2m$.

Behauptung 2 $g_i \not\subseteq E$ für alle $i = 1, \ldots, 2m$.

Denn das Intervall $[d_i, c_i] \in \mathcal{T}_{n+1}$ kommt her von einer Verzweigung in $\mathcal{T}_n$ vom Typ II, also von einer Verzweigung von der Form

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {[d,c]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ {[e_1, e_1 \vee e_2]} & & {[e_2, e_1 \vee e_2]} \end{tikzcd}$$

mit $[d_i, c_i] = [e_1, e_1 \vee e_2]$ (ohne Einschränkung). Dabei sind $e_1, e_2 \in \big(d, (d \vee h_n) \cap c\big]$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} g_i \vee e_2 &= (d_i \cap h_n) \vee e_2 = (e_1 \cap h_n) \vee e_2 = (e_1 \cap h_n) \vee (d \vee e_2) \\ &= \big[(e_1 \cap h_n) \vee d\big] \vee e_2 \\ &= \big[e_1 \cap (h_n \vee d)\big] \vee e_2 = e_1 \vee e_2. \end{aligned}$$

(Der Schritt von der vorletzten auf die letzte Zeile benutzt $d \subseteq e_1$ und das Modularitätsgesetz.) Für alle Intervalle $[d^*, c^*]$, die im Baum unter $[e_1, e_1 \vee e_2]$ liegen, gilt daher $g_i \vee d^* = g_i \vee (e_2 \vee d^*) = (g_i \vee e_2) \vee d^* = e_1 \vee e_2 \vee d^* \supseteq c^*$. Also enthält jede Schicht $\mathcal{T}_m$ mit $m > n$ ein Intervall $[d^*, c^*]$ mit $g_i \nsubseteq d^*$. Weil g_i endlich erzeugt ist, folgt $g_i \nsubseteq E$. Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Behauptung 3 $(g_1 \vee f) \cap \cdots \cap (g_{2m} \vee f) \subseteq E$ für alle $f \subseteq E$.

Sei nämlich $f \subseteq E$. Da f endlich erzeugt ist, gibt es ein $k < \omega$, so daß $f \subseteq \bigcap_{[d,c] \in \mathcal{T}_k} d$. Indem wir k sonst vergrößern, können wir $k > n$ annehmen. Es ist also $f \subseteq d$ für alle $[d, c] \in \mathcal{T}_k$, und es genügt, $(g_1 \vee f) \cap \cdots \cap (g_{2m} \vee f) \subseteq d$ für alle $[d, c] \in \mathcal{T}_k$ zu zeigen. Wegen $k > n$ liegt jedes solche Intervall $[d, c] \in \mathcal{T}_k$ über einem Intervall $[d', c'] \in \mathcal{T}_n$.

- Falls die von $[d', c']$ ausgehende Verzweigung vom Typ I ist, ist $d \supseteq d'h_n \supseteq h_n$, also $d \supseteq g_i$ für alle $i = 1, \ldots, 2m$.
- Falls die von $[d', c']$ ausgehende Verzweigung vom Typ II ist, dann liegt $[d, c]$ über einem der schon bekannten Intervalle $[d_i, c_i] \in \mathcal{T}_{n+1}$ für ein $i = 1, \ldots, 2m$, und es folgt $d \supseteq d_i \supseteq g_i$.

In jedem Fall gibt es also ein g_i mit $g_i \subseteq d$, so daß (wegen $f \subseteq d$) $(g_1 \vee f) \cap \cdots \cap (g_{2m} \vee f) \subseteq d$ und damit auch die Behauptung 3 folgt. Wenn wir $G_i = E \vee g_i$ setzen, erhalten wir aus den Behauptungen 2 und 3:

- $G_i \in (E, A_0]$
- $G_1 \cap \cdots \cap G_{2m} = E$.

Ein einfaches Induktionsargument zeigt nun selbst im Fall $m > 1$, daß $\mathrm{wt}(A_0/E) \geqslant 2$ ist. Damit sind Behauptung 1 und der Satz bewiesen.

Quelle: [Low94, Theorem 20] ■

Korollar 4.6.10 (ACL modular)
Sei $\mathcal{L}$ abzählbar, und $[0, a]$ sei schwach arithmetisch. Dann sind äquivalent:

- $w(a/0) = \infty$
- Es gibt ein $E \subsetneq a$, so daß $\mathrm{wt}(A_0/E) = \infty$ für alle $A_0 \in (E, a]$.

Beweis: "⇒": Satz 4.6.9. "⇐": Durch Induktion über α sieht man leicht ein, daß $w(A/E) \geqslant \alpha$ für alle $A \in (E, a]$ und alle Ordinalzahlen α gilt. ■

Kommentar

Korollar 4.6.5 ist [Low94, Theorem 19]. Lee Fong Low definiert in [Low94] die **Endlichkeitseigenschaft:** Eine Theorie hat die Endlichkeitseigenschaft, falls für jedes *einzelne* Element $a \in \mathfrak{C}$ der Unterverband $[0^{eq}, \mathrm{acl}^{eq}(a)]$ von $\mathfrak{C}^{eq}$ schwach arithmetisch ist. Sie zeigt in [Remark 4 (a)][Low94], daß jede vollständige Theorie von Modulen die Endlichkeitseigenschaft hat. Wegen Satz 3.2.10 handelt es sich bei der Endlichkeitseigenschaft um eine (etwas unnatürliche) Verallgemeinerung der Superstabilität.

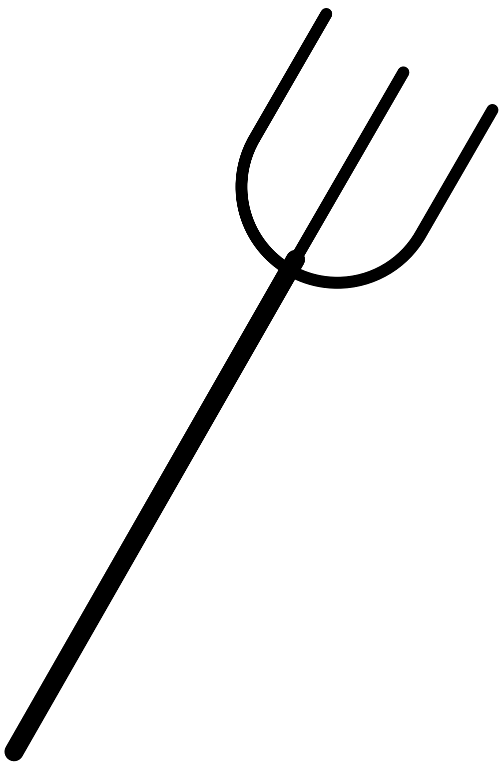
Satz 4.6.9 ist eine Verallgemeinerung von [Zie84, Lemma 7.8 (ii)].

Ein greifbares Beispiel für die Zustände in Schlitz

Eine kolossale Unwichtigkeit passierte in Schlitz. Eines Tages, es war kein besonderer Tag, doch das ist nichts Besonderes, pflanzte ein Mann in seinem Garten eine Bohne und sah zu, wie sie wuchs. Am ersten Tag wuchs sie einen Zentimeter, am nächsten Tag einen halben, am dritten Tag einen viertel Zentimeter undsofort undsofort. Wie groß, fragte sich da dieser Mann in Schlitz, wird die Bohne wohl werden, wenn man den Fall setzt, sie wüchse auf die gerade beschriebene Weise weiter und weiter. In einer unendlichen Zeit, so schloß er, müsse die Bohne unendlich lang sein und die Erde mehrfach umwickeln. Nach den Äußerungen eines Fahrradhändlers aus Rimbach, der in diesem Moment mit dem Fahrrad vorbeifuhr, ergab sich aber zur allergrößten Enttäuschung des Mannes in Schlitz, daß die Bohne im äußersten Fall eine Länge von insgesamt zwei Zentimetern erreichen kann, selbst dann, wenn sie wüchse und wüchse und bis ans Ende der Welt auf die oben beschriebene Weise weiterwüchse. Wer Geschick und Erfahrung als Gärtner hat, möge ruhig auch einmal einen Versuch mit der Gemüsetreiberei machen. Es muß ja nicht unbedingt eine Bohne sein. Und wundern darf er sich auch nicht.

Kapitel 5

Einfache Theorien



Während die ACL-modularen Theorien diejenigen sind, für die der gröbste sinnvolle Kandidat eine Unabhängigkeitsrelation ist, behandelt dieses Kapitel das entgegengesetzte Extrem. Wir werden den feinsten sinnvollen Kandidaten untersuchen und feststellen, daß er genau dann eine Unabhängigkeitsrelation ist, wenn T einfach ist.

5.1 Teilen

Ich erinnere noch einmal an meine Konvention, wonach jede lineare Ordnung I, die zur Indizierung einer Folge von Indiscernibles dient, ein Element 0 enthält (siehe nach Definition 1.6.1).

Definition 5.1.1
$A \mathop{\downarrow}^{d}_{E} B$ heißt, daß sich jede Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ von E-Indiscernibles mit $\bar{a}_0 \in A$ so über $E\bar{a}_0$ drehen läßt, daß sie EB-indiscernible wird.

Bemerkung 5.1.2
Wenn $\mathop{\downarrow}^{d}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist, dann ist $\mathop{\downarrow}^{d}$ die feinste Unabhängigkeitsrelation.

Beweis: Sei $\mathop{\downarrow}^{d}$ eine Unabhängigkeitsrelation und sei $\downarrow$ eine weitere. Es genügt,

$$\bar{a}_0 \mathop{\downarrow}^{d}_{E} B \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_0 \mathop{\downarrow}_{E} B$$

nachzuweisen. Sei dazu $\bar{a}_0 \mathop{\downarrow}^{d}_{E} B$ und sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine E-Morleyfolge im Sinne von $\downarrow$. Nach der Definition von $\mathop{\downarrow}^{d}$ können wir sie so wählen, daß sie EB-indiscernible ist. Nach Lemma 1.6.3 ist dann $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I} \mathop{\downarrow}_{E} B$ und insbesondere auch $\bar{a}_0 \mathop{\downarrow}_{E} B$. ■

Stellen wir zunächst einmal den Zusammenhang zwischen der letzten Definition und dem Teilen her:

Definition 5.1.3
Eine Formel $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$ **teilt** über E, wenn es eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota < \omega}$ von E-isomorphen Bildern von $\bar{a}$ gibt, so daß, für ein $k < \omega$, jede k-elementige Teilmenge von $\{\varphi(\bar{y}, \bar{a}_\iota) \mid \iota < \omega\}$ inkonsistent mit $T(\mathfrak{C})$ ist.

Ein (evt. unvollständiger) Typ $p(\bar{y})$ über einer Menge A **teilt** über E, wenn er eine Formel $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$ impliziert, die über E teilt.

Quelle: [She78, III, Definition 1.3], [She80, Definition 1.1]

Mit dem Craig'schen Interpolationssatz macht man sich leicht klar, daß sich an der Definition des Teilens von Typen nichts ändert, wenn man $\bar{a} \in A$ fordert.

Lemma 5.1.4
Seien $E, A, B \subseteq \mathfrak{C}$ drei beliebige Mengen. B/A teilt genau dann über E, wenn $A \mathop{\not\downarrow}^{d}_{E} B$ gilt.

Beweis: "$\Rightarrow$": Wenn B/A über E teilt, dann gibt es $\bar{a} \in A$ und $\bar{b} \in B$, so daß $\models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ gilt und $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$ über E teilt, d. h., es gibt ein $k < \omega$, so daß die Theorie

$$\bigcup_{i \in I} \left(T(\bar{a}) \left[\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}} \right] \right) \cup \left\{ \neg \exists \bar{y} \big(\varphi(\bar{y}, \bar{a}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\bar{y}, \bar{a}_{i_k}) \big) \;\middle|\; i_1, \ldots, i_k \in I;\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k \right\}$$

konsistent ist für $I = \omega$. Also ist sie auch für beliebig große lineare Ordnungen I konsistent, und nach Satz 1.4.9 gibt es daher eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in J}$ von E-Indiscernibles, so daß $\{\varphi(\bar{y}, \bar{a}_j) \mid j \in J\}$ inkonsistent ist.

"$\Leftarrow$": Sei $A \mathop{\not\downarrow}^{d}_{E} B$, und sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von E-Indiscernibles (mit $0 \in J$), die das bezeugt, d. h., $\bar{a}_0 \in A$ und die Folge läßt sich über $E\bar{a}_0$ nicht so drehen, daß sie EB-indiscernible wird. Dies bedeutet, daß ein gewisse Formelmenge inkonsistent ist, also ist es bereits dann richtig, wenn man B durch eine geeignet gewählte endliche Teilmenge und die Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ durch eine Folge von geeigneten endlichen Teiltupeln ersetzt. Also können wir annehmen, daß B eine endliche Menge ist, aufgezählt in einem Tupel $\bar{b}$, und $\bar{a}_0$ ein endliches Tupel.

Damit gilt nun: Es gibt kein $\bar{b}' \equiv_{\bar{a}_0 E} \bar{b}$, so daß die Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von $E\bar{b}'$-Indiscernibles ist. Daraus können wir schließen, daß $\bar{b}/E\bar{a}_0$ über E teilt, bezeugt von$(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$:

Würde $\bar{b}/E\bar{a}_0$ nicht über E teilen, dann wäre für alle $\varphi(\bar{y}, \bar{x}) \in \mathcal{L}(E)$ mit $\models \varphi(\bar{b}, \bar{a}_0)$ und alle $k < \omega$

$$\{\varphi(\bar{y}, \bar{a}_i) \mid i \in I\} \cup T\big((\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}\big)$$

nicht k-inkonsistent und daher (weil die Folge E-indiscernible und $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ist) konsistent. Also wäre auch

$$\left\{ T(E\bar{a}_0\bar{b}) \left[\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_0} \right] \;\middle|\; i \in I \right\} \cup T\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}\big)$$

konsistent. Nun können wir die Folge falls nötig verlängern, eine Realisierung

$$\bar{b}' \models \left\{ T(E\bar{a}_0\bar{b})\left[\frac{\bar{a}_i\bar{y}}{\bar{a}_0\bar{b}}\right] \,\middle|\, i \in I \right\} \cup T\big(E(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}\big)$$

wählen, und schließlich mit Hilfe von Satz 1.4.9 (deshalb das Verlängern) eine weniger $E\bar{b}'$-bunte Folge von $E\bar{b}'$-Indiscernibles finden. Das widerspricht jedoch der Feststellung des letzten Absatzes. Also teilt $\bar{b}/E\bar{a}_0$ über E, und somit auch B/A.

Quelle: [She80, Lemma 1.4]. ■

Satz 5.1.5
$\mathop{\downarrow}^{d}$ ist immer eine Pseudounabhängigkeitsrelation.

Beweis: **[inv]** Klar.

[fc] Folgt aus Lemma 5.1.4.

[ex0], [ex0]*, [ext0], [ext0]* Klar.

[mon1], [mon1]* Klar.

[mon2] Seien A, B und $E \subseteq D$ gegeben mit $A \underset{D}{\overset{d}{\not\downarrow}} B$. Nach Lemma 5.1.4 teilt dann B/A über D, also auch über E. Also gilt auch $A \underset{E}{\overset{d}{\not\downarrow}} B$.

[mon2]* Sei $B \underset{E}{\overset{d}{\downarrow}} A$ und $E \subseteq D \subseteq B$, und sei $(\bar{b}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Folge von D-Indiscernibles. Sei $\bar{d}$ ein (unendliches) Tupel, das D aufzählt. Dann ist $(\bar{b}_\iota\bar{d})_{\iota \in I}$ eine Folge von E-Indiscernibles. Diese läßt sich über $E\bar{b}_0\bar{d} = D\bar{b}_0$ so drehen, daß sie EA-indiscernible wird. Die gedrehte Folge $(\bar{b}'_\iota\bar{d})_{\iota \in I}$ ist damit $EB\bar{d}$-indiscernible, und somit ist $(\bar{b}'_\iota)_{\iota \in I}$ DB-indiscernible.

[trans] Jede Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ von E-Indiscernibles läßt sich zunächst wegen $A \underset{E}{\overset{d}{\downarrow}} C$ über $E\bar{a}_0$ so drehen, daß sie C-indiscernible wird. Dann läßt sie sich wegen $A \underset{C}{\overset{d}{\downarrow}} B$ über $C\bar{a}_0$ so drehen, daß sie sogar B-indiscernible wird. Insgesamt ist die Folge dann so über $E\bar{a}_0$ gedreht worden, daß sie B-indiscernible wurde: $A \underset{E}{\overset{d}{\downarrow}} B$. ■

Übung 5.1.6
Ist $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ eine $\mathop{\downarrow}^{d}$-Morleyfolge von $\bar{a}_0/E$ und $(\bar{a}^j)_{j \in J}$ eine Folge von E-Indiscernibles mit $\bar{a}^0 = \bar{a}_0$, dann läßt sich jede der beiden Folgen so über $\bar{a}_0E$ verlegen, daß $(\bar{a}^j)_{j \in J}$ hinterher indiscernible über $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ ist.

Kommentar

Satz 5.1.5 stammt von mir und ist eigentlich trivial, weil ich „Pseudounabhängigkeitsrelationen" so definiert habe, daß er gilt. Die Beobachtung, daß $\mathop{\downarrow}^{d}$ immer „fast" eine Unabhängigkeitsrelation ist, könnte allerdings neu sein.

Übung 5.1.6 ist natürlich trivial. Ich habe sie nur formuliert, weil sie in Kims Arbeit als [Kim96d, Lemma 2.5] eine wesentliche Rolle zu spielen scheint.

5.2 Forken

Das Hauptergebnis des nächsten Abschnitts wird sein: Wenn $\downarrow^{\mathrm{d}}$ [lc]* erfüllt, dann ist $\downarrow^{\mathrm{d}}$ bereits eine Unabhängigkeitsrelation. Nach Satz 5.1.5 und Korollar 1.6.8 genügt dafür der Nachweis, daß im Falle von $\downarrow^{\mathrm{d}}$ [ext] aus [lc]* folgt. Der (erfolgreiche, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden) Trick besteht nun darin, eine neue Relation $\downarrow^{\mathrm{f}}$ einzuführen, die zwangsläufig [ext]* erfüllt:

Definition 5.2.1
$A \mathop{\downarrow}^{\mathrm{f}}_{E} B$ heißt, daß es für alle Obermengen $\hat{A} \supseteq AE$ ein $\hat{A}' \equiv_{AE} \hat{A}$ gibt, so daß $\hat{A} \mathop{\downarrow}^{\mathrm{d}}_{E} B$ gilt.

Die übliche Definition des Forkens lautet:

Definition 5.2.2
Ein (evt. unvollständiger) Typ $q(\bar{y})$ über einer Menge A **forkt** über E, wenn er eine endliche Disjunktion $\bigvee_{i<n} \varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$ von Formeln $\varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$ impliziert, die alle über E teilen.

Quelle: [She78, III, Definition 1.4], [She80, Definition 1.2]

Selbst wenn $q(\bar{y}) \in S(A)$ ein vollständiger Typ und $E \subseteq A$ ist, kann q immer noch über E forken, ohne über E zu teilen, denn die Tupel $\bar{a}_i$ aus der obigen Definition brauchen nicht in A zu liegen.

Lemma 5.2.3
Für alle Mengen $A \supseteq E$ und B gilt: B/A forkt genau dann über E, wenn $A \mathop{\not\downarrow}^{\mathrm{f}}_{E} B$ gilt.

Beweis: Nach Lemma 5.1.4 und der Definition von $\downarrow^{\mathrm{f}}$ müssen wir lediglich überprüfen: B/A forkt genau dann nicht über $E \subseteq A$, wenn es für alle $\hat{A} \supseteq A$ ein $\hat{A}' \equiv_{AE} \hat{A}$ gibt, so daß $B/\hat{A}'$ nicht über E teilt.

"⇒": Wenn $q(\bar{y}) = \mathrm{tp}(B/A)$ über E forkt, dann gibt es nach der Definition des Forkens eine endliche Disjunktion $\bigvee_{i<n} \varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$ von über E teilenden Formeln $\varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$, so daß $\models \bigvee i < n \varphi_i(\bar{b}, \bar{a}_i)$ gilt. Sei $\hat{A} = A\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}$. Dann ist klar, daß für alle $\hat{A}' \equiv_{AE} \hat{A}$ der Typ $B/\hat{A}$ über E teilen, also (nach Lemma 5.1.4) $\hat{A}' \mathop{\not\downarrow}^{\mathrm{d}}_{E} B$ erfüllen muß. Damit ist $A \mathop{\not\downarrow}^{\mathrm{f}}_{E} B$.

"⇐": Wenn $q(\bar{y}) = \mathrm{tp}(B/A)$ über E nicht forkt, dann ist für jede Obermenge $\hat{A} \supseteq A$

$$T(AB) \cup T(\hat{A}) \cup \left\{\neg\varphi(\bar{b}, \bar{a}) \;\middle|\; \bar{a} \in \hat{A},\ \varphi(\bar{y}, \bar{a}) \text{ teilt über } E\right\}$$

konsistent. Also gibt es eine Menge $\hat{A}'$, so daß

$$T(\hat{A}'AB) \vdash \left(T(AB) \cup T(\hat{A}) \cup \left\{\neg\varphi(\bar{b}, \bar{a}) \;\middle|\; \bar{a} \in \hat{A},\ \varphi(\bar{y}, \bar{a}) \text{ teilt über } E\right\}\right)\left[\frac{\hat{A}'}{\hat{A}}\right]$$

gilt. Damit ist $\hat{A}' \equiv_{A} \hat{A}$ und $B/\hat{A}'$ teilt nicht über E.

Quelle: [She78, III, Theorem 1.4] ■

Lemma 5.2.4
Sei $q(\bar{y})$ ein unvollständiger Typ über einer Menge A. Wenn q über einer Menge E nicht forkt, gibt es einen vollständigen Typ $\hat{q}(\bar{y}) \in S(A)$, der ebenfalls nicht über E forkt.

