Zur Modelltheorie der Fixpunktlogik

Uwe Bosse

Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
an der Mathematischen Fakultät
der Albert-Ludwigs Universität
Freiburg i. Brsg.

November 1994

Dekan der mathematischen Fakultät:	Professor Dr. Victor Bangert
Betreuer der Dissertation und erster Referent:	Professor Dr. Jörg Flum
Zweiter Referent:	

Datum der Promotion:

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Wichtige Hilfsmittel und Definitionen **3**

1.1 Schreibweisen und Vereinbarungen 3

1.2 Grundlegende Eigenschaften der Fixpunktlogik 4

1.2.1 Der Satz von Löwenheim und Skolem für FP 7

1.2.2 Relativierung von Fixpunktformeln 10

2 In der Spielhölle der Logiker **12**

2.1 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Fixpunktlogik 12

2.1.1 Eine Vereinfachung der Spielregeln 18

2.1.2 Ein Spielerischer Zugang zu $\mathfrak{A} \models \varphi$ 20

2.1.3 Das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zum Nachweis von $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{LFP}_k} \mathfrak{B}$ . . . 23

2.1.4 Verspielte Sprechweisen 26

3 Ergebnisse für endliche Strukturen **27**

3.1 Eine Quantorenhierarchie in SFP 27

3.1.1 Ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für SFP 28

3.1.2 Die Quantorenhierarchie 29

3.1.3 SFP $\neq$ FP 36

3.2 Zwei monadische Fixpunkte sehen mehr als einer 36

4 Zur Ausdrucksstärke von MFP und MSO auf Ordnungen . . . 42

4.1 Einleitung . . . 42

4.2 Notationen und Vereinbarungen . . . 44

4.3 Die Theorieadditionssätze für MSO und MFP . . . 46

4.4 Endliche Ordnungen . . . 51

4.5 Endliche Ordnungen mit Farben . . . 52

4.5.1 Gefärbte Ordnungen als Worte . . . 52

4.5.2 Endliche deterministische Automaten . . . 53

4.5.3 Der Satz von Büchi . . . 53

4.6 ω, ω^* und $\mathbb{Z}$ mit einstelligen Prädikaten . . . 56

4.7 Wohlordnungen . . . 58

4.7.1 Die $\equiv_{\mathrm{MSO}}$-Klassen abzählbarer Wohlordnungen . . . 62

4.7.2 Ein Vergleich mit der ersten Stufe . . . 62

4.8 Zerstreute Ordnungen . . . 63

4.8.1 Einleitung und Motivation . . . 63

4.8.2 Die Kondensation zerstreuter Ordnungen . . . 64

4.8.3 Kondensate und Fixpunkte . . . 66

4.8.4 Zerstreutheit ist zu konfus für MFP . . . 69

4.8.5 Es gibt sehr viele Ordnungen der Höhe 2 . . . 72

4.8.6 Höhenbeschränkung führt zu MSO $\preccurlyeq$ MFP . . . 74

4.8.7 Repräsentanten für die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen . . . 77

4.8.8 Wie weit man in Richtung MSO $\preccurlyeq$ MFP kommt . . . 84

4.8.9 MSO $\not\preccurlyeq$ MFP in zerstreuten Ordnungen . . . 87

4.8.10 Das Spiel *gut*-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . . . 91

4.8.11 Zurück zu MSO $\not\preccurlyeq$ MFP . . . 96

4.8.12 Wie der $\exists$rhalter mit den $\mathcal{Z}_q$ spielt . . . 100

Einleitung

Monotone Mengenabbildungen und deren kleinste Fixpunkte treten überall in der Mathematik auf. Die Borel-Mengen in der Maßtheorie, der algebraische Abschluß eines Körpers, die von einer Teilmenge erzeugte algebraische Substruktur, das sind Beispiele dafür. Eine systematische Untersuchung solcher Abbildungen findet man bei Moschovakis [Mo74]. Die Idee, eine Logik zu bilden, in der Fixpunkte als definierbare Prädikate zur Verfügung stehen, trat allerdings erst mit der Entwicklung der Theorie der endlichen Modelle und ihrem Bezug zur Komplexitätstheorie auf. Die Fixpunktlogik ist hier zu einer der wichtigsten Erweiterungen der Sprache der ersten Stufe geworden. Eine der Aufgaben des Logikers in der sogenannten endlichen Modelltheorie ist, zu untersuchen, inwiefern gewisse Komplexitätsklassen mit logischen Sprachen zu tun haben, wie etwa die Komplexität der *Berechnung* eines Problems mit der Komplexität seiner logischen *Beschreibung* zusammenhängt.

Wo gerechnet wird, da spielen Iterationen, Rekursionen, Schleifen eine Rolle. In der ersten Stufe ist das nicht nachvollziehbar. Ein Beispiel: Der einfachste Automat kann festellen, ob eine Ordnung geradzahlig viele Elemente hat, kein Satz der ersten Stufe beschreibt aber Geradzahligkeit, d.h. gilt genau in geradzahligen Ordnungen. Diesen Mangel an Rekursionsmöglichkeit hat die Fixpunktlogik nicht mehr. Sie erlaubt, Teilmengen iterativ zu gewinnen und über das zu sprechen, was am Ende bei dieser „Berechnung“ herauskommt. Tatsächlich ist so gelungen, eine wichtige Komplexitätsklasse logisch zu beschreiben: Ist $<$ ein 2-stelliges Relationssymbol eines Vokabulars σ, dann sind von endlichen σ-Strukturen, deren Träger durch $<$ linear geordnet wird, genau jene Teilklassen in polynomialer Zeit entscheidbar, die Modellklasse eines Satzes der Fixpunktlogik sind ([Imm86], [Va82]). Die Frage, ob eine Eigenschaft (geordneter Strukturen) in polynomialer Zeit entscheidbar ist, kann jetzt übersetzt werden in die Frage, ob es einen Satz der Fixpunktlogik gibt, der genau in den (geordneten) Strukturen gilt, die sie besitzen. Will man umgekehrt zeigen, daß eine Eigenschaft nicht in polynomialer Zeit entscheidbar ist, dann kann man versuchen zu zeigen, daß sie nicht in der Fixpunktlogik beschreibbar ist. Auf diese Weise könnte man theoretisch auch das Problem P$\neq$NP? angehen.

Doch wie beweist man, daß kein Satz einer Logik eine Eigenschaft beschreibt? Für die erste Stufe (und auch für andere Logiken) verfügt man bei dieser Frage über ein mächtiges Hilfsmittel, das sogenannte Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel. Es wird immer dann eingesetzt, wenn man zeigen will, daß die erste Stufe gewisse Eigenschaften, z.B. die Geradzahligkeit von Ordnungen, nicht beschreiben kann. Ein entsprechendes Spiel für die Fixpunktlogik war bisher nicht bekannt. Diese Lücke soll die vorliegende Arbeit schließen.

Nachdem im Kapitel 1 die Fixpunktlogik, FP, eingeführt und für diese Arbeit wichtige grundlegende Eigenschaften dargestellt werden, wird in Kapitel 2 ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die Fixpunktlogik vorgestellt, in dem jeder Spielzug einem Quantor eines FP-Satzes entspricht, so daß genaue Untersuchungen, welche Quantoren in welcher Weise zur Ausdrucksstärke der Logik beitragen, möglich gemacht werden. (P$\neq$NP ist dabei allerdings noch nicht herausgekommen.) In diesem Kapitel werden noch weitere Spiele vorgestellt, die später auch noch zum Einsatz kommen.

Das Kapitel 3 stellt zwei Ergebnisse vor, die im Bereich der endlichen Strukturen mit dem Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel hergeleitet werden können. Das eine ist eine Quantorenhierarchie in der stratifizierten Fixpunktlogik, SFP. E. Grädel und G. McColm haben in [GrC92] eine ähnliche Hierarchie in TC nachgewiesen. In der Tat läßt sich mit etwas Mühe deren Ergebnis auch auf SFP ausweiten. Danach wird gezeigt, daß zwei monadische Fixpunktquantoren mehr sehen als einer. Dieses Ergebnis wird vor allem in der Hoffnung vorgestellt, ein Leser möge sich inspiriert fühlen, die angefangene Hierarchie fortzusetzen. Kapitel 3 ist mehr ein Einschub und dient nicht zum Verständnis des Folgenden.

Das folgende Kapitel 4 stellt den Hauptteil und Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Hier verlassen wir das Reich der endlichen Modelle wieder und untersuchen systematisch die Ausdrucksstärke der monadischen Fixpunktlogik auf (abzählbaren) Ordnungen und vergleichen sie mit der der monadischen zweiten Stufe. Mehr dazu findet man in der Einleitung zu diesem Kapitel.

Es sei mit dieser Arbeit ein Beitrag zur allgemeinen – nicht nur endlichen – Modelltheorie der Fixpunktlogik geleistet, dem weitere folgen mögen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Jörg Flum bedanken, der mich auf dieses schöne und ergiebige Thema für meine Dissertation gebracht hat und mir stets hilfsbereit beiseite stand, wenn ich in einem der zahlreichen Sümpfe steckte, die das Gelände mathematischer Forschungsarbeit durchziehen. Ich möchte auch Britta und Cyrus Treumann danken, die als Nichtmathematiker ohne Ablenkung durch den Inhalt mit ihren zahlreichen Vorschlägen viel zur stilistischen und orthographischen Gefälligkeit der Arbeit beigetragen haben.

Kapitel 1

Wichtige Hilfsmittel und Definitionen

1.1 Schreibweisen und Vereinbarungen

Da sich jeder Logiker längst daran gewöhnt hat, bei FO an die Logik der ersten Stufe zu denken, soll auch in diesem deutschen Text FO die erste Stufe bezeichnen („eS" würde wohl keiner verstehen). FO-*Variable* in Formeln sind Variable für Elemente einer Struktur, im Unterschied zu Relationsvariablen.

Wir wollen den formalen Apparat großzügig handhaben, so werden wir z.B. oft nicht zwischen einer Struktur $\mathfrak{A}$ und ihrem Träger A unterscheiden. $a \in \mathfrak{A}$ und $U \subset \mathfrak{A}$ stehen dann für $a \in A$ und $U \subset A$. Mit $\mathrm{Pot}(\mathfrak{A})$ soll dann die Potenzmenge von A gemeint sein.

Oft werden Elemente $a_1, \ldots, a_k \in A$ oder Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ einfach mit $\bar{a}$ bezeichnet. Die Anzahl $k =: |\bar{a}|$ geht dann aus dem Kontext hervor oder ist völlig unwichtig.

Ist $\mathcal{L}$ irgendeine Menge von Sätzen in irgendeiner Logik, dann soll $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$ heißen: In $\mathfrak{A}$ gelten genau die Sätze aus $\mathcal{L}$, die auch in $\mathfrak{B}$ gelten.

Ich hoffe, in allen Notationen und Sprechweisen dem allgemein Üblichen zu folgen. Im Zweifel folge ich dem Prinzip ‚mehr Worte, weniger (und manchmal vielleicht nicht ganz kleinlich exakter) Formalismus' und werde damit hoffentlich zur leichteren Lesbarkeit der Arbeit beitragen.

1.2 Definition und grundlegende Eigenschaften der Fixpunktlogik

Zunächst einmal sollten wir genau definieren, worum es sich bei der Fixpunktlogik, FP, handelt, was es heißt, über positiv definierbare Operatoren sprechen zu können. Sei σ eine Signatur aus Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen. Außer den Symbolen aus σ und den von FO her bekannten treten in einer Fixpunktformel noch Relationsvariablen auf, für die große Buchstaben X, Y, Z verwendet werden. Die Stelligkeit einer solchen Variablen geht aus dem Kontext hervor.

Die Syntax von Fixpunktformeln der Signatur σ ergibt sich aus dem im folgenden beschriebenen Kalkül. Gleichzeitig definieren wir auch den *Quantorenrang* einer Formel φ, $qr(\varphi)$, und den *Fixpunktrang*, $FPqr(\varphi)$.

(At) Atomare und negiert atomare erste-Stufe-Formeln über σ und (positive) Formeln der Gestalt $Xt_1 \ldots t_n$ mit einer n-stelligen Relationsvariablen X und Termen $t_1, \ldots, t_n$ sind FP-Formeln. Ihr Quantoren- und Fixpunktrang ist 0.

($\vee, \wedge$) Sind φ und ψ FP-Formeln , dann auch $(\varphi \vee \psi)$ und $(\varphi \wedge \psi)$.
$(FP)qr(\varphi \wedge \psi) = (FP)qr(\varphi \vee \psi) = \max((FP)qr(\varphi), (FP)qr(\psi))$. [1]

($\exists, \forall$) Ist φ eine FP-Formel, dann auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$.
$qr(\exists x\varphi) = qr(\forall x\varphi) = qr(\varphi) + 1$. Der Fixpunktrang bleibt unverändert.

(FP) Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X)$ eine FP-Formel mit freier n-stelliger Relationsvariablen X und freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann sind $[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]t_1, \ldots, t_n$ und $[\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]t_1, \ldots, t_n$ FP-Formeln. $\bar{x}, X$ müssen dabei nicht die einzigen freien Variablen in φ sein. Die $\bar{x}$ werden Fixpunktvariablen genannt, die anderen freien Variablen „Parameter".

In $[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}$ und $[\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}$ sind die Variablen $\bar{x}$ und X gebunden, die Variablen unter $t_1, \ldots, t_n$ sind frei.
$(FP)qr([\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}) = (FP)qr([\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}) = (FP)qr(\varphi) + 1.$

Mit FP_k wollen wir die Menge der Fixpunktsätze vom Quantorenrang höchstens k bezeichnen. FP_k^t Sei die Menge aller Fixpunktsätze in FP_k, in denen die Fixpunktvariablen eine Stelligkeit von höchstens t haben. Für die monadische Fixpunktlogik FP^1 schreiben wir auch MFP bzw. MFP_k für FP_k^1.

Äquivalent zu den Schreibweisen $X\bar{t}$ und $[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi]\bar{t}$ wollen wir $\bar{t} \in X$ bzw. $\bar{t} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi$ verwenden.

[1] Diese Gleichung gilt sowohl für qr als auch für $FPqr$.

Die Semantik von FP-Formeln: Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und β eine Belegung sowohl der FO-Variablen als auch der Relationsvariablen. Was $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ bedeutet müssen wir noch erklären, falls φ die Gestalt $\bar{t} \in \mathrm{QFP}_{\bar{x},X}\psi$ hat (mit Q = L,G). Die anderen Fälle sind von der ersten Stufe her bekannt. Sei etwa X k-stellig. Dann definiert $\psi(x_1, \ldots, x_k, X)$ in $\mathfrak{A}$ eine Funktion

$$\begin{array}{rlcl} F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi\bar{x}X}: & \mathrm{Pot}(A^k) & \to & \mathrm{Pot}(A^k) \\ & X & \mapsto & \{\bar{a} \mid (\mathfrak{A}, \beta) \models \psi(\bar{a}, X)\} \ . \end{array}$$

Da X nur positiv in ψ auftritt, ist diese Funktion monoton, d.h. für $U \subset V$ gilt auch $F^{(\mathfrak{A},\beta)}_{\psi}(U) \subset F^{(\mathfrak{A},\beta)}_{\psi}(V)$. Sei jetzt Q=L, also $\varphi = \bar{t} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi$. Beginnend von $X_0 := \emptyset$ erhalten wir eine aufsteigende Kette von Teilmengen $(X_\alpha)_{\alpha<|A|^+}$ mit

$$(\uparrow) \qquad X_\alpha \ := \ F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi}(\textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta) \ .$$

X_α heißt *α-te Stufe des zu φ gehörenden Fixpunktprozesses in $\mathfrak{A}$*. Aus Mächtigkeitsgründen muß es ein kleinstes $\alpha < |\mathfrak{A}|^+$ geben mit $X_\alpha = X_{\alpha+1} =: X_\infty$, die *Abschlußordinalzahl von φ in $\mathfrak{A}$*. X_∞ ist der kleinste (least wie L) Fixpunkt von $F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi}$. Wir schreiben für ihn auch $\mathrm{LFP}(F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi\bar{x}X})$, er steht in der Fixpunktlogik als definierbare Relation $\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi$ zur Verfügung. Es ist also

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \bar{t} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi \quad \Leftrightarrow \quad (\beta(t_1), \ldots, \beta(t_k)) \in \mathrm{LFP}(F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi\bar{x}X}) \ .$$

Entsprechend ist $\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\psi$ der größte Fixpunkt $\mathrm{GFP}(F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi\bar{x}X})$ von $F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi}$. Man erhält ihn, wenn man beginnend mit $Y_0 := A^k$ ähnlich wie in $(\uparrow)$ eine absteigende Folge von Mengen $Y_\alpha := F^{\mathfrak{A},\beta}_{\psi}(\bigcap_{\beta<\alpha} Y_\beta)$ definiert. Auch diese Folge wird stationär im größten Fixpunkt, der als $\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\psi$ in der Fixpunktlogik zur Verfügung steht.

Bei der Lektüre von Untersuchungen über die Fixpunktlogik wird man selten auf den größten Fixpunkt GFP stoßen. Das liegt daran, daß er, wie Lemma 1 zeigen wird, als Komplement eines kleinsten Fixpunktes auftritt. Bei unserer Definition der Fixpunktlogik haben wir Negationen nur vor atomaren erste-Stufe-Formeln zugelassen, was sowohl den GFP- als auch den $\forall$-Quantor unverzichtbar gemacht hat. Da man gemeinhin nicht auf den $\forall$-Quantor in der ersten Stufe verzichtet, sehe ich es als konsequent an, auch den GFP-Quantor in der Fixpunktlogik zu verwenden. Selbstverständlich werden wir in Zukunft auch mit Fixpunktsätzen arbeiten, bei denen die Negation an beliebiger Stelle stehen darf, wir werden also zu obigen Bildungsregeln je nach Bedarf noch folgende hinzunehmen:

($\neg$) Ist φ eine Fixpunktformel, dann auch $\neg\varphi$. Ist X in φ frei und positiv, dann tritt X in $\neg\varphi$ negativ auf, tritt X in φ negativ auf, dann in $\neg\varphi$ positiv.

Wir werden dafür (z.B. bei Beweisen mit Induktion über den Aufbau von FP-Formeln) die Regeln ($\wedge$), ($\forall$) und (GFP) weglassen. Dann muß man allerdings die Anwendung der Fixpunktquantoren $\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}$ und $\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}$ auf Formeln $\varphi(\bar{x},X)$ beschränken, in denen X nur positiv auftritt. Das bedeutet, an jeder Stelle, an der X auftritt, steht es im Wirkungsbereich von geradzahlig vielen Negationssymbolen $\neg$. Das folgende Lemma zeigt, daß alles auf das gleiche hinausläuft, wie nämlich der GFP-Quantor dual zum LFP-Quantor ist.

Ist $\psi(X)$ eine Formel mit freier Relationsvariablen X, dann soll $\psi(\neg X)$ aus ψ entstehen, indem man die Subformeln der Gestalt $X\bar{t}$ ersetzt durch $\neg X\bar{t}$ und umgekehrt. Dadurch tritt in $\neg\psi(\neg X)$ X positiv auf, wenn dies auch in $\psi(X)$ der Fall war. Wird in $\psi(X)$ X durch U belegt, dann ist das somit gleichbedeutend damit, in $\psi(\neg X)$ das Komplement von U für X einzusetzen.

Lemma 1 (Negationslemma). *Es gilt die Äquivalenz*

$$\neg[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi(\bar{x},X)]t_1,\ldots,t_n \quad\leftrightarrow\quad [\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\neg\psi(\bar{x},\neg X)]t_1,\ldots,t_n\ .$$

Beweis: Ist X_α die α-te Stufe des zu $\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi(\bar{x},X)$ gehörenden Fixpunktprozesses in $\mathfrak{A}$ und Y_α die α-te Stufe des zu $\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\neg\psi(\bar{x},\neg X)$ gehörenden Fixpunktprozesses in $\mathfrak{A}$, dann zeigt eine leichte Induktion über α, daß das Komplement von X_α gerade Y_α ist. □

Bewegt man sich dort, wo bisher die Fixpunktlogik überwiegend in Erscheinung trat, nämlich in der Welt der endlichen Modelle, und schränkt man die Stelligkeit der Fixpunkte auch nicht ein, dann sind all diese Überlegungen sowieso hinfällig. Dann kann man alle in einem Fixpunktsatz auftretenden Fixpunktprozesse zu einem einzigen riesigen (d.h. mit riesiger Stelligkeit) zusammenfassen: ein Fixpunkt genügt (vgl. [Imm86], [GS86] und [Gro92]). Der Schritt, der dabei i.a. nur in endlichen Modellen möglich ist, ist gerade die Äquivalenz eines GFP-Quantors zu einem positivem LFP-Quantor.

Ein weiteres Lemma wird uns bald noch gute Dienste leisten. Der kleinste Fixpunkt ist eben deswegen wirklich der kleinste Fixpunkt, weil er Schnitt aller Fixpunkte ist:

Lemma 2. *Ist* $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ *eine monotone Funktion, dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{LFP}(F) &= \cap\{X \mid F(X) \subset X\} \quad \textit{und}\\ \mathrm{GFP}(F) &= \cup\{X \mid X \subset F(X)\}\ .\end{aligned}$$

Beweis: Seien die Stufen X_α entsprechend wie in $(\uparrow)$ definiert. Für die Richtung „$\subset$" der ersten Gleichung zeigen wir, daß für alle α und alle $X \subset A$ aus $F(X) \subset X$ schon $X_\alpha \subset X$ folgt. Das geschieht mit einer Induktion über α. Für $\alpha = 0$ ist das klar. Sei also $F(X) \subset X$ und $\alpha > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist X_β für

$\beta < \alpha$ eine Teilmenge von X, also auch $\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \subset X$. Aus der Monotonie von F folgt dann sofort $X_\alpha = F(\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta) \subset F(X) \subset X$.