Beweis: Wenn jeder vollständige Typ $\hat{q}(\bar{y}) \in S(A)$ über E forkt, dann ist

$$q(\bar{y}) \cup \left\{\neg\varphi(\bar{y}, \bar{a}) \;\middle|\; \bar{a} \in A,\ \{\varphi(\bar{y}, \bar{a})\} \text{ forkt über } E\right\}$$

inkonsistent. Also gibt es $\varphi_1(\bar{y}, \bar{a}_1), \ldots, \varphi_n(\bar{y}, \bar{a}_n)$ mit $\bar{a}_i \in A$, so daß jedes $\varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$ über E forkt und $q(\bar{y}) \vdash \bigvee_{i<n} \varphi_i(\bar{y}, \bar{a}_i)$ gilt. Daher forkt bereits $q(\bar{y})$ über E.

Quelle: [She78, III, Theorem 1.4] ■

Bemerkung 5.2.5
$\downarrow^{\mathrm{f}}$ erfüllt immer die folgenden Axiome: [inv], [fc], [ex0], [mon1], [mon1]*, [mon2]*, [ext]*.

Beweis: **[inv]** Klar.

[fc] Folgt aus Lemma 5.2.3.

[ex0], [mon1], [mon1]*, [mon2]* Folgt jeweils daraus, daß $\downarrow^{\mathrm{d}}$ das betreffende Axiom erfüllt.

[ext]* Folgt aus Lemma 5.2.3 und Lemma 5.2.4.

■

5.3 Einfachheit

Definition 5.3.1
Eine Formel $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{L}$ hat die **Baumeigenschaft,** falls es ein $k < \omega$ und einen „Baum“ $(\bar{b}_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ von Tupeln gibt, so daß jeder „Zweig“ $\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_{s\restriction n}) \mid n < \omega\}$ $(s \in \omega^\omega)$ konsistent, jede der „Verzweigungen“ $\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_{s^\frown i}) \mid i < \omega\}$ dagegen k-inkonsistent ist.

T heißt **einfach,** falls keine Formel die Baumeigenschaft hat.

Bemerkung 5.3.2
Jeder Redukt einer einfachen Theorie ist einfach. ■

Bemerkung 5.3.3
Sei $C \subseteq \mathfrak{C}$. T ist genau dann einfach, wenn $T(C)$ es ist. ■

Lemma 5.3.4
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- T ist einfach.
- $\mathop{\downarrow}^{f}$ erfüllt [lc]*.
- $\mathop{\downarrow}^{d}$ erfüllt [lc]*.

Beweis: Im Prinzip handelt es sich um **[She80, Theorem 4.3].** Übersichtlicher ist (vi), (i) und (iii) in **[Kim96d, Lemma 3.3].** Der Beweis ist einfach, benutzt aber die Ränge $D(p,\Delta,k)$ (bei Shelah $D(p,\Delta,\aleph_0,k)$), die ich hier nicht definieren möchte. ▲

Korollar 5.3.5 (T einfach)
Wenn $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ eine E-unabhängige Folge von B-Indiscernibles ist mit $B \supseteq E$, dann ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I} \mathop{\downarrow}^{d}_{E} B$.

Beweis: Wenn T einfach ist, erfüllt die Pseudounabhängigkeitsrelation $\mathop{\downarrow}^{d}$ nach Lemma 5.3.4 [lc]*. Also ist dann Lemma 1.6.3 anwendbar. ■

Analog zu Lemma 1.6.5 können wir nun beweisen:

Lemma 5.3.6
Wenn $B \mathop{\downarrow}^{f}_{E} \bar{a}_0$ gilt, dann gibt es eine im Sinne von $\mathop{\downarrow}^{d}$ E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von B-Indiscernibles.

Beweis: Wähle κ genügend groß. Baue eine E-$\mathop{\downarrow}^{d}$-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\kappa}$ von Tupeln $\bar{a}_i \equiv_B \bar{a}_0$ wie folgt:

Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<i}$ bereits konstruiert. Wegen $B \mathop{\downarrow}^{f}_{E} \bar{a}_0$ und [ext]* für $\mathop{\downarrow}^{f}$ gibt es ein Tupel $\bar{a}_i \equiv_B \bar{a}_0$, so daß $B(\bar{a}_\iota)_{\iota<i} \mathop{\downarrow}^{f}_{E} \bar{a}_i$ gilt, also auch $(\bar{a}_\iota)_{\iota<i} \mathop{\downarrow}^{d}_{E} \bar{a}_i$.

Wenn κ groß genug ist, gibt es nach Satz 1.4.9 eine Folge von EB-Indiscernibles, die weniger EB-bunt ist als $(\bar{a}_\iota)_{\iota<i}$. Wegen [fc] ist diese neue Folge ebenfalls E-unabhängig im Sinne von $\mathop{\downarrow}^{d}$.

Quelle: [Kim96d, Proposition 2.4] ■

Satz 5.3.7
$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ ist genau dann eine (strikte) Unabhängigkeitsrelation, wenn T einfach ist.

Beweis: "⇒": Folgt aus Lemma 5.3.4. "⇐":

[inv], [fc], [mon1], [mon2], [trans] Schon bekannt aus Satz 5.1.5.

[ext]* Seien $C \supseteq B \supseteq E \subseteq A$ gegeben, so daß einerseits $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} A$ gilt, andererseits aber $C' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} A$ ist für alle $C' \equiv_B C$. Weil $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}$ [fc] erfüllt, bedeutet die Annahme $A = E\bar{a}$ und $B = E\bar{b}_0$ mit endlichen Tupeln $\bar{b}_0$, $\bar{c}_0$ und $\bar{a}$ keine wesentliche Einschränkung. Weil auch $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ [fc] erfüllt, können wir dann auch $C = E\bar{b}_0\bar{c}_0$ mit einem endlichen Tupel $\bar{c}_0$ annehmen. Weil T einfach ist, erfüllt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}$ [lc]*. Suchen wir damit einen Widerspruch!

Zunächst einmal erfüllt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}$ mit [lc]* auch [ex0]*, so daß wir über Morleyfolgen verfügen. Sei also $\kappa \geqslant |T|^+$ regulär und $(\bar{b}_\iota\bar{c}_\iota)_{\iota<\kappa}$ eine Morleyfolge von $\bar{b}_0\bar{c}_0/E$. Sie liege so, daß $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\kappa}$ A-indiscernible ist — das ist möglich wegen $\bar{b}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} A$. Wenn nun für jedes $F \subseteq (\bar{b}_\iota)_{\iota<\kappa}$ mit $|F| < |T|^+ \leqslant \kappa$ $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\kappa} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}_{EF} \bar{b}$ gilt, dann ist der gesuchte Widerspruch zu [lc]* gefunden. Wegen der Regularität von κ (und weil $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}$ [mon1]* und [mon2]* erfüllt) genügt es, zu zeigen: $\bar{b}_\lambda \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}_{(\bar{b}_\iota)_{\iota<\lambda}} A$ für alle $\lambda < \kappa$.

Sei nun $\bar{b}^0\bar{c}^0 = \bar{b}_\lambda\bar{c}_\lambda$. Wegen $\bar{b}_\lambda \equiv_A \bar{b}_0$ und der Voraussetzung an $C = E\bar{b}_0\bar{c}_0$ ist dann $\bar{b}^0\bar{c}^0 \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} A$. Sei $(\bar{b}^j\bar{c}^j)_{j\in J}$ eine Folge von E-Indiscernibles, die das bezeugt. Nach der (trivialen) Übung 5.1.6 können wir die Folge $(\bar{b}^j\bar{c}^j)_{j<\omega}$ so wählen, daß sie indiscernible über der Morleyfolge $(\bar{b}_\iota\bar{c}_\iota)_{\iota<\kappa}$ ist.

Da sich die Folge $(\bar{b}^j\bar{c}^j)_{j\in J}$ nicht über E, also erst recht nicht über $E(\bar{b}_\iota\bar{c}_\iota)_{\iota<\lambda}$, so drehen läßt, daß sie A-indiscernible wird, zeugt sie für $\bar{b}^0\bar{c}^0 \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E(\bar{b}_\iota)_{\iota<\lambda}} A$.

Quelle: [Kim96d, Proposition 2.7 (ii)→(i)]

[symm] Weil $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ [mon1], [mon1]* und [fc] erfüllt, genügt es, $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} \bar{a}_0 \Rightarrow \bar{a}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} B$ für endliche Tupel $\bar{a}_0$ zu beweisen. Sei also $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} \bar{a}_0$. Wegen [ext]* gilt dann auch $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{f}}_{E} \bar{a}_0$. Nach Lemma 5.3.6 gibt es eine E-unabhängige Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in I}$ von B-Indiscernibles. Nach Bemerkung 5.3.5 ist daher $\bar{a}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} B$.

Quelle: [Kim96d, Theorem 2.9(i)]

[ex] Folgt aus [ext]*, [symm] und [ex0].

[lc] Folgt aus [lc]* und [symm].

[str] Klar. ■

Den folgenden Satz finde ich ganz hübsch, aber wahrscheinlich ist er nutzlos.

Satz 5.3.8 (T einfach)
Sei T' ein Redukt von T, so daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ für T' eine kanonische Unabhängigkeitsrelation ist. Sei $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ sein Monstermodell. Seien $A, B, E \subseteq \mathfrak{C}'$ kleine Mengen, die $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E} B$ in $\mathfrak{C}$ erfüllen. Wenn E in $\mathfrak{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, dann gilt $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{E\cap\mathfrak{C}'} B$ in $\mathfrak{C}'$.

Beweis: Wir können annehmen, daß $A = \bar{a}_0$ ein endliches Tupel ist. Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$ eine Morleyfolge über E von $\bar{a}_0/B$ (in $\mathfrak{C}$). Nach Lemma 1.7.5 ist $\mathrm{acl}\big((\bar{a}_\iota)_{\iota<0}\big) \cap \mathrm{acl}\big((\bar{a}_\iota)_{\iota>0}\big) \subseteq E$ (in $\mathfrak{C}$). Also ist auch $\mathrm{acl}'\big((\bar{a}_\iota)_{\iota<0}\big) \cap \mathrm{acl}'\big((\bar{a}_\iota)_{\iota>0}\big) \subseteq E$ in $\mathfrak{C}'$. Da $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$ ohnehin auch in $\mathfrak{C}'$ B-indiscernible ist, ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$ in $\mathfrak{C}'$ eine Morleyfolge über $E \cap \mathfrak{C}'$ von $\bar{a}_0/B$. ■

Kommentar

Im Prinzip handelt es sich bei diesem Abschnitt um eine Ausarbeitung von [Kim96d]. Durch den Rückgriff auf Satz 5.1.5 wurde der Weg zu Satz 5.3.7 jedoch transparenter. Insbesondere komme ich mit einer etwas einfacheren Definition von Morleyfolgen aus als Kim in [Kim96b, Definition 1.8], der die Definition [She80, Definition 6.1] von Shelah übernimmt.

5.4 Semiisolierung

Dieser Abschnitt stellt ein technisches Hilfsmittel für den Beweis von Satz 5.5.4 im nächsten Abschnitt bereit.

Definition 5.4.1
$\bar{b}/\bar{a}$ ist **isoliert,** falls es eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}(\bar{a}\bar{b})$ gibt, so daß $T(\bar{a}) \cup \{\varphi\} \vdash T(\bar{a}\bar{b})$ gilt.

$\bar{b}/\bar{a}$ ist **semiisoliert,** in Zeichen $\bar{a} \to \bar{b}$, falls es eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}(\bar{a}\bar{b})$ gibt, so daß $T(\bar{a}) \cup \{\varphi\} \vdash T(\bar{b})$ gilt.

Quelle: [Pil83a, Definition 2]

Bemerkung 5.4.2

- $\to$ ist transitiv.
- Wenn $\bar{b}/\bar{a}$ isoliert ist und $\bar{b} \to \bar{a}$ gilt, dann ist auch $\bar{a}/\bar{b}$ isoliert.

  Quelle: [Kim96c, Lemma 2.2]
- Für alle endlichen Tupel $\bar{a}_0 \equiv \bar{a}_1$ gilt die Regel $\bar{a}_0\bar{a}_1 \downarrow^{d} \bar{b},\ \bar{a}_0 \to \bar{b} \to \bar{a}_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_1 \to \bar{a}_0$.

  Quelle: [Kim96c, Proposition 2.3]

Beweis: Für den ersten Punkt genügt es, die Definition einzusetzen: Seien $\varphi \in \mathcal{L}(\bar{a}\bar{b})$ und $\psi \in \mathcal{L}(\bar{b}\bar{c})$ so, daß $T(\bar{a}) \cup \{\varphi\} \vdash T(\bar{b})$ und $T(\bar{b}) \cup \{\psi\} \vdash T(\bar{c})$. Dann folgt $T(\bar{a}) \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash T(\bar{c})$.

Ebenso für den zweiten Punkt: Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\bar{a}\bar{b})$ so, daß $T(\bar{a}) \cup \{\varphi\} \vdash T(\bar{a}\bar{b})$ und $T(\bar{b}) \cup \{\psi\} \vdash T(\bar{a})$. Dann folgt $T(\bar{b}) \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash T(\bar{a}\bar{b})$.

Für den letzten Punkt betrachte eine Folge $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ mit $\bar{a}_i\bar{a}_{i+1} \equiv \bar{a}_0\bar{a}_1$. Seien $\varphi(\bar{x}\bar{y}), \psi(\bar{x}\bar{y}) \in \mathcal{L}$ so, daß $T(\bar{a}_0) \cup \big\{\varphi(\bar{a}_0\bar{b})\big\} \vdash T(\bar{b})$ und $T(\bar{b}) \cup \{\psi(\bar{a}_1\bar{b})\} \vdash T(\bar{a}_1)$. Weil die Formel $\varphi(\bar{a}_0\bar{y}) \wedge \psi(\bar{a}_1\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_0\bar{a}_1)$ nicht über $\emptyset$ teilt, ist

$$\big\{\varphi(\bar{a}_i\bar{y}) \wedge \psi(\bar{a}_{i+1}\bar{y}) \,\big|\, i < \omega\big\}$$

nicht 2-inkonsistent. Also gibt es ein $\bar{b}'$ sowie $i < j$, so daß

$$\varphi(\bar{a}_i\bar{b}') \wedge \psi(\bar{a}_{i+1}\bar{b}') \wedge \varphi(\bar{a}_j\bar{b}') \wedge \psi(\bar{a}_{j+1}\bar{b}'),$$

und es folgt $\bar{a}_j \to \bar{a}_{i+1}$. Zusammen mit $\bar{a}_{i+1} \to \bar{a}_{i+1} \to \ldots \to \bar{a}_j$ folgt $\bar{a}_{i+1} \to \bar{a}_i$ und schließlich $\bar{a}_1 \to \bar{a}_0$. ■

Bemerkung 5.4.3 (T einfach)

- Für $\bar{a}, \bar{b} \models p \in S(T)$ mit $\bar{a} \downarrow \bar{b}$ sind $\bar{a} \to \bar{b}$ und $\bar{b} \to \bar{a}$ äquivalent.

  Quelle: [Kim96c, Proposition 2.3]
- Wenn es $\bar{a}, \bar{b} \models p \in S(T)$ gibt mit $\bar{b} \not\to \bar{a}$, dann gibt es auch $\bar{a}_1, \bar{b}_1 \models p$ mit $\bar{b}_1 \not\to \bar{a}_1$, die zusätzlich $\bar{a}_1 \downarrow \bar{b}_1$ erfüllen.

  Quelle: [Kim96c, Claim 3.2]

Beweis: Für die erste Behauptung wähle $\bar{a}' \models p$ so, daß $\bar{a}\bar{b} \equiv \bar{b}\bar{a}'$ und $\bar{a} \underset{\bar{b}}{\equiv} \bar{a}'$. Dann ist $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}'\}$ unabhängig, und insbesondere gilt $\bar{a}\bar{a}' \downarrow \bar{b}$. Mit dem dritten Punkt der letzten Bemerkung folgt $\bar{a}' \to \bar{a}$, und zusammen mit $\bar{b} \to \bar{a}'$ folgt die Behauptung.

Für die zweite Behauptung wähle $\bar{c} \models p$ so, daß $\bar{a}\bar{b} \downarrow \bar{c}$ gilt. Weil $\bar{b} \to \bar{c} \to \bar{a}$ nicht in Frage kommt, gilt entweder $\bar{b} \not\to \bar{c}$ (und wir können $\bar{a}_1\bar{b}_1 = \bar{c}\bar{b}$ wählen) oder $\bar{c} \not\to \bar{a}$ (und wir können $\bar{a}_1\bar{b}_1 = \bar{a}\bar{c}$ wählen). ■

5.5 Abzählbare Modelle

In diesem Abschnitt ist $\mathcal{L}$ immer eine *einsortige* Sprache.

Satz 5.5.1 (T abzählbar)
Wenn $|S(\emptyset)| > \aleph_0$ ist, dann hat T $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle.

Beweis: Man sieht mittels Kompaktheit und Schubfachprinzip sofort, daß T mindestens $|S(\emptyset)|$ abzählbare Modelle hat. (Wähle für jeden Typ von T ein abzählbares Modell, das ihn realisiert. Da jeweils höchstens $\aleph_0$ dieser Modelle isomorph sein können sind $|S(\emptyset)|$ verschiedene Isomorphieklassen vertreten.) Mittels Cantor-Bendixson-Rang kann man zeigen, daß aus $|S(\emptyset)| > \aleph_0$ bereits $|S(\emptyset)| = 2^{\aleph_0}$ folgt (vgl. **[Bue96, Lemma 2.2.4]**).

Vgl. **[Hod93, Corollary 7.2.5]** für eine andere Beweisskizze. ▲

Korollar 5.5.2 (T abzählbar und endl. codiert)
Wenn T dichte forkende Ketten hat, dann hat T $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle.

Beweis: Seien $\bar{a}$ und $(B_\iota)_{\iota\in\mathbb{Q}}$ so, daß für $r < s$ der Typ $tp(\bar{a}/B_s)$ eine forkende Erweiterung von $tp(\bar{a}/B_r)$ ist. Für $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ können wir $B_r = \bigcup_{\iota\leqslant r} B_\iota$ definieren. Wir erhalten auf diese Weise eine Folge $(B_\iota)_{\iota\in\mathbb{R}}$, so daß für $r < s$ der Typ $tp(\bar{a}/B_s)$ eine forkende Erweiterung von $tp(\bar{a}/B_r)$ ist.

Da T endlich codiert ist, gibt es zu jedem B_r ein endliches Tupel $\bar{b}_r$, so daß $\bar{a} \underset{\bar{b}_r}{\overset{d}{\downarrow}} B_r$ ist. Die $2^{\aleph_0}$ Typen $tp(\bar{a}, \bar{b}_r/\emptyset)$ sind nun alle verschieden, weil für $r < s$ immer eine endliche Menge Δ von Formeln und ein $k < \omega$ existiert, so daß

$$D(\bar{a}/\bar{b}_s, \Delta, k) = D(\bar{a}/B_s, \Delta, k) < D(\bar{a}/B_r, \Delta, k) = D(\bar{a}/\bar{b}_r, \Delta, k)$$

ist (siehe dazu **[KP95, Proposition 6.3]**). Nach Satz 5.5.1 hat T daher $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle.
Quelle: [Hru89, Theorem 1] ■

Das folgende Lemma zeigt, daß eine nicht $\aleph_0$-kategorische abzählbare Theorie immer mindestens 3 abzählbare Modelle hat. Wir werden es benutzen, um zu sehen, daß jede nicht $\aleph_0$-kategorische endlich codierte abzählbare Theorie sogar unendlich viele abzählbare Modelle hat.

Lemma 5.5.3 (T abzählbar)
Wenn T endlich viele nichtisomorphe abzählbare Modelle hat, ohne $\aleph_0$-kategorisch zu sein, dann gibt es ein Primärmodell $M_{\bar{a}}$ über einem endlichen Tupel $\bar{a} \models p \in S(T)$, so daß $M_{\bar{a}}$ alle Typen aus $S(T)$ realisiert, ohne saturiert zu sein.

Beweis: Siehe **[Bue96, Lemma 2.3.1].** ▲

Satz 5.5.4 (T abzählbar und endl. codiert einfach)
T ist entweder $\aleph_0$-kategorisch oder hat unendlich viele nichtisomorphe abzählbare Modelle.
Quelle: [Kim96c, Theorem 1.2] und [Hru89, Theorem 1]

Beweis: Nehmen wir an, T ist nicht $\aleph_0$-kategorisch, hat aber nur endlich viele abzählbare Modelle, und suchen wir einen Widerspruch.

Seien p, $\bar{a}$ und $M_{\bar{a}}$ wie in Lemma 5.5.3. Sei $\bar{e}/\bar{a}$ ein nichtisolierter Typ (existiert, weil $M_{\bar{a}}$ nicht saturiert ist) und sei $\bar{a}\bar{e} \equiv \bar{b}\bar{e}' \in M_{\bar{a}}$. Weil $\bar{e}'/\bar{a}$ isoliert ist und $\bar{e}'/\bar{b}$ nicht, kann $\bar{a}/\bar{b}$ nicht isoliert sein. Dagegen muß $\bar{b}/\bar{a}$ isoliert sein wegen $\bar{b} \in M_{\bar{a}}$. Mit Bemerkung 5.4.2 folgt $\bar{b} \not\rightarrow \bar{a}$.

Nach Bemerkung 5.4.3 gibt es $\bar{a}_1, \bar{b}_1 \models p$, so daß $\bar{b}_1 \not\rightarrow \bar{a}_1$ und $\bar{a}_1 \downarrow \bar{b}_1$ gilt. Weil $M_{\bar{a}}$ alle Typen aus $S(T)$ realisiert, können wir $\bar{a}_1, \bar{b}_1 \in M_{\bar{a}}$ annehmen, so daß $\bar{a} \rightarrow \bar{a}_1\bar{b}_1$ gilt.

Bauen wir nun zwei Folgen $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ und $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\omega}$ von Realisierungen von p mit $\bar{a}_i\bar{b}_{i+1}\bar{a}_{i+1} \equiv \bar{a}\bar{b}_1\bar{a}_1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \bar{b}_1 & & \bar{b}_2 & & \bar{b}_3 & & \bar{b}_4 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bar{a} & \rightarrow & \bar{a}_1 & \rightarrow & \bar{a}_2 & \rightarrow & \bar{a}_3 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Wir können die Folge $(\bar{b}_\iota)_{\iota<\omega}$ dabei so legen, daß sie unabhängig ist. Andererseits ist $\bar{a} \not\downarrow \bar{b}_i$ für alle $i < \omega$, denn sonst würde mit Bemerkung 5.4.3 aus $\bar{a} \rightarrow \bar{b}_i$ auch $\bar{b}_i \rightarrow \bar{a} \rightarrow \bar{a}_i$ folgen, im Widerspruch zu $\bar{b}_i \not\rightarrow \bar{a}_i$.

Also ist $p\text{-wt}^+(\bar{a}/\emptyset) > \aleph_0$, also hat T nach Bemerkung 2.4.7 dichte forkende Ketten. Weil T endlich codiert ist, folgt mit Korollar 5.5.2, daß T unendlich viele abzählbare Modelle hat — der gesuchte Widerspruch ist da. ■

Kommentar

Satz 5.5.4 hat eine lange Geschichte. „T ist $\aleph_0$-kategorisch oder hat unendlich viele abzählbare Modelle“ wurde im Laufe der Zeit für folgende Klassen von abzählbaren einsortigen Theorien bewiesen:

$\aleph_1$-kategorische Theorien Baldwin und Lachlan [BL71].

Superstabile Theorien Lachlan [Lac74], Lascar [Las76, 5, Theorem 14], Pillay [Pil83a, Theorem 9], Shelah [She78].

Module und normale Theorien Pillay [Pil84, Proposition 2.1 und Proposition 2.9]. Pillay bewies in [Pil84, Proposition 3.3], daß nicht $\aleph_0$-kategorische „uniforme“ Theorien mindestens 4 Modelle haben. In [Pil83a] bezeichnete er dieselbe Eigenschaft als „normal“ und bewies, daß nicht $\aleph_0$-kategorische normale Theorien unendlich viele Modelle haben. Die Definition von Normalität ist seitdem abgeschwächt worden, aber Pillays Beweis von [Pil83a, Theorem 13] funktioniert auch mit der aktuellen Definition von Normalität (siehe Definition B.2.1).

Stabile, „Typen-schwach normale“ Theorien Pillay [Pil89, Proposition 3.1]. (Jede stabile, Typen-schwach normale Theorie ist schwach normal im Sinne von Definition B.2.1.)

Stabile, endlich codierte Theorien Hrushovski [Hru89, Theorem 1].

Supereinfache Theorien Kim [Kim96c, Theorem 1.2]. (Eine supereinfache Theorie ist eine einfache Theorie mit U-Rang.)

Die neueren Beweise im superstabilen und supereinfachen Fall benutzen tatsächlich nur das abzählbare Übergewicht (Bedingung (FW) bei Hrushovski). Hrushovski unterschied in [Hru89], ob T dichte forkende Ketten hat oder nicht, um den Satz auf endlich codierte stabile Theorien zu verallgemeinern. Da das auch für einfache Theorien funktioniert, konnte ich Satz 5.5.4 gleich so formulieren, daß er alle oben genannten Fälle einschließt.

Eine weitere Klasse von Theorien, für die der Satz gilt, sind die stabilen Theorien, die “tight” sind, d. h., jedes Tupel von isolierten Elementen ist ein isoliertes Tupel. Siehe dazu [Pil83b].

5.6 Trivialität und Gruppen

Definition 5.6.1
Eine **über** E ∞**-definierbare Gruppe** $(G, \cdot) = (\Gamma, \mu)$ in T ist gegeben durch zwei unvollständige Typen $\Gamma(\bar{x})$ und $\mu(\bar{x}, \bar{y}; \bar{z})$ über E, so daß gilt:

- $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.
- G ist die Menge der Realisierungen von p in $\mathfrak{C}$.
- Für alle $\bar{a}, \bar{b} \in G$ ist $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ das einzige Tupel $\bar{c} \in G$, so daß $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \models r(\bar{x}, \bar{y}; \bar{z})$.

Aus dem Kompaktheitssatz folgt, daß man für $\mu(\bar{x}, \bar{y}; \bar{z})$ immer eine einzelne Formel nehmen kann.

Satz 5.6.2 (T einfach)
Sei $F \supseteq E$ und $(G, \cdot) = (\Gamma, \mu)$ eine über E ∞-definierbare Gruppe. Für ein Tupel $\bar{g} \in G$ sind äquivalent:

- Für alle $\bar{b} \in G$ mit $\bar{g} \underset{F}{\downarrow} \bar{b}$ ist $\bar{g} \cdot \bar{b} \underset{E}{\downarrow} F\bar{b}$ („$\bar{g}$ ist linksgenerisch über F“).
- Für alle $\bar{a} \in G$ mit $\bar{a} \underset{F}{\downarrow} \bar{g}$ ist $\bar{a} \cdot \bar{g} \underset{E}{\downarrow} F\bar{a}$ („$\bar{g}$ ist rechtsgenerisch über F“).

Für jede über einer Menge E ∞-definierbare Gruppe gibt es ein Tupel $\bar{g} \in G$, das über einer Menge $F \supseteq E$ generisch ist.

Beweis: Siehe **[Pil96a, Lemma 3.3 und Lemma 3.8].** ▲

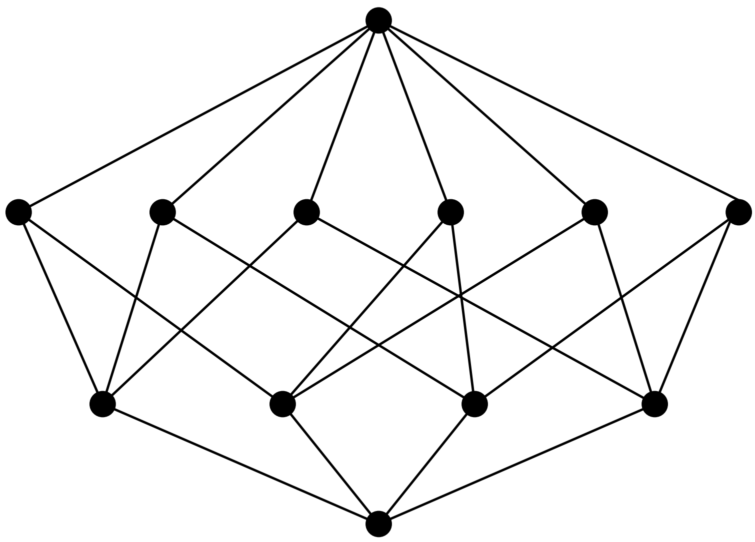
Korollar 5.6.3 (T einfach)
Wenn es eine unendliche ∞-definierbare Gruppe gibt, dann ist T nicht trivial.

Beweis: Seien $\bar{g}$ und $\bar{h}$ generisch über einer Menge $F \supseteq E$, mit $\bar{g} \underset{F}{\downarrow} \bar{h}$. Sei $\bar{c} = \bar{g} \cdot \bar{h}$. Dann ist $\bar{g} \underset{F}{\downarrow} \bar{c}$, weil $\bar{g}$ linksgenerisch ist. Ferner ist $\bar{h} \underset{F}{\downarrow} \bar{c}$, weil $\bar{h}$ rechtsgenerisch ist. Damit ist $\{\bar{g}, \bar{h}, \bar{c}\}$ paarweise F-unabhängig.

Wegen $\bar{c} \in \mathrm{dcl}(F\bar{g}\bar{h})$ und $\bar{c} \notin \mathrm{acl}\, F$ ist aber $\bar{g}\bar{h} \underset{F}{\not\downarrow} \bar{c}$. (Wäre $\bar{c} \in \mathrm{acl}\, F$, dann wäre $\bar{g} = \bar{c} \cdot \bar{h}^{-1} \in \mathrm{acl}(F\bar{h})$. Wegen $\bar{g} \underset{F}{\downarrow} \bar{h}$ würde $\bar{g} \in \mathrm{acl}\, F$ folgen. Weil G nach Voraussetzung unendlich ist, gibt es unbeschränkt viele $\bar{a} \in G$ mit $\bar{a} \underset{F}{\downarrow} \bar{g}$. Wir könnten eines mit $\bar{a} \notin \mathrm{acl}\, F$ wählen und erhielten $\bar{a} \cdot \bar{g} \underset{F}{\not\downarrow} \bar{a}$, im Widerspruch zur Rechtsgenerizität von $\bar{g}$.) Also ist T nicht trivial. ■

Kapitel 6

Semimodulare Theorien



Nachdem wir den feinsten Kandidaten für eine strikte Unabhängigkeitsrelation untersucht haben, kehren wir in diesem kurzen Kapitel wieder zur Relation der algebraischen Unabhängigkeit zurück und verfeinern sie zur modularen Unabhängigkeit. Wenn T einfach oder ACL-atomar oder ist, ist die modulare Unabhängigkeit genau dann eine Unabhängigkeitsrelation, wenn ACL semimodular im Sinne der M-Symmetrie ist. Wenn ACL modular ist, fällt die modulare Unabhängigkeit mit der algebraischen Unabhängigkeit zusammen und ist daher natürlich ebenfalls eine Unabhängigkeitsrelation.

Als Hilfsmittel werden wir die Relation des Erbens brauchen, die uns nebenbei auch noch zusätzliche Informationen über die Relation des Nichtteilens in beliebigen Theorien liefern wird.

6.1 Erben

Definition 6.1.1
$A \underset{E}{\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$ heißt, daß für alle Formeln $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(AE)$ gilt:

Wenn es ein Tupel $\bar{b} \in BE$ gibt mit $\models \varphi(\bar{b})$, dann gibt es auch ein Tupel $\bar{e} \in E$ mit $\models \varphi(\bar{e})$.

Der praktische Nutzen dieser Relation liegt vor allem darin, daß sie feiner ist als alle ernsthaften Kandidaten für Unabhängigkeitsrelationen. Selbst ist sie natürlich keiner.

Lemma 6.1.2
$\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ erfüllt immer die folgenden Axiome:
[inv], [fc], [ex0], [ext0]*, [mon1], [mon1]*, [mon2]*, [trans], [lc], [ext]*.

Beweis: **[inv], [fc], [ex0]** Klar.

[ext0]* Folgt aus [ext]*.

[mon1], [mon1]*, [mon2]*, [trans] Klar.

[lc] Seien ein endliches Tupel $\bar{a}$ und eine Menge B gegeben. Gesucht ist eine Teilmenge $E \subseteq B$ mit $|E| < |T|^+$, so daß $\bar{a} \underset{E}{\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$ gilt. Dazu konstruieren wir eine Folge $(E_\iota)_{\iota<\omega}$, so daß $E = \bigcup_{\iota<\omega} E_\iota$ die geforderten Eigenschaften hat.

Sei $E_0 = \emptyset$. Für jede Formel $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(\bar{a}E_i)$ wähle *ein* Tupel $\bar{b} \in B$ mit $\models \varphi(\bar{b})$ aus — falls es überhaupt eines gibt. Sei E_{i+1} die Menge E_i vermehrt um die Elemente, die in den ausgewählten Tupeln vorkommen.

Wegen $|E_{i+1}| \leqslant |T(E_i)| \leqslant |T| + |E_i|$ und $|E_0| = 0$ ist $|E| \leqslant |T|$.

Jede Formel $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(\bar{a}E)$ erfüllt bereits $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(\bar{a}E_i)$ für ein $i < \omega$ Wenn es ein $\bar{b} \in BE = B$ gibt mit $\models \varphi(\bar{b})$, dann gibt es folglich auch ein Tupel $\bar{e} \in E_{i+1}$ mit $\models \varphi(\bar{e})$. Also ist $\bar{a} \underset{E}{\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$.

[ext]* Angenommen, $\hat{A} \supseteq A \supseteq E \subseteq B$ sind so, daß kein $\hat{A}' \underset{E}{\equiv} \hat{A}$ die Bedingung $\hat{A} \underset{E}{\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$ erfüllt. Es ist zu zeigen, daß dann auch schon $A \underset{E}{\overset{h}{\not\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$ gilt.

Die Voraussetzung besagt, daß

$$T(AB) \cup \left\{ \neg\varphi(\bar{b}) \;\middle|\; \bar{b} \in B; \quad \varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(\hat{A}) \text{ mit } \models \varphi(\bar{e}) \text{ für kein } \bar{e} \in E \right\}$$

inkonsistent ist. (Beachte, daß $T(\hat{A})$ in der rechten Seite enthalten ist).

Die rechte Seite ist abgeschlossen unter Konjunktion und unter Implikation (in $\mathcal{L}(\hat{A}B)$). Also liefert der Craig'sche Interpolationssatz [Hod93, Theorem 6.6.3] eine Formel $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{L}(A)$ und ein $\bar{b} \in B$, so daß $\varphi(\bar{b}) \in T(AB)$, aber $\varphi(\bar{e}) \notin T(A)$ für alle $\bar{e} \in E$.

Das bedeutet aber gerade $A \underset{E}{\overset{h}{\not\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$. ∎

Lemma 6.1.3
$\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ ist feiner als $\overset{d}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$: $\quad \overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid} \subseteq \overset{d}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$.

Beweis: Es genügt, $A \underset{E}{\overset{d}{\not\smile\!\!\!\!\!\mid}} B \quad\Rightarrow\quad A \underset{E}{\overset{h}{\not\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$ für $A, B \supseteq E$ zu zeigen. Nach Lemma 5.1.4 teilt B/A über E. Also gibt es eine Formel $\varphi(\bar{y}, \bar{x}) \in \mathcal{L}$ sowie $\bar{a} \in A$ und $\bar{b} \in B$, so daß $\models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ gilt und $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$ über E teilt.

Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota<\omega}$ eine Folge von E-isomorphen Bildern von $\bar{a}$, die das bezeugt, d. h., $\{\varphi(\bar{y}, \bar{a}_\iota) \mid \iota < \omega\}$ ist k-inkonsistent für ein $k < \omega$ (inkonsistent würde in diesem Fall schon genügen). Dann kann $\models \varphi(\bar{a}, \bar{e})$ für kein Tupel $\bar{e} \in E$ gelten, und daher folgt $A \underset{E}{\overset{h}{\not\smile\!\!\!\!\!\mid}} B$. ∎

Korollar 6.1.4
$\overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ ist feiner als $\overset{f}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$: $\quad \overset{h}{\smile\!\!\!\!\!\mid} \subseteq \overset{f}{\smile\!\!\!\!\!\mid} \subseteq \overset{d}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$.
$\overset{d}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ und $\overset{f}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ erfüllen immer [lc].
T ist genau dann einfach, wenn $\overset{d}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ (oder $\overset{f}{\smile\!\!\!\!\!\mid}$) [symm] erfüllt. ∎

6.2 Modulare Unabhängigkeit

Wir haben gesehen, daß $\mathop{\downarrow}^{a}$ bis auf [mon2] und [mon2]* immer eine Unabhängigkeitsrelation ist. Wenn ACL nicht modular ist, liegt es daher nahe, [mon2] zu erzwingen und zu schauen, was dann passiert.

Definition 6.2.1
$A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B \quad\Leftrightarrow\quad A \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{C} B$ für alle C mit $E \subseteq C \subseteq \mathrm{acl}(BE)$.

Abschnitt B.1 enthält Beispiele von Theorien, für die $\mathop{\downarrow}^{m}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist.

Die folgende Eigenschaft erbt $\mathop{\downarrow}^{m}$ von $\mathop{\downarrow}^{a}$:

Bemerkung 6.2.2
Wenn $\mathop{\downarrow}^{m}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist, dann ist $\mathop{\downarrow}^{m}$ die gröbste strikte Unabhängigkeitsrelation. ∎

Bemerkung 6.2.3
$\mathop{\downarrow}^{d}$ ist feiner als $\mathop{\downarrow}^{m}$: $\quad \mathop{\downarrow}^{d} \subseteq \mathop{\downarrow}^{m} \subseteq \mathop{\downarrow}^{a}$.

Beweis: Die rechte Ungleichung ist trivial; die linke gilt, weil $\mathop{\downarrow}^{d}$ [mon2] erfüllt und $\mathop{\downarrow}^{d} \subseteq \mathop{\downarrow}^{a}$ ist. ∎

Konvention
Alle von nun an in diesem Abschnitt genannten Mengen sind algebraisch abgeschlossen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

Lemma 6.2.4
$\mathop{\downarrow}^{m}$ erfüllt immer die folgenden Axiome:
[inv], [fc], [ex0], [ex0]*, [ext0], [ext0]*, [mon1], [mon1]*, [mon2], [trans]*, [lc]*.

Beweis: **[inv]** Klar.

[fc] Sei $A \supseteq D \subseteq B$ und $A \mathop{\not\downarrow}\limits^{m}_{D} B$, nämlich $D \subseteq C \subseteq B$ und es existiert ein $b \in (A \vee C) \cap B \setminus C$. Seien $\bar{a} \in A$, $\bar{c} \in C$ so, daß $b \in \mathrm{acl}(\bar{a}\bar{c}D)$ ist. Dann gilt $\bar{a} \mathop{\not\downarrow}\limits^{m}_{D} b\bar{c}$.

[ex0], [ex0]*, [ext0], [ext0]*, [mon1], [mon1]*, [mon2] Klar.

[trans]* Es ist zu zeigen, daß aus $E \subseteq D \subseteq B \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{D} A$ und $D \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} A$ immer $B \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} A$ folgt. Sei dazu $A \supseteq C \supseteq E$. Dann gilt $B \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{CD} A$ und $D \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{C} A$; mit [trans]* für $\mathop{\downarrow}^{a}$ folgt also $B \mathop{\downarrow}\limits^{a}_{C} A$.

[lc]* Wegen $\mathop{\downarrow}^{h} \subseteq \mathop{\downarrow}^{a}$ und weil $\mathop{\downarrow}^{h}$ [mon2]* erfüllt, gilt $A \mathop{\downarrow}\limits^{h}_{E} B \quad\Rightarrow\quad B \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} A$. Weil $\mathop{\downarrow}^{h}$ [lc] erfüllt, erfüllt $\mathop{\downarrow}^{m}$ [lc]*. ∎

*

Definition 6.2.5
Ein Paar (a, b) von Elementen eines Verbands ist ein **modulares Paar,** in Zeichen $M(a, b)$, wenn folgende Regel gilt: $u \leqslant b \quad \Rightarrow \quad (u \vee a) \wedge b = u \vee (a \wedge b)$.

Ein Verband heißt **M-symmetrisch,** falls $M(\bullet, \bullet)$ eine symmetrische Relation ist.

Quelle: [Ste91]

Insbesondere ist ein Verband genau dann modular, wenn alle Paare modular sind.

Bemerkung 6.2.6
$A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B \quad \Leftrightarrow \quad \Big((A \vee E) \cap (B \vee E) = E$, und $(A \vee E, B \vee E)$ ist ein modulares Paar im Verband ACL$\Big)$.

Beweis: "$\Rightarrow$": $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B \quad \Rightarrow \quad A \mathop{\downarrow}\limits^{d}_{E} B \quad \Rightarrow \quad (A \vee E) \cap (B \vee E) = E$. Für $C \subseteq B \vee E$ gilt:

$$\big[C \vee (A \vee E)\big] \cap (B \vee E) = \big[(C \vee E) \vee (A \vee E)\big] \cap (B \vee E) = C \vee E = (C \vee E) \vee \big[(A \vee E) \cap (B \vee E)\big],$$

wobei die mittlere Gleichung aus $AE \mathop{\downarrow}\limits^{d}_{CE} BE$ folgt.

"$\Leftarrow$": Für alle $C \in [E, B \vee E]$ ist

$$\big[C \vee (A \vee E)\big] \cap (B \vee E) = C \vee \big[(A \vee E) \cap (B \vee E)\big] = C \vee E = C,$$

also $A \mathop{\downarrow}\limits^{d}_{C} B$. ■

Korollar 6.2.7
$\mathop{\downarrow}\limits^{m}$ ist genau dann eine symmetrische Pseudounabhängigkeitsrelation, wenn ACL M-symmetrisch ist. ■

Korollar 6.2.8
Wenn ACL M-symmetrisch und T einfach ist, dann ist $\mathop{\downarrow}\limits^{m}$ eine Unabhängigkeitsrelation.

Beweis: **[ex]** Wenn T einfach ist, dann gilt [ex] für $\mathop{\downarrow}\limits^{d}$, also auch für $\mathop{\downarrow}\limits^{m}$.

■

Definition 6.2.9
Ein Verband heißt **stark atomar,** wenn jedes Intervall $[a, b]$ ein **Atom** $a' \succ a$ enthält.

Quelle: [Ste91]

Satz 6.2.10
Wenn ACL M-symmetrisch und stark atomar ist, dann ist $\mathop{\downarrow}\limits^{m}$ eine Unabhängigkeitsrelation.

Beweis:

[ex] Die zugrundeliegende Idee ist: Wenn $B \succ E$ gilt, folgt aus $A \mathop{\downarrow}\limits^{d}_{E} B$ trivialerweise bereits $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B$.

Jedes Intervall $[E, B]$ läßt sich von unten her mit Atomen aufbauen: $E = B_0 \prec B_1 \prec B_2 \prec \ldots \prec B_\omega \prec \ldots \prec B_\kappa = B$, wobei $\bigvee_{\iota < i} B_\iota \prec B_i$ für alle i gilt. Wir werden nun die B_i durch Induktion so über E wegdrehen, daß $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B_i$ gilt. Der Induktionsanfang erfolgt mit [ex0]*, und der Limesschritt mit [fc].

Sei also bereits $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B_i$.