Die Richtung „$\supset$" folgt daraus, daß $\mathrm{LFP}(F)$ als eine der Mengen auftritt, die geschnitten werden: $F(\mathrm{LFP}(F)) = \mathrm{LFP}(F) \subset \mathrm{LFP}(F)$.

Die zweite Gleichung des Lemmas ist sozusagen dual zur ersten und läßt sich ganz entsprechend zeigen. □

1.2.1 Der Satz von Löwenheim und Skolem für FP

Für die Fixpunktlogik gilt der Satz von Löwenheim und Skolem:

Satz 3. *Jede erfüllbare Satzmenge mit höchstens abzählbarem Vokabular hat ein höchstens abzählbares Modell.*

Da die Fixpunktlogik vor allem in endlichen Strukturen interessierte, ist dieser Sachverhalt hinlänglich unbekannt weil in diesem Kontext bedeutungslos. Da wir hier einen Beitrag zur Ausdrucksstärke der Fixpunktlogik auch auf unendlichen Strukturen leisten wollen, darf dieser Satz natürlich nicht fehlen. Er rechtfertigt später die Beschränkung aller Betrachtungen auf abzählbare Modelle.

Der hier knapp angegebene Beweis ist die Ausführung einer Idee von J. Flum.

Beweis: Der Übersichtlichkeit halber wollen wir den Satz nur für das monadische Fragment der Fixpunktlogik, MFP, beweisen. Es sollte nicht schwer fallen, die Idee auch auf mehrstellige Fixpunkte zu verallgemeinern. Sei σ o.B.d.A. eine höchstens abzählbare Menge von Relationssymbolen. Wir werden zeigen, daß es zu gegebener unendlicher σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine $\equiv_{\mathrm{MFP}}$-äquivalente Substruktur mit höchstens abzählbarem Träger gibt. Dazu werden wir zu einer erweiterten Symbolmenge σ^* und einer σ^*-Struktur $\mathfrak{A}^*$ übergehen, in der für FO erkennbar Information über jeden möglichen Fixpunktprozeß enthalten ist. Auf diese Struktur wenden wir dann den entsprechenden Satz für FO an, gewinnen so $\mathfrak{B}^* \prec \mathfrak{A}^*$ und aus $\mathfrak{B}^*$ eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$, von der wir dann zeigen, daß sie $\equiv_{\mathrm{MFP}}$-äquivalent zu $\mathfrak{A}$ ist. Die Schritte im einzelnen:

1. Schritt. Zu jeder FP-Formel über σ der Gestalt $t \in \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{y}, \bar{Y})$ mit den angegebenen freien Variablen sei ein $|\bar{y}| + |\bar{Y}| + 2$-stelliges Relationssymbol $I_{xX\psi}$ gegeben. Das sind abzählbar viele. Wir erweitern σ zu

$$\sigma^* \;:=\; \sigma \cup \{U, O, <, T, E\} \cup \{I_{xX\psi} \mid \psi \text{ Fixpunktformel, positiv in } X\} \;.$$

Aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gewinnen wir eine σ^*-Struktur $\mathfrak{A}^*$ mit dem erweiterten Träger $A^* := A \cup \mathrm{Pot}(A) \cup \{\alpha | \alpha < |A|^+\}$, in der die Symbole aus σ wie in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden und die neuen wie folgt:

$$\begin{aligned}
U^{A^*} &:= A \ , \\
(O^{A^*}, <^{A^*}) &:= (|A|^+, <) \text{ als Wohlordnung} \ , \\
T^{A^*} &:= \mathrm{Pot}(A) \ , \\
E^{A^*} &:= \{(a, U) \mid a \in A,\ U \in \mathrm{Pot}(A),\ a \in U\} \ , \\
I^{A^*}_{xX\psi} &:= \{(\alpha, U, \bar{y}, \bar{V}) \mid \ U \text{ ist } \alpha\text{-te Stufe des zu } \mathrm{LFP}_{x,X}\psi \text{ gehörenden} \\
&\qquad \text{Fixpunktprozesses bei Belegung der Parameter} \\
&\qquad \text{mit } \bar{y} \text{ und } \bar{V}\} \ .
\end{aligned}$$

Jetzt suchen wir uns zu jeder σ-MFP-Formel φ eine σ^*-FO-Formel φ^*, die das über $\mathfrak{A}^*$ besagt, was φ über $\mathfrak{A}$ sagt. Dazu sei eine feste Zuordnung von Relationsvariablen $P, Q, \ldots$ zu erste-Stufe-Variablen $p, q, \ldots$ (die in σ-Sätzen nicht auftreten) gegeben. (Damit diese Zuordnung einfach ausdrückbar ist, werden für diesen Beweis die Relationsvariablen mit $P, Q, \ldots$ bezeichnet!)

Ist φ FO-atomar, dann sei $\varphi^* := \varphi$,

$$\begin{aligned}
(t \in P)^* &:= Etp \text{ mit der } P \text{ zugeordneten Variablen } p, \\
(\exists x \varphi)^* &:= \exists x (Ux \wedge \varphi^*) \ , \\
(\neg\varphi)^* &:= \neg\varphi^* \ , \\
(\varphi \vee \psi)^* &:= \varphi^* \vee \psi^* \ , \\
(t \in \mathrm{LFP}_{x,X}\varphi)^* &:= \exists o \exists p (Etp \wedge I_{xX\varphi} op\bar{y}\bar{q}) \ , \\
&\qquad \text{wenn } \bar{y}, \bar{Q} \text{ die Parameter in } \varphi \text{ sind.}
\end{aligned}$$

Eine einfache Induktion über den Aufbau von φ zeigt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}^* \models \varphi^*(\bar{a}, \bar{U}) \ .$$

Auf der rechten Seite ist dabei die FO-Modellbeziehung gemeint.

2. Schritt. Zu $\mathfrak{A}^*$ findet man mit dem Satz von Löwenheim und Skolem für FO eine elementar eingebettete, abzählbare Substruktur $\mathfrak{B}^*$. Eine leicht zu übersehende Schwierigkeit kann im folgenden darin bestehen, daß die Elemente von T^{B^*} nur Teilmengen von A sind, nicht unbedingt auch von $B := U^{B^*}$. Es gilt aber für alle σ^*-FO-Formeln $\varphi^*(\bar{x}, \bar{p})$ und alle $\bar{b} \in U^{B^*}$, $\bar{V} \in T^{B^*}$ (also $V_i \subset A$):

(1) $$\mathfrak{B}^* \models \varphi^*(\bar{b}, \bar{V}) \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{A}^* \models \varphi^*(\bar{b}, \bar{V}) \ .$$

3. Schritt. Wir setzen $\mathfrak{B} := (U^{B^*}, (\S^{B^*})_{\S\in\sigma})$

und überzeugen uns mit Hilfe von (1), daß $\mathfrak{B}$ eine σ-Struktur ist (daß z.B. für einstelliges $R \in \sigma$ auch $R^{B^*} \subset U^{B^*}$ ist). Unser Ziel ist, zu zeigen, daß jeder σ-MFP-Satz φ genau dann in $\mathfrak{B}$ gilt, wenn er in $\mathfrak{A}$ gilt. Dazu wollen wir uns der Äquivalenzen bedienen:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}^* \models \varphi^* \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B}^* \models \varphi^* \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \varphi \;,$$

von denen die letzte noch zu zeigen ist. Das wird man natürlich wieder mit einer Induktion über den Aufbau von φ versuchen, bei der die Relationsvariablen sehr lästig in Erscheinung treten. Als induktiv zu verifizierende Behauptung hat man dann:

Lemma 4. *Sei φ eine σ-FP-Formel, seien $\bar{b}$ Elemente aus B, $\bar{V}$ Teilmengen von A aus T^{B^*}, dann gilt*

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi^*(\bar{b}, \bar{V}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, \bar{V} \cap B) \;.$$

Der komplizierteste Fall ist $\varphi = t \in \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{y}, \bar{P})$. Spätestens an dieser Stelle ist es sinnvoll, sich zu überlegen, wie die Relation $I_{xX\psi}$ in $\mathfrak{B}^*$ interpretiert wird. O^{B^*} ist als Teil einer Wohlordnung wieder eine, in der allerdings die Elemente von ihrem Mostowski-Rang verschieden sein können. Also definieren wir für $\alpha \in O^{B^*}$

$$rg(\alpha) \;:=\; \sup\{rg(\beta) + 1 \mid \beta \in O^{B^*},\ \beta < \alpha\} \;.$$

(Das ist der Mostowski-Rang auf O^{B^*}). Damit gilt

Lemma 5.

$$I^{B^*}_{xX\psi} \;=\; \{(\alpha, P, \bar{b}, \bar{V}) \mid \alpha, P, \bar{b}, \bar{V} \in B^*,\ P \textit{ ist die } rg(\alpha)\textit{-te Stufe im Fixpunktprozeß, der zu } \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{b}, \bar{V} \cap B) \textit{ in } \mathfrak{B} \textit{ gehört.}\}$$

Ist umgekehrt $P \subset B$ die α-te Stufe des zu $\mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{b}, \bar{V} \cap B)$ in $\mathfrak{B}$ gehörenden Fixpunktprozesses, dann gibt es $P' \in T^{B^*}$ mit $P' \cap B = P$ und $\alpha' \in O^{B^*}$ mit $(\alpha', P', \bar{b}, \bar{V}) \in I^{B^*}_{xX\psi}$.

Man beweist dieses Lemma mit einer Induktion über $rg(\alpha)$ bzw. α, indem man (1) geschickt anwendet. Wesentlich ist z.B.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^* \models I_{xX\psi}op\bar{y}\bar{p} \leftrightarrow\; & (\forall o' \in O\; o \le o' \wedge \forall x \neg Exp \wedge p \in T) \vee \\ & (\exists o' < o\, \exists p' \in T\, I_{xX\psi}o'p'\bar{y}\bar{p} \wedge \forall x(Exp \leftrightarrow \psi^*(x, p', \bar{y}, \bar{p}))) \;, \end{aligned}$$

ebenso, daß $\mathfrak{A}^*$ Modell dieses Satzes ist.

Das sind die wesentlichen Gedanken, die im Lemma 4 den Schritt von ψ zu $b \in \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{b}, \bar{V})$ möglich machen sollten, in dem zu zeigen ist, daß in $\mathfrak{B}^*$

genau dann $\exists o \exists p(Ebp \wedge I_{x,X,\psi} op\bar{b}\bar{V})$ gilt, wenn b im in $\mathfrak{B}$ gebildeten Fixpunkt $\mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X, \bar{b}, \bar{V} \cap B)$ liegt. Damit sind wir am Ziel. □

In Hinblick auf die Lindströmsche Charakterisierung der ersten Stufe folgern wir sofort, daß FP den Endlichkeitssatz verletzen muß, und fragen nach einem Beispiel.

Beispiel. Sei Φ die Satzmenge in der Sprache $\{<, c_0, c_1, \ldots\}$, in der der Satz „$<$ ist eine Wohlordnung“ (s. Kap. 4.7) und für jedes $n \in \omega$ der Satz $c_{n+1} < c_n$ enthalten ist. Dann ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar, nicht jedoch Φ.

1.2.2 Relativierung von Fixpunktformeln

Es werden in dieser Arbeit sehr häufig Aussagen über definierbare Teilmengen mit Hilfe einer Relativierung formalisiert. Auch wenn es niemanden wundern wird, daß das in der Tat in der Fixpunktlogik möglich ist, sollte man es sich einmal überlegt haben.

Definition 6. Seien $\psi(x)$ und φ Fixpunktformeln über einer relationalen Signatur. Die *Relativierung von φ auf $\{x|\psi(x)\}$*, die mit $\varphi \restriction \{x|\psi(x)\}$ bezeichnet werden soll, ist induktiv über den Aufbau von φ wie folgt definiert:

- Ist φ atomar, so $\varphi \restriction \{x|\psi(x)\} \ := \ \varphi$,
- $(\exists x \varphi') \restriction \{x|\psi(x)\} \ := \ \exists x(\psi(x) \wedge \varphi' \restriction \{x|\psi(x)\})$,
- $(\bar{y} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi'(\bar{x}, X)) \restriction \{x|\psi(x)\} \ :=$
  $\bar{y} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}(\varphi' \restriction \{x|\psi(x)\} \wedge \bigwedge_{1 \le i \le |\bar{x}|} \psi(x_i))$,
- $(\neg\varphi') \restriction \{x|\psi(x)\} \ := \ \neg(\varphi' \restriction \{x|\psi(x)\})$.

Der GFP-Fall ergibt sich aus dem Negationslemma 1. Sowohl in φ als auch in ψ sind noch weitere freie Variablen als die angegebenen möglich.

Diese Relativierung tut genau das, was sie soll. Es gilt nämlich:

Satz 7 und Definition. *Sind φ und ψ wie in der Definition oben, und ist $\mathfrak{A}$ eine (relationale) Struktur von passender Signatur und β eine Belegung der freien Variablen in φ und ψ (bis auf x). Die Struktur $\psi(\mathfrak{A}, \beta)$ sei die von dem Träger $\{a \in A \mid (\mathfrak{A}, \beta) \models \psi(a)\}$ erzeugte Substruktur von $\mathfrak{A}$. Belegt β alle in φ freien Variablen mit Elementen bzw. Teilmengen dieser Substruktur, dann gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \restriction \{x|\psi(x)\} \ \Leftrightarrow \ (\psi(\mathfrak{A}, \beta), \beta) \models \varphi \ .$$

Beweis: Selbstverständlich führt man in diesem Beweis eine Induktion über den Aufbau von φ durch. Hier sei nur der Fall $\varphi = \bar{y} \in \mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi'$ durchgeführt. In diesem zeigt man die Äquivalenz induktiv über die Stufen des Fixpunktprozesses. Sei etwa $s = |\bar{x}|$ die Stelligkeit des Fixpunktes, X_α die α-te Stufe des zu $\varphi \restriction \psi(x)$ in $(\mathfrak{A}, \beta)$ und Y_α die α-te Stufe des zu φ in $(\psi(\mathfrak{A}), \beta)$ gehörenden Fixpunktprozesses. Zu zeigen ist $X_\alpha = Y_\alpha$. Sei $U := \bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma = \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma$, dann ist

$$\begin{aligned} \bar{a} \in X_\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi' \restriction \{z|\psi(z)\}(\bar{a}, U) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq s} \psi(a_i)) \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in \psi(\mathfrak{A}, \beta) \wedge (\psi(\mathfrak{A}, \beta), \beta) \models \varphi'(\bar{a}, U) \quad \text{(Induktionsvoraussetzung !)} \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in Y_\alpha \ . \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

In der Spielhölle der Logiker

2.1 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Fixpunktlogik

Es wird sehr oft die stärkere Logik $L^{\omega}_{\infty\omega}$ herangezogen, wenn es darum geht, zu zeigen, daß gewisse Eigenschaften in der Fixpunktlogik nicht ausdrückbar sind. (Beispiele finden sich etwa in [dR87] und in [Imm82]). Hat man es allerdings mit einer Eigenschaft zu tun, die gerade so eben nicht in FP ausdrückbar ist , aber schon in $L^{\omega}_{\infty\omega}$, dann kommt man so nicht mehr weiter. Hier ist es wünschenswert, eine algebraische Charakterisierung in Form eines Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels für die Fixpunktlogik zu haben, die genau beschreibt, wann zwei Strukturen $\equiv_{\mathrm{FP}_k}$-äquivalent sind. In diesem Kapitel wird ein solches Spiel vorgestellt. Es wird ähnlich wie das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die erste Stufe, S_{FO}, gespielt: Genauso wie dort wird jeder Quantor eines Satzes einem Spielzug entsprechen. Die entscheidende Frage ist daher: Welchen Spielzügen entsprechen die Fixpunktquantoren LFP und GFP? Der Schlüssel zur Antwort liegt in Lemma 2. Dieses Lemma führt direkt zu folgender Darstellung von Fixpunktformeln als zweite-Stufe-Formeln:

$$(2) \qquad [\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x},X)]\bar{t} \;\leftrightarrow\; \forall X(\neg X\bar{t} \to \exists \bar{x}(\neg X\bar{x} \wedge \varphi(\bar{x},X))) \;,$$

$$(3) \qquad [\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x},X)]\bar{t} \;\leftrightarrow\; \exists X(X\bar{t} \wedge \forall \bar{x}(X\bar{x} \to \varphi(\bar{x},X))) \;.$$

Denn $\bar{t}$ ist nach Lemma 2 dann in einem kleinsten Fixpunkt LFP(F), wenn alle Mengen X, die $\bar{t}$ nicht enthalten, die Beziehung $F(X) \subset X$ verletzen, d.h. ein Tupel $\bar{x}$ nicht enthalten, das aber in $F(X)$ liegt. Genau das formalisiert die rechte Seite von (2). (3) gewinnt man analog.

Es läßt sich leider nicht umgehen, noch einen weiteren Index einzuführen. Wir wollen mit FP^l_n die Menge der Fixpunktformeln vom Quantorenrang höchstens n

bezeichnen, in denen jede Relationsvariable eine Stelligkeit höchstens l hat. Das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ soll gerade diese Logik „einfangen". Wie das klassische Spiel für die erste Stufe wird das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ von zwei Spielern mit einem Paar von Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gespielt. Den Spieler, der behauptet, die Gültigkeit der Sätze in $\mathfrak{A}$ bleibt in $\mathfrak{B}$ erhalten, wollen wir ∃rhalter nennen; den, der ihm die Tour vermasseln will, ∀erderber. Das Spiel hat n Runden. In jeder Runde wird ein Punktzug (der den Quantoren $\exists$ oder $\forall$ entspricht) oder ein Fixpunktzug (der LFP- oder GFP-Zug genannt wird) gespielt. Jeder Zug erweitert eine Zuordnung

$$(\mapsto) \quad \{a_i \mapsto b_i \mid 1 \leq i \leq q\} \cup \{U_j \mapsto V_j \mid 1 \leq j \leq r\} \text{ oder kurz } \bar{a} \mapsto \bar{b} \quad \bar{U} \mapsto \bar{V}$$

von Elementen $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ und Mengen $U_j \subset A^{s_j}$, $V_j \subset B^{s_j}$ $(1 \leq s_j \leq l$ für alle $j \leq r)$. Nach jeder Runde wählt der ∀erderber aus, welchen Zug er in der nächsten spielen möchte.

Für das Spiel, das mit der Zuordnung $\bar{a} \mapsto \bar{b}$, $\bar{U} \mapsto \bar{V}$ beginnen soll, schreiben wir $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{U}, \mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{V})$.

Da man über Konstanten reden kann, ohne sie vorher abquantifiziert zu haben, muß noch vor dem ersten Zug die Zuordnung entsprechender Konstanten $c^A \mapsto c^B$ für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ zur Startzuordnung hinzugenommen werden. Um uns weitere technische Unannehmlichkeiten zu ersparen, wollen wir annehmen, daß die in Frage kommenden Signaturen σ keine Funktionssymbole enthalten.

Wir nehmen jetzt an, daß zu Beginn des Spiels oder nachdem bereits einige Runden gespielt wurden, eine Zuordnung wie in $(\mapsto)$ vorliegt. Folgende Zugmöglichkeiten bieten sich dann dem ∀erderber:

∃-Zug: Der ∀erderber wählt $a_{q+1} \in A$, und der ∃rhalter antwortet mit $b_{q+1} \in B$.

∀-Zug: Der ∀erderber wählt $b_{q+1} \in B$ und der ∃rhalter $a_{q+1} \in A$.

Nach jedem dieser Punktzüge wird die gegebene Zuordnung um $a_{q+1} \mapsto b_{q+1}$ erweitert.

LFP-Zug: Der ∀erderber wählt $V_{r+1} \subset B^{s_{r+1}}$ mit $s_{r+1} \leq l$ und irgendeinem $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{s_{r+1}}}) \notin V_{r+1}$, $(1 \leq i_1, \ldots, i_{s_{r+1}} \leq q)$.
Als Antwort gibt der ∃rhalter $U_{r+1} \subsetneq A^{s_{r+1}}$ an.
Danach wählt der ∀erderber $(a_{q+1}, \ldots, a_{q+s_{r+1}}) \in A^{s_{r+1}} \setminus U_{r+1}$ und der ∃rhalter antwortet mit einem Tupel $(b_{q+1}, \ldots, b_{q+s_{r+1}}) \in B^{s_{r+1}} \setminus V_{r+1}$.

GFP-Zug: Der ∀erderber wählt $U_{r+1} \subset A^{s_{r+1}}$ mit $s_{r+1} \leq l$ und $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_{r+1}}}) \in U_{r+1}$, für irgendwelche $1 \leq i_1, \ldots, i_{s_{r+1}} \leq q$.
Der ∃rhalter gibt dann $V_{r+1} \subset B^{s_{r+1}}$ mit $V_{r+1} \neq \emptyset$ an.
Daraufhin wählt der ∀erderber ein Tupel $(b_{q+1}, \ldots, b_{q+s_{r+1}}) \in V_{r+1}$ und der ∃rhalter antwortet mit einem Tupel $(b_{q+1}, \ldots, b_{q+s_{r+1}}) \in U_{r+1}$.

Nach jedem dieser Fixpunktrunden wird die gegebene Zuordnung erweitert um

$$U_{r+1} \mapsto V_{r+1} \quad \text{und} \quad a_i \mapsto b_i \quad (q < i \leq q + s_{r+1}) \ .$$

Wenn in Zukunft von der *zweiten Hälfte eines Fixpunktzuges* die Rede ist, dann ist damit der Teil des Zuges gemeint, in dem die Spieler Tupel aus den (im LFP-Zug außerhalb der) zu Beginn des Zuges fixierten Mengen wählen.