Drehe B_{i+1} über $B_i E$ so, daß $A \mathop{\downarrow}\limits^{d}_{B_i E} B_{i+1}$ gilt (und schleife B nach). Wegen $B_i \prec B_{i+1}$ folgt $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{B_i E} B_{i+1}$. [trans] liefert $A \mathop{\downarrow}\limits^{m}_{E} B_{i+1}$, und der Induktionsschluß ist fertig. ■

Kommentar

Der gesamte Abschnitt stammt von mir. Er entstand als Verallgemeinerung von Abschnitt 4.1. Die Kapitelüberschrift „Semimodulare Theorien" ergibt sich daraus, daß M-Symmetrie eine (wohl die natürlichste) von vielen Verallgemeinerungen der Semimodularität endlicher Verbände auf beliebige Verbände darstellt.

Anhang A

Stabile Theorien

Dieses Kapitel enthält einige elementare Ergebnisse aus dem Umkreis 1-basierter stabiler Theorien, deren Verallgemeinerung auf den einfachen oder ACL-modularen Fall nicht auf der Hand liegt. Für jedes dieser Ergebnisse stellt sich damit die Frage, ob es gelingt, die benötigten Methoden von stabilen auf einfache Theorien zu verallgemeinern. Vielleicht ist schon die adäquate Definition von Stationarität, Parallelität, Orthogonalität, Regularität und a-Modellen der Schlüssel dazu.

Solange diese Fragen nicht beantwortet sind, macht es keinen Sinn, altbekannte Definitionen für stabile Theorien einfach nur zu wiederholen. Was ich für Standardstoff der Stabilitätstheorie halte, verwende ich daher meist ohne weitere Warnung. Es sollte ausnahmslos in [Bue96] zu finden sein. Nützlich sind vielleicht auch [Mak84] und [Pil96b].

Halten wir aber erst einmal zwei aus dem Hauptteil der Arbeit folgende Ergebnisse über stabile Theorien fest, die mit diesem Anhang sonst nichts zu tun haben:

Satz A.0.1 (T stabil)
$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ ist die einzige strikte Unabhängigkeitsrelation für T^{eq}.

Beweis: Nach Bemerkung 5.1.2 ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ die feinste Unabhängigkeitsrelation. Da $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ selbstverständlich strikt ist, ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ die feinste strikte Unabhängigkeitsrelation. Andererseits ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ für T^{eq} kanonisch und daher nach Satz 1.7.4 die gröbste strikte Unabhängigkeitsrelation. Also ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ die einzige strikte Unabhängigkeitsrelation für T^{eq}. ∎

Satz A.0.2 (T stabil)

- T ist genau dann 1-basiert, wenn $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ modular ist.
- T ist genau dann 1-basiert und trivial, wenn $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ distributiv ist.

Beweis: Wenn T 1-basiert ist, dann ist nach Bemerkung 3.3.5 auch T^{eq} 1-basiert. Nach Satz 3.3.1 ist dann $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{a}}$ für T^{eq}, und nach Satz 4.1.5 ist $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ modular. Wenn umgekehrt $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ modular ist, dann ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{a}}$ nach Satz 4.1.5 eine (kanonische) Unabhängigkeitsrelation für T^{eq}. Da auch $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ ein kanonische Unabhängigkeitsrelation ist, liefert SatzKanonischEindeutig $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{a}}$. Nach Satz 3.3.1 ist daher T^{eq} und somit auch T 1-basiert.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten. Ein sehr viel direkterer Beweis ergibt sich jedoch mit Satz 3.3.4. ∎

A.1 Einige Grundlagen

Für $A/E \perp B/E$ schreibe ich kurz $A \underset{E}{\perp} B$ und sage: „A und B sind orthogonal über E“.

> **Bemerkung A.1.1** (T stabil)
> Die beiden folgenden Regeln gelten immer:
>
> - $A \underset{E}{\perp} B,\ A \underset{E}{\downarrow} C,\ B \underset{E}{\downarrow} C \quad\Rightarrow\quad AB \underset{E}{\downarrow} C.$
> - $A \underset{E}{\downarrow} B,\ A \underset{E}{\perp} C,\ B \underset{E}{\perp} C \quad\Rightarrow\quad AB \underset{E}{\perp} C.$

Beweis: Unter den Voraussetzungen der ersten Regel gilt $A \overset{a}{\underset{EC}{\perp}} B$, also auch $A \underset{EC}{\downarrow} B$. Mit $A \underset{E}{\downarrow} C$ und [trans] folgt $A \underset{E}{\downarrow} BC$. Also sind die drei Mengen E-unabhängig.

Unter den Voraussetzungen der zweiten Regel folgt wie bei der ersten Regel zunächst die E-Unabhängigkeit der drei Mengen, und daraus folgt $AB \underset{E}{\downarrow} C$. Weil sich an den Voraussetzungen nichts ändert, wenn man C durch $C' \underset{E}{\equiv} C$ ersetzt, gilt sogar $AB \overset{a}{\underset{E}{\perp}} C$. Weil sich an den Voraussetzungen ebenfalls nichts ändert, wenn man E durch $F \supseteq E$ mit $F \underset{E}{\downarrow} ABC$ ersetzt, gilt sogar $AB \underset{E}{\perp} C$. ■

Lemma A.1.2 (T stabil)
Sei $\mathfrak{A} = \bigcup_{\iota<\lambda} \mathfrak{A}_\iota$, jedes $\mathfrak{A}_i$ ein E-unabhängiges System von Mengen, und jedes $A \in \mathfrak{A}_i$ sei zu jedem $A' \in \mathfrak{A}_j$ mit $j \neq i$ E-orthogonal. Dann ist auch $\mathfrak{A}$ ein E-unabhängiges System.

Beweis: Es genügt, den endlichen Fall zu betrachten, und dieser läßt sich wiederum auf den Fall $\lambda = 2$ zurückführen. Sei also $\lambda = 2$.

Da jedes $A \in \mathfrak{A}_0$ zu jedem $A' \in \mathfrak{A}_1$ orthogonal und $\mathfrak{A}_1$ E-unabhängig ist, ist nach Bemerkung A.1.1 jedes $A \in \mathfrak{A}_0$ zu $\mathfrak{A}_1$ E-orthogonal. Da $\mathfrak{A}_1$ somit zu jedem $A \in \mathfrak{A}_0$ E-orthogonal und da $\mathfrak{A}_0$ E-unabhängig ist, ist $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}_0$ E-orthogonal. ■

Korollar A.1.3 (T stabil)
Zwei Typen, die in Faktoren vom Gewicht 1 zerfallen, sind genau dann orthogonal, wenn sie keine nichtorthogonalen Faktoren vom Gewicht 1 haben. ■

Korollar A.1.4 (T stabil)
Das Produkt trivialer Typen vom Gewicht 1 ist trivial. ■

Lemma A.1.5 (T stabil)
Sei $\mathfrak{A}$ ein E-orthogonales System, und sei $A \underset{E}{\downarrow} B$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A} \underset{E}{\downarrow} B$.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $\mathfrak{A} = \{A_0, A_1\}$ zu beweisen. Wegen $A_i \underset{E}{\downarrow} B$ und der Definition von $\perp$ gilt $A_0 \overset{w}{\underset{EB}{\perp}} A_1$, und es folgt $A_0 \underset{EB}{\downarrow} A_1 B$ und mit $A_0 \underset{E}{\downarrow} B$ und [trans] weiter $A_0 \underset{E}{\downarrow} A_1 B$, also $A_0 A_1 \underset{A_1 E}{\downarrow} B$. Mit $A_1 \underset{E}{\downarrow} B$ und [trans]* folgt die Behauptung: $A_0 A_1 \underset{E}{\downarrow} B$. ■

Satz A.1.6 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Wenn es keine dichten forkenden Ketten gibt, ist jeder Typ dominationsäquivalent zu einem Produkt von endlich vielen regulären Typen.

Beweis: Siehe **[HLP$^+$92, Theorem 14].** ▲

Korollar A.1.7 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Wenn es keine dichten forkenden Ketten gibt und die regulären Typen trivial sind, dann ist T trivial.

Beweis: Folgt aus Satz A.1.6 und Korollar A.1.4. ■

Satz A.1.8 (T stabil)
Wenn $\mathrm{wt}^+(\bar{a}/E) \leqslant \omega$ für alle endlichen Tupel $\bar{a}$ und alle Mengen E gilt, dann ist jeder Typ dominationsäquivalent zu einem endlichen Produkt von Typen vom Gewicht 1.

Beweis: Siehe **[Pil96b, Proposition 3.10]** oder **[Bue96, Theorem 5.6.1].** (Der Beweis benutzt Satz 2.4.9.) ▲

A.2 Mehr über Güte

Dieser Abschnitt setzt die Abschnitte 3.4 und 3.5 für die speziellere Situation der Forking-Unabhängigkeit in stabilen Theorien fort.

Lemma A.2.1 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Sei $\bar{a}_0/F \supseteq E$ eine freie Erweiterung von $\bar{a}_0/E$. $\bar{a}_0/E$ ist genau dann gut, wenn $\bar{a}_0/F$ gut ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": Siehe Bemerkung 3.4.3.

"$\Leftarrow$": Sei $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine paarweise E-unabhängige Folge von E-Indiscernibles. Wegen $\bar{a}_0 \underset{E}{\overset{d}{\downarrow}} F$ läßt sie sich über $\bar{a}_0 E$ so drehen, daß sie F-indiscernible wird und daher auch $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I} \underset{E}{\downarrow} F$ erfüllt (Lemma 1.6.3). Es genügt, für die gedrehte Folge zu zeigen, daß sie E-unabhängig ist.

Seien $i, j \in I$, $i \neq j$. Wegen $\bar{a}_i \downarrow \bar{a}_j$ und $\bar{a}_i \bar{a}_j \underset{E}{\downarrow} F$ ist $\{\bar{a}_0, \bar{a}_1, F\}$ unabhängig, und es gilt $\bar{a}_0 \underset{F}{\downarrow} \bar{a}_1$. Also ist $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine paarweise F-unabhängige Folge von F-Indiscernibles.

Weil $\bar{a}_0/F$ gut ist, folgt, daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/F$ ist. Wegen $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} F$ ist sie auch eine Morleyfolge von $\bar{a}_0/E$. ■

Lemma A.2.2 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Sei $\bar{a}_0/F \supseteq E$ eine freie Erweiterung von $\bar{a}_0/E$. $\bar{a}_0/E$ ist genau dann Pillay-gut, wenn $\bar{a}_0/F$ Pillay-gut ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": Siehe Bemerkung 3.5.3.

"$\Leftarrow$": Sei $\bar{a}_0/F$ Pillay-gut. Sei $B \supseteq E$, $\bar{a}_0 \underset{\mathrm{acl}\, B}{\equiv} \bar{a}_1$ und $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} \bar{a}_1$. Wir müssen $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$ zeigen und können dazu ohne Einschränkung $\bar{a}_0 \bar{a}_1 B \underset{E}{\downarrow} F$ annehmen. Mit dieser Annahme ist $\bar{a}_0 \underset{B}{\downarrow} BF$ und $\bar{a}_1 \underset{B}{\downarrow} BF$ und daher auch $\bar{a}_0 \underset{\mathrm{acl}(BF)}{\equiv} \bar{a}_1$. Aus der Pillay-Güte von $\bar{a}_0/F$ folgt daher $\bar{a}_0 \underset{F}{\downarrow} BF$. Wegen $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} F$ folgt mit [trans] und [mon2] tatsächlich $\bar{a}_0 \underset{E}{\downarrow} B$.

Quelle: [Pil87, Lemma 2.1] ■

Lemma A.2.3 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Für starke Typen vom Prägewicht 1 fallen Güte und Pillay-Güte zusammen.

Beweis: Sei also E algebraisch abgeschlossen und a_0/E gut, und seien ferner a_1 und B gegeben wie in der Definition der Pillay-Güte:

$$B \supseteq E, \ \bar{a}_0 \underset{B}{\equiv} \bar{a}_1, \ \bar{a}_0 \underset{E}{\equiv} \bar{a}_1.$$

Sei $(a_\iota)_{2 \leqslant \iota < \omega}$ eine Morleyfolge von $a_0/B = a_1/B$ und unabhängig über B von $a_0 a_1$. Folglich sind $(a_\iota)_{\iota \in \omega \setminus \{1\}}$ und $(a_\iota)_{\iota \in \omega \setminus \{0\}}$ Morleyfolgen über B. Ist $a_0 \underset{E}{\downarrow} a_1$, so ist wegen der Transitivität der Abhängigkeit für Typen vom Prägewicht 1 auch $a_0 \underset{E}{\downarrow} a_2$ oder ($\Rightarrow$ und) $a_1 \underset{E}{\downarrow} a_2$. Also sind die beiden zuletzt konstruierten Morleyfolgen über B paarweise E-unabhängig, und aus der Güte folgt $a_0 \underset{E}{\downarrow} B$.

Quelle: [Goo91, Proposition 12] ■

Am Ende des letzten Beweises kann man noch die durch $a_0 \underset{a_2}{\equiv} a_1$ gegebene Symmetrie der Konfiguration ausnutzen, um die Konklusion auch noch unter einer deutlich schwächeren Bedingung zu erhalten:

Übung A.2.4 (T stabil)
Sei E algebraisch abgeschlossen und sei $\bar{a}_0 = a_0^{(1)} a_0^{(2)} \ldots a_0^{(n)}$, wobei die Elemente $a_0^{(i)}$ von $\bar{a}_0$ E-unabhängig sind und p-wt$(a_0^{(i)}/E) = 1$ erfüllen. Wenn $\bar{a}_0/E$ gut ist, ist $\bar{a}_0/E$ sogar Pillay-gut.

Kommentar

Aus Bemerkung 3.4.5, Übung 3.5.5 und Satz A.1.6 folgt: Wenn T stabil ohne dichte forkende Ketten und gut ist, dann ist T sogar Pillay-gut. Im superstabilen Fall ist dies der Inhalt von [Goo91, Proposition 12]. Poizat's Beweis in [Goo91] zitiert jedoch [Pil87], wo das relevante Ergebnis (Satz A.3.7) auf dem Umweg über die Ergebnisse des nächsten Abschnitts bewiesen wird.

A.3 Güte und reguläre Typen

Definition A.3.1
Eine **Gerade** in einer Prägeometrie $S = (S, \mathrm{cl})$ ist eine cl-abgeschlossene Menge G der Dimension $\dim G = 2$.

Zwei Geraden G und H sind **parallel,** in Zeichen $G \parallel H$, wenn $G \cap H = \mathrm{cl}\,\emptyset$ und $\dim\big(\mathrm{cl}(G \cup H)\big) = 3$ gilt.

Bemerkung A.3.2
Eine Prägeometrie S ist genau dann nicht modular, wenn es in einer Lokalisierung von S parallele Geraden gibt.

Beweis: Sei (X, Y, Z) ein Gegenbeispiel zur Modularität, d.h., X, Y und $Z = X \cap Y$ sind cl-abgeschlossene endlichdimensionale Teilmengen von S, und es gilt $\dim XY + \dim Z < \dim X + \dim Y$.

Dann gilt wegen der Austauscheigenschaft: $\dim(X/Z) \geqslant 2$ und $\dim(Y/Z) \geqslant 2$. Sei nun (X, Y, Z) bei festem $\dim(X/Z)$ so gewählt, daß $\dim(Y/Z)$ minimal ist.

Behauptung:

Dann ist $\dim(Y/Z) = 2$. Sei nämlich $a \in Y \setminus Z = Y \setminus X$.

1. Fall $\mathrm{cl}(Xa) \cap Y = \mathrm{cl}(Za)$.

Sei $X' = \mathrm{cl}(Xa)$, $Z' = X' \cap Y = \mathrm{cl}(Za)$. Dann ist $\dim X' = \dim X + 1$, da $a \notin X$, und $\dim Z' = \dim Z + 1$, da $a \notin Z$.

Also ist auch (X', Y, Z') ein Gegenbeispiel zur Modularität, und es gilt $\dim(X'/Z') = (\dim X + 1) - (\dim Z + 1) = \dim(X/Z)$ sowie $\dim(Y/Z') = \dim Y - (\dim Z + 1) = \dim(Y/Z) - 1$. Nach Minimalität von $\dim(Y/Z)$ ist das nicht möglich.

2. Fall $\mathrm{cl}(Xa) \cap Y \supsetneqq \mathrm{cl}(Za)$.

Sei $b \in \big[\mathrm{cl}(Xa) \cap Y\big] \setminus \mathrm{cl}(Za)$. Sei $Y' = \mathrm{cl}(Zab) \subseteq Y$.

Es gilt $X \cap Y' = Z$, denn $Z \subseteq X \cap Y' \subseteq X \cap Y = Z$. Wegen $a \notin Z$, $b \notin \mathrm{cl}(Za)$ ist $\dim Y' = \dim Z + 2$.

Also gilt $\dim XY' + \dim Z = \dim(Xa) + \dim Z < \dim X + \dim Z + 2 = \dim X + \dim Y'$, und (X, Y', Z) ist wieder ein Gegenbeispiel zur Modularität, und zwar mit $\dim(Y'/Z) = (\dim Z + 2) - \dim Z = 2$.

Ebenso folgt nun, daß Minimieren von $\dim(X/Z)$ bei festem $\dim(Y/Z) = 2$ zu $\dim(X/Z) = 2$ führt. Also hat die Lokalisierung S_Z von S nach Z parallele Geraden.
Quelle: [Kra95, Lemma 3.14] ■

Insbesondere ist eine Prägeometrie genau dann *lokal* modular, wenn es in keiner *echten* Lokalisierung parallele Geraden gibt.

Lemma A.3.3 (T stabil)
Sei T gut und $p \in S(\emptyset)$ ein regulärer stationärer Typ. Dann gilt für $\bar{a}, \bar{a}', \bar{b} \models p^{(2)}$ die Regel:

$$\bar{a} \parallel \bar{b},\ \bar{a} \underset{\mathrm{acl}(\bar{b})}{\equiv} \bar{a}',\ \bar{a} \underset{\bar{b}}{\downarrow} \bar{a}' \quad\Rightarrow\quad \bar{a} \parallel \bar{a}'.$$

Beweis: Es ist $\mathrm{cl}(\bar{a}) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}') = \emptyset$, denn gäbe es ein $d \in \mathrm{cl}(\bar{a}) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}')$, so würde damit gelten:

$$d \notin \mathrm{cl}(\bar{b}) \quad\Rightarrow\quad d \underset{\bar{b}}{\not\downarrow} d \quad\Rightarrow\quad \bar{a} \underset{\bar{b}}{\not\downarrow} \bar{a}'.$$

Es ist $\dim(\bar{a}\bar{a}') \geqslant 3$, denn wegen $a_1' \notin \mathrm{cl}(\bar{b})$ und $\bar{a} \underset{\bar{b}}{\downarrow} a_1'$ ist $a_1' \notin \mathrm{cl}(\bar{a})$. Wäre $\dim(\bar{a}\bar{a}') = 4$, dann wäre $\bar{a} \downarrow \bar{a}'$. Weil T Pillay-gut ist, würde $\bar{a} \downarrow \bar{b}$ folgen.
Quelle: [Pil87, Lemma im Beweis von Proposition 2.2] ■

Lemma A.3.4 (T stabil)
Sei T gut und p ein regulärer stationärer Typ. Dann gilt für $\bar a e, \bar b e \models p^{(3)}$ die folgende Regel:

$$\bar a \parallel_e \bar b \quad \Rightarrow \quad \bar a \downarrow \bar b.$$

Beweis: Angenommen, es würde $\bar a \parallel_e \bar b$ und $\bar a \not\downarrow \bar b$ gelten. Wegen $b_1 \notin \mathrm{cl}(\bar a)$ gilt $b_1 \underset{\bar a}{\equiv} e$. Wähle d, so daß $\bar b \underset{\bar a}{\equiv} ed$ und $\bar b \underset{\bar a e}{\downarrow} d$ gilt. Wegen $\bar a \not\downarrow \bar b$ und $\dim \bar a \bar b e = 4$ ist $e \downarrow \bar a \bar b \quad \Rightarrow \quad \bar b \underset{\bar a}{\downarrow} \bar a e$. Transitivität liefert $\bar b \underset{\bar a}{\downarrow} ed$.

Wegen $\bar a \bar b \downarrow e$ folgt aus $\bar a \parallel_e \bar b$ auch $\bar a \parallel \bar b$. Lemma A.3.3 liefert nun $\bar b \parallel ed$. Ohnehin gilt $\bar a \parallel ed$. Also ergibt sich mit $d \in \mathrm{cl}(\bar a e) \cap \mathrm{cl}(\bar b e) = \mathrm{cl}(e)$ der gesuchte Widerspruch.
Quelle: [Pil87, Proposition 2.2] ■

Satz A.3.5 (T stabil)
Wenn T gut ist, sind die regulären stationären Typen lokal modular.
Quelle: [Pil87, Proposition 2.2]

Beweis: Sei T gut, aber p ein nicht lokal modularer regulärer stationärer Typ. Dann hat p eine echte Lokalisierung mit parallelen Geraden. Sei daher p so gewählt, daß $p|_e$ mit $e \models p$ eine solche Lokalisierung ist, und seien $\bar a, \bar b \models (p|_e)^{(2)}$ mit $\bar a \parallel_e \bar b$ zwei parallele Geraden. Wähle $\bar c$ so, daß $\bar b \underset{\bar a e}{\equiv} \bar c$ und $\bar b \underset{\bar a e}{\downarrow} \bar c$ gilt. Nach dem Lemma A.3.3 ist dann $\bar b \parallel_e \bar c$, nach Lemma A.3.4 also $\bar b \downarrow \bar c$. Mit der Güte folgt $\bar b \downarrow \bar a e$, also $\bar b \underset{e}{\downarrow} \bar a$, im Widerspruch zu $\bar a \parallel_e \bar b$. ■

Lemma A.3.6 (T stabil)
Wenn jeder Typ dominationsäquivalent zu einem Produkt von guten, lokal modularen regulären stationären Typen ist, dann ist T Pillay-gut.

Beweis: T erfülle die Voraussetzung des Satzes. Ferner seien Tupel $\bar a_0, \bar a_1$, ein a-Modell M und eine Menge $B \supseteq M$ gegeben mit $\bar a_0 \underset{B}{\equiv} \bar a_1$ und $\bar a_0 \underset{M}{\downarrow} \bar a_1$. Zu zeigen: $\bar a_0 \underset{M}{\downarrow} B$. Es genügt, den Fall zu betrachten, wenn $B = M\bar b$ ist für ein endliches Tupel $\bar b$. Sei

- $\bar a_0 \underset{M}{\underline{\sqcup}} \mathfrak{A}_0$ für ein M-unabhängiges System $\mathfrak{A}_0$, so daß a_0'/M regulär ist für alle $a_0' \in \mathfrak{A}_0$.
- $\bar b_0 \underset{M}{\underline{\sqcup}} \mathfrak{B}_0$ für ein M-unabhängiges System $\mathfrak{B}_0$, so daß b_0'/M regulär ist für alle $b_0' \in \mathfrak{B}_0$.

Sei $\mathfrak{A}_1$ so, daß $(\bar a_0, \mathfrak{A}_0) \underset{\bar b}{\equiv} (\bar a_1, \mathfrak{A}_1)$. Insbesondere ist dann $\bar a_1 \underset{M}{\underline{\sqcup}} \mathfrak{A}_1$.

Damit ist nun zu zeigen: $\mathfrak{A}_0 \sqcup \mathfrak{B}$ ist ein M-unabhängiges System. Nach Lemma A.1.2 können wir annehmen, daß dieses System nur Tupel des selben Typs über M enthält. Dieser Typ ist regulär, gut und (da M ein a-Modell ist) modular.

Nehmen wir an, $\mathfrak{A}_0 \sqcup \mathfrak{B}$ wäre abhängig über M. Wir werden in der Geometrie des Typs der Mengen aus diesem System arbeiten, um diese Annahme zum Widerspruch zu führen.

Da $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}$ je für sich unabhängig sind, folgt zunächst daß sie (über M) voneinander abhängig sind. Wegen der Modularität sind sie andererseits voneinander unabhängig über $\mathrm{cl}\,\mathfrak{A}_0 \cap \mathrm{cl}\,\mathfrak{B}$, also ist $\mathrm{cl}\,\mathfrak{A} \cap \mathrm{cl}\,\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Sei ohne Einschränkung bereits $\mathfrak{A}_0 \cap \mathrm{cl}\,\mathfrak{B} \neq \emptyset$, und sei $d_0 \in \mathfrak{A}_0 \cap \mathrm{cl}\,\mathfrak{B}$.

Sei $d_1 \in \mathfrak{A}_1$ das isomorphe Bild von $d_0 \in \mathfrak{A}_0$. Dann gilt $d_0 \underset{B}{\equiv} d_1$ und $d_0 \underset{M}{\downarrow} d_1$; es folgt $d_0 \underset{M}{\downarrow} \bar b$ im Widerspruch zu $d_0 \in \mathfrak{B}$. ■

Aus Lemma A.3.6 folgt sofort:

Satz A.3.7 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Wenn es keine dichten forkenden Ketten gibt und die regulären stationären Typen gut und lokal modular sind, dann ist T Pillay-gut. ■

A.4 Güte und U-Rang

Dieser Abschnitt läßt sich insofern als Fortsetzung von Abschnitt 2.3 verstehen, als hier die ϵ-Unabhängigkeit $\downarrow^{\epsilon}$ in nichttrivialer Weise angewandt wird.

Bemerkung A.4.1 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- T ist Pillay-gut.
- T ist gut.
- Jeder reguläre stationäre Typ ist lokal modular und gut.
- Jeder stationäre Typ mit U-Rang der Form ω^{α} ist lokal modular und gut.

Quelle: [Pil87, Theorem 0.3]

Beweis: Jeder Typ ist dominationsäquivalent zu einem Produkt von Typen mit U-Rang der Form ω^{α}. (Diese sind automatisch regulär.) Wenn sie lokal modular und gut sind, dann ist T Pillay-gut. Wenn T Pillay-gut ist, dann sind alle regulären stationären Typen lokal modular. ■

*

Die nächsten drei Lemmas sind Teil des Beweises von Lemma A.4.5.

Lemma A.4.2 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Die regulären stationären Typen seien gut, seien $A, B \supseteq M$ und sei $M = (\mathbb{CL}_{\alpha}A) \cap (\operatorname{acl} B)$ ein a-Modell. Dann gilt

$$A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}B \cap \mathbb{CL}_{\alpha+1}M \quad \Rightarrow \quad A \underset{M}{\downarrow} B.$$

Beweis: Wegen [fc] können wir annehmen, daß A über M endlich erzeugt ist.

Behauptung: Es genügt, den Fall zu betrachten, wenn $A = \operatorname{acl}(Ma_0 \ldots a_m)$ ist und die a_i ein unabhängiges System von Realisierungen ein und desselben Typs vom Rang $U(a_i/M) = \omega^{\alpha'} \leqslant \omega^{\alpha}$ bilden.

Sei nämlich $a_0, \ldots, a_n$ ein über M unabhängiges System, so daß $A \underset{M}{\sqsupset\sqsubset} a_0 \ldots a_n$ gilt, alle Typen a_i/M regulär mit $U(a_i/M) = \omega^{\alpha_i}$ sind, und je zwei Elemente a_i, a_j orthogonal oder vom selben Typ über M sind. Dann ist $\alpha_i \leqslant \alpha$ wegen $A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1}M$. Insbesondere sind die $a_i \in \mathbb{CL}_{\alpha}A$. Die Behauptung folgt nun mit Lemma A.1.5.

Nehmen wir also an, daß die Situation der Behauptung vorliegt. Wir werden nun getrennt nach zwei Fällen sehen, daß A und B unabhängig sind:

1. Fall $\alpha' < \alpha$.

Dann ist $U(A/M) = \omega^{\alpha'} \cdot m < \omega^{\alpha}$, also $A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}M$. Folglich sind A und B α-unabhängig, d. h., es gilt $B_A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}M$. Also ist $B_A \subseteq (\mathbb{CL}_{\alpha}A) \cap B = M$.

2. Fall $\alpha' = \alpha$.

Sei nun $(a_0^j \ldots a_n^j)_{j<\omega}$ eine Morleyfolge von $\operatorname{tp}(a_0 \ldots a_n/B)$, mit $a_i^0 = a_i$.

Wären a_i^0 und a_i^1 M-unabhängig, so wäre wegen der Güte der regulären Typen $(a_i^j)_{j<\omega}$ bereits eine Morleyfolge über M. Das würde aber bedeuten, daß a_i mit B nicht forkt, im Widerspruch zu $U(a_i/B) = \omega^{\alpha'} < \omega^{\alpha} = U(a_i/M)$.

Sei nun $k < \omega$ so, daß $B_A \subseteq \operatorname{acl}\big((a_0^j \ldots a_m^j)_{1 \leqslant j \leqslant k}\big)$. Da jedes a_i^j mit $a_i^0 = a_i$ und folglich auch mit A forkt, ist $U(a_i^j/A) < U(a_i^j/M) = \omega^{\alpha}$. Es ergibt sich $B_A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}A$. Also ist $B_A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}A \cap B = M$, und wir sind fertig.

Quelle: [Pil87, Lemma 3.2] ■

Lemma A.4.3 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Die regulären stationären Typen seien gut. Seien $A, B \supseteq E$. Dann gilt

$$A \subseteq \mathbb{CL}_\alpha B \cap \mathbb{CL}_{\alpha+1} E \quad \Rightarrow \quad A \mathop{\downarrow}\limits_{(\mathbb{CL}_\alpha A)\cap(\operatorname{acl} B)} B.$$

Quelle: [Pil87, Lemma 3.2]

Beweis: Sei nämlich $M \supseteq (\mathbb{CL}_\alpha A) \cap B$ ein a-Modell, das $AB \mathop{\downarrow}\limits_{(\mathbb{CL}_\alpha A)\cap B} M$ erfüllt. Sei $A' = AM$, $B' = BM$. Dann genügt es $A' \mathop{\downarrow}\limits_{M} B'$ nachzuweisen.

Nun ist wegen $A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1} E \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1} M$ auch $A' \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1} M$, und ähnlich $A' \subseteq \mathbb{CL}_\alpha B'$. Um das Lemma aus Lemma A.4.2 folgern zu können, brauchen wir nur noch die

Behauptung: $M = (\mathbb{CL}_\alpha A') \cap B'$.

Mit [mon2]*, [ext0] und [symm] erhalten wir

$$B' \mathop{\downarrow}\limits_{B} AB.$$

Auf dieselbe Weise können wir $A' \mathop{\downarrow}\limits_{A(\mathbb{CL}_\alpha A \cap B)} AB$ folgern, woraus sich

$$\mathbb{CL}_\alpha A' \mathop{\downarrow}\limits_{A(\mathbb{CL}_\alpha A \cap B)}^{\alpha} AB$$

ergibt. Also ist

$$(AB)_{(\mathbb{CL}_\alpha A')\cap B'} \subseteq (AB)_{\mathbb{CL}_\alpha A'} \cap (AB)_B \subseteq \mathbb{CL}_\alpha\big[A(\mathbb{CL}_\alpha A \cap B)\big] \cap B = \mathbb{CL}_\alpha A \cap B.$$

Das bedeutet gerade $AB \mathop{\downarrow}\limits_{\mathbb{CL}_\alpha A \cap B} \mathbb{CL}_\alpha A' \cap B'$, und mit [mon2] und [ext0]* folgt

$$A'B' \mathop{\downarrow}\limits_{M} \mathbb{CL}_\alpha A' \cap B'.$$

Wegen $M \subseteq \mathbb{CL}_\alpha A' \cap B' \subseteq A'B'$ bedeutet das gerade $M = (\mathbb{CL}_\alpha A') \cap B'$, und die Behauptung ist bewiesen. ∎

Lemma A.4.4 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Sei T gut, seien $A, B \supseteq M$ und sei $M = (\mathbb{CL}_\alpha A) \cap (\operatorname{acl} B)$ ein a-Modell. Dann gilt

$$A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1} M \quad \Rightarrow \quad A \mathop{\downarrow}\limits_{M} B.$$

Beweis:

Behauptung: Es genügt, den Fall zu betrachten, wenn $A = \operatorname{acl}(M a_0 \ldots a_m)$ ist, und die a_i ein unabhängiges System von Realisierungen ein und desselben Typs vom Rang $U(a_i/M) = \omega^{\alpha'} \leqslant \omega^\alpha$ bilden.

Die Behauptung läßt sich genauso beweisen, wie die Behauptung aus dem Beweis zu Lemma A.4.2.

Sei nun $B' = \operatorname{acl}(M b_0 \ldots b_n) \supseteq B_A$, wobei die b_j vom selben Typ über M sind wie die a_i. (Man kann dazu das Anfangsstück einer Morleyfolge von $M a_0 \ldots a_m / B$ nehmen). Sei dabei $A \mathop{\downarrow}\limits_{B_A} B'$. Der gemeinsame Typ der a_i und b_j über M ist lokal modular, also modular. Der Hüllenoperator der Geometrie dieses Typs ist die Einschränkung von $\mathbb{CL}_\alpha$ auf Realisierungen dieses Typs. Also gibt es Elemente $c_0, \ldots, c_k$ vom selben Typ, so daß mit $C = M c_0 \ldots c_k$ gilt: $A \mathop{\downarrow}\limits_{C}^{\alpha} B'$, und $\mathbb{CL}_\alpha C = \mathbb{CL}_\alpha A \cap \mathbb{CL}_\alpha B$.

Somit ist $(B'C)_A \subseteq \mathbb{CL}_\alpha C$ sowohl in $\mathbb{CL}_\alpha A$ als auch in $\mathbb{CL}_\alpha B$ enthalten. Es folgt $B_A = B'_A \subseteq B'_{(B'C)A} \subseteq \mathbb{CL}_\alpha (B'C)_A$ (letzteres nach Lemma A.4.3), und schließlich $B_A \subseteq \mathbb{CL}_\alpha A$. Damit ist $B_A \subseteq (\mathbb{CL}_\alpha A) \cap B = M$, was zu beweisen war.
Quelle: [Pil87, Section 4] ∎

Lemma A.4.5 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Sei T gut und seien $A, B \supseteq E$. Dann gilt

$$A \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1} E \quad \Rightarrow \quad A \mathop{\downarrow}\limits_{(\mathbb{CL}_\alpha A)\cap(\operatorname{acl} B)} B.$$

Beweis: Folgt aus Lemma A.4.4, wie Lemma A.4.3 aus Lemma A.4.2 folgt.
Quelle: [Pil87, Section 4] ∎

Lemma A.4.6 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Sei T gut. Sei $B \supseteq E$ und $\bar{a}$ ein endliches Tupel. Dann gilt

$$U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B) + \omega^{\alpha}k \quad \Leftrightarrow \quad U(B_{\bar{a}}/E) < \omega^{\alpha}k.$$

Quelle: [Pil87, Section 4]

Beweis: Wir werden implizit benutzen, daß $B_{\bar{a}}$ endlich erzeugt ist (dies folgt aus der Superstabilität).

"$\Leftarrow$": Diese Richtung gilt wegen Korollar 2.2.3 immer: Aus $U(B_{\bar{a}}/E) < \omega^{\alpha} \cdot k \leqslant U(B_{\bar{a}}/\bar{a}) + \omega^{\alpha} \cdot k$ folgt $U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B_{\bar{a}}) + \omega^{\alpha} \cdot k = U(\bar{a}/B) + \omega^{\alpha} \cdot k$.

"$\Rightarrow$": $U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B) + \omega^{\alpha} \cdot k \Rightarrow \bar{a} \underset{E}{\downarrow}^{\alpha+1} B \Rightarrow \bar{a}_B \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha+1}E$. Mit dem vorigen Lemma folgt $\bar{a}_B \underset{(\mathbb{CL}_{\alpha}\bar{a}_B)\cap B}{\downarrow} B$, und weiter $\bar{a} \underset{(\mathbb{CL}_{\alpha})\bar{a}\cap B}{\downarrow} B \Rightarrow B_{\bar{a}} \subseteq \mathbb{CL}_{\alpha}(\bar{a})$ (denn mit $\bar{a} \underset{\bar{a}_B \vee ((\mathbb{CL}_{\alpha}\bar{a})\cap B)}{\downarrow} B$ folgt $\bar{a} \underset{\mathbb{CL}_{\alpha}\bar{a}_B \cap B}{\downarrow} B$). Somit ist $U(B_{\bar{a}}/\bar{a}) < \omega^{\alpha}$, also $U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B_{\bar{a}}) + \omega^{\alpha} \cdot k \Rightarrow U(B_{\bar{a}}/E) < U(B_{\bar{a}}/\bar{a}) + \omega^{\alpha} \cdot k = \omega^{\alpha} \cdot k$. ∎

Endlich können wir die folgende erhebliche Verschärfung von Satz 2.2.7 beweisen:

Satz A.4.7 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Sei T gut und $\bar{a}$ ein endliches Tupel. Ist $U(\bar{a}/E) = \gamma + \omega^{\alpha} \cdot n$, so gibt es ein $\bar{a}' \in \operatorname{acl}(\bar{a}E)$ mit $U(\bar{a}'/E) = \omega^{\alpha}$.
Quelle: [Pil87, Proposition 5.1]

Beweis: Durch Induktion über α. Induktionsbasis $\alpha = 0$:

Wähle B mit $U(\bar{a}/B) = \gamma + \omega^{\alpha} \cdot (n-1) = \gamma + n - 1$. Sei das endliche Tupel $\bar{b} \in B_{\bar{a}}$ so gewählt, daß $B_{\bar{a}} = \operatorname{acl}(E\bar{b})$ ist. Dann ist $U(\bar{a}/B) + 1 \leqslant U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B) + 2$, also nach dem vorigen Lemma $1 \leqslant U(B_{\bar{a}}/E) < 2$. Damit folgt $U(B_{\bar{a}}/E) = 1$, und wegen $\bar{a} \underset{E}{\not\downarrow} B_{\bar{a}}$ ist $B_{\bar{a}} \subseteq \bar{a}$. Wir können also $\bar{a}' = \bar{b}$ wählen.

Induktionsschluß: Wähle B mit $U(A/B) = \gamma + \omega^{\alpha} \cdot (n-1)$. Sei $\bar{a}'$ so gewählt, daß $A_B = \operatorname{acl}(\bar{a}'E)$ ist. Aus $U(\bar{a}/B) + \omega^{\alpha} \leqslant U(\bar{a}/E) < U(\bar{a}/B) + \omega^{\alpha} \cdot 2$ folgt $U(B/\bar{a}E) + \omega^{\alpha} \leqslant U(B/E) < U(B/\bar{a}E) + \omega^{\alpha} \cdot 2$, und mit dem vorigen Lemma weiter $\omega^{\alpha} \leqslant U(A_B/E) < \omega^{\alpha} \cdot 2$.

Daher ist $U(A_B/E) = \omega^{\alpha} + \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_r} \cdot m_r$. Wäre $r > 0$, so würde die Induktionsvoraussetzung ein $\bar{a}'' \in A_B \subseteq A$ liefern mit $U(\bar{a}''/E) = \omega^{\beta_r}$, ein Widerspruch zu Proposition 6 in [Las84]. Also ist $U(\bar{a}'/E) = \omega^{\alpha}$. ∎

Korollar A.4.8 (T superstabil mit Imaginärenelimination)
Sei T gut. Ist $A \supsetneq M$ algebraisch abgeschlossen, A/M endlich erzeugt und $U(A/M)$ nicht von der Form ω^{α}, so gibt es ein $A' \in [M, A]_{fg}$ mit $U(A/A') < U(A/M)$ und $U(A'/M) < U(A/M)$.

Beweis: Sei $U(A/M) = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$, $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$. Nach Satz A.4.7 gibt es ein $A' \in [M, A]$ mit $U(A'/M) = \omega^{\alpha_k}$. Also ist $U(A'/M) = \omega^{\alpha_k} < U(A/M)$ und

$$\begin{aligned} U(A/A') + \omega^{\alpha_k} &= U(A/A') + U(A'/M) \\ &\leqslant U(A/M) = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k, \end{aligned}$$

also $U(A/A') < \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k = U(A/M)$. ∎

Kommentar

Dieser Abschnitt ist das Ergebnis eines Versuchs, die Ergebnisse von [Pil87] verständlicher darzustellen. Satz A.4.7 werden wir im Beweis von Satz A.5.1 verwenden. Zur Frage, ob Satz A.4.7 in beliebigen superstabilen Theorien gilt, vgl. den Kommentar zu Abschnitt A.5.

A.5 Trivialität

Satz A.5.1
Jede total triviale superstabile Theorie ist sogar vollkommen trivial.

Beweis: Sei T einfach superstabil (wir wissen bereits, daß jede triviale Theorie gute Reguläre hat) , und sei durch die Mengen A, B und $F \supseteq E$ ein Gegenbeispiel zur vollkommenen Trivialität von T gegeben (d. h., $A \underset{E}{\downarrow} B$ aber $A \underset{F}{\not\downarrow} B$), so daß $\big(U(A/M), U(B/M), U(F/M)\big)$ bezüglich der lexikographischen Ordnung minimal ist. Zu zeigen: T ist nicht total trivial. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $E = M$ ein a-Modell ist und daß $A, B, F \supseteq M$ über M endlich erzeugte algebraisch abgeschlossene Mengen sind.

Behauptung 1 $U(A/M) = \omega^\alpha$ für eine Ordinalzahl α.

Behauptung 2 $U(B/M) = \omega^\beta$ für eine Ordinalzahl β.

Wenn Behauptung 1 verletzt ist, liefert Korollar A.4.8 ein $A' \in (M, A)$ mit $U(A'/M) < U(A/M)$ und $U(A/A') < U(A/M)$. Nach Minimalität des Gegenbeispiels sind $A', B, F \supseteq M$ und $A, A'B, A'F \supseteq A'$ keine Gegenbeispiele. Also gilt

$$\left.\begin{array}{rcccl} & & A' \underset{M}{\downarrow} B & \Rightarrow & A' \underset{F}{\downarrow} B \\ A \underset{A'}{\downarrow} B & \Rightarrow & A \underset{A'}{\downarrow} B & \Rightarrow & A \underset{A'F}{\downarrow} A'B \end{array}\right\} \Rightarrow A \underset{F}{\downarrow} B,$$

im Widerspruch zur Annahme. Behauptung 2 läßt sich genauso beweisen.

Behauptung 3 $U(F/M) = \omega^\varphi$ für eine Ordinalzahl φ.

Sonst liefert Korollar A.4.8 ein $F' \in (M, F')$ mit $U(F'/M) < U(F/M)$ und $U(F/F') < U(F/M)$. Nach Minimalität des Gegenbeispiels sind $A, B, F' \supseteq M$ und $AF', BF', F \supseteq F'$ keine Gegenbeispiele. Also gilt

$$A \underset{M}{\downarrow} B \Rightarrow A \underset{F'}{\downarrow} B \Rightarrow AF' \underset{F'}{\downarrow} BF' \Rightarrow A \underset{F}{\downarrow} B,$$

im Widerspruch zur Annahme.

Somit sind A/M, B/M, F/M regulär. Wäre T total trivial, so müßte $A \underset{M}{\not\downarrow} F$ und $B \underset{M}{\not\downarrow} F$ gelten (weil sonst A, B, F, M ein Gegenbeispiel zur totalen Trivialität wäre). Also wären $A/M, B/M, F/M$ paarweise nichtorthogonal. Daher wäre die nichtforkende Erweiterung A/B von A/M orthogonal zur forkenden Erweiterung F/B von F/M (Regularität), und somit $A \underset{B}{\downarrow} F$. Wegen $A \underset{M}{\downarrow} B$ würde sich $A \underset{M}{\downarrow} F$ und damit ein Widerspruch ergeben.