Nach n Zügen hat der $\exists$rhalter genau dann gewonnen, wenn die erspielte Zuordnung $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ein partieller Isomorphismus ist und für die Zuordnung $\bar{U} \mapsto \bar{V}$ folgendes gilt: Für $1 \leq j \leq r$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_{s_j} \leq q$:

$$\text{Aus} \quad (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_j}}) \in U_j \quad \text{folgt} \quad (b_{i_1}, \ldots, b_{i_{s_j}}) \in V_j \ .$$

Eine Zuordnung mit diesen Eigenschaften wollen wir *Posimorphismus* nennen, weil sie gewissermaßen die positive Information „ein $\bar{a}$ liegt in einem U" erhält.

Bemerkung. Dieses Spiel sieht technisch überfrachtet und mit unnötigen Bedingungen behaftet aus. In der Tat können die Spielregeln noch vereinfacht werden, und wir werden das auch tun. Diese „sperrige" Version hat aber den noch ersichtlich werdenden Vorteil, daß sie genau den Äquivalenzen (2) und (3) angepaßt ist. Desweiteren fällt auf, daß die beiden Punktzüge symmetrisch zueinander sind, und die beiden Fixpunktzüge nicht. Auch das hat technische Gründe. Wir können und werden später eine symmetrische Version des Spiels erhalten. Das hätte hier, wo uns der Beweis für die Korrektheit des Spiels noch bevorsteht, den Nachteil, daß wir zu unterscheiden hätten zwischen in LFP- und in GFP-Zügen fixierten Teilmengen einerseits und zwischen durch LFP- und GFP-Quantoren quantifizierten Relationssymbolen andererseits. Aus diesem Grund werden wir die gegebenen Spielregeln zunächst beibehalten.

Dieses Spiel charakterisiert die Fixpunktlogik:

Satz 8. *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (endliche oder unendliche) σ-Strukturen mit einer endlichen Signatur σ. Dann sind äquivalent:*

(a) *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen die gleichen* FP*-Sätze.*

(b) *Für jedes $n, l \geq 1$ besitzt der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Dieser Satz folgt sofort aus dem folgenden mehr technischen Lemma, das freie Variablen einerseits und schon gespielte Züge andererseits berücksichtigt.

Lemma 9 ($\mathbf{FP}^l_n \equiv \mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$). *Sei σ eine endliche Symbolmenge ohne Funktionssymbole. Für σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und alle $n, l, q, r \geq 1$, $a_1, \dots, a_q \in A$, $b_1, \dots, b_q \in B$, $U_j \subset A^{s_j}$, $V_j \subset B^{s_j}$ ($1 \leq j \leq r$, und alle $s_j \leq l$) sind äquivalent:*

(a) Für alle σ-FP-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_q, X_1, \dots, X_r) \in \mathrm{FP}^l_n$ mit freien Variablen $x_1, \dots, x_q$ und freien Relationsvariablen $X_1, \dots, X_r$ mit Stelligkeiten $s_1, \dots, s_r$ gilt:

$$\textit{Aus} \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U}) \quad \textit{folgt} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, \bar{V}) \ .$$

(b) Der $\exists$rhalter hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{U}, \mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{V})$.

Da die Menge der Sätze in FP^l_n negationsabgeschlossen ist, folgt Satz 8 sofort aus diesem Lemma.

Im folgenden Beweis verwenden wir die Schreibweise

$$T_q \ := \ \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{c \mid c \text{ ist ein Konstantensymbol in } \sigma\} \ ,$$

und für eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit ausgezeichneten Elementen $a_1, \dots, a_q \in A$ und $t \in T_q$ setzen wir

$$t^A \ := \ \begin{cases} a_i & \text{falls } t = x_i \\ c^A & \text{falls } t = c \ . \end{cases}$$

Beweis des Lemmas
(b)* $\Rightarrow$ *(a): Seien $n, l, q, r, \bar{a}, \bar{b}, \bar{U}, \bar{V}$ wie in Lemma 9. Wir führen eine Induktion über den Aufbau von $\varphi \in \mathrm{FP}^l_n$. Ist φ erste-Stufe atomar oder negiert atomar oder von der Gestalt $Xt_1, \dots, t_m$ mit $t_j \in T_q$, dann besagen $qr(\varphi) = 0$ und (b), daß

$$\{t^A \mapsto t^B \mid t \in T_q\} \cup \bar{U} \mapsto \bar{V}$$

ein Posimorphismus ist. Das genau brauchen wir für die Folgerung in (a).

Ist $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ oder $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, dann ist $qr(\varphi_1) \leq qr(\varphi)$ und $qr(\varphi_2) \leq qr(\varphi)$, so daß die Induktionsvoraussetzung sofort (a) ergibt.

Ist $\varphi = \exists x \psi$ und $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U})$, z.B. $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, a, \bar{U})$, dann findet der $\exists$rhalter mit seiner Gewinnstrategie aus (b) in einem $\exists$-Zug zu $a \in A$ ein $b \in B$. Da $qr(\psi) \leq n - 1$, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, um $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b}, b, \bar{V})$ und somit $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, \bar{V})$ zu erhalten.

Der Fall $\varphi = \forall x \psi$ wird entsprechend behandelt.

Ist $\varphi = [\mathrm{LFP}_{\bar{x},X} \psi(x_1, \dots, x_s, X)]\bar{t}$ $(s \leq l)$ und $\mathfrak{A} \models [\mathrm{LFP}_{\bar{x},X} \psi(\bar{x}, X)]\bar{t}^A$, dann müssen wir $\mathfrak{B} \models [\mathrm{LFP}_{\bar{x},X} \psi(\bar{x}, X)]\bar{t}^B$ zeigen. Erinnern wir uns an die Äquivalenz (2) Seite 12: Für jedes $V \subset B^s \setminus \{\bar{t}^B\}$ müssen wir ein Tupel $\bar{b} \in B^s \setminus V$ finden, für das $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b}, V)$ gilt. Dafür nehmen wir wieder die Gewinnstrategie des $\exists$rhalters aus (b) in Anspruch, die ihm in einem LFP-Zug eine Menge $U \subset A^s$ als Antwort zu V gibt. Da $\bar{t}^A \mapsto \bar{t}^B$, $U \mapsto V$ ein Posimorphismus sein muß, darf $\bar{t}^A$ nicht in U liegen. So liefert uns die Voraussetzung im Lichte von (2) ein Tupel $\bar{a} \in A^s \setminus U$, für das $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, U)$ gilt. Jetzt vollendet der $\exists$rhalter den begonnenen Fixpunktzug und findet zu $\bar{a}$ die Antwort $\bar{b} \in B^s \setminus V$. Setzen wir $a_{q+1} \dots a_{q+s} := \bar{a}$ und $b_{q+1} \dots b_{q+s} := \bar{b}$, so verbleibt jetzt dem $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie für das Spiel

$$\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_{n-1}}(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_{q+s}, \bar{U}U, \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_{q+s}, \bar{V}V) \ .$$

Aus $\psi \in \mathrm{FP}^l_{n-1}$ und $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, U)$ folgern wir mit der Induktionsvoraussetzung: $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b}, V)$, was hier zu zeigen war.

Der Fall $\varphi = [\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\psi(\bar{x}, X)]\bar{t}$ wird ganz ähnlich behandelt. Statt (2) benötigen wir (3) und einen GFP-Zug.

(a)* $\Rightarrow$ *(b): Um einem unnötigen und vom Wesentlichen ablenkenden Kleinkrieg mit sich häufenden Indizes aus dem Wege zu gehen, nehmen wir $l = 1$, also das Auftretenden von nur einstelligen Fixpunkten an. Wir fixieren eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$. Für alle $n, q, r \in \omega$, $a_1, \dots, a_q \in A$ und Teilmengen $U_1, \dots, U_r \subset A$ definieren wir induktiv FP-Formeln $\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}}(\bar{x}, \bar{X})$ vom Quantorenrang n, in denen $\bar{x}, \bar{X}$ die einzigen freien Variablen sind, und für die $(\mathrm{i})_n$ - $(\mathrm{iii})_n$ erfüllt sein wird mit

- $(\mathrm{i})_n$ $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\bar{a},\bar{U}}(\bar{a}, \bar{U})$, $\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}} \in \mathrm{FP}^l_n$.
- $(\mathrm{ii})_n$ Ist $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\bar{a},\bar{U}}(\bar{b}, \bar{V})$ dann hat der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{U}, \mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{V})$.
- $(\mathrm{iii})_n$ $\Phi^n_{q,r} := \{\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}} \mid \mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $|\bar{a}| = q$ und $|\bar{U}| = r\}$ ist endlich.

Aus (i) und (ii) und (a) aus Lemma 9 folgt dann (b).

$n = 0:$

$$\begin{aligned}\varphi^0_{\bar{a},\bar{U}} := \ & \bigwedge\{\varphi \mid \ \varphi \text{ hat die Gestalt } t_1 \equiv t_2,\ Rt_1, \dots, t_m \text{ oder } X_i t \text{ mit } t, \bar{t} \in T_q\ , \\ & \qquad 1 \le i \le r \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U})\ \}\ \wedge \\ & \bigwedge\{\varphi \mid \ \varphi \text{ hat die Gestalt } \neg t_1 \equiv t_2,\ \neg Rt_1, \dots, t_m \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U})\}\ .\end{aligned}$$

$(\mathrm{i})_0$ und $(\mathrm{ii})_0$ sind erfüllt, denn wenn $\mathfrak{B} \models \varphi^0_{\bar{a},\bar{U}}(\bar{b}, \bar{V})$ ist, dann bedeutet das, daß $\{t^A \mapsto t^B \mid t \in T_q\} \cup \bar{U} \mapsto \bar{V}$ ein Posimorphismus ist. $(\mathrm{iii})_0$ ist erfüllt, denn bei endlichem σ gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, Formeln der angegebenen Gestalt zu bilden.

$n \mapsto n + 1:$

$\varphi^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}}$:= „Der $\exists$rhalter kann einen $\forall$-Zug ausführen" $\wedge$ „er kann einen $\exists$-Zug ausführen" $\wedge$ „er kann einen GFP-Zug ausführen" $\wedge$ „er kann einen LFP-Zug ausführen und danach jeweils noch n Züge weiterspielen."

„Der $\exists$rhalter kann einen $\forall$-Zug spielen": $\quad \forall x_{q+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^n_{\bar{a}a\bar{U}} \ =: \ \alpha^{n+1}_{\bar{a}\bar{U}}$.

„Der $\exists$rhalter kann einen $\exists$-Zug spielen": $\bigwedge_{a\in A} \exists x_{q+1} \varphi^n_{\bar{a}a\bar{U}} \ =: \ \varepsilon^{n+1}_{\bar{a}\bar{U}}$.

Wegen $(\mathrm{iii})_n$ ist die Disjunktion $\bigvee_{a\in A}$ und die Konjunktion $\bigwedge_{a\in A}$ dabei endlich.

„Der $\exists$rhalter kann einen GFP*-Zug spielen":* In der Zweiten Stufe würde man formalisieren:

$$(4) \qquad \bigwedge_{t\in T_q} \bigwedge_{\substack{U\subset A,\\ t^A\in U}} \exists X_{r+1}(X_{r+1}t \wedge \forall x_{q+1}(X_{r+1}x_{q+1} \rightarrow \bigvee_{a\in U} \varphi^n_{\bar{a},a,\bar{U},U})) \ .$$

Aus der nach Induktionsvoraussetzung gegebenen Endlichkeit von $\Phi^n_{q+1,r+1}$ folgt, daß die Disjunktion $\bigvee_{a\in U}$ und die Konjunktion $\bigwedge_{U\subset A,\ t^A\in U}$ endlich sind, und so können wir (4) mit (3) überführen in

$$\bigwedge_{t\in T_q} \bigwedge_{\substack{U\subset A,\\ t^A\in U}} [\mathrm{GFP}_{x_{q+1},X_{r+1}} \bigvee_{a\in U} \varphi^n_{\bar{a},a,\bar{U},U}]t \ =: \ \gamma^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ \in \mathrm{FP}^1_{n+1} \ .$$

„Der $\exists$rhalter kann einen LFP-Zug spielen"

$$(5) \qquad \bigwedge_{t\in T_q} \forall X_{r+1}(\neg X_{r+1}t \rightarrow \bigvee_{U\subsetneq A} \bigwedge_{a\in A\setminus U} \exists x_{q+1}(\neg X_{r+1}x_{q+1} \wedge \varphi^n_{\bar{a},a,\bar{U},U})).$$

Wieder sind die auftretende Disjunktion und Konjunktion endlich. Jetzt transformieren wir die Disjunktion über Konjunktionen $\bigvee_{\dots}\bigwedge_{\dots}$ in eine Konjunktion über Disjunktionen: Mit passendem endlichen $\mathcal{E} \subset \mathrm{Pot}(A)$ und $\Pi \subset {}^{\mathcal{E}}A$ transformieren wir (5) äquivalent in

$$\bigwedge_{t\in T_q} \forall X_{r+1}(\neg X_{r+1}t \rightarrow \bigwedge_{f\in\Pi} \bigvee_{U\in\mathcal{E}} \exists x_{q+1}(\neg X_{r+1}x_{q+1} \wedge \varphi^n_{\bar{a},f(U),\bar{U},U})) \ ,$$

was leicht als äquivalent erkannt werden kann zu

$$\bigwedge_{t\in T_q} \bigwedge_{f\in\Pi} \forall X_{r+1}(\neg X_{r+1}t \rightarrow \exists x_{q+1}(\neg X_{r+1}x_{q+1} \wedge \bigvee_{U\in\mathcal{E}} \varphi^n_{\bar{a},f(U),\bar{U},U})) \ ,$$

und mit (2) erhalten wir schließlich:

$$\bigwedge_{t\in T_q} \bigwedge_{f\in\Pi} [\mathrm{LFP}_{x_{q+1},X_{r+1}} \bigvee_{U\in\mathcal{E}} \varphi^n_{\bar{a},f(U),\bar{U},U}]t \ =: \ \lambda^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ \in \ \mathrm{FP}^1_{n+1} \ .$$

Setzen wir zusammen, was wir haben: $\varphi^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ := \ \alpha^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ \wedge \ \varepsilon^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ \wedge \ \gamma^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}} \ \wedge \ \lambda^{n+1}_{\bar{a},\bar{U}}$.

Einfache kombinatorische Erwägungen lassen $(\mathrm{iii})_{n+1}$ einsehen. $(\mathrm{i})_{n+1}$ und $(\mathrm{ii})_{n+1}$ ergeben sich sofort, wenn man die Formeln (4) und (5) genau anschaut. Damit ist der Beweis von Lemma 9 für $l = 1$ abgeschlossen. □

Der Fall $l > 1$ wird ganz ähnlich behandelt. Hier finden wir zu $a_1, \dots, a_q \in A$, $U_1 \subset A^{s_1}, \ \dots, \ U_r \subset A^{s_r}$ $(s_1, \dots, s_r \leq l)$ Formeln $\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}}(\bar{x}, \bar{X})$ mit $(\mathrm{i})_n$ - $(\mathrm{iii})_n$ wie oben. Die Änderungen in der Definition von $\varphi^n_{\dots}$ sind leicht vorgenommen.

Eine wichtige Folgerung aus dem Lemma 9 und seinem Beweis ist das folgende

Korollar 10. *Ist* $\varphi(\bar{x}, \bar{X}) \in \mathrm{FP}^l_n$ *eine erfüllbare* FP-*Formel mit freien Variablen* $x_1, \ldots, x_q$ *und freien Relationsvariablen* $X_1, \ldots, X_r$ *mit den Stelligkeiten* $s_1, \ldots, s_r$*, dann ist* φ *äquivalent zu*

$$\bigvee\{\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}} \mid \mathfrak{A} \text{ eine } \sigma\text{-Struktur, } \bar{a} \in A,\ U_j \subset A^{s_j}\ (j \leq r) \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{U})\}.$$

Eine weitere Folgerung werden wir noch brauchen:

Korollar 11. *Seien* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{U}, \bar{V}$ *wie in Lemma 9 gegeben.*
Ist $\varphi^n_{\bar{a},\bar{U}} = \varphi^n_{\bar{b},\bar{V}}$*, dann gewinnt der* $\exists$*rhalter sowohl* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{U}, \mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{V})$ *als auch* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{V}, \mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{U})$*.*

□

2.1.1 Eine Vereinfachung der Spielregeln

In diesem Abschnitt wollen wir das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ so vereinfachen, daß man es sich auch leicht merken und vernünftig spielen kann. Die angegebenen Regeln hatten ihren Vorteil darin, daß man sie so in Zweite-Stufe-Formeln übersetzen konnte, daß am Ende eine Fixpunktformel herauskam. Damit haben sie ihre Schuldigkeit getan und sollen in Zukunft übersichtlicheren weichen. Um es uns auch bei der Vereinfachung einfach zu machen, nehmen wir $l = 1$, den monadischen Fall, an. Wie die Regeln für $l > 1$ aussehen, wird dann klar sein.

In einem GFP-Zug wählte der $\forall$erderber eine Teilmenge $U \subset A$, die irgendein „altes" Element enthalten mußte. Diese Zusatzbedingung können wir fallenlassen und gleichzeitig dem $\exists$rhalter eine Antwort $V \subset B$ zugestehen, die auch leer sein darf. In diesem Fall entfällt die zweite Hälfte des Fixpunktzuges. Daß das die Gewinnchancen der Spieler nicht verändert, sieht man ein, wenn man zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeweils ein ganz neues Element c^A bzw. c^B hinzufügt, die in keinerlei Beziehung zum Rest der Strukturen stehen, und die von vorneherein als einander zugeordnet gelten. c^A kann der $\forall$erderber grundsätzlich als „altes" Element zu seiner Wahl $U \subset A$ hinzunehmen. Der $\exists$rhalter wird dann c^B zu seiner Antwort V hinzunehmen. Es ergibt sich so mit den erweiterten Strukturen ein Spielverlauf nach den bisher gültigen Regeln, den der $\exists$rhalter genau dann gewinnt, wenn er den Spielverlauf nach neuen Regeln mit den nicht erweiterten gewinnt.

Als weitere Vereinfachung wollen wir den LFP-Zug symmetrisch zum GFP-Zug machen, d.h. abändern in

LFP-Zug: Der $\forall$erderber wählt $U \subset B$, der $\exists$rhalter antwortet mit $V \subset A$, daraufhin wählt der $\forall$erderber (falls möglich) $a \in V$ und der $\exists$rhalter antwortet mit $b \in U$.

Nach dieser Regel spielt der ∃rhalter automatisch, wenn er im LFP-Zug nach der alten Regel spielt, aber bei allen auftretenden Mengen zu ihrem Komplement wechselt. Um es genauer zu sagen: Er bildet das Komplement der vom ∀erderber nach neuer Regel vorgegebenen Menge, findet nach alter Regel darauf eine Antwort, bildet deren Komplement und gibt das als Antwort nach neuer Regel.

Jetzt müssen wir allerdings die Bedingung noch ändern, die der ∃rhalter zum Gewinnen beachten muß. Wir formulieren diese der Einfachheit halber nur für den monadischen Fall.

Neue Gewinnbedingung: Sind die Teilmengen $U \subset \mathfrak{A}$, $V \subset \mathfrak{B}$ in einem GFP-Zug einander zugeordnet worden, so muß für alle einander zugeordnete Elemente $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ gelten: Ist $a \in U$, so ist $b \in V$.

Ist hingegen die Zuordnung $V \mapsto U$ mit $V \subset \mathfrak{A}$ und $U \subset \mathfrak{B}$ in einem LFP-Zug erspielt worden, dann muß gelten: Ist $b \in U$, so ist $a \in V$.

Wir haben also während des Spiels zu unterscheiden zwischen den Mengen, die in LFP-Zügen und denen, die in GFP-Zügen fixiert wurden. Das führt zu der Schreibweise

$$\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^1_n}(\mathfrak{A}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$$

für das n-Züge-Spiel nach vereinfachten Regeln, in dem der ∃rhalter so spielen muß, daß für einander zugeordnete Elemente $x^{\mathfrak{A}} \in A$ und $x^{\mathfrak{B}} \in B$ stets gilt: Ist $x^{\mathfrak{X}} \in U_i^{\mathfrak{X}}$ so $x^{\mathfrak{Y}} \in V_i^{\mathfrak{Y}}$ für alle i und $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. Die $U_i^{\mathfrak{X}}$ sind also in den vergangenen Spielzügen vom ∀erderber vorgegeben worden, die $V_i^{\mathfrak{Y}}$ waren jeweils die Antwort des ∃rhalters.

Offensichtlich kann der ∃rhalter die neue Version des Spieles genau dann gewinnen, wenn er dies bei der alten konnte. Aus diesem Grunde soll ab hier immer die neue Version des Spieles verwendet werden, und es bezeichne ab hier $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ die neue Version des Spieles.

Dieses Spiel macht sehr schön deutlich, wo der Unterschied zwischen zweiter Stufe und Fixpunktlogik liegt. In der zweiten Stufe müssen die Antworten V des ∃rhalters genau passen, hier dürfen sie „zu groß" sein. Lediglich ein einziges Mal, nämlich beim Abschluß des jeweiligen Fixpunktzuges dürfen sie nicht allzu groß sein, denn an dieser einzigen Stelle muß der ∀erderber zu $x^{\mathfrak{X}} \in V^{\mathfrak{X}}$ noch ein passendes $x^{\mathfrak{Y}} \in U^{\mathfrak{Y}}$ finden. Danach ist es für ihn umso angenehmer, je größer V ist. Das spiegelt sich in folgendem Lemma wider, das der ∃rhalter immer im Hinterkopf haben sollte.