Quelle: [Goo91, Proposition 7] ■

Kommentar

Poizat (alias John B. Goode; in [Goo91]) schreibt Satz A.5.1 Buechler zu. Im Beweis benutzt er Satz A.4.7 im Falle eines a-Modells $E = M$ implizit, nachdem er ihn zuvor im Beweis von [Goo91, Proposition 2] (dem superstabilen Spezialfall von Bemerkung A.1.7) bewiesen hat, *ohne Güte von* T *vorauszusetzen*. Diesen Beweis (er endet mit "This last argument is an improvement due to Buechler of a lemma of Lascar") kann ich nicht nachvollziehen.

Ein weiteres die Trivialität betreffendes Argument, das sich wohl nicht ohne weiteres auf nichtstabile Theorien verallgemeinern läßt, ist das folgende:

Wenn T stabil und 1-basiert ist, dann folgt aus Lemma 4.4.3, daß T genau dann trivial ist, wenn T^{eq} einen nichttrivialen minimalen Typ hat. Diesen nichttrivialen lokal minimalen Typ kann man dann benutzen, um in T^{eq} eine unendliche Gruppe zu definieren. Zusammen mit Korollar 5.6.3 folgt, daß eine 1-basierte stabile Theorie T genau dann trivial ist, wenn es in T^{eq} eine ∞-definierbare Gruppe gibt.

A.6 Quasidesigns

Satz A.6.1 (T stabil mit Imaginärenelimination)
Wenn es keine durch vollständige Typen (von Tupeln) über $\emptyset$ definierbaren Quasidesigns gibt, dann ist T 1-basiert.

Beweis: Der Beweis ist nicht schwer, benutzt aber ganz wesentlich die Ränge R_δ und die Definierbarkeit von Formeln in stabilen Theorien. Ich belasse es daher bei einem Verweis auf **[Pil96b, 4, Proposition 1.7].** ▲

Korollar A.6.2 (T stabil mit Imaginärenelimination)
T ist genau dann 1-basiert, wenn es keine durch vollständige Typen definierbaren Pseudoebenen gibt.
Quelle: [Pil96b, 4, Proposition 1.7 (i)$\leftrightarrow$(ii)] ■

Kommentar

Seien $r(\bar{x}, \bar{y}) \in S(\emptyset)$, und seien $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(\emptyset)$ Einschränkungen von $r(\bar{x}, \bar{y})$. Wenn $r(\bar{x}, \bar{y})$ eine Pseudoebene (ein Quasidesign) definiert, dann gibt es wegen Kompaktheit eine Formel $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, so daß auch der unvollständige Typ $p(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \cup q(\bar{y})$ eine Pseudoebene (ein Quasidesign) definiert.

Pillay arbeitete ursprünglich mit Pseudoebenen in diesem schwachen Sinne. Es stellte sich allerdings heraus, daß es einfach basierte stabile Theorien gibt, in denen Pseudoebenen im schwachen Sinne definierbar sind. Ein Vorläufer von Korollar A.6.2 war Pillays Beweis, daß Theorien, die auch im schwachen Sinne keine Pseudoebenen haben, "type-weakly normal" sind. Für solche (type-weakly normal) Theorien zeigte er, daß sie schwach normal sind (d. h., 1-basiert und stabil) und, falls sie außerdem abzählbar und nicht $\aleph_0$-kategorisch sind, daß sie unendlich viele abzählbare Modelle besitzen.

A.7 Lokal modulare Theorien von endlichem Rang

Satz A.7.1
Jeder Redukt einer 1-basierten superstabilen Theorie von endlichem U-Rang ist selbst 1-basiert.

Beweis: Sei T 1-basiert, superstabil und von endlichem U-Rang. Sei T^* ein Redukt von T. Wäre T^* nicht 1-basiert, so gäbe es nach Satz A.6.1 einen Typ $r^*(\bar{x}, \bar{y}) \in S(\emptyset)$, der ein Quasidesign in $(T^*)^{eq}$ definierte. Dann wäre durch $r^*(\bar{x}, \bar{y})$ auch in T^* ein Quasidesign definiert. Nach Satz 4.3.3 ist das nicht möglich.
Quelle: [Pil96b, 4, Proposition 6.3] ■

Das Beispiel der freien Funktion und der freien Pseudoebene (siehe Abschnitt B.3) zeigt, daß die Bedingung des endlichen U-Rangs tatsächlich notwendig ist.

Satz A.7.2 (T superstabil von endlichem U-Rang mit Imaginärenelimination)
Wenn alle minimalen Typen lokal modular sind, dann ist T 1-basiert.

Beweis: T sei superstabil von endlichem U-Rang aber nicht 1-basiert. Wie man sich leicht überlegt, gibt es dann ein a-Modell M und algebraisch abgeschlossene Mengen $A, B \supseteq M$, so daß $A \cap B = M$ und $A \not\perp_M B$ gilt.

Da jeder reguläre Typ nichtorthogonal zu einem minimalen ist, gibt es $a_1, \ldots, a_n \in (M, A]$ so daß $\{a_1, \ldots, a_n\}$ unabhängig über M ist, $A \underset{M}{\underline{\sqsubset\!\sqsupset}} a_1 \ldots a_n$ gilt und die Typen a_i/M außerdem alle minimal sind. Entsprechend $b_1, \ldots, b_m$ für B.

Wir können annehmen, daß (n, m) minimal ist, so daß nach Lemma A.1.2 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ über M paarweise nichtorthogonal, also ohne Einschränkung von selben Typ, sind.

Wegen $A \cap B = M$ ist nun aber in der (Prä-)Geometrie dieses minimalen Typs $\mathrm{cl}\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \mathrm{cl}\{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset$. Also ist dieser minimale Typ nicht modular. Weil M ein a-Modell ist, kann er folglich nicht einmal lokal modular sein.
Quelle: [Pil96b, 2, Proposition 5.8] ■

Korollar A.7.3
Wenn T superstabil von endlichem U-Rang ist und alle minimalen Typen trivial sind, dann ist T trivial und 1-basiert.

Beweis: Folgt aus Bemerkung A.1.7 und Satz A.7.2, da jeder triviale reguläre Typ lokal modular ist. ■

Aus bisherigen Ergebnissen folgt unmittelbar:

Zusammenfassung A.7.4 (T superstabil von endlichem U-Rang mit Imaginärenelimination)
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- T ist 1-basiert.
- ACL ist modular.
- $\perp^{a}$ ist eine Unabhängigkeitsrelation.
- Alle regulären stationären Typen sind lokal modular.
- Alle minimalen Typen sind lokal modular.
- Es gibt keine durch einen (unvollständigen) Typ definierbare Pseudoebene.
- Es gibt keine durch einen vollständigen Typ über $\emptyset$ definierbare Pseudoebene.
- Es gibt kein durch einen (unvollständigen) Typ definierbares Quasidesign.
- Es gibt kein durch einen vollständigen Typ über $\emptyset$ definierbares Quasidesign. ■

Anhang B

Beispiele

B.1 Kombinatorische Prägeometrien

Bei den Matroiden oder kombinatorischen Prägeometrien im Sinne der Modelltheorie handelt es sich um eine Verallgemeinerung (Verzicht auf Endlichdimensionalität) der ursprünglichen Matroide oder kombinatorischen Prägeometrien, vgl. [Aig76, Definition VI.1.1]. Zur genauen Definition in der Modelltheorie vgl. [Pil96b, 2, Definition 1.1] oder [Bue96, Definition 3.1.4].

Theorien und Prägeometrien

Weil acl immer ein algebraischer Abschlußoperator auf $\mathfrak{C}$ ist, ist $(\mathfrak{C}, \mathrm{acl})$ genau dann eine Prägeometrie, wenn acl die Austauschregel erfüllt: Wenn $a \in \mathrm{acl}(Eb) \setminus \mathrm{acl}\, E$ ist, dann ist auch $b \in \mathrm{acl}(Ea) \setminus \mathrm{acl}\, E$. Insbesondere kann $(\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}, \mathrm{acl})$ niemals eine Prägeometrie sein.

Bemerkung B.1.1
Wenn $(\mathfrak{C}, \mathrm{acl})$ eine Prägeometrie ist, ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}$ eine Unabhängigkeitsrelation mit endlichem U-Rang.
$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}$ beschreibt dann die Unabhängigkeit im Sinne der Prägeometrie.

Beweis: Wenn $(\mathfrak{C}, \mathrm{acl})$ eine Prägeometrie ist, ist ACL stark atomar und erfüllt die Nachbarbedingung — dies ist gerade die Austauschregel, übersetzt in die Sprache der Verbandstheorie (vgl. [Ste91]). Nach einem Satz von Malliah und Bhatta [MB86], der auch als Theorem 33.2 in [Ste91] mit Beweis wiedergegeben ist, folgt, daß ACL M-symmetrisch ist. (Tatsächlich geht es auch einfacher, weil ACL in diesem Fall sogar atomistisch ist. Daher genügt der klassische Satz, daß jeder atomistische Verband, der die Nachbarbedingung erfüllt, M-symmetrisch ist.) Mit Korollar 6.2.10 folgt nun weiter, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}$ eine Unabhängigkeitsrelation ist.

Eine Menge A heißt (im Sinne der Prägeometrie) unabhängig über einer Menge E, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \notin \mathrm{acl}\big((A \setminus \{a\})E\big)$. Zwei Mengen A und B heißen unabhängig über einer Menge E, falls jede E-unabhängige Teilmenge $A_0 \subseteq A$ sogar noch über EB unabhängig ist. Mit Hilfe der Austauschregel sieht man leicht ein, daß diese Definition symmetrisch in A und B ist. Tatsächlich sind A und B genau dann unabhängig über E, wenn $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}_{E} B$ gilt:

Nehmen wir zunächst an, daß A und B im gerade definierten Sinn unabhängig über E sind. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß dann auch A und $\mathrm{acl}\, B$ unabhängig über $\mathrm{acl}(EB)$ sind. Also sind A und $\mathrm{acl}(EB)$ auch über jeder acl-abgeschlossenen Menge D mit $E \subseteq D \subseteq \mathrm{acl}(EB)$ unabhängig. Folglich sind A und $\mathrm{acl}(DB)$ D-unabhängig und daher (wegen der Symmetrie der Unabhängigkeit funktioniert das gerade benutzte Argument auch auf der linken Seite) sind es auch $\mathrm{acl}(AD)$ und $\mathrm{acl}(DB)$. Es folgt $\mathrm{acl}(AD) \cap \mathrm{acl}(DB) = \mathrm{acl}\, D$, also $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}_{D} B$. Somit ist $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}_{E} B$.

Wenn dagegen A und B abhängig über E sind, dann gibt es eine E-unabhängige Menge $A_0 \subseteq A$, so daß für ein $a \in A_0$ gilt: $a \in \mathrm{acl}\big((A_0 \setminus \{a\})EB\big)$. Wir können annehmen, daß A_0 eine minimale solche Menge ist. Sei $B_0 \subseteq B$ minimal, so daß gerade noch $a \in \mathrm{acl}\big((A_0 \setminus \{a\})EB_0\big)$ für ein $a \in A_0$ gilt und sei $b \in B_0$. Dann ist $A_0 \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{a}}_{E(B_0 \setminus \{b\})} B_0$. Es folgt $A \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}_{E} B$.

Aus dieser Charakterisierung von $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{m}}$ ergibt sich auch unmittelbar, daß jedes n-Tupel höchstens den U-Rang n haben kann. ■

O-minimale Theorien

Definition B.1.2
Die vollständige einsortige Theorie T heißt **O-minimal** bezüglich der zweistelligen Relation $<$ in der Signatur von $\mathcal{L}$, wenn $\mathfrak{C}$ durch $<$ linear geordnet wird und jede Formel $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{C})$ (mit nur einer freien Variablen!) modulo T äquivalent ist zu einer booleschen Kombination von Formeln von der Gestalt $a \leqslant x \leqslant b$.

Eine Struktur M heißt O-minimal, falls die Bedingung der Definition immerhin noch für jede Formel $\varphi(x) \in \mathcal{L}(M)$ erfüllt ist (mit $T = \mathrm{Th}(M)$). Natürlich ist jedes Modell einer O-minimalen Theorie eine O-minimale Struktur. Das Hauptergebnis von [KPS86] und [PS88] besagt, daß umgekehrt die Theorie einer beliebigen O-minimalen Struktur eine O-minimale Theorie ist.

Die beiden einfachsten Beispiele für O-minimale Strukturen sind die Theorien von $(\mathbb{Z}, <)$ und von $(\omega, <)$. Daraus und aus endlichen Ordnungen kann man durch eine Reihe naheliegender Operationen weitere Beispiele konstruieren. Nach [PS86, Theorem 3.12] lassen sich alle O-minimalen Strukturen auf diese Weise gewinnen.

Algebraische Beispiele liefert der

Satz B.1.3

- Die Theorie einer geordneten Gruppe ist genau dann O-minimal in der Signatur $\{+, 0, <\}$, wenn sie teilbar und abelsch ist.
- Die Theorie eines geordneten Rings (mit 1) ist genau dann O-minimal in der Signatur $\{+, \cdot, 0, 1, <\}$, wenn er ein reell abgeschlossener Körper ist.

Beweis: Siehe **[PS86, Theorem 2.1 und Theorem 2.3].** ▲

Bemerkung B.1.4 (T O-minimal)
T hat die starke Ordnungseigenschaft, ist also nicht einfach.
T hat nicht die Unabhängigkeitseigenschaft.

Beweis: T erfüllt offensichtlich die starke Ordnungseigenschaft und ist deshalb nach **[She80, Theorem 4.3 (3)]** nicht einfach. Die zweite Behauptung ist **[PS86, Corollary 3.10].** ▲

Für O-minimale Theorien ist acl = dcl, denn weil $\mathfrak{C}$ durch $<$ linear geordnet wird, kann man aus jeder endlichen Menge das erste, zweite, dritte ... Element herauspicken. Es ist üblich, cl für acl zu schreiben.

Satz B.1.5
Jede O-minimale Theorie hat (bis auf Isomorphie) genau ein Primmodell. Dieses ist konstruierbar, also atomar.

Beweis: Siehe **[PS86, Theorem 5.1 und Lemma 5.4].** ▲

Satz B.1.6
Wenn T O-minimal ist, dann ist $(\mathfrak{C}, \mathrm{cl})$ eine Prägeometrie.

Beweis: Siehe **[PS86, Theorem 4.1].** ▲

Satz B.1.7 (T O-minimal)
Wenn ACL modular ist oder alle cl-abgeschlossenen Mengen Modelle sind, dann hat T Imaginärenelimination.

Beweis: Siehe **[Pil86, Proposition 3.2].** ▲

Satz B.1.8 (T O-minimal)
T erfüllt die Vaught'sche Vermutung.

Beweis: Siehe **[May88, Theorem 5.1]** ▲

Streng minimale Theorien

Definition B.1.9
Die vollständige einsortige Theorie T heißt **streng minimal**, wenn jede Formel $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{C})$ (mit nur einer freien Variablen!) modulo T äquivalent ist zu einer booleschen Kombination von algebraischen Formeln (äquivalent: von Formeln der Gestalt $x = a$).

Eine Struktur M heißt minimal, falls die Bedingung der Definition immerhin noch für jede Formel $\varphi(x) \in \mathcal{L}(M)$ erfüllt ist (mit $T = \mathrm{Th}(M)$). Natürlich ist jedes Modell einer streng minimalen Theorie eine minimale Struktur. Es gibt jedoch minimale Strukturen, deren vollständige Theorie nicht streng minimal ist.

Satz B.1.10
Wenn T streng minimal ist, dann ist $(\mathfrak{C}, \mathrm{cl})$ eine Prägeometrie.

Beweis: Siehe **[Bue96, Lemma 3.1.3 (ii)].**

Bemerkung B.1.11
Jede streng minimale abzählbare Theorie ist $\aleph_0$-stabil. ■

Korollar B.1.12
Jede streng minimale abzählbare Theorie hat über beliebigen Mengen konstruierbare, also atomare, Primmodelle.

Beweis: Siehe **[Bue96, Lemma 3.1.5].** ▲

Satz B.1.13 (T abzählbar und streng minimal)
Jede streng minimale abzählbare Theorie hat höchstens $\aleph_0$ abzählbare Modelle und ist überabzählbar kategorisch.

Beweis: Siehe **[Bue96, Corollary 3.1.1].** ▲

In [Hru93] merkt Hrushovski an, daß eine streng minimale Struktur genau dann vom kombinatorischen Typ ist, wenn $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ distributiv ist. Sie ist genau dann vom linearen Typ, wenn $\mathrm{ACL}^{\mathrm{eq}}$ modular und nicht distributiv ist. Dies ist ein Spezialfall von Satz A.0.2.

Algebraisch abgeschlossene Körper

Definition B.1.14
ACF ist die $\{0, 1, +, -, \cdot\}$-Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper, d. h., axiomatisiert durch die Körperaxiome und zusätzlich

$$\forall y_0 \ldots y_{n-1} \exists x \Big(x^n + y_{n-1} x^{n-1} + \ldots y_1 x + y_0 = 0 \Big).$$

Wenn p eine Primzahl oder 0 ist, ist

$$\mathrm{ACF}_p \;=\; \mathrm{ACF} + \{\text{„Die Charakteristik ist } p\text{“}\}$$

die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper von der Charakteristik p.

Weil es für $p = 0$ und für Primzahlen p algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik p gibt, sind die Theorien ACF_p konsistent.
ACF hat Quantorenelimination:

Satz B.1.15
Jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_{\mathrm{ACF}}$ ist äquivalent (modulo ACF) zu einer boolschen Kombination von Formeln der Gestalt $t(\bar{x}) = 0$, mit $t(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$.

Beweis: Siehe beispielsweise **[MMP96, I, Theorem 1.6]**, **[Hod93, Corollary A.5.3]** oder **[Rot95, 9.4.2].** ▲

Korollar B.1.16
Die Theorien ACF_p sind vollständig.

Beweis: Wegen der Quantorenelimination sind sie modellvollständig. Zu jeder Charakteristik gibt es einen Primkörper, und dessen algebraischer Abschluß ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Damit ist er ein Primmodell von ACF_p, woraus die Vollständigkeit folgt. ■

Natürlich folgt die Vollständigkeit der Theorien ACF_p ebenso auch daraus, daß sie überabzählbar kategorisch sind.

Korollar B.1.17
Die Theorien ACF_p sind streng minimal.

Beweis: Nichttriviale Polynome in einer Variablen haben nur endlich viele Nullstellen. ■

Die Theorien ACF_p sind nicht 1-basiert: Sei $\varphi(x, y; u, v)$ die Formel $u \cdot x - v - y$. Seien $p(x, y) = q(u, v) = \emptyset$ triviale Typen und $r(x, y; u, v) = \{\varphi(x, y; u, v)\}$. Dann ist durch $r(x, y; u, v) \supset p(x, y) \cup q(u, v)$ eine Pseudoebene gegeben:
Für alle a, b gibt es nämlich unendlich viele c, d, so daß $a \cdot c = b + d$ ist — wähle c beliebig und setze $d = a \cdot c - b$. Ferner gibt es zu a_1, b_1, a_2, b_2 mit $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ höchstens ein Paar (c, d), so daß

$$a_1 \cdot c = b_1 + d$$
$$a_2 \cdot c = b_2 + d$$

gilt, denn wegen $(a_1 - a_2) \cdot c = b_1 - b_2$ folgt aus $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ und obigen Gleichungen $a_1 - a_2 \neq 0$ und dann weiter

$$a_1 \cdot c - b_1 = a_2 \cdot c - b_2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$$

sowie

$$d = a_1 \cdot c - b_1 = a_1 \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} + b_1 = \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2 - a_1}.$$

Wegen der Symmetrie der Gleichung ist damit bereits gezeigt, daß es sich um eine Pseudoebene handelt.
Mit Satz 4.3.3 folgt, daß ACL_p nicht 1-basiert ist.

B.2 Schwach normale Theorien

Hier geht es um eine weitere Charakterisierung der 1-basierten stabilen Theorien.

Normale und schwach normale Theorien

Definition B.2.1
Eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{C})$ heißt **normal**, falls sie mit jedem ihrer nichtäquivalenten Konjugate inkonsistent ist. Sie heißt **schwach normal**, falls jede Konjunktion von unendlich vielen nichtäquivalenten Konjugaten von $\varphi(\bar{x})$ inkonsistent ist.

Definition B.2.2
T heißt **normal** oder **schwach normal**, falls jede Formel (mit Parametern) äquivalent zu einer booleschen Kombination von normalen bzw. schwach normalen Formeln ist.

(Insbesondere ist jede schwach normale Theorie *equational,* vgl. [PS84], [Sro88a], [Sro88b], [Sro90]. Diese Eigenschaft ist viel schwächer als Schwachnormalität, aber immerhin noch etwas stärker als Stabilität. Vor [HS] war noch nicht klar, ob sie nicht zur Stabilität äquivalent ist. Ihr Nutzen liegt wohl vor allem in der Möglichkeit der Verallgemeinerung auf unvollständige Theorien.)

Definition B.2.3
Ein vollständiger Typ heißt **normal** oder **schwach normal**, falls er bereits durch seine normalen bzw. schwach normalen Formeln festgelegt ist.

Bemerkung B.2.4
T ist genau dann normal bzw. schwach normal, wenn jeder Typ über einem genügend saturierten Modell es ist. ■

Definition B.2.5
Eine Formel $\psi(\bar{x})$ heißt eine **$\bar{y}$-Instanz von** $\varphi(\bar{x},\bar{y})$, falls sie von der Form $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ ist.

Definition B.2.6
Eine Formel $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ heißt **$\bar{y}$-algebraisch,** falls es für jedes $\bar{a}$ nur endlich viele $\bar{b}$ mit $\models \varphi(\bar{a},\bar{b})$ gibt.

Bemerkung B.2.7
Jede $\bar{y}$-algebraische Formel $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ ist sogar uniform $\bar{y}$-algebraisch, d.h., es gibt ein $n < \omega$, so daß $\models \forall\bar{x}\exists_{\leqslant n}\bar{y}\,\varphi(\bar{x},\bar{y})$ gilt.