Lemma 12 (Je größer *V* desto besser). *Hat der ∃rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, V^{\mathfrak{B}}, U^{\mathfrak{B}})$ *und ist* $V^{\mathfrak{X}} \subset V'^{\mathfrak{X}}$ *für* $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, *dann ist diese auch eine Gewinnstrategie im Spiel* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V'^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, V'^{\mathfrak{B}}, U^{\mathfrak{B}})$. □

Wie dieser Unterschied zwischen Zweiter Stufe und Fixpunktlogik tatsächlich in einer Eigenschaft wiederzuerkennen ist, die in der monadischen Zweiten Stufe, MSO, aber nicht in der monadischen Fixpunktlogik, MFP, definierbar ist, das werden wir später im Kapitel über die zerstreuten Ordnungen noch sehen.

Ein weiteres einfaches Lemma werden wir auch noch brauchen:

Lemma 13 (Transitivität der Gewinnstrategie). *Hat der ∃rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, V^{\mathfrak{B}}, U^{\mathfrak{B}})$ *und auch eine im Spiel* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{B}, V^{\mathfrak{B}}, U^{\mathfrak{B}}; \mathfrak{C}, V^{\mathfrak{C}}, U^{\mathfrak{C}})$*, dann auch für das Spiel* $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{C}, V^{\mathfrak{C}}, U^{\mathfrak{C}})$*.*

Man folgert dieses Lemma entweder aus Lemma 9 oder direkt, indem man die Gewinnstrategien zusammensetzt. □

2.1.2 Ein spielerischer Zugang zu $\mathfrak{A} \models \varphi$

Ein Charakterzug der Fixpunktlogik wird bei dem Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ überhaupt nicht deutlich, nämlich die induktive Entstehensgeschichte eines Fixpunktes. Bei der Definition von Fixpunktsätzen, die eine gewisse Eigenschaft beschreiben sollen, erfreut man sich aber oft gerade an diesem Charakterzug. In der endlichen Modelltheorie spielt FP nicht zuletzt deswegen eine so große Rolle, weil hier eine „Rekursion" möglich ist, eine „schrittweise Berechnung" eines Prädikates. So werden wir Zusammenhang eines Graphen so auszudrücken versuchen, daß wir sagen: ‚Von jedem Punkt kommt man von Nachbarn zu Nachbarn springend zu jedem anderen':

$$\forall x \forall y \, x \in \mathrm{LFP}_{x,X}(x = y \vee \exists z \in X E\, xz) \enspace .$$

Umgekehrt kann es eine große Hilfe für das Verständnis von Fixpunktsätzen sein, nach den Stufen des zugehörigen Fixpunktprozesses zu fragen. Um nachzuweisen, daß ein Element in der α-ten Stufe X_α eines Fixpunktprozesses liegt, muß man auf andere Elemente zurückgreifen, von denen dann zu zeigen ist, daß sie in X_β für ein $\beta < \alpha$ liegen, und immer so weiter. Genau dieser Vorstellung entspringt das Spiel

$$\mathsf{S}_{L_{\infty\omega}}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$$

zum Nachweis der Gültigkeit eines Fixpunktsatzes in einer Struktur, das Bernhard Herwig in [Her89] beschrieben hat. Jeder Fixpunktlogiker sollte es kennen, denn es bietet (auch in der vorliegenden Arbeit) eine gute Argumentations- und Vorstellungshilfe. Außerdem führt es an den Punkt, an dem Fixpunktlogik und infinitäre Logik einander berühren. Deswegen soll es hier kurz beschrieben werden.

Als Kontrahenten sitzen sich der B∃weiser und der ∀iderleger gegenüber. Der B∃weiser behauptet die Gültigkeit von φ in $\mathfrak{A}$, der ∀iderleger das Gegenteil. Die Spielidee ist sehr simpel: Ist z.B. $\varphi = \exists x\psi$, dann muß der B∃weiser das Element a benennen, auf das ψ zutrifft, ist $\varphi = t \in \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x, X)$, dann muß der B∃weiser die Stufe α angeben, für die $t \in X_\alpha$ beim entsprechenden Fixpunktprozeß gilt. $t \in X_\alpha$ weist der B∃weiser nach, indem er $\psi(t, \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta)$ zeigt. Diese Idee wollen wir genauer ausführen. Dazu nehmen wir zur Vereinfachung an, daß wir nur einstellige Fixpunktquantoren haben. Es sollte problemlos möglich sein, daß Spiel auch auf mehrstellige Fixpunkte zu verallgemeinern. Desweiteren wollen wir annehmen, daß im vorliegenden Satz φ die Negation nur vor atomaren erste-Stufe-Subformeln auftritt. Statt des Negats eines kleinsten Fixpunkts verwenden wir also wieder einen größten Fixpunkt. Dann soll der Übersichtlichkeit halber jede Variable nur ein einziges Mal abquantifiziert werden. Damit ordnen die Subformeln der Gestalt $y \in \mathrm{QFP}_{x,X}\psi(x, X)$ (mit $\mathrm{Q} \in \{\mathrm{G,L}\}$) eindeutig jeder auftretenden Relationsvariablen X eine FO-Variable $v(X) := x$ und eine Subformel $\varphi_X := \psi(v(x), X)$ zu. Eine Spielsituation s besteht aus einer Subformel ψ, der Belegung β aller in ihr frei auftretenden FO-Variablen und einer Funktion ord, die jeder in ψ frei auftretenden Relationsvariablen eine Ordinalzahl der Kardinalität höchstens $|\mathfrak{A}|$ zuweist. Wir schreiben dann $\mathsf{s} = (\psi, \beta, ord)$. Wir stellen uns vor, diese Spielsituation steht für die Behauptung des B∃weisers $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$, wenn die in ψ freien Relationsvariablen X durch die $ord(X)$-te Stufe des zu φ_X gehörenden Fixpunktprozesses belegt sind.

Schließlich verwenden wir noch eine Schreibweise für die Abänderung bzw. Ergänzung einer Belegung β an einer Stelle, und zwar sei

$$\beta\tfrac{a}{x}(y) \;:=\; \begin{cases} a & \text{für } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend sei $ord\frac{\alpha}{X}$ definiert. Das Spiel $\mathsf{S}_{L_{\infty\omega}}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ beginnt mit der Situation $(\varphi, \emptyset, \emptyset)$. Da keine Variable frei ist, kann $\beta = ord = \emptyset$ sein. Ist eine Spielsituation s gegeben, dann findet sich eine Nachfolgesituation s' wie folgt:

$\mathsf{s} = (\exists x\psi, \beta, ord)$: Der B∃weiser wählt ein $a \in \mathfrak{A}$ und setzt $\beta' := \beta\frac{a}{x}$. Es ist dann $\mathsf{s}' := (\psi, \beta', ord)$.

$\mathsf{s} = (\forall x\psi, \beta, ord)$: Der ∀iderleger wählt ein $a \in \mathfrak{A}$ und setzt $\beta' := \beta\frac{a}{x}$. Es ist dann $\mathsf{s}' := (\psi, \beta', ord)$.

$\mathsf{s} = (\psi \vee \chi, \beta, ord)$: Der B∃weiser wählt (ψ, β, ord) oder (χ, β, ord) als Nachfolgesituation s'.

$\mathsf{s} = (\psi \wedge \chi, \beta, ord)$: Der ∀iderleger wählt (ψ, β, ord) oder (χ, β, ord) als Nachfolgesituation s'.

$\mathrm{s} = (t \in \mathrm{LFP}_{v(X),X}\psi, \beta, ord)$: Der B∃weiser bestimmt $\alpha < |\mathfrak{A}|^+$ und setzt[1] $ord' := ord\frac{\alpha}{X}$ und $\beta' = \beta\frac{\beta(t)}{v(X)}$. Es ist dann $\mathrm{s}' := (\psi, \beta', ord')$.

$\mathrm{s} = (t \in \mathrm{GFP}_{v(X),X}\psi, \beta, ord)$**:** Der ∀iderleger bestimmt $\alpha < |\mathfrak{A}|^+$ und setzt $ord' := ord\frac{\alpha}{X}$ und $\beta' = \beta\frac{\beta(t)}{v(X)}$. Es ist dann $\mathrm{s}' := (\psi, \beta', ord')$.

$\mathrm{s} = (t \in X, \beta, ord)$**:** Ist X eine LFP-Variable (bzw. GFP-Variable), dann bestimmt der B∃weiser (bzw. der ∀iderleger) eine Ordinalzahl $\alpha < ord(X)$. Ist das nicht möglich, weil $ord(X) = 0$, dann hat der betreffende Spieler das Spiel verloren! Ansonsten setzt man

$$ord'(Y) \ := \begin{cases} \alpha & \text{falls X=Y} \\ ord(Y) & \text{falls } Y \neq X \text{ und } Y \text{ frei in } \varphi_X \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\beta' := \beta\frac{\beta(t)}{v(X)}$. Es ist dann $\mathrm{s}' := (\varphi_X, \beta', ord')$.

$\mathrm{s} = (\psi, \beta, ord)$ mit atomarem oder negiert atomarem erste-Stufe ψ: Der B∃weiser hat gewonnen, wenn $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ gilt, sonst der ∀iderleger.

Dieses Spiel leistet, was es soll:

Satz 14. *Der B∃weiser hat genau dann eine Gewinnstrategie in* $\mathrm{S}_{L_{\infty\omega}}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$, *wenn* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *ist. In diesem Fall kann der B∃weiser sogar gewinnen, wenn dem ∀iderleger das Nennen von Ordinalzahlen erlassen wird. Es ergibt sich dann ggf. ein unendlich langer Spielverlauf, in dem der B∃weiser nicht verliert.*

Dies wird in [Her89] bewiesen. Es ist allerdings etwas mühsam, den Beweis, der dort für L_μ angegeben ist, auf die hier gegebene Beschreibung der Fixpunktlogik zu übertragen. Wenn man allerdings die folgenden exemplarischen Überlegungen sorgfältig durchdenkt, wird man sich auch so von der Korrektheit dieses Spiels überzeugen können. Dazu müssen wir noch kurz

die infinitäre Logik $\boldsymbol{L_{\infty\omega}}$ einführen. Sie ist die Erweiterung der ersten Stufe, die sich ergibt, wenn man Disjunktionen und Konjunktionen über beliebige Formelmengen als weitere Bildungsregel zuläßt. In $L^k_{\infty\omega}$ liegen die Formeln von $L_{\infty\omega}$, in denen höchstens k Variablen auftreten (gebunden oder frei). Wir wollen uns jetzt exemplarisch überlegen, wie man Fixpunktformeln äquivalent zu $L_{\infty\omega}$-Formeln umformt.

Wir wollen z.B. zu $y \in \mathrm{LFP}_{x,X}\varphi(x, X)$ eine $L_{\infty\omega}$-Formel angeben, die in Strukturen der Mächtigkeit höchstens $|\mathfrak{A}|$ dasselbe besagt. Dazu definieren wir $\varphi_\alpha(x)$,

[1] κ^+ ist die Nachfolgerkardinalzahl von κ

eine Formel, die gerade die α-te Stufe X_α des zugehörigen Fixpunktprozesses beschreibt. Sei z eine Variable, die in φ nicht auftritt. (Im Hinblick auf das beschriebene Spiel kann z als „Zwischenspeicher" angesehen werden, der für die Ersetzung $\beta\frac{\beta(y)}{x}$ benötigt wird.) Wir setzen:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi_0(x) & := & x \neq x \\ \text{für } \alpha > 0\text{:} & \varphi_\alpha(x) & := & \bigvee_{\beta<\alpha} \exists z(z = x \wedge \varphi(z, X)\frac{\exists x(t=x\wedge\varphi_\beta(x))}{t\in X}) \ , \end{array}$$

wobei $\varphi\frac{\chi(t)}{t\in X}$ die Formel ist, die aus φ entsteht, wenn man alle Subformeln der Gestalt $t \in X$ jeweils durch $\chi(t)$ ersetzt. Man erhält so

$$\mathfrak{A} \models y \in \mathrm{LFP}_{x,X}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \bigvee_{\alpha<|\mathfrak{A}|^+} \exists x(x = y \wedge \varphi_\alpha(x)) \ .$$

Das Spiel $\mathsf{S}_{L_{\infty\omega}}(\mathfrak{A} \models y \in \mathrm{LFP}_{x,X}\varphi?)$ ist ein direkter Nachweis für die Gültigkeit der rechten Seite dieser Äquivalenz. Damit ist auch der Index $L_{\infty\omega}$ erklärt, den wir im folgenden weglassen.

Die zweite Behauptung von Satz 14 ist übrigens keine Besonderheit des logischen Zusammenhangs, sondern ein rein kombinatorischer Sachverhalt.

2.1.3 Das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zum Nachweis von $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{LFP}_k} \mathfrak{B}$

...ist auch ein nützliches Hilfsmittel für Fixpunktlogiker. Die Existenz einer Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FP}^l_n}$ ist notwendig und hinreichend für die $\equiv_{\mathrm{FP}^l_n}$-Äquivalenz zweier Strukturen. Doch das hat seinen Preis. Das Spiel ist insbesondere für mehr als einstellige Fixpunkte sehr schwer handhabbar. Für viele Probleme scheint das von der infintären Logik abgeleitete Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, in dem man es, wie wir sehen werden, nicht mit Teilmengen zu tun hat, besser angepaßt zu sein, auch wenn es ‚zu stark' ist. Martin Grohe hat es z.B. mit großem Gewinn in [Gro94] und [Gro93] zum Nachweis einer Stelligkeitshierarchie für Fixpunktlogiken eingesetzt: Mit $k+1$-stelligen Fixpunkten läßt sich mehr ausdrücken als mit k-stelligen. Wir werden es später auch noch brauchen, weshalb es hier kurz vorgestellt werden soll.

Der Leitgedanke ist: Man zeige, daß für jeden Fixpunktsatz $\varphi \in \mathrm{FP}^l_n$ der B$\exists$weiser das Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{B} \models \varphi?)$ dann gewinnt, wenn er das Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ gewinnt. Damit ist dann $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{FP}^l_n} \mathfrak{B}$ gezeigt. Jeden Zug in dem einen Spiel sollte der B$\exists$weiser im anderen Spiel imitieren können. Für die erste Stufe erhält man so das weltberühmte Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FO}_k}$, in dem ein $\exists$rhalter (in der englischsprachigen Literatur oft „Duplicator" genannt) dem B$\exists$weiser stets sagt, wie er die Züge in der einen Struktur in der anderen so nachmachen kann, daß die Gültigkeit der Formeln erhalten bleibt. Der $\forall$erderber arbeitet in ähnlicher Weise mit dem $\forall$iderleger zusammen. Das wird gleich noch etwas klarer werden.

Wieder wollen wir uns auf die monadische Fixpunktlogik, MFP, in der nur einstellige Fixpunkquantoren auftreten, beschränken. Es ist leicht, die Überlegungen zu verallgemeinern. Betrachten wir das Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ genauer, so fällt auf, daß wir in jeder Spielsituation die Kenntnis der Belegung von höchstens $qr(\varphi)$ vielen FO-Variablen benötigen, und daß beim Schritt von Situationen $(y \in X, \beta, ord)$ zu ihren Nachfolgern $(\varphi_X, \beta', ord')$ die Belegung $\beta(z)$ von allen z uninteressant wird, die in φ_X nicht mehr frei auftreten. Ihre Belegungen können vergessen werden. Weiter können wir uns die Variablen so durchnumeriert denken, daß in diesem Sinne stets nur ein Anfangsstück der Variablen interessant ist. Wenn also i die Nummer von $v(X)$ ist, dann sollen alle in φ_X gebunden auftretenden Variablen eine größere und alle frei auftretenden Variablen eine kleinere Nummer als i haben. Diese Vorstellungen sollten helfen, den Sinn des im folgenden beschriebenen Spiels $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zu durchschauen.

Die Spielregeln. Das Spiel wird wie jedes gute Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel von zwei Spielern, $\exists$rhalter und $\forall$erderber, mit Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gespielt. Der $\exists$rhalter will $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathfrak{B}$ nachweisen, der $\forall$erderber das Gegenteil. Dazu stehen ihnen k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ zur Verfügung. In einer Spielsituation sind ein Anfangsstück dieser Variablen, etwa $x_1, \ldots, x_r$, in beiden Strukturen durch Elemente $x_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, x_r^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ bzw. $x_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, x_r^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}$ belegt. Folgender Fortgang des Spiels ist nun möglich:

- Der $\forall$erderber wählt eine Struktur und bestimmt die Belegung der ersten noch unbelegten Variablen, x_{r+1}, darin. Der $\exists$rhalter muß dann diese Variable in der anderen Struktur belegen.
- Der $\forall$erderber wählt $f < j \leq r$ und belegt in beiden Strukturen die Variable x_f neu, und zwar mit der Belegung von x_j. Er setzt also $x_f^{\mathfrak{X}} := x_j^{\mathfrak{X}}$ für $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$. Danach werden alle Variablen x_s mit $s > f$ von ihrer Belegung befreit. x_{f+1} ist also nach diesem Zug die erste noch (oder wieder) unbelegte Variable.

Wenn der $\exists$rhalter ohne Ende immer so spielen kann, daß die Belegung der Variablen stets einen partiellen Isomorphismus

$$(x_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, x_r^{\mathfrak{A}}) \mapsto (x_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, x_r^{\mathfrak{B}})$$

definiert, dann sagen wir, er gewinnt das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.[2] Es gilt der

[2] Auch dieses ggf. unendlich lang verlaufende Spiel kann man endlich machen, indem man vom $\forall$erderber bei jedem Zug die Angabe einer Ordinalzahl verlangt, die kleiner als die beim letzten Zug genannte ist.

Satz 15. *Besitzt der ∃rhalter für das Spiel* $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ *eine Gewinnstrategie, dann ist* $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathfrak{B}$.

Da wir eine Erweiterung dieses Satzes in Kapitel 4.8.10 noch beweisen werden, sollen die Überlegungen oben und im nächsten Abschnitt fürs erste genug sein und hinreichend von der Richtigkeit des Satzes überzeugen.

Das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ ist zu stark!

Wie erwähnt, kann man aus einer Gewinnstrategie des ∃rhalters im Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ direkt ableiten, daß für jedes $\varphi \in \mathrm{MFP}_k$ gilt: Der B∃weiser gewinnt $\mathsf{S}(\mathfrak{B} \models \varphi?)$, wenn er $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ gewinnt. Wird im Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{B} \models \varphi?)$ etwa vom B∃weiser verlangt, die Belegung von x in $\mathfrak{B}$, $\beta^{\mathfrak{B}}(x)$, anzugeben, dann findet er an entsprechender Stelle im Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ mit seiner Gewinnstrategie dort die Belegung $\beta^{\mathfrak{A}}(x) =: x^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$. Dieses $x^{\mathfrak{A}}$ gibt er als ∀erderber im Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ vor, und der ∃rhalter kann mit seiner Gewinnstrategie ein $x^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}$ finden. Dieses $x^{\mathfrak{B}}$ ist das gesuchte $\beta^{\mathfrak{B}}(x)$. Aber was macht er, wenn er Ordinalzahlen angeben muß? Hier bleibt ihm nichts anderes übrig, als genau die gleiche Ordinalzahl zu nennen, die er im Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ an entsprechender Stelle nennen würde. Die $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-Äquivalenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ impliziert aber noch lange nicht, daß im Sinne dieser Äquivalenz einander entsprechende Elemente auch jeweils in den gleichen Stufen von Fixpunktprozessen liegen. Genau das liegt dem folgenden Beispiel zugrunde, das deutlich zeigt, wie das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ zu stark für die $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-Äquivalenz ist.

Beispiel. Es gibt aus Mächtigkeitsgründen zwei verschiedene, aber$\equiv_{\mathrm{FP}}$-äquivalente Ordinalzahlen $\alpha < \beta$. Dennoch gewinnt der ∀erderber das Spiel $\mathsf{S}_{L^2_{\infty\omega}}(\alpha,\beta)$: Er wählt im ersten Zug das Element α in der Struktur β und setzt $x_1^\beta := \alpha$. Der ∃rhalter antwortet mit $x_1^\alpha < \alpha$. Dann setzt der ∀erderber $x_2^\beta \cong x_1^\alpha$ und zwingt den ∃rhalter, ein Element x_2^α in α zu finden, das kleiner als x_1^α ist. Jetzt belegt der ∀erderber die Variablen um: Er setzt $x_1 := x_2$ und befreit x_2 von seiner alten Belegung. Danach beginnt er sein übles Spiel von vorne, indem er $x_2^\beta \cong x_1^\alpha$ setzt und immer so weiter spielt. Nach endlich vielen Schritten ist der ∃rhalter buchstäblich am Ende, nämlich am Anfang der Ordinalzahl α und kommt nicht mehr weiter.

Dieses Beispiel ist übrigens ein spielerischer Beleg dafür, daß es in der infinitären Logik möglich ist, jede Ordinalzahl mit einem Satz zu charakterisieren, der nur zwei Variablen benötigt.

Hinweis: Das hier beschriebene Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ ist nicht das unter dem Namen pebble game bekannte Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die infinitäre Logik $L^k_{\infty\omega}$. In diesem werden Variablen umdefiniert, ohne daß dabei andere von ihrer Belegung befreit werden. Das ist ein entscheidender Unterschied! Hier wird dennoch die Schreibweise $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ verwendet, um an die nahe Verwandtschaft mit der infinitären Logik zu erinnern, und weil mir nichts Besseres einfiel.

2.1.4 Verspielte Sprechweisen

Es gibt viele übliche Sichtweisen von den Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen zwischen zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Je nach Zusammenhang erweitern die Kontrahenten mal eine Zuordnung von Elementen (und Teilmengen), mal belegen sie Variablen in beiden Strukturen (die Zuordnung ist dann durch die Belegung der Variablen gegeben), mal setzen sie numerierte Steine auf Elemente, wobei es jede Nummer zweimal gibt, der $\exists$rhalter nimmt dann jeweils den zweiten Stein mit der gleichen Nummer für die andere Struktur. Auch dadurch wird eine Zuordnung konstruiert. Die so ausgezeichneten Elemente werden dann ‚markiert', ‚fixiert', ‚gewählt' usw. genannt.

Es wird hoffentlich nicht stören, wenn in dieser Arbeit die verschiedenen Sichtweisen und Formulierungen auftreten werden. Das soll sprachliche Verrenkungen vermeiden.

Wir werden auch oft davon sprechen, daß ein Spieler ein Spiel S gewinnt und damit meinen, daß er eine Gewinnstrategie dafür besitzt.

Kapitel 3

Ergebnisse für endliche Strukturen

In diesem Kapitel sollen zwei Ergebnisse aus der endlichen Modelltheorie vorgestellt werden, die sich mit Hilfe des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spieles S_{FP} gewinnen lassen. In der endlichen Modelltheorie trat die Fixpunktlogik bisher überwiegend in Erscheinung. Die im ersten Abschnitt vorgestellte Quantorenhierarchie für die stratifizierte Fixpunktlogik ist auch in [Bo92] erschienen, der dann vorgestellte Anfang einer Hierarchie für die monadische Fixpunktlogik ist ein „Abfallprodukt" der in Kapitel 4.8.4 vorgestellten Hierarchie für MFP im Unendlichen. Leider blieb es bisher im Endlichen bei einem Anfang einer Hierarchie, nämlich, daß zwei MFP-Quantoren mehr ausdrücken können als einer, aber das wird hoffentlich den einen oder anderen anregen weiterzumachen. Mit den vorgestellten Spielen und Ideen glaube ich, ein taugliches Material zur Verfügung zu stellen.

3.1 Eine Quantorenhierarchie in der stratifizierten Fixpunktlogik

Dieser Abschnitt ist ein Teil von [Bo92] und mag als besonders anstrengend empfunden werden. Viele Einzelheiten der Beweise werden nicht ausgeführt, da sie ihn, gemessen an seiner Bedeutung, über Gebühr aufblähten ohne zu wesentlichen Erkenntnissen zu führen. Doch sei hier der Trost ausgesprochen, daß es ab Kap. 3.2 wieder gemächlicher und ausführlicher vorangeht, und daß dieser Abschnitt 3.1 zum Verständnis des Weiteren ganz und gar unerheblich ist.

Die Stratifizierte Fixpunktlogik, SFP, ist ein Fragment der Fixpunktlogik mit der Ausdrucksstärke von stratifizierten DATALOG-Programmen. Diese wurden z.B. in [ChH85] eingeführt (siehe auch [Ko91] und [Da87]. In [Ko91] steht EFP für

SFP). Man trifft auf verschiedene Arten, SFP zu definieren. Für unsere Zwecke am geeignetsten ist folgende: Wir nehmen die Bildungsregeln der FP-Formeln und ändern die Regeln für die Fixpunktquantoren LFP und GFP wie folgt ab:

- Ist $\varphi(\bar{x}, X)$ eine SFP-Formel mit n-stelliger Relationsvariable X und freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und ist X weder im Wirkungsbereich eines $\forall$-Quantors noch eines Fixpunktquantors GFP oder LFP, so ist auch $[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}$ mit Termen $\bar{t}$ eine SFP-Formel.

- Ist $\varphi(\bar{x}, X)$ eine SFP-Formel mit n-stelliger Relationsvariable X und freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und ist X weder im Wirkungsbereich eines $\exists$-Quantors noch eines Fixpunktquantors GFP oder LFP, so ist auch $[\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X)]\bar{t}$ mit Termen $\bar{t}$ eine SFP-Formel.

3.1.1 Ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für SFP

Entsprechend zu diesen Änderungen bei den Bildungsregeln haben wir die Spielregeln des Spiels zu ändern. Da in einer Subformel eines SFP-Satzes höchstens eine Relationsvariable frei auftritt, sollte zu jedem Zeitpunkt des Spiels $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_n}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ höchstens eine Teilmenge in jeder Struktur ausgewählt sein. Folgende Zusatzregel erreicht dies:

Zusatzregel: Werden in einem LFP-Zug (bzw. GFP-Zug) Teilmengen U, V gewählt, dann müssen diese Teilmengen wieder verworfen werden, sobald ein Fixpunktzug oder ein $\forall$-Zug (bzw. $\exists$-Zug) gespielt werden soll.

Das vereinfacht das Spiel für den $\exists$rhalter erheblich. SFP ist ja auch weniger ausdrucksstark als FP. (Das wird in [Ko91], in [Da87] und am Ende dieses Abschnitts gezeigt). Der Satz 8 gilt entsprechend:

Satz 16. *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Strukturen der gleichen endlichen relationalen Signatur. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen die gleichen SFP-Sätze.

(b) Für alle $n, l \geq 1$ hat der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_n}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$.

Diesen Satz beweist man ganz ähnlich wie Satz 8, weshalb der Beweis hier weggelassen wird. Man findet ihn in [Bo92].

3.1.2 Die Quantorenhierarchie

In endlichen Modellen läßt sich jeder FP-Satz äquivalent zu einem umformen, in dem nur ein einziger Fixpunkt-Quantor auftritt. Es zeigt sich, daß dies für SFP nicht richtig ist. Hier ist die Frage sinnvoll, wann ein weiterer Fixpunktquantor von welcher Art (eine weitere intensionale Variable in einem stratifizierten DATALOG-Programm) die Ausdrucksstärke echt erhöht. Dies führt zu einer Quantorenhierarchie, die in diesem Kapitel präzisiert und bewiesen werden soll.

Proviso: In diesem Abschnitt wollen wir generell voraussetzen, daß die Signatur σ mindestens zwei Konstantensymbole c_1 und c_2 beinhaltet und daß diese Symbole immer durch verschiedene Elemente in den Strukturen interpretiert werden.

Quantorenklassen in SFP

Definition 17. Zu jeder SFP-Formel φ ordnen wir $\mathrm{Qs}(\varphi) \subset \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$, die *Quantorenstruktur* von φ, wie folgt zu:

- Ist φ quantorenfrei, so $\mathrm{Qs}(\varphi) := \{\epsilon\}$, wobei ϵ das leere Wort bezeichne.
- Ist $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ oder $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, dann $\mathrm{Qs}(\varphi) := \mathrm{Qs}(\varphi_1) \cup \mathrm{Qs}(\varphi_2)$.
- $\mathrm{Qs}(\exists x \psi) := \{\exists q \mid q \in \mathrm{Qs}(\psi)\}$.
- $\mathrm{Qs}(\forall x \psi) := \{\forall q \mid q \in \mathrm{Qs}(\psi)\}$.
- $\mathrm{Qs}([\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\psi(\bar{x},X)]\bar{y}) := \{\mathrm{L}q \mid q \in \mathrm{Qs}(\psi)\}$.
- $\mathrm{Qs}([\mathrm{GFP}_{\bar{x},X}\psi(\bar{x},X)]\bar{y}) := \{\mathrm{G}q \mid q \in \mathrm{Qs}(\psi)\}$.

Definition 18. Sei $p, q \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$. Wir sagen p *tritt in* q *auf* und schreiben $p \subset q$, wenn wir p aus q erhalten können, indem wir geeignete Buchstaben in q löschen.

Definition 19. Ist $p \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$, dann definieren wir die Quantorenklasse

$$\mathrm{SFP}(p) := \{\varphi \mid \varphi \text{ ist eine SFP-Formel und für alle } q \in \mathrm{Qs}(\varphi) : \ q \subset p\} \ .$$

Unser Ziel ist es, die Ausdrucksstärke der verschiedenen Quantorenklassen gegeneinander abzugrenzen. Zu der Quantorenklasse $\mathrm{SFP}(p)$ gehört in naheliegender Weise ein Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{SFP}^l_p}$, in dem die Möglichkeiten des $\forall$erderbers eingeschränkt sind: Am Ende des Spiels (und spätestens nach $|p|$:=Länge von p Zügen ist das Spiel zuende) muß die Folge der gespielten Züge in p im Sinne der Definition 18 auftreten. Es sollte nicht besonders überraschen, daß folgender Satz gilt:

Satz 20 ($\mathrm{SFP}(p) \equiv \mathsf{S}_{\mathrm{SFP}_p}$). *Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind äquivalent:*

(a) Jeder $\mathrm{SFP}(p)$*-Satz φ, der in $\mathfrak{A}$ gilt, gilt auch in $\mathfrak{B}$.*

(b) Für jedes $l \geq 1$ hat der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_p}(\mathfrak{A};\mathfrak{B})$.

□

Lemma 21 und 22 zeigen, welche Quantorenklassen zusammenfallen.

Lemma 21. *Für $p, q \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$ gilt*

(a) Ist $\exists \not\subset q$ dann $\mathrm{SFP}(p\mathrm{L}q) \equiv \mathrm{SFP}(pq)$*, d.h. für jeden Satz in $\varphi \in \mathrm{SFP}(p\mathrm{L}q)$ gibt es einen äquivalenten in* $\mathrm{SFP}(pq)$*,*

(b) Ist $\forall \not\subset q$ dann ist $\mathrm{SFP}(p\mathrm{G}q) \equiv \mathrm{SFP}(pq)$.

Eine Möglichkeit etwa (a) zu beweisen, ist zu zeigen, daß, wann immer der $\exists$rhalter das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_{pq}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ gewinnt, er ebenso das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_{p\mathrm{L}q}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ gewinnt: Sei $\exists \not\subset q$, das bedeutet, der $\forall$erderber darf keinen $\exists$-Zug nach dem entsprechenden LFP-Zug mehr spielen. Also kann der Erhalter in diesem Zug mit einem $V \subset A^s$ antworten, das gerade mal die Tupel aus bereits gewählten Elementen enthält, die es unbedingt enthalten muß. Der $\forall$erderber kann dann beim Abschluß dieser Spielrunde keine neuen Elemente fixieren, und anschließend werden ja U und V verworfen: der LFP-Zug blieb folgenlos. □

Lemma 22. *Seien $p, q \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$. Dann gilt:*

(a) Ist $\exists \subset q$ dann ist $\mathrm{SFP}(p\mathrm{LL}q) \equiv \mathrm{SFP}(p\mathrm{L}\exists q) \equiv \mathrm{SFP}(p\exists\mathrm{L}q) \equiv \mathrm{SFP}(p\mathrm{L}q)$.

(b) Ist $\forall \subset q$ dann ist $\mathrm{SFP}(p\mathrm{GG}q) \equiv \mathrm{SFP}(p\mathrm{G}\forall q) \equiv \mathrm{SFP}(p\forall\mathrm{G}q) \equiv \mathrm{SFP}(p\mathrm{G}q)$.

Dieses Lemma folgt aus folgendem noch allgemeineren Sachverhalt, der bereits in [Mo74, Lemma 1C.2] formuliert und bewiesen wird:

Lemma 23 (Transitivität von LFP). *Sei $\varphi(\bar{x}, X, S)$ eine* SFP*-Formel, in der X (n-stellig) und S (m-stellig) nur im Wirkungsbereich von $\exists$-Quantoren auftreten. Sei $\psi(\bar{y}, Y)$ eine weitere* SFP*-Formel, in der Y (m-stellig) ebenfalls nur im Wirkungsbereich von $\exists$-Quantoren auftritt. Dann ist*

$$[\mathrm{LFP}_{\bar{x},X}\varphi(\bar{x}, X, [\mathrm{LFP}_{\bar{y},Y}\psi(\bar{y}, Y)]\,\_\,)]\bar{t}$$

äquivalent zu

$$[\mathrm{LFP}_{w,\bar{x},\bar{y},Z}\,\varrho(w,\bar{x},\bar{y},Z)](c_1,\bar{t},\bar{c_1})$$

mit einer neuen $n+m+1$-stelligen Relationsvariablen Z und

$$\varrho(w,\bar{x},\bar{y},Z) \;:=\; ((w=c_1 \wedge \varphi(\bar{x}, Zc_1\,\_\,\bar{c}_1, Zc_2\bar{c}_2\,\_\,)) \;\vee\; (w=c_2 \wedge \psi(\bar{y}, Zc_2\bar{c}_2\,\_\,))).$$

□

Dieses Lemma gilt entsprechend, wenn wir LFP durch GFP und $\exists$ durch $\forall$ ersetzen.

Mit folgenden Äquivalenzen können wir Lemma 22 aus Lemma 23 folgern:

$$\begin{array}{rcl} \exists x\varphi(x) & \leftrightarrow & [\mathrm{LFP}_{x,X}(\varphi(x)\vee \exists z\, Xz)]c_1 \\ \forall x\varphi(x) & \leftrightarrow & [\mathrm{GFP}_{x,X}(\varphi(x)\wedge \forall z\, Xz)]c_1 \;. \end{array}$$

□

Definition 24. Wir nennen ein Wort $p \in \{\exists,\forall,\mathrm{L},\mathrm{G}\}^*$ *reduziert* wenn keine Reduktion im Sinne von Lemma 21 oder Lemma 22 mehr möglich ist. Wir nennen p *normal*, wenn p reduziert ist und auch unmittelbar nach dem letzten L (G) kein $\exists$ ($\forall$) auftritt. Zum Beispiel: L∃LLG∃∀ ist reduzierbar zu dem normalen Wort LG∃∀.

Notation. Seien p, q reduzierte Worte. Wir schreiben $p \leq q$ wenn $p \subset q\prime$ mit einem $q\prime$, das aus q gewonnen werden kann, indem geeignete L durch $\exists$ und geeignete G durch $\forall$ ersetzt werden.

Der Hierarchiesatz

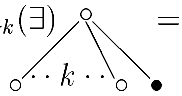
Satz 25.
Sei $q \in \{\exists,\forall,\mathrm{L},\mathrm{G}\}^*$ normal. Dann gibt es ein $\varphi_q \in \mathrm{SFP}(q)$, so daß es zu φ_q einen äquivalenten Satz $\psi \in \mathrm{SFP}(p)$ nur dann gibt, wenn $q \leq p$ ist. Oder einfacher ausgedrückt:

$$\mathrm{SFP}(q) \not\subset \bigcup_{q \not\leq p} \mathrm{SFP}(p) \;.$$

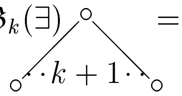
Bemerkung. Die Forderung in der Definition 24, daß unmittelbar nach dem letzten L kein $\exists$ auftreten darf, ist notwendig, denn L∃G∀ $\not\leq$ LG∀∃ aber SFP(L∃G∀) $\subset$ SFP(L∃G∀∃) $\subset$ SFP(LG∀∃) (Lemma 22).

Beweis: Zu jedem normalen q und $k \in \omega$ konstruieren wir Strukturen $\mathfrak{A}_k(q)$ und $\mathfrak{B}_k(q)$ und geben eine Formel $\varphi_q(x) \in \mathrm{SFP}(q)$ an mit $\mathfrak{A}_k(q) \models \varphi_q(c_1)$ und $\mathfrak{B}_k(q) \models \neg\varphi_q(c_1)$ für alle $k \geq 1$ und zeigen, daß der $\exists$rhalter das Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{SFP}^l_p}(\mathfrak{A}_k(q); \mathfrak{B}_k(q))$ gewinnt, wenn $q \not\leq p$ und k hinreichend groß ist. Dann sind wir fertig. $\mathfrak{A}_k(q)$ und $\mathfrak{B}_k(q)$ werden Bäume sein. Sie erinnern an die Spielbäume in [ChH82], die auch in [Ko91] und [Da87] verwendet werden. Wir verwenden das zweistellige Relationssymbol E für die (gerichtete) Vater-Sohn-Beziehung. Darüberhinaus verwenden wir zusätzliche zweistellige Relationen *Neffe*, *Enkel*, *Brudersenkel* die in $\mathfrak{A}_k(q)$ and $\mathfrak{B}_k(q)$ so interpretiert werden, wie ihre Bezeichnungen es suggerieren. Beispielsweise: $\mathit{Neffe}\,xy \leftrightarrow \exists b(\mathit{Bruder}\,xb \wedge Eby)$ oder $\mathit{Brudersenkel}\,xy \leftrightarrow \exists b(\mathit{Bruder}\,xb \wedge \mathit{Enkel}\,by)$. Weiter werden wir ein einstelliges Relationssymbol *Schwarz* für manche Blätter verwenden. Darüberhinaus werden in φ_q einstellige Relationssymbole G_m ($m \leq |q|$:=Länge von q) auftreten. G_m wird auf eine „wichtige" Generation innerhalb der Bäume zutreffen, später werden wir sehen, daß man auf sie auch verzichten, also mit einer festen Symbolmenge auskommen kann. Sie machen zunächst einmal aber die Definition von φ_q einfacher. Zuguterletzt haben wir noch zwei Konstanten *Wurzel* und *irgendwas*. *Wurzel* soll immer durch die Wurzel und *irgendwas* durch irgendein anderes Element interpretiert werden.

Jetzt können wir die induktive Definition von $\mathfrak{A}_k(q)$ and $\mathfrak{B}_k(q)$ und $\varphi_q(x)$ angeben. Es ist sinnvoll, sich bei jedem Schritt zu überlegen, daß (7) von weiter unten gilt.

$\mathfrak{A}_k(\exists)$ 

= Eine Wurzel mit $k+1$ Söhnen, von denen genau einer *Schwarz* ist

$\mathfrak{B}_k(\exists)$ 

= Eine Wurzel mit $k+1$ Söhnen, keiner ist davon *Schwarz*.

Für $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{A}_k(\exists), \mathfrak{B}_k(\exists)\}$ setzen wir $G_1^{\mathfrak{X}} := \{\text{Wurzel von } \mathfrak{X}\}$ und

$$\varphi_\exists(x) \;:=\; \exists z(Exz \wedge \mathit{Schwarz}\,z) \;.$$

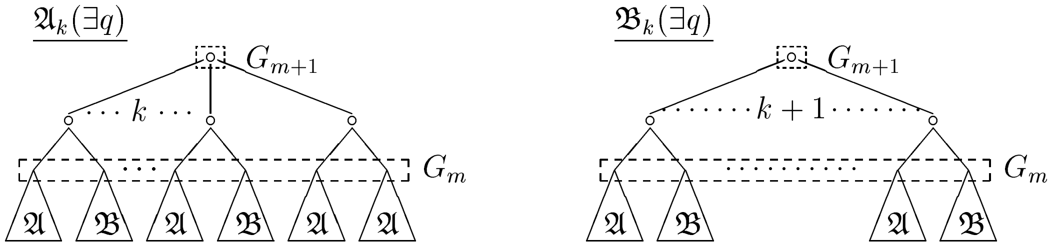
Desweiteren definieren wir $\varphi_q^{Bru}(x)$, eine Formel, die besagt, daß φ_q auf einen Bruder von x zutrifft:

$$\varphi_\exists^{Bru}(x) \;:=\; \exists z(\mathit{Neffe}\,xz \wedge \mathit{Schwarz}\,z) \;.$$

$\mathfrak{A}_k(\forall) := \mathfrak{B}_k(\exists), \quad \mathfrak{B}_k(\forall) := \mathfrak{A}_k(\exists),$

$$\begin{aligned}\varphi_\forall(x) &:= (G_1x \wedge \forall z(Exz \to \neg\mathit{Schwarz}\,z)) \;,\\ \varphi_\forall^{Bru}(x) &:= (G_1x \wedge \forall z(\mathit{Neffe}\,xz \to \neg\mathit{Schwarz}\,z)) \;.\end{aligned}$$

Sei $q \neq \epsilon,\; m := |q|$.



wobei $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_k(q)$ und $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_k(q)$ sein soll.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\exists q}(x) &:= (G_{m+1}x \wedge \exists z(\mathit{Enkel}\, xz \wedge \varphi_q(z) \wedge \varphi_q^{\mathit{Bru}}(z))) \ , \\
\varphi_{\exists q}^{\mathit{Bru}}(x) &:= (G_{m+1}x \wedge \exists z(\mathit{Brudersenkel}\, xz \wedge \varphi_q(z) \wedge \varphi_q^{\mathit{Bru}}(z))) \ .
\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_k(\forall q) := \mathfrak{B}_k(\exists\tilde{q})$, $\mathfrak{B}_k(\forall q) := \mathfrak{A}_k(\exists\tilde{q})$, wobei wir $\tilde{q}$ aus q erhalten, indem wir jedes $\exists$ in $\forall$ und umgekehrt und jedes L in G und umgekehrt umwandeln.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\forall q}(x) &:= (G_{m+1}x \wedge \forall z(\mathit{Enkel}\, xz \rightarrow (\varphi_q(z) \vee \varphi_q^{\mathit{Bru}}(z)))) \ , \\
\varphi_{\forall q}^{\mathit{Bru}}(x) &:= (G_{m+1}x \wedge \forall z(\mathit{Brudersenkel}\, xz \rightarrow (\varphi_q(z) \vee \varphi_q^{\mathit{Bru}}(z)))) \ .
\end{aligned}$$

Sei $\exists \subset q$, $m := |q|$. Für $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k\}$ definieren wir $\mathfrak{X}(\mathrm{L}q) := \mathfrak{X}(\overbrace{\exists \ldots \exists}^{k \text{ mal}} q)$, nur $G_{m+1}^{\mathfrak{X}} := \{\text{Wurzel von } \mathfrak{X}(\mathrm{L}q)\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{L}q}(x) &\mathrel{\widehat{:=}} (G_{m+1}x \wedge [\mathrm{LFP}_{x,X}(\varphi_q(x) \vee \exists z(Exz \wedge \exists^{\geq 2}s(Ezs \wedge Xs)))]x) \ , \\
\varphi_{\mathrm{L}q}^{\mathit{Bru}}(x) &\mathrel{\widehat{:=}} (\exists z(\mathit{Bruder}\, xz \wedge \varphi_{\mathrm{L}q}(z))) \ .
\end{aligned}$$

$\mathrel{\widehat{:=}}$ soll andeuten, daß wir Lemma 22 anwenden müssen, um eine äquivalente Formel in SFP(Lq) zu erhalten.