Beweis: Folgt aus dem Kompaktheitssatz: Sonst wäre nämlich $T(\mathfrak{C}) \cup \left\{\exists_{>n}\bar{y}\,\varphi(\bar{x},\bar{y}) \;\middle|\; n < \omega\right\}$ konsistent. ■

Bemerkung B.2.8 (T mit Imaginärenelimination)
Eine Formel (mit Parametern) ist genau dann schwach normal, wenn sie äquivalent zu einer $\bar{y}$-Instanz einer $\bar{y}$-algebraischen Formel ohne Parameter ist.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ von der angegebenen Form, nämlich $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ $\bar{y}$-algebraisch und ohne Parameter. Seien $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$ Automorphismen des Monstermodells, so daß $\varphi(\bar{x},\bar{b}^{\sigma_1}), \varphi(\bar{x},\bar{b}^{\sigma_2}),\ldots$ paarweise nichtäquivalent sind. Damit sind auch $\bar{b}^{\sigma_1},\bar{b}^{\sigma_2},\ldots$ paarweise verschieden. Also kann es kein $\bar{a}$ geben, das alle $\varphi(\bar{x},\bar{b}^{\sigma_i})$ erfüllt.

"$\Rightarrow$": Sei $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ gegeben, mit kanonischem Parameter $\bar{b}$, so daß die Konjunktion von unendlich vielen nichtäquivalenten Formeln der Gestalt $\varphi(\bar{x},\bar{b}^{\sigma})$ unerfüllbar ist. Nach dem Kompaktheitssatz gibt es ein $n < \omega$, so daß bereits die Konjunktion von $n+1$ verschiedenen solchen Formeln unerfüllbar ist, sowie eine Formel $\chi(\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/\emptyset)$, so daß $\models \forall\bar{x}\exists_{\leqslant n}\bar{y}\big(\varphi(\bar{x},\bar{y}) \wedge \chi(\bar{y})\big)$. ■

Lemma B.2.9 (T mit Imaginärenelimination)
Zwei Tupel $\bar{a}$ und $\bar{a}'$ erfüllen genau dann dieselben schwach normalen Formeln über einer algebraisch abgeschlossenen Menge B, wenn

- $\mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B = \mathrm{acl}(\bar{a}') \cap B$ und
- $\mathrm{tp}\left(\bar{a}/\,\mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B\right) = \mathrm{tp}\left(\bar{a}'/\,\mathrm{acl}(\bar{a}') \cap B\right)$

gilt.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ $\bar{y}$-algebraisch, $\bar{b} \in B$, und es gelte $\models \varphi(\bar{a},\bar{b})$. Dann ist $\bar{b} \in \mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B \Rightarrow \varphi(\bar{x};\bar{b}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/\,\mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B) = \mathrm{tp}(\bar{a}'/\,\mathrm{acl}(\bar{a}') \cap B) \Rightarrow \models \varphi(\bar{a}';\bar{b})$, und umgekehrt.

"$\Rightarrow$": Seien $\bar{b} \in \mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B$, $\varphi(\bar{x};\bar{y}) \in \mathcal{L}$ gegeben mit $\models \varphi(\bar{a};\bar{b})$. Zu zeigen: $\bar{b} \in \mathrm{acl}(\bar{a}')$ und $\models \varphi(\bar{a}';\bar{b})$. Sei $\chi(\bar{x};\bar{y}) \in \mathcal{L}$ so daß $\chi(\bar{a};\bar{y})$ $(n\text{-})$algebraisch ist und $\models \chi(\bar{a};\bar{b})$ gilt. Dann ist die durch

$$\varphi(\bar{x};\bar{y}) \wedge \left[\chi(\bar{x};\bar{y}) \wedge \exists_{\leqslant n} y' \chi(\bar{x};\bar{y}')\right]$$

definierte Formel $\varphi^*(\bar{x};\bar{y})$ $\bar{y}$-algebraisch und folglich $\varphi^*(\bar{x};\bar{b})$ schwach normal. Wegen $\models \varphi^*(\bar{a};\bar{b})$ gilt also $\varphi^*(\bar{a}';\bar{b})$; insbesondere ist $\bar{b} \in \mathrm{acl}(\bar{a}')$ wegen $\models \chi(\bar{a}';\bar{b}) \wedge \exists_{\leqslant n} \bar{y}' \chi(\bar{a}';\bar{y}')$, und es gilt $\models \varphi(\bar{a}';\bar{b})$. ∎

Algebraische Stationarität

In diesem Unterabschnitt sollte man sich vorstellen, daß T Imaginärenelimination hat.

Definition B.2.10
Sei $\bar{a}/E$ ein beliebiger Typ, $B \supseteq E$. Eine Erweiterung $\bar{a}'/B$ von $\bar{a}/E = \bar{a}'/E$ heißt **algebraisch frei,** falls $\mathrm{acl}(\bar{a}') \cap \mathrm{acl}\, B = \mathrm{acl}(\bar{a}') \cap \mathrm{acl}\, E$ gilt.

Ein Typ $\bar{a}/E$ heißt **algebraisch stationär,** falls er auf alle Mengen $B \supseteq E$ genau eine algebraisch freie Erweiterung hat.

T heißt **algebraisch stationär,** falls alle Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen algebraisch stationär sind.

In modularen Theorien ist also „algebraisch frei" also dasselbe wie „$\overset{a}{\downarrow}$-frei".

Bemerkung B.2.11
T ist genau dann algebraisch stationär, wenn $\overset{a}{\downarrow}$ folgendes Axiom erfüllt:

[Stat] $A \underset{E}{\downarrow} B,\ A' \underset{E}{\downarrow} B,\ f : A \underset{\mathrm{acl}\, E}{\equiv} A' \quad \Rightarrow \quad f : A \underset{B}{\equiv} A'$. ∎

Bemerkung B.2.12 (T mit Imaginärenelimination)
T ist genau dann algebraisch stationär, wenn T stabil und 1-basiert ist.

Beweis: "$\Leftarrow$": Wenn T stabil und 1-basiert ist, dann ist nach Satz 3.3.1 $\overset{a}{\downarrow} = \overset{d}{\downarrow}$. Weil T Imaginärenelimination hat, erfüllt $\overset{d}{\downarrow}$ [Stat], also auch $\overset{a}{\downarrow}$.

"$\Rightarrow$": Sei T algebraisch stationär. Überprüfen wir zunächst, daß $\overset{a}{\downarrow}$ [mon2] erfüllt (und ACL daher modular ist). Dabei werden wir Lemma 4.1.4 benutzen. Insbesondere folgt aus [ex] und [trans], daß $\overset{a}{\downarrow}$ auch [ext] erfüllt.

Sei dazu $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B \supseteq D \supseteq E$. Insbesondere ist dann $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} D$, und weil $\overset{a}{\downarrow}$ [ext] erfüllt, gibt es einen D-Isomorphismus $f : A \underset{D}{\equiv} A'$, so daß $A' \underset{D}{\overset{a}{\downarrow}} B$ gilt. Wegen [inv] und $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} D$ ist dann auch $A' \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} D$, und mit [trans] folgt $A' \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$. Natürlich ist der D-Isomorphismus f auch ein E-Isomorphismus, und daher folgt aus $A \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$ und $A' \underset{E}{\overset{a}{\downarrow}} B$ mittels [Stat], daß er auch ein B-Isomorphismus ist. Schließlich folgt mittels [inv] aus $A' \underset{D}{\overset{a}{\downarrow}} B$, daß auch $A \underset{D}{\overset{a}{\downarrow}} B$ ist.

(Somit ist $\overset{a}{\downarrow}$ eine Unabhängigkeitsrelation und erfüllt [Stat]. Insbesondere erfüllt $\overset{a}{\downarrow}$ damit auch das Beschränktheitsaxiom von [HH84]. Daher ist T stabil und $\overset{a}{\downarrow} = \overset{d}{\downarrow}$. Wir brauchen aber nicht auf diese Arbeit zurückzugreifen.)

Behauptung Sei M $|T|$-saturiert mit $|M| \geqslant 2^{|T|}$. Dann ist $|S(M)| \leqslant |M|$.

Ein Typ $\mathrm{tp}(a/M)$ ist nach dem Lemma B.2.9 bestimmt durch

- $\mathrm{acl}(a) \cap M$
- $\mathrm{tp}\big(a/\,\mathrm{acl}(a) \cap M\big)$.

Wie man leicht einsieht, ist $\mathrm{acl}(a) \cap M$ der Durchschnitt zweier endlich erzeugter Teilmengen von M:

Sei nämlich $a' \in M$, $a' \underset{\mathrm{acl}(a)\cap M}{\equiv} a$ (M $|T|$-saturiert), so daß $\mathrm{acl}(a) \cap M = \mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}(a')$. Sei $a'' \in M$, $a'' \underset{\mathrm{acl}(a')}{\equiv} a$. Damit ist $\mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}(a') = \mathrm{acl}(a'') \cap \mathrm{acl}(a')$.

M hat höchstens $|M|$ endlich erzeugte Teilmengen, also auch nicht mehr endliche Schnitte von solchen. Schließlich gibt es über jedem solchen Schnitt höchstens $2^{|T|}$ Typen.

Damit ist die Behauptung bewiesen und T folglich stabil. Nach Satz A.0.1 ist T 1-basiert. ∎

Bemerkung B.2.13 (T mit Imaginärenelimination)
Wenn T algebraisch stationär ist, dann ist jeder Typ über einer algebraisch abgeschlossenen Menge schwach normal. Insbesondere ist dann T schwach normal.

Beweis: Sei B algebraisch abgeschlossen, und seien $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$, $\mathrm{tp}(\bar{a}'/B)$ zwei Typen, die dieselben schwach normalen Formeln enthalten. Nach dem Lemma ist $\mathrm{acl}(\bar{a}) \cap B = \mathrm{acl}(\bar{a}') \cap B = E$ und $\mathrm{tp}(\bar{a}/E) = \mathrm{tp}(\bar{a}'/E)$. Also sind $\bar{a}/E$ und $\bar{a}'/E$ zwei algebraisch freie Erweiterungen desselben algebraisch stationären Typs $\bar{a}/E = \bar{a}'/E$ und damit identisch. ■

Satz B.2.14
Die folgenden Eigenschaften von T sind äquivalent:

- T ist schwach normal.
- T^{eq} ist schwach normal.
- T^{eq} ist algebraisch stationär.

Beweis: Wenn T^{eq} algebraisch stationär ist, dann ist T^{eq} nach Bemerkung B.2.13 auch schwach normal. Wenn T^{eq} schwach normal ist, dann ist natürlich auch T schwach normal. Es bleibt noch zu zeigen: Wenn T schwach normal ist, erfüllt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}$ für T^{eq} [Stat].

Seien dazu (in $\mathfrak{C}^{eq}$) algebraisch abgeschlossene Mengen A, A', B und $D = A \cap B = A' \cap B$ sowie ein D-Isomorphismus $f : A \to A'$ gegeben, den wir als B-Isomorphismus entlarven wollen.

Nach Lemma 4.1.4 erfüllt die Relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}$ immer die Axiome [ex] und [trans], also erfüllt sie auch [ext]. Daher können wir (indem wir die Mengen falls nötig vergrößern) annehmen, daß A, A' und B genügend saturierte Modelle sind.

Sei also $a \in A$. Zu zeigen: $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(f(a)/B)$. Da A ein Modell ist, gibt es ein Tupel $\bar{a}^* \in A \cap \mathfrak{C}$, so daß $a = \pi_{\bar{x}}(\bar{a}^*)$ die Projektion von $\bar{a}^*$ ist. Es genügt also, zu zeigen: $\mathrm{tp}(\bar{a}^*/B) = \mathrm{tp}\left(f(\bar{a}^*)/B\right)$. Dafür wiederum genügt es, daß $\bar{a}^*$ und $f(\bar{a}^*)$ dieselben schwach normalen Formeln über B erfüllen, d.h., daß

$$\mathrm{tp}\left(\bar{a}^*/\,\mathrm{acl}(\bar{a}^*) \cap B\right) = \mathrm{tp}\left(f(\bar{a}^*)/\,\mathrm{acl}\left(f(\bar{a}^*)\right) \cap B\right).$$

Und tatsächlich ist

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{acl}(\bar{a}^*) \cap B & = & \mathrm{acl}(\bar{a}^*) \cap D \\ & & \shortparallel \\ \mathrm{acl}\left(f(\bar{a}^*)\right) \cap B & = & \mathrm{acl}\left(f(\bar{a}^*)\right) \cap D \end{array}$$

sowie $\mathrm{tp}\left(\bar{a}^*/\,\mathrm{acl}(\bar{a}^*) \cap D\right) = \mathrm{tp}\left(f(\bar{a}^*)/\,\mathrm{acl}\left(f(\bar{a}^*)\right) \cap D\right)$. ■

Korollar B.2.15
Die Theorie T ist genau dann schwach normal, wenn sie stabil und 1-basiert ist.

Beweis: Wenn T schwach normal ist, erfüllt T^{eq} die Voraussetzungen von Satz B.2.12, ist also stabil. Damit ist auch T stabil und 1-basiert. ■

Module

Sei R ein Ring und $\mathcal{L}_R$ die einsortige Sprache der R-Module, in der Signatur $\{0, 1, +, -\} \cup R$. T_R sei die (unvollständige!) Theorie der linken R-Module.

Bemerkung B.2.16
Jede positiv primitive Formel $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_R$ definiert eine Untergruppe $\varphi^{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}_R^n$ ($\bar{x}$ ein n-Tupel) und ist T_R-äquivalent zu einer Formel $\exists \bar{y} A(\bar{x}\bar{y})^T = \bar{0}$, mit einer Matrix A (deren Einträge aus R sind). ■

Definition B.2.17
Ein **Invariantensatz** ist ein $\mathcal{L}_R$-Satz mit der Bedeutung $(\varphi^{\mathfrak{C}} : \varphi^{\mathfrak{C}} \cap \psi^{\mathfrak{C}}) \leqslant m$, wobei $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x}) \in \mathcal{L}$ positiv primitive Formeln sind.

Satz B.2.18
Jede $\mathcal{L}_R$-Formel ist T_R-äquivalent zu einer booleschen Kombination aus positiv primitiven Formeln und Invariantensätzen.

Beweis: Ein übersichtlicher Beweis steht am Anfang von **[Hod93, Appendix A.1].** ▲

Bemerkung B.2.19
Wenn T eine Vervollständigung von T_R ist, ist jede positiv primitive Formel normal. Insbesondere ist dann auch T normal. ■

Äquivalenzrelationen

CEI_I Für eine beliebige Indexmenge I sei $\mathcal{L}_I$ die einsortige Sprache der Signatur $\{\epsilon_i \mid i \in I\}$, wobei die ϵ_i zweistellige Relationssymbole sind.

Die Theorie CEI_I (vgl. [Bal88, III, Example 4.12]) ist definiert als die $\mathcal{L}_I$-Theorie, die besagt: Die Relationen ϵ_i sind Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen unendlichen Klassen. Wenn $i_1, \ldots, i_n \in I$ paarweise verschieden, und wenn $E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}$ Äquivalenzklassen modulo $\epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{i_n}$ sind, dann ist ihr Durchschnitt $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_n}$ nicht leer.

REI_I Für eine lineare Ordnung I ist REI_I (vgl. [Bal88, III, Example 4.3] und [Pil96b, Remark 4.3.5]) eine weitere $\mathcal{L}_I$-Theorie. Sie besagt: Die Relationen ϵ_i sind Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen unendlichen Klassen. Wenn $i < j$ ist, dann wird jede Äquivalenzklasse von ϵ_i durch ϵ_j in unendlich viele ϵ_j-Klassen verfeinert.

(Die Theorien EER_α in [Bal88, XVII, Example 3.9] sind identisch mit $\mathrm{REI}_{\alpha^{op}}$ —α^{op} ist dabei α mit der umgekehrten Ordnung.)

Die Theorien CEI_I und REI_I sind vollständig und haben Quantorenelimination. Folglich sind sie normal. Darüberhinaus sind sie trivial.

- Wenn I unendlich ist, hat der einzige 1-Typ in $S(\mathrm{CEI}_I)$ unendliches Gewicht. Insbesondere hat CEI_I dann dichte forkende Ketten. Dasselbe gilt für $\mathrm{REI}_{\mathbb{Q}}$.
- REI_α hat für unendliche Ordinalzahlen α keine dichten forkenden Ketten, ist aber ebenfalls nicht superstabil.
- $\mathrm{REI}_{\alpha^{op}}$ ($= \mathrm{EER}_\alpha$) ist dagegen superstabil, aber von unendlichem U-Rang, sofern α unendlich ist.

Einstellige Funktionen

Sei $\mathcal{L}_f$ die einsortige Sprache, deren Signatur nur aus dem einstelligen Funktionssymbol f besteht und sei T_f ist eine beliebige vollständige $\mathcal{L}_f$-Theorie mit unendlichen Modellen.

Satz B.2.20
Jede $\mathcal{L}_f$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ ist äquivalent modulo T zu einer booleschen Kombination von Formeln der Gestalt

$$\psi(x_i)$$

und solchen der Gestalt

$$f^m(x_i) = f^n(x_j)$$

(mit $m, n \in \omega$).

Beweis: Siehe **[Tof91b, Lemma 1].** ▲

Korollar B.2.21
T_f ist normal.

Beweis: Parameterfreie Formeln und Formeln ohne freie Variable sind automatisch normal, Formeln der Gestalt $f^m(x) = f^n(b)$ natürlich ebenfalls. ■

Korollar B.2.22
T_f ist superstabil. T_f ist genau dann $\aleph_0$-stabil, wenn $|S_1(T_f)| \leqslant \aleph_0$ gilt.

Beweis: Für $M \models T_f$ ist $|S_1(M)| = |S_1(\emptyset)| + |M|$, denn $tp(a/M)$ ist bereits bestimmt durch $tp(a/\emptyset)$, die kleinste natürliche Zahl n, so daß $f^n(a) \in M$ (oder die Tatsache, daß es keine solche Zahl gibt), sowie $f^n(a)$. ■

Satz B.2.23
Jeder 1-Typ a/E hat U-Rang $U(a/E) \leqslant \omega$.

Beweis: Siehe **[Tof91a, Proposition 1].** ▲

Satz B.2.24
T_f ist trivial.

Beweis: Nach **[Tof91a, Proposition 3].** sind die regulären Typen von T_f trivial. Nach Korollar A.1.7 ist daher T_f trivial. ▲

In [Shi72] finden sich Charakterisierungen der $\aleph_0$-kategorischen und der überabzählbar kategorischen abzählbaren Theorien einer einstelligen Funktion.

Satz B.2.25
T_f erfüllt die Vaught'sche Vermutung.

Beweis: Siehe **[Mar80]** oder **[Mil81]** für die beiden ursprünglichen Beweise. Später wurde die Vaught'sche Vermutung durch Verallgemeinerung und Verfeinerung derselben Methoden in **[SHM84]** für $\aleph_0$-stabile Theorien bewiesen. Wenn T_f nicht $\aleph_0$-stabil ist, ist $|S(T_f)| > \aleph_0$, und nach einem Satz im Abschnitt über endlich kodierte Theorien folgt, daß T_f dann bereits $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle hat. ▲

(Aus [Pil92], [LP92] und der Interpretierbarkeit einer unendlichen Gruppe in jeder nichttrivialen 1-basierten stabilen Theorie ergibt sich die Verallgemeinerung: Jede 1-basierte triviale stabile Theorie erfüllt die Vaught'sche Vermutung.)

B.3 Weitere Beispiele

Freie Funktion und freie Pseudoebene

Die Theorie T_f^1 der *freien Funktion* (vgl. [Pil96b, 4, Example 6.2]) ist die einsortige Theorie einer einstelligen Funktion f ohne periodische Punkte, so daß jeder Punkt unendlich viele Urbilder hat. Aus den Ergebnissen über einstellige Funktionen folgt, daß T_f^1 normal, trivial und $\aleph_0$-stabil ist.

Die Theorie T_R der *freien Pseudoebene* ist die einsortige Theorie eines zweistelligen Relationssymbols R, das die Nachbarrelation zwischen den Ecken eines ungerichteten Graphs ohne Zykel und Schleifen beschreibt, in welchem jede Ecke unendlich viele Nachbarn hat. Dieses Beispiel findet sich in [Pil96b, Example 6.1], [Goo91] und cite[S. 261]Pillay:SimpleSuperstable. T_R ist Redukt einer Definitionserweiterung von T_f^1:

$$\forall xy\Big[xRy \leftrightarrow \big(f(x) = y \vee f(y) = x\big)\Big],$$

und ist daher ebenfalls $\aleph_0$-stabil. Allerdings ist T_R im Gegensatz zu T_f^1 nicht 1-basiert, sondern nur 2-basiert und gut (vgl. Satz A.7.1). Außerdem ist T_R noch vollkommen trivial.

Paarungsfunktion ohne Schleifen

Dieses Beispiel findet sich in **[BP88]**, in [Low94, Example 2] und in [Pil96b, 4, Example 2.15(ii)].

Sei p ein zweistelliges Funktionssymbol und $\mathcal{L}_p$ die einsortige Sprache mit der Signatur $\{p\}$. Sei T_p die $\mathcal{L}_p$-Theorie, die durch das folgende Axiomensystem gegeben ist:

$$\{\forall z \exists_{=1} xy\big(p(x,y) = z\big)\} \quad \cup$$

$$\{\forall x\bar{y}\big(t(x,\bar{y}) \neq x\big) \mid t(x,\bar{y}) \text{ ein nichttrivialer } \mathcal{L}_p\text{-Term}\}.$$

Die Modelle von T_p sind also genau diejenigen $\{p\}$-Strukturen M, für welche $p : M^2 \longrightarrow M$ eine Bijektion ist und die Abbildungen $t(\bullet, \bar{b}) : M \longrightarrow M$ fixpunktfrei sind für alle $\bar{b} \in M$ und alle nichttrivialen $\mathcal{L}_p$-Terme $t(x,\bar{y})$. Die Bezeichnung „Paarungsfunktion ohne Schleifen" ergibt sich daraus, daß diese Abbildungen dann auch keine periodischen Punkte haben können.