Ist $\forall \subset q$ dann setzen wir $\mathfrak{A}_k(\mathrm{G}q) := \mathfrak{B}_k(\mathrm{L}\tilde{q})$, $\mathfrak{B}_k(\mathrm{G}q) := \mathfrak{A}_k(\mathrm{L}\tilde{q})$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{G}q}(x) &\mathrel{\widehat{:=}} (G_{m+1}x \wedge \neg[\mathrm{LFP}_{x,X}(\varphi_{\tilde{q}}(x) \vee \exists z(Exz \wedge \exists^{\geq 2}s(Ezs \wedge Xs)))]x) \ , \\
\varphi_{\mathrm{G}q}^{\mathit{Bru}}(x) &\mathrel{\widehat{:=}} (G_{m+1}x \wedge \forall z(\mathit{Bruder}\, xz \rightarrow \varphi_{\mathrm{G}q}(z))) \ .
\end{aligned}$$

Hier verwenden wir Lemma 1 und Lemma 22, um eine Formel in SFP(Gq) zu erhalten.

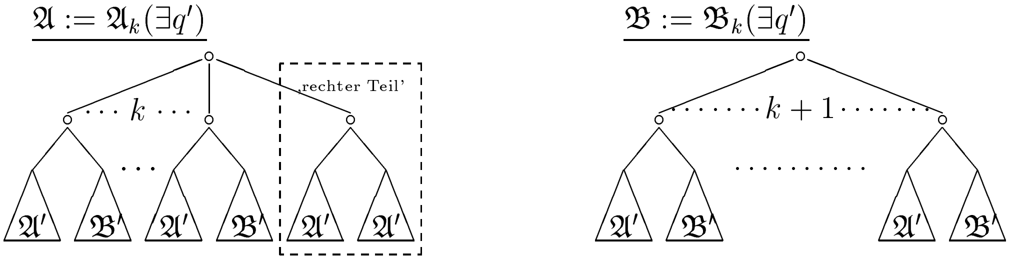
Nun sehen wir, daß für alle normalen $q \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$ gilt: $\varphi_q \in \mathrm{SFP}(q)$ und $\mathfrak{A}_k(q) \models \varphi_q(\mathit{Wurzel})$ und $\mathfrak{B}_k(q) \not\models \varphi_q(\mathit{Wurzel})$. Genauer:

(7) Ist $q = q'q''$ mit $q', q'' \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_k(q)$ oder $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}_k(q)$ dann ist $\mathfrak{X} \models \varphi_{q''}(x) \Leftrightarrow x$ ist Wurzel eines zu $\mathfrak{A}_k(q'')$ isomorphen Teilbaumes.

Dabei ist es hilfreich, zu beachten, daß stets $\mathfrak{A}_k(q) = \mathfrak{B}_k(\tilde{q})$ ist. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß der ∃rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{SFP}^l_p}(\mathfrak{A}_k(q); \mathfrak{B}_k(q))$ hat, sofern $q \not\leq p$ und k hinreichend groß ist. Dies tun wir mit einer Induktion über $|q|$.

$q = \exists$ oder $q = \forall$: Diese Fälle sind ähnlich zu den unten behandelten Fällen $q = \exists q'$ und $q = \forall q'$.

$q = \exists q'$: Ist $q \not\leq p$ dann gibt es $p'', p' \in \{\exists, \forall, \mathrm{L}, \mathrm{G}\}^*$, so daß $p = p''p'$, $q' \not\leq p'$ und $p'' \leq \mathrm{G}\forall\exists$ gilt. Von daher genügt es zu zeigen, daß der ∃rhalter das Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{SFP}^l_{\mathrm{G}\forall\exists p'}}(\mathfrak{A}_k(q); \mathfrak{B}_k(q))$ gewinnt, sofern $k \geq l \cdot |\mathrm{G}\forall\exists p'|$ ist.

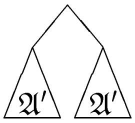


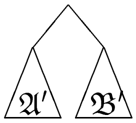
wobei $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}_k(q')$ und $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}_k(q')$ sein soll.

Wähle der ∀erderber etwa $U \subset A^s$ im ersten GFP-Zug. Jetzt überlegt der ∃rhalter, welche möglichen Urbilder ein Tupel in $\mathfrak{B}$ im weiteren Spielverlauf haben kann. Er definiert für $n \leq k$, $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ die Menge der möglichen Urbilder:

$$\mathrm{poss}(b_1, \ldots, b_n) := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt einen partiellen Isomorphismus} \\ \pi: \ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \text{ mit } \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathrm{bd}(\pi), \\ \mathrm{def}(\pi) = \mathfrak{A} \setminus \text{,rechter Teil' und} \\ a_i = \pi^{-1}(b_i) \ (1 \leq i \leq n) \ \} \end{array}$$

und antwortet $V := \{(b_1, \ldots, b_s) \mid \mathrm{poss}(b_1, \ldots, b_s) \cap \mathrm{U} \neq \emptyset\}$.
Wählt der ∀erderber jetzt $(b_1, \ldots, b_s) \in V$ dann kann der ∃rhalter $(a_1, \ldots, a_s) \in U \cap \mathrm{poss}(b_1, \ldots, b_s)$ antworten. Im folgenden ∀-Zug findet der ∃rhalter als Antwort auf $b_{s+1} \in B$ ein Element $a_{s+1} \in A$ mit $(a_1, \ldots, a_{s+1}) \in \mathrm{poss}(b_1, \ldots, b_{s+1})$. (Man beachte dabei, daß $s \leq l \ll k$ ist.) Für alle $i_1, \ldots, i_s \leq s+1$ haben wir jetzt $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}) \in \mathrm{poss}(\mathrm{b}_{\mathrm{i}_1}, \ldots, \mathrm{b}_{\mathrm{i}_s})$, und somit folgt aus $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}) \in U$ auch $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}) \in V$. Der nächste ∃-Zug, vor dem U und V wieder vergessen werden, ist nur interessant, wenn der ∃rhalter a_{s+2} aus dem

,rechten Teil' 

wählt. Ein ,unberührter' Unterbaum 

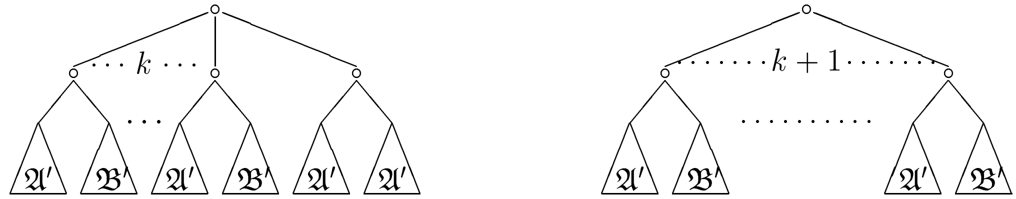
liegt dann auch in $\mathfrak{B}$, wo der ∃rhalter passend zu a_{s+2} ein $b_{s+2} \in \mathfrak{A}'$ findet. Jetzt liegt folgende Situation vor: Es gibt Unterbäume $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ und einen

Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}'$ mit $a_i \notin \mathfrak{A}'$, $b_i \notin \mathfrak{B}'$ und $b_i = \pi(a_i)$ $(1 \leq i \leq s+2)$. Im verbleibenden Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_{p'}}((\mathfrak{A}_k(\exists q'), \bar{a}); (\mathfrak{B}_k(\exists q'), \bar{b}))$ beantwortet der $\exists$rhalter die Punktzüge innerhalb $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ gemäß seiner Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_{p'}}(\mathfrak{A}_k(q'); \mathfrak{B}_k(q'))$ (Induktionsvoraussetzung !) und außerhalb so, wie es π vorgibt. Entsprechend kennt er so auch die ‚möglichen (Ur)Bilder', um auch für die Fixpunktzüge gewappnet zu sein. Somit gewinnt der $\exists$rhalter das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}^l_{\mathrm{G}\forall\exists p'}}(\mathfrak{A}_k(q); \mathfrak{B}_k(q))$.

$q = \forall q'$: Dieser Fall ist symmetrisch zu dem eben behandelten. Es sind lediglich die Strukturen zu vertauschen.

$q = \mathrm{L}q'$: Ist $q \not\leq p$, dann gibt es ein p' mit $q' \not\leq p'$ und $p \leq (\mathrm{G}\forall\exists)^s p'$ mit einem $s \ll k$. (Man beachte, daß q normal ist und deswegen q' nicht mit einem $\exists$ beginnen kann.)

$\underline{\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_k(\mathrm{L}q') = \mathfrak{A}_k(\exists^k q')}$ $\underline{\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_k(\mathrm{L}q') = \mathfrak{B}_k(\exists^k q')}$



wobei $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}_k(\exists^{k-1} q')$ und $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}_k(\exists^{k-1} q')$ sein soll.

Wir haben bereits gesehen, wie in dieser Situation die Folge G$\forall\exists$ von Zügen zwei Generationen im Baum nach unten führt. Nach s solchen Zugfolgen gibt es einen Teilbaum $\mathfrak{A}_k(\exists^{k-s} q')$ in $\mathfrak{A}_k(\mathrm{L}q')$ und einen Teilbaum $\mathfrak{B}_k(\exists^{k-s} q')$ in $\mathfrak{B}_k(\mathrm{L}q')$, die beide keines der gewählten Elemente enthalten. Jenseits dieser Teilbäume gibt es einen Isomorphismus π, der die erspielte Zuordnung erweitert. Wir finden jetzt selbstverständlich auch einen ‚unbenutzten' Teilbaum $\mathfrak{A}_k(q')$ in $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{B}_k(q')$ in $\mathfrak{B}$ und können auch π zu einem Isomorphismus zwischen den Komplementen dieser Teilbäume erweitern. In dieser Situation kann der $\exists$rhalter so weiterspielen, wie er es im Falle $q = \exists q'$ getan hat.

$q = \mathrm{G}q'$: Hier liegt der zu $q = \mathrm{L}\tilde{q}'$ symmetrische Fall vor.

Damit ist der Hierarchiesatz 25 bewiesen. □

Wie man mit fester Signatur auskommt.

Um auf die G_m in der Definition von $\varphi_q(x)$ verzichten zu können, suchen wir nach Formeln $\gamma_q(x) \in \mathrm{SFP}(q)$, die in unseren Bäumen $\mathfrak{X}$ gerade die Generation

$G_{|q|}$ beschreiben: Es soll $\mathfrak{X} \models \gamma_q(x) \leftrightarrow G_{|q|}x$ gelten. Dazu führen wir ein neues einstelliges Prädikat *Blatt* für die Blätter des Baumes ein, und *Imp* für alle Knoten einer wichtigen Generation: $Imp^{\mathfrak{X}} := \bigcup_{m\geq 1} G_m^{\mathfrak{X}}$. Desweiteren brauchen wir noch eine zweistellige Relation *Pate* mit $Pate^{\mathfrak{X}} := \bigcup_{m\geq 1} G_{m+1}^{\mathfrak{X}} \times G_m^{\mathfrak{X}}$. Damit können wir setzen:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\exists}(x) &:= \exists z(Exz \wedge \mathit{Blatt}\, z) \ , \\
\gamma_{\forall}(x) &:= \forall z(Exz \rightarrow \mathit{Blatt}\, z) \wedge \neg \mathit{Blatt}\, x \ , \\
\gamma_{\exists q}(x) &:= \exists z(\mathit{Pate}\, xz \wedge \gamma_q(z)) \ , \\
\gamma_{\forall q}(x) &:= \forall z(\mathit{Pate}\, xz \rightarrow \gamma_q(z)) \wedge \mathit{Imp}\, x \ , \\
\gamma_{\mathrm{L}q}(x) &\mathrel{:\widehat{=}} \gamma_{\exists q}(x) \ , \qquad \gamma_{\mathrm{G}q}(x) \mathrel{:\widehat{=}} \gamma_{\forall q}(x) \ .
\end{aligned}$$

In der Definition von $\varphi_q(x)$ ersetzen wir jetzt $G_{|q|}x$ durch $\gamma_q(x)$.

3.1.3 SFP $\neq$ FP

Dieses Ergebnis erhalten wir so leicht als Nebenprodukt unserer bisherigen Anstrengungen, daß es auch noch eben hergeleitet werden soll. Betrachten wir die Strukturen $\mathfrak{A}_k := \mathfrak{A}_k((\forall\exists)^k)$ und $\mathfrak{B}_k := \mathfrak{B}_k((\forall\exists)^k)$, dann erlaubt uns deren induktiver Aufbau, einen festen (nicht von k abhängigen) Fixpunktsatz zu finden, der $\mathfrak{A}_k$ von $\mathfrak{B}_k$ trennt. Einen solchen kann es in SFP nicht geben. Denn sei etwa $\varphi \in \mathrm{SFP}(p) \cap \mathrm{FP}_n^l$ mit $\mathfrak{A}_k \models \varphi$ und $\mathfrak{B}_k \models \neg\varphi$ für alle $k \geq 1$, dann hat für $k \geq |p| \cdot l$ wegen $(\forall\exists)^k \not\leq p$ der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{SFP}_p^l}(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$, im Widerspruch zu Satz 20.

3.2 Zwei monadische Fixpunkte sehen mehr als einer

Wenn mehrere Fixpunktprozesse zu einem zusammengefaßt werden, dann erhöht sich in der Regel die Stelligkeit. Es ist eine sinnvolle Frage, ob dies wirklich notwendig ist. Kapitel 4.8.4 zeigt, daß innerhalb von MFP in unendlichen Ordnungen wirklich jeder weitere Fixpunktquantor die Ausdrucksstärke echt erhöht. Es ist im allgemeinen also nicht möglich, $n+1$ monadische Fixpunktprozesse zu n solchen zusammenzufassen. Der dort ausgeführte Beweis gibt eine gute Idee dafür, wie man den entsprechenden Sachverhalt auch mit endlichen Modellen beweisen können sollte.

Doch leider ist vieles, was im Unendlichen sehr elegant aussieht (dort ist ja soviel Platz!), im Endlichen wesentlich schwerfälliger. Gleichwohl ich überzeugt bin, daß auch hier innerhalb von MFP jeder weitere zugelassene Fixpunktquantor die

Ausdrucksstärke echt erweitert, ist es mir in der Zeit, die ich mir dafür nahm, nicht gelungen, das auch zu beweisen. Nach zwei Schritten scheiterte die Methode, die zunächst eine geeignete Übertragung der Ideen aus dem Unendlichen ins Endliche zu sein schien. In der Hoffnung, den einen oder anderen Leser zu motivieren, die Lücke zu schließen, sei hier dargestellt, was bisher erreicht ist. Vielleicht führen die Ideen und das Material noch weiter.

Es ist möglich, dieses Kapitel nach 4.8.4 erst zu lesen, wenn klar ist, welches die Methoden sind, die hier ins Endliche übertragen werden sollen.

Schreibweise: FO+nMFP bezeichne die Menge aller Sätze der monadischen Fixpunktlogik, in der höchstens n ineinandergeschachtelte Fixpunktquantoren auftreten. Das sind die Sätze, deren Fixpunktrang (s. Kap. 1.2) höchstens n ist.

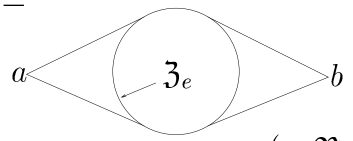
Satz 26. $\mathrm{FO} + 2\mathrm{MFP} \not\leq \mathrm{FO} + 1\mathrm{MFP}$ *in endlichen Graphen. D.h. es gibt einen Satz über Graphen in FO+2MFP, zu dem keiner in FO+1MFP äquivalent ist.*

Beweis: Wir geben eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO} + 2\mathrm{MFP}$ und endliche ungerichtete Graphen $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ an, von denen genau einer φ erfüllt, und zwischen denen der $\exists$rhalter das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ gewinnt, wenn dem $\forall$erderber nur ein einziger Fixpunktzug gestattet ist. Sei k ab hier fest gewählt.

Für $e \in \omega$ sei $\mathfrak{Z}_e$ ein ungerichteter Zykel der Größe e. Eine *Nichtkante* in $\mathfrak{Z}_e$ ist ein Eckenpaar (a, b), $a \neq b$, zwischen denen keine Kante besteht.

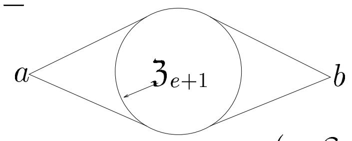
Zuerst verschaffen wir uns Strukturen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$, die $\equiv_{\mathrm{FO}_{2k}}$-, aber nicht $\equiv_{\mathrm{FO+1MFP}}$-äquivalent sind. Wir wählen dazu e geradzahlig so groß, daß $\mathfrak{Z}_{e+1} \equiv_{\mathrm{FO}_{2k}} \mathfrak{Z}_e$ ist (z.B. $e = 2^{2k}$). $\mathfrak{N}$ entsteht aus $\mathfrak{Z}_e$, indem zwei neue Punkte hinzugefügt werden, zwischen denen keine Kante besteht, die aber jeweils mit allen Ecken aus $\mathfrak{Z}_e$ mit einer Kante verbunden sind. Entsprechend entstehe $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{Z}_{e+1}$:

$\mathfrak{N} =$



$(= \mathfrak{N}_{ab})$

$\mathfrak{K} =$



$(= \mathfrak{K}_{ab})$

Die Punkte a und b werden wir *Randpunkte* nennen, die anderen *Zykelpunkte.*

Bemerkung. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ sind $\equiv_{\mathrm{FO}_{2k}}$-äquivalent. Es gilt sogar: ist x ein Zykelpunkt in $\mathfrak{K}$ und y einer in $\mathfrak{N}$, dann ist $(\mathfrak{K}, x) \equiv_{\mathrm{FO}_{2k}} (\mathfrak{N}, y)$.

Zur Struktur $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_k$ gelangen wir, indem wir eine neue Kopie von $\mathfrak{Z}_{e+1}$ nehmen und darin jede Kante (a, b) durch eine Kopie von $\mathfrak{K}$ (nämlich $\mathfrak{K}_{ab}$) ersetzen. Die Randpunkte von $\mathfrak{K}_{ab}$ sind dann die Punkte a, b aus $\mathfrak{Z}_{e+1}$. Entsprechend ersetzen wir jede Nichtkante (c,d) in $\mathfrak{Z}_{e+1}$ durch $\mathfrak{N}_{cd}$. Betrachtet man also in $\mathfrak{A}$ jeden Subgraph der Gestalt $\mathfrak{K}$ oder der Gestalt $\mathfrak{N}$ als eine einzelne Kante zwischen seinen Randpunkten, dann hat man einen vollständigen Graphen der Größe $e+1$ vor sich liegen. Die „$\mathfrak{K}$-Kanten" bilden darin einen (Hamilton-) Zyklus. Genauso erhalten wir $\mathfrak{B}$, indem wir in $\mathfrak{Z}_e$ die Kanten durch $\mathfrak{K}$ und die Nichtkanten durch $\mathfrak{N}$ ersetzen.

Die Idee dabei ist folgende: Einen Fixpunktzug braucht man, um im Kantengewirr von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{K}$-Kanten identifizieren zu können, einen weiteren, um festzustellen, ob diese einen geraden oder ungeraden Zyklus bilden.

Der Einfachheit halber nehmen wir noch zur Kantenrelation E eine einstellige Relation R für die Randpunkte hinzu. R ist nicht wirklich notwendig, die Randpunkte sind ja auch dadurch zu identifizieren, daß sie mehr als 4 Nachbarn haben.

Der trennende Satz φ. Zuerst finden wir einen Satz $\chi = \chi(E)$, der in ungeraden E-Zykeln gilt, in geraden nicht:

$$\chi(E) = \forall x\, x \in \mathrm{LFP}_{z,Z}(Exz \vee \exists u \in Z(\overbrace{z = u+2}^{\exists v(Euv \wedge Evz)})) \ .$$

Bei der induktiven Bildung des Fixpunktes in Zykeln werden als erstes die Nachbarn von x hinzugenommen, dann immer die jeweils übernächsten. In ungeraden Zykeln liegt x schließlich im Fixpunkt, in geraden nicht.

Damit können wir leicht eine Formel $\psi(x,y)$ gewinnen, die genau auf die Paare $x \neq y$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zutrifft, die Randpunkte derselben zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Substruktur sind, indem wir sagen, daß die zwischen den Randpunkten x und y liegenden Punkte, die ja auf alle Fälle Zykelpunkte entweder eines geraden oder ungeraden Zykels sind, einen ungeraden Zykel bilden.

$$\psi(x,y) \ := \ (x \neq y \wedge Rx \wedge Ry \wedge \chi(E) \restriction \{u | Exu \wedge Euy\}) \ .$$

Sind x, y zwei Punkte aus $\mathfrak{A}$, so stehen sie also genau dann in ψ-Relation, wenn sie im $\mathfrak{A}$ zugrunde liegenden Zykel $\mathfrak{Z}_{e+1}$ eine Kante bildeten.

Jetzt können wir φ angeben, einen Satz, der besagt, daß die $\mathfrak{K}$-Kanten einen ungeraden Zykel bilden:

$$\begin{aligned} \varphi \ &:= \ \chi(\psi(\cdot,\cdot)) \\ &= \ \forall x\, x \in \mathrm{LFP}_{z,Z}(\psi(x,z) \vee \exists u \in Z\, \exists v(\psi(u,v) \wedge \psi(v,z))) \in \mathrm{FO} + 2\mathrm{MFP} \ . \end{aligned}$$

Jetzt trifft offenbar φ auf $\mathfrak{A}$ zu und auf $\mathfrak{B}$ nicht.

Das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FO}_k+1\mathrm{MFP}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Die erste-Stufe-Züge vor dem ersten Fixpunktzug pariert der ∃rhalter, indem er sich $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ als die Zykel $\mathfrak{Z}_{e+1}$ bzw. $\mathfrak{Z}_e$ vorstellt, aus denen sie hervorgegangen sind, zwischen denen er nach Wahl von e eine Gewinnstrategie für $2k$ Züge besitzt. Im einzelnen sieht das so aus: Wählt der ∀erderber einen Zykelpunkt x auf einer $\mathfrak{N}$-Kante $\mathfrak{N}_{ab}$ in $\mathfrak{A}$, dann findet der ∃rhalter mit der erwähnten Strategie in $\mathsf{S}_{\mathrm{FO}_{2k}}(\mathfrak{Z}_{e+1},\mathfrak{Z}_e)$ im $\mathfrak{B}$ zugrunde liegenden e-Zykel passend zu a,b zwei nicht benachbarte Punkte a',b' und dann in der Nichtkante $\mathfrak{N}_{a'b'}$ eine zu x passende Antwort y. Entsprechend verfährt er, wenn der ∀erderber einen Randpunkt oder einen Punkt auf einer $\mathfrak{K}$-Kante wählt. Jeder Zug in $\mathsf{S}(\mathfrak{A};\mathfrak{B})$ induziert so (höchstens) zwei Züge im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{FO}_{2k}}(\mathfrak{Z}_{e+1},\mathfrak{Z}_e)$. Damit ist klar, warum wir e so groß gewählt haben, daß $\mathfrak{Z}_e \equiv_{\mathrm{FO}_{2k}} \mathfrak{Z}_{e+1}$ galt.

Unmittelbar vor dem ersten und einzigen Fixpunktzug unterscheiden wir zwischen folgenden Sorten von Punkten:

1. Randpunkte, die gewählt oder unmittelbar benachbart zu gewählten Punkten sind. Sie sollen kurz *festgelegte Randpunkte* heißen;
2. Zykelpunkte, die zu zwei festgelegten Randpunkten unmittelbar benachbart sind;
3. Zykelpunkte, die zu einem festgelegten und einem nicht festgelegten Randpunkt benachbart sind;
4. Zykelpunkte zwischen zwei nicht festgelegten Randpunkten;
5. nicht festgelegte Randpunkte.

A_i und B_i seien die Teilmengen der Punkte vom Typ i in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Jetzt überlegt sich der ∃rhalter, wohin Punkte der verschiedenen Typen nach dem Fixpunktzug abgebildet werden können. „Punkte in X können auf Punkte in Y abgebildet werden" heißt dabei: Im Fixpunktzug ist eine jede Zuordnung eines Punktes in X auf einen aus Y möglich, und danach kann der ∃rhalter so weiterspielen, daß Punkte aus X nur auf Punkte aus Y abgebildet werden. Das werden wir uns dann weiter unten noch überlegen.

1.,2. Zwischen $A_1 \cup A_2$ und $B_1 \cup B_2$ gibt es einen Isomorphismus π, der die bis hier erspielte Zuordnung erweitert.

3. Ein Punkt in A_3, etwa auf der $\mathfrak{K}$- oder $\mathfrak{N}$-Kante $\mathfrak{X}_{ab}$, mit dem festgelegten Nachbarn a kann desweiteren auf jeden Punkt in $\mathfrak{X}'_{\pi(a)b'}$ mit beliebigem nicht festgelegten Randpunkt $b' \in B_5$ abgebildet werden ($\mathfrak{X},\mathfrak{X}' \in \{\mathfrak{N},\mathfrak{K}\}$, $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}'$ ist möglich!).

4.,5. Ein Punkt in A_i kann auf jeden beliebigen in B_i abgebildet werden ($i = 4,5$).

Zum Fixpunktzug: Wähle der $\forall$erderber die Menge $U \subset \mathfrak{A}$. Wir setzen $U_i = A_i \cap U$ und

$$V_1 := \pi(U_1) \quad \text{und} \quad V_2 := \pi(U_2) \ .$$

U_3 sollte nach 3. oben weiter unterteilt werden. Zu jedem festgelegten Randpunkt $a \in \mathfrak{A}$ setzen wir

$$U_a := \{x \in U_3 \mid Eax\}$$

und

$$V_a := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } U_a = \emptyset \\ \{y \in B_3 \mid E\pi(a)y\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt können wir setzen

$$V_3 := \bigcup\{V_a \mid a \text{ festgelegter Randpunkt}\} \ ,$$

$$V_4 := \begin{cases} B_4 & \text{falls } U_4 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{falls } U_4 = \emptyset \end{cases} \qquad \text{und} \qquad V_5 := \begin{cases} B_5 & \text{falls } U_5 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{falls } U_5 = \emptyset \end{cases} \ ,$$

$$V := \bigcup_{i=1\ldots5} V_i \ .$$

Dieses V ist die richtige Antwort des $\exists$rhalters auf U: Wähle der $\forall$erderber in der zweiten Hälfte des Fixpunktzuges $y \in V$. Es sind dann die Fälle zu unterscheiden:

$y \in V_1 \cup V_2$ Hier ist natürlich $\pi^{-1}(y) \in U$ die Antwort des $\exists$rhalters.

$y \in V_3$ Sei etwa $y \in V_a$. Dann ist $U_a \neq \emptyset$. Der $\exists$rhalter kann jedes beliebige $x \in U_a$ als Antwort angeben. Da im Rest des Spiels ohne Fixpunktzüge zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ nicht mehr unterschieden werden kann, ist die getroffene Zuordnung $x \mapsto y$ auch dann unproblematisch, wenn x auf einer $\mathfrak{K}$-Substruktur und y auf einer $\mathfrak{N}$-Substruktur liegen sollte (vgl. Bemerkung S. 37).

$y \in V_4 \cup V_5$ Ist $y \in V_i$ dann ist $U_i \neq \emptyset$ und jedes beliebige $x \in U_i$ kann dem $\exists$rhalter als richtige Antwort dienen.

Daß der $\exists$rhalter das Spiel jetzt fortsetzen kann liegt daran, daß zwischen $\mathfrak{K}$-Kanten und $\mathfrak{N}$-Kanten aus der Sicht von FO_k kein Unterschied besteht. Ähnlich wie vor dem Fixpunktzug stellt sich der $\exists$rhalter in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{K}$- und $\mathfrak{N}$-Substrukturen jeweils als eine Superkante zwischen den Randpunkten vor. Aus dieser Sicht hat er es mit vollständigen Graphen der Größe $e+1$ bzw. e zu tun. Die bisher erspielte Zuordnung induziert dazwischen einen partiellen Isomorphismus, der genügend oft noch in den verbleibenden FO-Zügen nach der gleichen Methode erweitert werden kann, wie vor dem FP-Zug. Daß hierbei $\mathfrak{K}$- und $\mathfrak{N}$-„Superkanten“ aufeinander abgebildet werden müssen ist nach der Bemerkung S. 37 unproblematisch. Die Wahl von V ist in Hinblick auf diese Sichtweise groß genug ausgefallen, so daß, wenn ein $a \in U$ ist, das zugeordnete b automatisch in V liegen wird. $\square$

Hinweis: Diese Konstruktionsidee noch einen Schritt weiterführen hieße, die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch zwei „Superrandpunkte" zu ergänzen und $\mathfrak{A}$ etwa als Kante und $\mathfrak{B}$ als Nichtkante in $\mathfrak{Z}_e$ und $\mathfrak{Z}_{e+1}$ einzubauen. Doch leider sind die dabei sich ergebenden Strukturen bereits in FO+2MFP unterscheidbar.

Kapitel 4

Zur Ausdrucksstärke der monadischen Fixpunktlogik auf Ordnungen

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll die Ausdrucksstärke der monadischen Fixpunktlogik in Ordnungen untersucht und mit der der monadischen zweiten Stufe (MSO) verglichen werden. Geordnete Strukturen spielen für die Fixpunktlogik in der endlichen Modelltheorie eine wesentliche Rolle, erlaubt die Ordnung doch, das iterative „Ausrechnen“ gewisser Eigenschaften in der Fixpunktlogik nachzuvollziehen. Umgekehrt halbordnet jeder nicht ganz triviale Fixpunktprozeß in einer Struktur dessen Träger, indem man $x \leq y$ setzt, wenn aus $y \in X_\alpha$ schon $x \in X_\alpha$ folgt. Ordnungen sind zudem recht anschauliche Gebilde, die die Hoffnung zulassen, daß auch die Fixpunktprozesse in ihnen nicht allzu unüberschaubar werden. Von daher liegt die Frage nach der Ausdrucksstärke der Fixpunktlogik vor allem auf unendlichen Ordnungen nicht ganz ferne.

Die Beschränkung auf das monadische Fragment der Fixpunktlogik ist eine sehr einschneidende. Mit mehrstelligen Fixpunkten ist in der Tat sehr viel mehr definierbar als mit einstelligen, was auch in der Tatsache zum Ausdruck kommt, daß in endlichen geordneten Strukturen alle Prädikate FP-definierbar sind, die in polynomialer Zeit entscheidbar sind. Der Grund, aus dem einstellige Fixpunkte soviel leichter handhabbar sind, wird zum einen aus den Theorieadditionssätzen (Kapitel 4.3) offenbar, die zeigen, daß, wie ein Fixpunkt sich an einer Stelle weiter „ausbreitet“, nur lokal von dieser Stelle abhängt, zum anderen ist es sofort einsichtig, daß im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel einstellige Teilmengen eben viel leichter zu behandeln sind.

Eine wesentliche Grundlage auch für diese Arbeit hat S. Shelah mit [Sh75] geschaffen. Darin wird die Ausdrucksstärke der monadischen zweiten Stufe, MSO, insbesondere in Hinblick auf Entscheidbarkeitsfragen untersucht.

Die MSO-Theorie abzählbarer Ordnungen ist entscheidbar ([Ra69]). Dieses Ergebnis beantwortet auch alle Entscheidbarkeitsfragen für die monadische Fixpunktlogik auf Ordnungen. Denn wegen des Satzes von Löwenheim und Skolem kann man sich auf abzählbare Ordnungen beschränken, und die Übersetzung eines MFP-Satzes in einen MSO-Satz ist auch effektiv möglich (vgl. (2)). Aus diesem Grunde werden wir kein Wort über Entscheidbarkeit oder maschinelle Nachvollziehbarkeit irgendwelcher Verfahren verlieren.

Der Weg, der jetzt vor uns liegt, ist der folgende: Nachdem im nächsten Abschnitt Schreibweisen eingeführt und Vereinbarungen getroffen werden, werden die „Theorieadditionssätze“ vorgestellt, die eine ganz wesentliche Grundlage bei der anstehenden Untersuchung bilden. Dann werden wir zu konkreten Ordnungen kommen, wobei wir ganz einfach mit endlichen Ordnungen beginnen. Lange wird das nicht aufhalten, und wir werden die Elemente endlicher Ordnungen einfärben mit der Frage, was über solche Ordnungen mit MFP ausgesagt werden kann. Das führt uns zum Satz von Büchi, den wir entsprechend für MFP beweisen werden. Der Satz von Ramsey wird uns dann helfen, auch ω und $\mathbb{Z}$, eingefärbt, in den Griff zu bekommen. Daß wir gefärbte Ordnungen betrachten hat nicht etwa den Grund, daß die Farben eine einfache Situation etwas komplizierter machen sollen, wir werden vielmehr die hier gewonnenen Ergebnisse bei den zerstreuten Ordnungen brauchen können, die als Summe von Kondensaten ganz natürlich als gefärbt erscheinen können. Vorher jedoch werden Wohlordnungen untersucht. Es wird sich zeigen, daß MFP genau die gleichen Eigenschaften abzählbarer Wohlordnungen beschreiben kann wie MSO, und wir werden eine recht übersichtliche Vorstellung davon gewinnen, welche Eigenschaften das sind.

Der schwierigste Teil steht uns dann mit den zerstreuten Ordnungen bevor. Zerstreute Ordnungen sind Ordnungen, in die $\mathbb{Q}$ nicht einbettbar ist. Eine erste vielleicht überraschende Feststellung wird sein, daß es nicht möglich ist, einen MFP-Satz anzugeben, der genau in zerstreuten Ordnungen gilt. Unter einem gewissen Gesichtspunkt könnte man sagen, daß die zerstreuten unter den Ordnungen das sind, was die kompakten unter den zerstreuten Ordnungen sind. So wird sich zeigen, daß eben die Kompaktheit eine nicht in MFP, wohl aber in MSO definierbare Eigenschaft von zerstreuten Ordnungen ist. Andererseits werden wir sehen, wie weit die Äquivalenz von MFP und MSO geht. Mehr dazu in der Einleitung dort.

Jede beliebige Ordung ist dichte Summe zerstreuter Ordnungen (siehe z.B. Kap. 5 in [Ros]). Über dichte Ordnungen kann in der Fixpunktlogik garnichts ausgesagt werden. (Quantorenelimination, $\aleph_0$-Kategorizität). In diesem Sinne ist die Beschränkung auf zerstreute Ordnungen in dieser Arbeit gerechtfertigt. Dennoch mag man sich von dieser Arbeit inspiriert fühlen, zu untersuchen, was MFP über das „Mischungsverhältnis“ dicht:zerstreut in einer Ordnung aussagen kann.

4.2 Notationen, Vereinbarungen und grundlegende Definitionen

Dieser Abschnitt soll uns das Leben in den folgenden etwas einfacher machen, indem er Schreib- und Sprechweisen einführt und Vereinbarungen trifft, die im Wesentlichen alle darauf hinauslaufen, den formalen Apparat so einfach wie möglich zu handhaben ohne übertriebene Verpflichtung auf totale formale Korrektheit.

σ-Ordnungen: Wir werden oft nicht nur einfach Ordnungen, sondern auch Ordnungen mit zusätzlichen (endlich vielen) einstelligen Relationen betrachten. Das beschreibt die

Definition 27. Ist eine Signatur $\sigma = \{P_1, \ldots, P_r\}$ mit einstelligen Relationssymbolen P_i gegeben, dann sollen *σ-Ordnungen* Ordnungen sein, in denen außer dem Ordnungssymbol $<$ auch die Relationen $P_1, \ldots, P_r$ interpretiert sind.

Meist ist das σ nicht genauer spezifiziert, dann kann man sich irgendeine feste endliche Lieblingssymbolmenge darunter vorstellen.

Ist eine σ-Ordnung $(\mathfrak{A}, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_r^{\mathfrak{A}})$ gegeben und ist $I \subset \mathfrak{A}$, dann schreiben wir oft $(I, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_r^{\mathfrak{A}})$ anstelle von $(I, <, P_1^{\mathfrak{A}} \cap I, \ldots)$. Auch wenn es um Spiele $\mathsf{S}(I, U, \ldots)$ geht, dann kann mit U durchaus $U \cap I$ gemeint sein. Da aus dem Kontext klar hervorgehen wird, was gemeint ist, wird das zu keinerlei Verständnisschwierigkeiten führen.

Summen von Ordnungen: Ist I eine Ordnung und für jedes $i \in I$ auch $\mathfrak{A}_i$, dann ist die Summe $\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ die Ordnung, die sich durch Hintereinanderlegen der $\mathfrak{A}_i$ ergibt. Dabei soll stets vorausgesetzt werden, daß die $\mathfrak{A}_i$ paarweise disjunkt sind. Eine solche Summe soll auch für σ-Ordnungen $\mathfrak{A}_i$ definiert sein als die σ-Ordnung $(A, <^A, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_r^{\mathfrak{A}})$ mit

$$\begin{array}{rcl} A &=& \bigcup_{i\in I} A_i \ , \\ <^A &=& \bigcup_{i\in I} <^{A_i} \cup \bigcup \{A_i \times A_j \mid i <^I j\} \ \text{ und} \\ P^A &=& \bigcup_{i\in I} P^{A_i} \ . \end{array}$$

Man beachte, daß so jedes A_i eine Teilmenge von A ist. Ist $U \subset A$, dann sei damit auch die erweiterte Struktur $(\mathfrak{A}_i, U)$ sinnvoll als $(\mathfrak{A}_i, U \cap A_i)$ definiert.

Produkt von Ordnungen: Ist I eine Ordnung und $\mathfrak{A}$ eine (σ-)Ordnung, dann bezeichne $I \cdot \mathfrak{A}$ oder $I\mathfrak{A}$ die (σ-)Ordnung $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, wobei die $\mathfrak{A}_i$ alles paarweise disjunkte Kopien von $\mathfrak{A}$ sind.

Intervalle sind konvexe Teilmengen von Ordnungen, wobei I konvex in $\mathfrak{A}$ liegt, wenn aus $x, z \in I$ und $x < y < z$ auch $y \in I$ folgt. Sehr häufig werden Intervalle durch ihre Grenzen gegeben sein. (x, y), $[x, y)$ etc. sind dann die Bezeichnungen dafür, wobei „[“ für eine abgeschlossene, „(“ für eine offene Grenze steht. Also z.B. $[x, y) := \{z \mid x \leq z < y\}$. Als Intervallgrenzen können auch $-\infty$ und ∞ auftreten, die das Richtige suggerieren sollten, nämlich $(-\infty, x) := \{y | y < x\}$. Diese Menge kann auch kurz mit ${}^{<}x$ bezeichnet sein. Entsprechend sind Schreibweisen wie ${}^{\leq}x$ oder ${}^{>}x$ zu verstehen.

Die Notation $a < U$ bedeutet $a < x$ für alle $x \in U$, und $U < V$ heißt $\forall x \in U$, $\forall y \in V \; x < y$.

Ein wichtiger Operator auf Ordnungen ist der $*$. $\mathfrak{A}^*$ ist die Ordnung die entsteht, wenn man $\mathfrak{A}$ umdreht (formal: $(A, >)$). So ist beispielsweise $\omega^* := \{-i \mid i \in \omega\}$ mit $<$ wie in $\mathbb{Z}$.

In welcher Weise MSO und MFP verglichen werden sollen

Man sagt, eine Logik $\mathcal{L}_2$ ist mindestens so ausdrucksstark wie eine Logik $\mathcal{L}_1$ und schreibt $\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2$, wenn es zu jedem $\mathcal{L}_1$-Satz einen $\mathcal{L}_2$-Satz gibt, der genau die gleichen Modelle hat. $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ sind äquivalent oder gleich ausdrucksstark, bedeutet dann: Es ist sowohl $\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2$ als auch $\mathcal{L}_2 \preccurlyeq \mathcal{L}_1$. Gilt dies nur innerhalb einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Modellen, dann sagt man auch, *in $\mathfrak{K}$ stimmen die Logiken überein*. Daneben ist, wenn unendliche Modelle zugelassen sind, auch eine andere Art des Vergleichs von Logiken sinnvoll. Und zwar schreibt man $\mathcal{L}_1 \preccurlyeq_{\equiv} \mathcal{L}_2$ *in* $\mathfrak{K}$, wenn für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}_2} \mathfrak{B}$ schon $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}_1} \mathfrak{B}$ folgt. Es gilt:

$$\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_1 \preccurlyeq_{\equiv} \mathcal{L}_2 \ .$$

Wir werden im Folgenden daher stets zunächst die stärkere Äquivalenz der Logiken MSO und MFP, also MSO $\preccurlyeq$ MFP, zu zeigen versuchen und dann uns ggf. MSO $\preccurlyeq_{\equiv}$ zuwenden.

Ein ganz wesentliches Hilfsmittel ist die „Staffelung“ der Sätze durch ihren Quantorenrang, der wie üblich auch bei MSO als die größte Anzahl der ineinandergeschachtelten Quantoren, egal ob erster oder zweiter Stufe, definiert ist. Bezeichnet MSO_n die Menge aller MSO-Sätze vom Quantorenrang höchstens n, dann ist damit die Äquivalenzrelation $\equiv_{\text{MSO}_n}$ zwischen Modellen gegeben. Wir werden uns bei der Suche nach „ausdrucksstarken“ MFP-Sätzen stets von der Vorstellung leiten lassen, daß es zu jedem Quantorenrang n „stärkste“ MSO-Sätze dieses Ranges gibt, die gerade die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen beschreiben. (Die Sätze in $\Phi^n_{0,0}$ von Seite 16 sind solche für FP.) Das stellt uns vor die Aufgabe, die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen in MFP zu beschreiben. Ist die gelöst, dann ergibt sich MSO $\preccurlyeq$ MFP von ganz alleine.

Es ist übrigens nicht wesentlich, wie man den Quantorenrang genau definiert. Man braucht einzig und allein folgende Eigenschaften:

- MSO_n ist endlich (bis auf logische Äquivalenz) für alle $n \in \omega$,
- $\mathrm{MSO} = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{MSO}_n$.

Tritt im Folgenden $\sim_n$ auf, dann ist dies ein Joker für $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ und $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$, der dann eingesetzt wird, wenn die entsprechende Aussage für jede der beiden Äquivalenzrelationen gilt. Das soll dann andeuten, daß es darauf nicht ankommt. Wenn von $\mathfrak{K} \in \sim_n$ die Rede ist, dann ist damit gemeint: $\mathfrak{K}$ ist eine $\sim_n$-Äquivalenzklasse.

4.3 Die Theorieadditionssätze für die monadischen Logiken MSO und MFP

... sind der Grund, weshalb die monadischen Fragmente der Logiken MSO und MFP auf Ordnungen so viel leichter handhabbar sind als die volle zweite Stufe oder Fixpunktlogik. Sie erlauben z.B. folgende Argumentation: Wenn die linken Hälften zweier Ordnungen $\sim_n$-äquivalent sind und ebenso die rechten, dann kann man diese Ergebnisse zusammensetzen zum Schluß, daß die ganzen Ordnungen $\sim_n$-äquivalent sind. Verschiedene, weit voneinander entfernte Teile einer Ordnung können nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden. Etwa zu sagen „ein Endstück ist isomorph zu einem Anfangsstück", was mit einer Quantifikation über eine zweistellige Relation ginge, ist nicht möglich.

Folgende Frage motiviert die Theorieadditionssätze:

(?) Was muß ich über I und J, $\{\mathfrak{A}_i | i \in I\}$, $\{\mathfrak{B}_j | j \in J\}$ wissen, um auf $\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i \sim_n \sum_{j\in J} \mathfrak{B}_j$ schließen zu können?