Für die Untersuchung der Eigenschaften von T_p ist es sinnvoll, zu einer Definitionserweiterung von T_p überzugehen.

Seien g und d zwei einstellige Funktionssymbole. Seien $\mathcal{L}_{gd}$ und $\mathcal{L}_{pgd}$ die einsortigen Sprachen mit der Signatur $\{g, d\}$ bzw. $\{p, g, d\}$. Sei die Theorie T_{pgd} gegeben durch die Axiome von T_p und das zusätzliche Axiom

$$\forall z\big(p(g(z), d(z)) = z\big).$$

Damit ist T_{pgd} eine konservative Definitionserweiterung von T_p.

Sei schließlich T_{gd} die Einschränkung von T_{pgd} auf $\mathcal{L}_{gd}$. Wie man leicht sieht, wird T_{gd} axiomatisiert durch

$$\{\forall z \exists_{=1} xy\big(g(z) = x \wedge d(z) = y\big)\} \quad \cup$$

$$\{\forall x\bar{y}\big(t(z) \neq z\big) \mid t(z) \text{ ein nichttrivialer } \mathcal{L}_{gd}\text{-Term}\}.$$

Auch von T_{gd} ist T_{pgd} eine konservative Definitionserweiterung.

T_{gd} ist eine vollständige konsistente Theorie mit Quantorenelimination (vgl. **[BP88, §1]**). Es folgt, daß T_{gd} normal ist. T_{gd} ist auch trivial (vgl. **[BP88, §2]**).

Andererseits hat $T_g d$ einen Typ vom Gewicht $\aleph_0$, nämlich

$$\{t(x) \neq t'(x) \mid t \neq t' \ \mathcal{L}_{gd}\text{-Terme}\} \in S(\emptyset),$$

und hat auch nicht die Endlichkeitseigenschaft (vgl. **[Low94, Example 2]**).

Freie Operation

In **[Goo91, S. 627]** findet sich das folgende Beispiel:

Sei e ein zweistelliges Funktionssymbol, mit Argumenten der Sorten F („Funktionen") und S („Elemente") und Werten der Sorte S. Sei $\mathcal{L}_e$ die zweisortige Sprache mit der Signatur $\{e\}$. Wir fassen e als Evaluationsabbildung auf und schreiben $f(a)$ für $e(f,a)$.

Die $\mathcal{L}_e$-Theorie T_e sei gegeben durch die folgenden Axiome:

F und S sind unendlich. Jedes $f \in F$ ist eine Bijektion auf S. $f_1^{k_1} \circ \cdots \circ f_n^{k_n}$ ist fixpunktfrei für alle $f_1, \dots, f_n \in F$ und alle $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $n > 0$ und $f_i \neq f_{i+1}$.

Die Theorie $_e$ ist $\aleph_0$-stabil und trivial, aber sie ist nicht total trivial.

Körperlose ungute superstabile Theorie

Bei dem folgenden Beispiel von Hrushovski (siehe **[Hru87, Example 1, S. 145];** bei Pillay kurz zitiert in [Pil87, S. 261]) handelt es sich um eine superstabile Theorie, die keinen algebraisch abgeschlossenen Körper interpretiert, die aber nicht gut ist.

Die Theorie hat zwei unendliche Sorten A und I, eine Abbildung $\pi : A \to I$ und eine partielle Abbildung $+ : A^2 \to A$. $a + b$ ist für $a, b \in A$ genau dann definiert, wenn $\pi(a) = \pi(b)$ ist. π ist surjektiv, und für jedes $i \in I$ ist die Faser $A_i = \pi^{-1}(\{i\})$ eine abelsche Gruppe mit der Addition $+$. Jede dieser Gruppen ist teilbar, torsionsfrei und nichttrivial (daher unendlich), so daß sie als $\mathbb{Q}$-Vektorraum aufgefaßt werden kann.

Dazu kommt noch eine Abbildung $\sigma : I \times A \to A$, so daß, für jedes $j \in I$, $\sigma_j = \sigma(j, \bullet) : A \to A_j$ ein Homomorphismus ist. Die Einschränkungen $\sigma_{ij} = \sigma_j \restriction A_i : A_i \to A_j$ sind Isomorphismen, und es ist sogar $\sigma_{ji} \circ \sigma_{ij} = \mathrm{id}_i$, aber die Abbildungen σ_i kommutieren trotzdem nicht, denn für jedes $i \in I$ und jede linear geordnete endliche Teilmenge $F \subset I \setminus \{i\}$ gilt:

Wenn β_{jk} für $j, k \in F$ mit $j < k$ der Endomorphismus $\beta_{jk} = \sigma_{ki} \circ \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}$ ist, dann ist für jedes nichttriviale Polynom $p(\bar{x}) \in \mathbb{Q}[\bar{x}] = \mathbb{Q}[x_{jk} \mid j, k \in F;\ j < k]$ die Abbildung $p(\bar{\beta}) : A_i \to A_i$ ein Automorphismus von A_i. (Insbesondere ist der von $\{\beta_{jk} \mid j, k \in F;\ j < k\}$ erzeugte Unterring von $\mathrm{End}(A_i)$ ein frei erzeugter kommutativer Polynomring.)

Der Leser von [Hru87] kann überprüfen, daß damit eine vollständige konsistente Theorie beschrieben ist. Sie ist ω-stabil und hat neben der trivialen Dimension I noch eine lokal modulare Dimension für die Vektorräume. Der betreffende reguläre Typ ist aber nicht gut.

Random Graph

Die Theorie des *random graph* ist, in der einsortigen Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol R, die durch folgende Axiome gegebene (vollständige) Theorie:

- $\forall xy \big((x \mathrel{R} y) \leftrightarrow (y \mathrel{R} x)\big)$.
- $\forall x \neg (x \mathrel{R} y)$.
- Für alle endlichen Tupel $\bar{x} = x_0 \dots x_{m-1}$ und $\bar{y} = y_0 \dots y_{n-1}$ von Variablen und jede Teilmenge $U \subseteq m \times n$ das Axiom

$$\forall \bar{x} \left(\Big[\bigwedge_{i < i' < m} x_i \neq x_{i'} \Big] \quad \to \quad \exists \bar{y} \Big[\bigwedge_{(i,j) \in m \times n} \big(x_i \mathrel{R} y_j \leftrightarrow (i,j) \in U \big) \Big] \right).$$

Der algebraische Abschluß acl für diese Theorie ist trivial, d. h., $\operatorname{acl} A = A$ für jede Menge A. Insbesondere ist ACL distributiv. Man macht sich leicht klar, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{a}}$ ist. Es folgt, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}$ eine kanonische Unabhängigkeitsrelation ist. Daraus folgt sich weiter, daß die Theorie einfach, 1-basiert und trivial ist. Durch Typenzählen ergibt sich jedoch sofort, daß sie nicht stabil ist.

B.4 Zusammengesetzte Beispiele

Satz B.4.1
Seien T_1 und T_2 vollständige Theorien mit disjunkten Sortenmengen S_1 und S_2. Dann ist jede $\mathcal{L}(T_1 \cup T_2)$-Formel äquivalent modulo $T_1 \cup T_2$ zu einer booleschen Kombination von $\mathcal{L}(T_1)$-Formeln und $\mathcal{L}(T_2)$-Formeln.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. Die Aussage ist klar für atomare Formeln, und sie vererbt sich unter den booleschen Operatoren. So bleibt noch zu zeigen, daß sie sich auch unter Quantifizierung vererbt.

Jede boolesche Kombination von $\mathcal{L}(T_1)$- und $\mathcal{L}(T_2)$-Formeln läßt sich (auf konjunktive Normalform, und dann) auf die Gestalt

$$(\varphi_1 \vee \psi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_n \vee \psi_n)$$

bringen, mit $\varphi_i \in \mathcal{L}(T_1)$ und $\psi_i \in \mathcal{L}(T_2)$. Es genügt daher, zu zeigen, daß

$$\forall x\big[(\varphi_1 \vee \psi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_n \vee \psi_n)\big]$$

eine boolesche Kombination von $\mathcal{L}(T_1)$- und $\mathcal{L}(T_2)$-Formeln ist. Diese Formel ist äquivalent zu

$$\Big[\forall x(\varphi_1 \vee \psi_1)\Big] \wedge \cdots \wedge \Big[\forall x(\varphi_n \vee \psi_n)\Big].$$

Sei nun o. E. x von einer Sorte aus S_1. Dann ist diese Formel äquivalent zu

$$\Big[(\forall x \varphi_1) \vee \psi_1\Big] \wedge \cdots \wedge \Big[(\forall x \varphi_n) \vee \psi_n\Big],$$

und die letzte Formel ist von der gewünschten Gestalt. ■

Insbesondere ist die disjunkte Vereinigung zweier vollständiger Theorien vollständig und die disjunkte Vereinigung zweier stabiler Theorien stabil.

Ist $\mathfrak{C}_i$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{C}$, die von einer Sorte aus S_i sind, dann sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ schwach orthogonal über $\emptyset$. Daher gilt für jede beliebige Unabhängigkeitsrelation $\downfree$ auf $\mathfrak{C}$: $A_1 \underset{E}{\downfree} A_2$ für alle Mengen $A_1 \subset \mathfrak{C}_1$, $A_2 \subset \mathfrak{C}_2$ und $E \subset \mathfrak{C}$.

Daraus folgt, daß die disjunkte Vereinigung zweier trivialer stabiler Theorien eine triviale stabile Theorie ist. Ebenso ist die disjunkte Vereinigung zweier 1-basierter stabiler Theorien eine 1-basierte Theorie usw ... Wenn dagegen T_1 oder T_2 eine dieser „positiven“ Eigenschaften nicht hat, dann kann auch $T_1 \cup T_2$ sie nicht haben. Damit ist es möglich, die bereits genannten Beispiele von stabilen Theorien so zu kombinieren, daß sich fast alle Felder von Tabelle B.1 ausfüllen lassen.

Zu den Positionen TT und NTT sind mir keine Beispiele bekannt. Poizat fragte in [Goo91] nach einer total trivialen, nicht Pillay-guten stabilen Theorie. Nach Bemerkung 3.5.4 wäre eine solche Theorie weder vollkommen trivial noch 1-basiert und würde daher die Lücke TT schließen. Für die Position ET gibt es natürlich zahllose uninteressante Beispiele.

Beispiele zu den übrigen Positionen lassen sich aus den folgenden Theorien zusammensetzen:

T1
- CEI_ω (B.2).
- Paarungsfunktion ohne Schleifen (B.3).

NT1 REI_ω (B.2).

Slm Hrushovskis ungute superstabile Theorie (B.3).

ST Freie Operation (B.3).

STT Freie Pseudoebene (B.3).

ST1
- $\mathrm{REI}_{\omega^{\mathrm{op}}}$ ($=\mathrm{EER}_\omega$) (B.2).
- Freie Funktion (B.3).

E1 Vektorräume (B.2).

E ACF_p (B.1).

Alle aufgeführten Beispiele für gute Theorien sind tatsächlich sogar Pillay-gut und alle Beispiele von Theorien mit dichten forkenden Ketten haben tatsächlich einen Typ von unendlichem Prägewicht.

Stabil

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">—</th><th>gut</th><th>1-basiert</th></tr>
<tr><td>—</td><td colspan="2">0</td><td>G</td><td>1</td></tr>
<tr><td>trivial</td><td colspan="3">T</td><td rowspan="3">T1</td></tr>
<tr><td>total trivial</td><td colspan="3">TT?</td></tr>
<tr><td>vollk. trivial</td><td colspan="3">TTT</td></tr>
</table>

Stabil ohne dichte forkende Ketten

<table>
<tr><th></th><th>—</th><th>reg.-gut</th><th>gut</th><th>1-basiert</th></tr>
<tr><td>—</td><td>N</td><td>Ng</td><td>NG</td><td rowspan="2">N1</td></tr>
<tr><td>reg.-lok. mod.</td><td>Nlm</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>trivial</td><td colspan="3">NT</td><td rowspan="3">NT1</td></tr>
<tr><td>total trivial</td><td colspan="3">NTT?</td></tr>
<tr><td>vollk. trivial</td><td colspan="3">NTTT</td></tr>
</table>

Superstabil

<table>
<tr><th></th><th>—</th><th>reg.-gut</th><th>gut</th><th>1-basiert</th></tr>
<tr><td>—</td><td>S</td><td>Sg</td><td>SG</td><td rowspan="2">S1</td></tr>
<tr><td>reg.-lok. mod.</td><td>Slm</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>trivial</td><td colspan="3">ST</td><td rowspan="2">ST1</td></tr>
<tr><td>total/vollk. trivial</td><td colspan="3">STT</td></tr>
</table>

Superstabil von endlichem Rang

<table>
<tr><th></th><th>—/reg.-gut</th><th>gut/1-basiert</th></tr>
<tr><td>—</td><td>E</td><td>E1</td></tr>
<tr><td>reg.-lok. mod.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>(vollk.) trivial</td><td colspan="2">ET</td></tr>
</table>

Tabelle B.1: Drei Dimensionen der „Einfachheit“ stabiler Theorien

Literaturverzeichnis

[Aig76] Martin Aigner. *Kombinatorik II. Matroide und Transversaltheorie*. Hochschultext. Springer-Verlag, 1976.

[Bal87] John T. Baldwin, editor. *Classification Theory (Proceedings of the U.S.-Israel Workshop on Model Theory in Mathematical Logic, Chicago 1985)*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1987.

[Bal88] John T. Baldwin. *Fundamentals of Stability Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1988.

[BL71] John T. Baldwin and Alistair H. Lachlan. On strongly minimal sets. *Journal of Symbolic Logic*, 36(1):79–96, March 1971.

[BP88] Elisabeth Bouscaren and Bruno Poizat. Des belles paires aux beaux uples. *Journal of Symbolic Logic*, 53(2):434–442, June 1988.

[Bue96] Steven Buechler. *Essential Stability Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1996.

[CK90] Chen Chung Chang and H. Jerome Keisler. *Model Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science Publishers (North-Holland), 3rd edition, 1990.

[GHK$^+$80] Gerhard Gierz, Karl Heinrich Hofmann, Klaus Keimel, Jimmie D. Lawson, Michael W. Mislove, and Dana S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer-Verlag, 1980.

[Goo91] John B. Goode. Some trivial considerations. *Journal of Symbolic Logic*, 56(2):624–631, June 1991.

[Har12] Thomas Hardy. *Tess of the d'Urbervilles. A Pure Woman*. 1891/1912. zitiert nach der WWW-Seite `http://www.bibliomania.com/Fiction/hardy/tess`.

[HH84] Victor Harnik and L. A. Harrington. Fundamentals of forking. *Annals of Pure and Applied Logic*, 26:245–286, 1984.

[HLP$^+$92] Bernhard Herwig, James Loveys, Anand Pillay, Predag Tanović, and Frank O. Wagner. Stable theories without dense forking chains. *Archive for Mathematical Logic*, 31(5):297–303, 1992.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[Hru87] Ehud Hrushovski. Locally modular regular types. In Baldwin [Bal87], pages 132–164.

[Hru89] Ehud Hrushovski. Finitely based theories. *Journal of Symbolic Logic*, 54(1):221–225, 1989.

[Hru93] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Annals of Pure and Applied Logic*, 62:147–166, 1993.

[HS] Ehud Hrushovski and Gabriel Srour. A non-equational stable theory. Preprint, ?

[Iva95] A. A. Ivanov. Countably categorical structures with a distributive lattice of of algebraically closed subsets. In László Csirmáz et al., editor, *Logic Colloquium '92, Veszprém*, Studies in Logic, Language and Computation, pages 135–143. Stanford, CA: CSLI Publications, 1995.

[Kim96a] Byunghan Kim. *Forking in Simple Unstable Theories*. PhD thesis, University of Notre Dame, Indiana, 1996.

[Kim96b] Byunghan Kim. Forking in simple unstable theories. *Journal of the London Mathematical Society*, 1996? Preprint, January 1996.

[Kim96c] Byunghan Kim. The number of countable models of a countable supersimple theory. Preprint, September 1996.

[Kim96d] Byunghan Kim. Recent results on simple first order theories. Preprint, January 1996.

[KP95] Byunghan Kim and Anand Pillay. Simple theories. Preprint, November 1995.

[KPS86] Julia Knight, Anand Pillay, and Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(2):593–601, 1986.

[Kra95] Ingo Kraus. Die Geometrie lokal modularer Typen. Diplomarbeit, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, June 1995.

[Lac74] Alistair H. Lachlan. On the number of countable models of a countable superstable theory. *Fundamenta Mathematica*, 81:133–145, 1974.

[Las76] Daniel Lascar. Ranks and definability in superstable theories. *Israel Journal of Mathematics*, 23(1):53–87, 1976.

[Las84] Daniel Lascar. Relation entre le rang U et le poids. *Fundamenta Mathematica*, 121(2):117–122, 1984.

[Low92] Lee Fong Low. *Some Properties of Geometrically Simple Stable Theories*. PhD thesis, University of Notre Dame, Indiana, February 1992.

[Low94] Lee Fong Low. Lattice of algebraically closed sets in one-based theories. *Journal of Symbolic Logic*, 59(1):311–321, March 1994. Chapter 2 of [Low92].

[LP92] Lee Fong Low and Anand Pillay. Superstable theories with few countable models. *Archive for Mathematical Logic*, 31(6):457–465, August 1992.

[Mak84] M. Makkai. A survey of basic stability theory, with particular emphasis on orthogonality and regular types. *Israel Journal of Mathematics*, 49(1–3):181–238, 1984.

[Mar80] Leo Marcus. The number of countable models of a theory of one unary function. *Fundamenta Mathematica*, 108:171–181, 1980.

[May88] Laura L. Mayer. Vaught's conjecture for o-minimal theories. *Journal of Symbolic Logic*, 53(1):146–159, March 1988.

[MB86] Chinthayamma Malliah and Parameshwara Bhatta. Equivalence of M-symmetry and semimodularity in lattices. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 18:338–342, 1986.

[Mei96] Martin Meier. Über die elementare Theorie von Vektorräumen mit einer ausgezeichneten Familie von Unterräumen. Diplomarbeit, Albrecht-Ludwigs-Universität Freiburg, Mathematische Fakultät, Institut für mathematische Logik, December 1996.

[Mil81] Arnold W. Miller. Vaught's conjecture for theories of one unary operation. *Fundamenta Mathematica*, 111:135–141, 1981.

[MMP96] David Marker, Margit Messmer, and Anand Pillay. *Model Theory of Fields*. Lecture Notes in Logic. Springer-Verlag, 1996.

[Pil83a] Anand Pillay. Countable models of stable theories. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):666–672, December 1983.

[Pil83b] Anand Pillay. A note on tight stable theories. *Archive for Mathematical Logic*, 23:147–152, 1983.

[Pil84] Anand Pillay. Countable modules. *Fundamenta Mathematica*, 121:125–132, 1984.

[Pil86] Anand Pillay. Some remarks on definable equivalence relations in O-minimal structures. *Journal of Symbolic Logic*, 51(3):709–714, 1986.

[Pil87] Anand Pillay. Simple superstable theories. In Baldwin [Bal87], pages 247–263.

[Pil89] Anand Pillay. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 43:147–160, 1989.

[Pil92] Anand Pillay. Countable models of 1-based theories. *Archive for Mathematical Logic*, 31(3):163–169, February 1992.

[Pil96a] Anand Pillay. Definability and definable groups in simple theories. Preprint, July 1996.

[Pil96b] Anand Pillay. *Geometrical Stability Theory*. Oxford Logic Guides. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[Poi85] Bruno Poizat. *Cours de Théorie des Modèles*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[PS84] Anand Pillay and Gabriel Srour. Closed sets and chain conditions in stable theories. *Journal of Symbolic Logic*, 49(4):1350–1362, December 1984.

[PS86] Anand Pillay and Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(2):565–592, 1986.

[PS88] Anand Pillay and Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. III. *Transactions of the American Mathematical Society*, 309(2):469–476, 1988.

[Rot95] Philipp Rothmaler. *Einführung in die Modelltheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.

[She78] Saharon Shelah. *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science Publishers (North-Holland), first edition, 1978.

[She80] Saharon Shelah. Simple unstable theories. *Annals of Mathematical Logic*, 19:177–203, 1980.

[She96] Saharon Shelah. Toward classifying unstable theories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 80(3):229–255, August 1996.

[Shi72] Yu. E. Shishmarev. Categorical theories of a function. *Mathematical Notes, USSR Academy of Science*, 11:58–63, 1972. Translated from Russian.

[SHM84] S. Shelah, L. Harrington, and M. Makkai. A proof of vaught's conjecture for ω-stable theories. *Israel Journal of Mathematics*, 49:259–278, 1984.

[Sro88a] Gabriel Srour. The notion of independence in categories of algebraic structures, Part I: Basic properties. *Annals of Pure and Applied Logic*, 38:185–213, 1988.

[Sro88b] Gabriel Srour. The notion of independence in categories of algebraic structures, Part II: s-minimal extensions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 39:55–73, 1988.

[Sro90] Gabriel Srour. The notion of independence in categories of algebraic structures, Part III: Equational classes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 47:269–294, 1990.

[Ste91] Manfred Stern. *Semimodular Lattices*. Teubner-Texte zur Mathematik. B. G. Teubner, 1991.

[Tof91a] Carlo Toffalori. Classification theory for a 1-ary function. *Illinois Journal of Mathematics*, 35(1):1–26, Spring 1991.

[Tof91b] Carlo Toffalori. Weakly normal functions. *Bollettino Unione Mat. Ital.*, 5-A(1):89–96, 1991.

[Wol94] Ror Wolf. *Nachrichten aus der bewohnten Welt*. Fischer Taschenbuch Verlag, 1991/1994.

[Zie84] Martin Ziegler. Model theory of modules. *Annals of Pure and Applied Logic*, 26:149–213, 1984.

Index