Zuerst nehmen wir den einfachen Fall $I = J$ an. Die Antwort gibt dann

Satz 28 (Theorieadditionssatz 1, TAS1). *Ist I eine Ordnung und sind für jedes $i \in I$ σ-Ordnungen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ gegeben und gilt $\mathfrak{A}_i \sim_n \mathfrak{B}_i$ für alle i, dann gilt auch $\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i \sim_n \sum_{i\in I} \mathfrak{B}_i$, wobei $\sim_n$ jedesmal $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$ oder jedesmal $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ bezeichne.*

Beweis: Die behauptete Äquivalenz zeigt man am besten mit Hilfe des entsprechenden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels. Dieses bestreitet der $\exists$rhalter, indem er z.B. vorgegebene Mengen $U \subset \sum \mathfrak{A}_i$ zerlegt in die Teile $U \cap \mathfrak{A}_i$ und zu jedem dieser Teile getrennt eine Antwort $V_i \subset \mathfrak{B}_i$ findet (was geht, da ja $\mathfrak{A}_i \sim_n \mathfrak{B}_i$ vorausgesetzt war). Diese setzt er dann zusammen: $V := \bigcup V_i$. Man überzeugt sich leicht davon, daß das zum Ziel führt. □

Ein anderer Aspekt dieses Satzes ist die im Folgenden auch sehr oft verwendete Tatsache, daß, wenn $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$ gezeigt werden soll, es möglich ist, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in gleich viele Intervalle zu zerlegen und dann zu zeigen, daß der $\exists$rhalter auf je zwei entsprechenden Intervallen das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel gewinnt. Da der Satz auch für Ordnungen mit einstelligen Relationen gilt, kann der $\exists$rhalter auch mitten in einem Spiel die Ordnungen zerlegen (z.B. so, wie die bereits fixierten Elemente die Ordnung in Intervalle zerlegen) und die Teilstücke jeweils isoliert betrachten, d.h. für je zwei entsprechende Teilstücke zeigen, daß er auf ihnen das Spiel fortsetzen kann. Diese Eigenschaft der monadischen Logiken sollte man ganz klar vor Augen haben, wir werden sie in Zukunft sehr oft verwenden.

Der Name Theorieadditionssatz rechtfertigt sich aus der Möglichkeit, die der Satz eröffnet, $\sim_n$-Theorien oder gleichbedeutend $\sim_n$-Klassen zu addieren:

Definition 29. Wir definieren die Addition zweier $\sim_n$-Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ von σ-Ordnungen:

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' \ := \ \text{die } \sim_n\text{-Klasse einer } \sigma\text{-Ordnung } \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \text{ mit } \mathfrak{A} \in \mathfrak{K} \text{ und } \mathfrak{B} \in \mathfrak{K}'$$

und die Multiplikation einer solchen Klasse $\mathfrak{K}$ mit einer Ordnung I:

$$I \cdot \mathfrak{K} \ := \ \text{die } \sim_n\text{-Klasse einer Ordnung } \textstyle\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i \text{ mit } \mathfrak{A}_i \in \mathfrak{K},$$

wobei $\sim_n$ sowohl $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$ als auch $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ bezeichnen kann.

Kommen wir jetzt zu dem wesentlich schwierigeren Fall $I \not\cong J$. Hier müssen wir wissen, welches $\mathfrak{A}_i$ zu welcher $\sim_n$-Klasse gehört. Das führt zu der

Notation: Sei $\mathfrak{K} \in \sim_n$, d.h. $\mathfrak{K}$ sei eine $\sim_n$-Klasse von σ-Ordnungen. I, $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$, $(\mathfrak{B}_j)_{j \in J}$ seien wie in (?) gegeben. Es sei $\mathfrak{A} := \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Wir definieren nun die Menge der Stellen in I, an denen eine Ordnung aus $\mathfrak{K}$ steht:

$$R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}} := \{ i \in I \mid \mathfrak{A}_i \in \mathfrak{K} \} \ .$$

TAS1 zeigt, daß in $(I, (R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}})_{\mathfrak{K} \in \sim_n})$ genügend Information steckt, daß daraus auf die Klasse von $\mathfrak{A} := \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ geschlossen werden kann. Es genügt aber schon weniger. Das präzisiert der

Satz 30 (Theorieadditionssatz 2, TAS2).
Es existiert zu jedem $n \in \omega$ ein $k = k(n, |\sigma|, \sim_n) \in \omega$, so daß für Summen von σ-Ordnungen $\mathfrak{A} := \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B} := \sum_{j \in J} \mathfrak{B}_j$ gilt:

$$\textit{Ist } (I, (R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}})_{\mathfrak{K} \in \sim_n}) \sim_k (J, (R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{B}_j)_{j\in J}})_{\mathfrak{K} \in \sim_n}) \quad \textit{dann ist} \quad \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B} \ ,$$

wobei $\sim_n$ jedesmal $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$ oder jedesmal $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ bezeichne.

Beweis: Für MSO gibt Shelah in [Sh75] einen sehr technischen Beweis an, der allerdings den Vorteil hat, daß alle Objekte „maschinell handhabbar“ sind und so weitgehene Entscheidbarkeitsergebnisse erzielt werden. Im Lichte der Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele erkennt man die gleiche Beweisidee, die hier für MFP ausgeführt wird. Es lassen sich aber auch hier technische Unübersichtlichkeiten nicht umgehen. Leider kann man nicht offensichtlich den Satz für MFP aus dem für MSO gewinnen, denn nicht nur die Behauptung des Satzes ist für MFP schwächer, sondern auch die Voraussetzungen sind es.

Wir wollen zeigen, wie der $\exists$rhalter unter den gegebenen Voraussetzungen das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für MFP, $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_n}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$, gewinnt. Dabei werden Teilmengen $\bar{U}^{\mathfrak{A}}$, $\bar{V}^{\mathfrak{A}}$ und $\bar{V}^{\mathfrak{B}}$, $\bar{U}^{\mathfrak{B}}$ ausgezeichnet. Das ist die Motivation für das folgende Lemma, aus dem TAS2 dann unmittelbar folgt.

Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß wir jedes $\mathfrak{A}_i$ als Intervall in $\mathfrak{A}$ auffassen und kontextabhängig bei gegebener Teilmenge $U \subset \mathfrak{A}$ mit U auch $U \cap \mathfrak{A}_i$ gemeint sein kann.

Lemma 31. *Zu jedem $n, l, m \in \omega$ gibt es ein $k = k(n, l+m, |\sigma|)$, so daß für σ-Ordnungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wie in TAS2, $U_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, U_l^{\mathfrak{A}}$, $V_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, V_m^{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ und $V_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, V_l^{\mathfrak{B}}$, $U_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, U_m^{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ gilt: Der $\exists$rhalter gewinnt das Spiel*

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_n}(\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \sum_{j \in J} \mathfrak{B}_j, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}}) \ ,$$

sofern es $s \in \omega$ und Überdeckungen $X_1 \cup \ldots \cup X_s = I$ und $Y_1 \cup \ldots \cup Y_s = J$ gibt, für die die Bedingungen (1n) und (2n) erfüllt sind, mit

(1n) Der $\exists$rhalter gewinnt das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(I; J)$ mit einer Strategie, in der er nur Zuordnungen $i \mapsto j$ konstruiert, für die es $t \leq s$ gibt mit $i \in X_t$ und $j \in Y_t$.

(2n) Für alle $t \leq s$, $i \in X_t$, $j \in Y_t$ gewinnt der $\exists$rhalter das Spiel

$$\mathsf{S}(i,j) \ := \ \mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_n}(\mathfrak{A}_i, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}_j, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}}) \ .$$

Den Satz 30 für $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$ erhält man aus dem Lemma, indem man als die X_t die Teilmengen $R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}}$ und als Y_t die $R_{\mathfrak{K}}^{(\mathfrak{B}_j)_{j\in J}}$ und $k := k(n, 0, |\sigma|)$ setzt.

Beweis des Lemmas: Seien n, l, m, σ wie im Lemma gegeben. Wir zeigen die Behauptung mit einer Induktion über n. Da für $n = 0$ nichts zu zeigen ist, können wir $k(0, p, q) = 0$ setzen.

Sei jetzt $n > 0$. Wir setzen $k(n, p, |\sigma|) := k(n-1, p+1, |\sigma|) + |\Phi_{0,p+1}^{n-1}|$ mit $\Phi_{0,p+1}^{n-1}$ wie aus (iii)$_n$ auf Seite 16 und zeigen damit die Behauptung. Seien dazu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, $U_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, U_l^{\mathfrak{A}}$, $V_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, V_m^{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ und $V_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, V_l^{\mathfrak{B}}$, $U_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, U_m^{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ mit $l + m = p$ und $X_1, \ldots, X_s$, $Y_1, \ldots, Y_s$ mit $(1n)$ und $(2n)$ wie in Lemma 31 gegeben. Wir müssen zeigen, wie der $\exists$rhalter das Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{MFP}_n}(\mathfrak{A}, \ldots; \mathfrak{B}, \ldots)$ gewinnt.

Wählt in diesem Spiel der $\forall$erderber als erstes einen $\exists$-Zug, darin etwa $a \in \mathfrak{A}_i$, dann wählt der $\exists$rhalter erst $j \in J$ passend zu i nach seiner Strategie aus $(1n)$. Sei $i \in X_t$ und $j \in Y_t$, dann findet der $\exists$rhalter mit $(2n)$ ein $b \in \mathfrak{B}_j$ als Antwort auf $a \in \mathfrak{A}_i$. Dieses b ist auch im Spiel zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die richtige Antwort. Um uns zu überlegen, daß der $\exists$rhalter noch $n-1$ weitere Züge spielen kann, zerlegen wir $\mathfrak{A}$ in die Intervalle $\sum_{i'<i} \mathfrak{A}_{i'}$, $\mathfrak{A}_i$ und $\sum_{i'>i} \mathfrak{A}_{i'}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechend in $\sum_{j'<j} \mathfrak{B}_{j'}$, $\mathfrak{B}_j$ und $\sum_{j'>j} \mathfrak{B}_{j'}$. Mit dem Paar $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_j)$ kann er nach Wahl von b und wegen $(2n)$ noch $n-1$ weitere Züge spielen. Für die anderen Intervallpaare überlegt man sich leicht, daß die Induktionsvoraussetzungen gegeben sind. Die Strategie aus $(1n-1)$ ist die aus $(1n)$, die ja zur Zuordnung $i \mapsto j$ führte, außerdem ist sicher $k(n-1, p, q) < k(n, p, q)$. $(2n-1)$ ist mit $(2n)$ gegeben.

Schwieriger ist der Fall, in dem der $\forall$erderber einen Fixpunktzug wählt. Gebe er etwa $U \subset \mathfrak{A}$ vor. Die richtige Antwort $V \subset \mathfrak{B}$ zu finden ist jetzt nicht ganz einfach. Naheliegend ist es, zu jedem $j \in J$ erst ein $V_j \subset \mathfrak{B}_j$ zu suchen und dann $V := \bigcup V_j$ zu setzen. V_j würde man gerne als Antwort gemäß $(2n)$ auf $U \cap \mathfrak{A}_i$ erhalten. Aber welches i ist dabei zu wählen? Der Weg dahin ist verschlungen: Wir lassen uns als erstes durch U eine Partition $\{X'_1, \ldots, X'_{s'}\}$ von I geben, und zwar sollen die X'_t die Äquivalenzklassen der Relation auf I sein, in der zwei Elemente $i_1, i_2 \in I$ genau dann stehen, wenn gilt:

(+) Der $\exists$rhalter gewinnt sowohl $\mathrm{S}_{\mathrm{MFP}_{n-1}}(\mathfrak{A}_{i_1}, \bar{U}U, \bar{V}; \mathfrak{A}_{i_2}, \bar{U}U, \bar{V})$
als auch $\mathrm{S}_{\mathrm{MFP}_{n-1}}(\mathfrak{A}_{i_2}, \bar{U}U, \bar{V}; \mathfrak{A}_{i_1}, \bar{U}U, \bar{V})$.

Korollar 11 gibt uns $|\Phi_{0,p+1}^{n-1}|$ als obere Schranke für die Größe s' dieser Partition. (Das ist der Grund für die zunächst seltsame Wahl von k.) Als nächstes verschaffen wir uns eine Überdeckung $\{Y'_1, \ldots, Y'_{s'}\}$ von J wie folgt: Wir lassen den $\forall$erderber im Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{MFP}_k}(I; J)$ in s' aufeinanderfolgenden Fixpunktzügen die Mengen $X'_1, \ldots, X'_{s'}$ vorgeben und schauen, wie der $\exists$rhalter jeweils reagiert. Genauer: Für $1 \leq t \leq s'$ sei

$Y'_t := \bigcup\{Y \subset J \mid Y$ ist Antwort des $\exists$rhalters auf X'_t in einem Spielverlauf von $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(I;J)$, in dem der $\forall$erderber zu Beginn in t aufeinanderfolgenden Fixpunktzügen die Mengen $X'_1, \ldots, X'_t$ vorgibt und der $\exists$rhalter jeweils gemäß seiner Gewinnstrategie aus $(1n)$ antwortet. $\}$

Einen Spielverlauf wie in dieser Definition wollen wir einen *(t-Züge-)(1n)-Spielverlauf* nennen. Davon gibt es mehrere, denn jeweils in den zweiten Hälften der Fixpunktzüge ist der $\forall$erderber ja noch frei in seiner Wahl. Der $\exists$rhalter ist allerdings gebunden an seine Gewinnstrategie. Auf diese Mengen X'_t, Y'_t wollen wir später die Induktionsvoraussetzungen anwenden. Dazu wollen wir uns jetzt bereits überlegen, daß die Y'_t eine Überdeckung von J bilden. Wäre das nicht der Fall, könnte der $\forall$erderber in einem s'-Züge-$(1n)$-Spielverlauf nach den s' Fixpunktzügen in einem $\forall$-Zug ein $j \in J$ wählen, das in keinem Y'_t liegt. Jede Antwort i des $\exists$rhalters liegt dann aber in einem X'_t und verletzt damit die Vorschrift: $i \in X'_t \Rightarrow j \in Y'_t$.

Doch nun weiter auf dem Weg zu V. Wir wollen jetzt zu jedem Y'_t und jedem $j \in Y'_t$ ein $f(j, Y'_t) \in X'_t$ wie folgt zuordnen. Nach Definition von Y'_t gibt es einen $(1n)$-Spielverlauf, in dem in der ersten Hälfte des t-ten Fixpunktzuges der $\exists$rhalter auf die Vorgabe X'_t mit einer Menge $Y \subset J$ antwortet, die j enthält. Jetzt betrachten wir den Spielfortgang, in dem der $\forall$erderber in der zweiten Hälfte dieses Fixpunktzuges j fixiert. Das Element aus X'_t, das der $\exists$rhalter mit seiner Gewinnstrategie als Antwort auf j gibt, das soll unser gesuchtes $f(j, Y'_t)$ sein. Nach $(1n)$ gibt es ein r mit $f(j, Y'_t) \in X_r$ und $j \in Y_r$. Es gilt also mit $(2n)$:

(*) Der $\exists$rhalter gewinnt das Spiel $\mathsf{S}(f(j, Y'_t), j)$

und findet somit in diesem Spiel in der ersten Hälfte eines Fixpunktzuges zu $U \cap \mathfrak{A}_{f(j,Y'_t)}$ eine Antwort $V_{j,Y'_t} \subset \mathfrak{B}_j$. Jetzt endlich können wir setzen:

$$V := \bigcup\{V_{j,Y'_t} \mid t \leq s',\ j \in Y'_t\} \ .$$

Das ist die richtige Antwort auf U. Wählt der $\forall$erderber $b \in V$, etwa $b \in V_{j,Y'_t} \subset \mathfrak{B}_j$, dann ist die in der zweiten Hälfte des mit $U \cap \mathfrak{A}_{f(j,Y'_t)}$ (nach (*)) begonnenen Fixpunktzuges vom $\exists$rhalter gefundene Antwort $a \in U \cap \mathfrak{A}_{f(j,Y'_t)}$ die richtige. Wir setzen $i := f(j, Y'_t)$ und zerlegen wieder $\mathfrak{A}$ in die Intervalle $\sum_{i'<i} \mathfrak{A}_{i'}$, $\mathfrak{A}_i$ und $\sum_{i'>i} \mathfrak{A}_{i'}$. Auch $\mathfrak{B}$ wird entsprechend zerlegt. Jetzt müssen wir uns noch überlegen, daß der $\exists$rhalter auf allen Teilen der Ordnung weiterspielen kann. Zwischen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_j$ läuft das Spiel nach (*) noch $n-1$ Züge weiter (man beachte Lemma 12, je größer V desto besser). Für die Intervallpaare $(\sum_{i'<i} \mathfrak{A}_{i'}, \sum_{j'<j} \mathfrak{B}_{j'})$ und $(\sum_{i'>i} \mathfrak{A}_{i'}, \sum_{j'>j} \mathfrak{B}_{j'})$ überlegen wir uns, daß die Induktionsvoraussetzungen mit den Mengen X'_t, Y'_t gegeben sind.

Zu $(1n-1)$: Es gibt einen s'-Züge-$(1n)$-Spielverlauf, in dem die Zuordnung $i \mapsto j$ erspielt wird. Genau diesen Spielverlauf kann der $\exists$rhalter nach den s'

Fixpunktzügen mit der gleichen Gewinnstrategie fortsetzen und beachtet damit automatisch $(1n-1)$, denn die Mengen Y'_t umfassen ja die dabei gefundenen Antworten auf die X'_t, und es ist $k(n-1, p+1, |\sigma|) \leq k(n, p, |\sigma|) - s'$.

Zu $(2n-1)$: Seien $i' \in X'_t$, $j' \in Y'_t$ beliebig. Es war $f(j', Y'_t) \in X'_t$ und so gewinnt nach Wahl von X'_t (vgl. (+)) der $\exists$rhalter das Spiel

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{n-1}}(\mathfrak{A}_{i'}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{A}_{f(j', Y'_t)}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}})$$

und nach Wahl von $V_{j', Y'_t} \subset V$ auch das Spiel (man beachte wieder Lemma 12)

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{n-1}}(\mathfrak{A}_{f(j', Y'_t)}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}_{j'}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}V, \bar{U}) \ .$$

Setzt er dies mit Lemma 13 zusammen, gewinnt er

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{n-1}}(\mathfrak{A}_{i'}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}_{j'}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}V, \bar{U}).$$

Den Fixpunktzug, der mit Vorgabe von $U \subset \mathfrak{B}$ beginnt, pariert der $\exists$rhalter entsprechend mit vertauschten Strukturen.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Eine einfache Folgerung auf verschiedene Produkte $I \cdot \mathfrak{A}$ und $J \cdot \mathfrak{A}$ ergibt sich:

Folgerung 32. *Für alle $n \in \omega$ gibt es ein $k \in \omega$, so daß für alle Ordnungen I, J und $\mathfrak{A}$ gilt: Aus $I \sim_k J$ folgt $\sum_{i \in I} \mathfrak{A} \sim_n \sum_{j \in J} \mathfrak{A}$.*

4.4 Endliche Ordnungen

Endliche Ordnungen sind hier gegeben durch die natürliche Zahl ihrer Mächtigkeit. Was über endliche Ordnungen in MFP oder MSO gesagt werden kann ist bereits durch TAS1 und die Endlichkeit von $\sim_n$ festgelegt. Aus letzterer folgt nämlich, daß es zwei verschiedene natürliche Zahlen k und l geben muß mit $k \sim_n l$. TAS1 läßt dann auf $k+1 \sim_n l+1$ schließen, und mit $c(n) := |l-k|$ ergibt sich sofort:

Satz 33 (Die $\sim_n$-Klassen von endlichen Ordnungen).
Für alle $n \in \omega$ gibt es Zahlen $k(n), c(n) \in \omega$ so daß für $l, m \geq k(n)$ gilt:

$$l \equiv m \bmod c(n) \Rightarrow (l, <) \sim_n (m, <) \ ,$$

wobei $\sim_n$ sowohl $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$ als auch $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ bezeichnen kann. $\square$

Damit ist klar, wie die Modellklasse eines MSO-Satzes aussieht:

Korollar 34. *Sei φ ein MSO-Satz vom Quantorenrang n, $k(n)$ und $c(n)$ wie in Satz 33. Es gilt dann*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(\varphi) \;=\; & \{l \mid l < k(n),\; l \models \varphi\} \cup \\ & \{l + m \cdot c(n) \mid k(n) \leq l < k(n) + c(n) \text{ und } l \models \varphi,\; m \in \omega\}\;.\end{aligned}$$

□

$\mathrm{Mod}(\varphi)$ ist also eindeutig bestimmt durch die Menge der Modelle, deren Größe durch $k(n) + c(n)$ beschränkt ist.

Wenn man weiß, daß der kleinste Fixpunkt

$$\mathrm{LFP}_{x,X}(\text{`}x = l\text{'} \vee \exists y(y \in X \wedge \text{`}x = y + c\text{'}))$$

in ω gebildet genau die Menge $\{l + m \cdot c \mid m \in \omega\}$ ergibt, dann ist es eine leichte Übung, $\mathrm{Mod}(\varphi)$ wie in Korollar 34 als Modellklasse eines Satzes in MFP darzustellen. Damit haben wir

Satz 35. *In endlichen Ordnungen gilt* MSO $\preccurlyeq$ MFP. □

Natürlich ist Korollar 34 auch leicht aus dem Satz von Büchi (vgl. Abschnitt 4.5.3) zu gewinnen, aber wir wollen nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen. Außerdem sind die Betrachtungen in diesem Kapitel eine gute Vorübung für das, was uns noch erwartet.

Wagen wir nun den nächsten Schritt:

4.5 Endliche Ordnungen mit Farben

... sind σ-Ordnungen $\mathfrak{A}$, in denen die Interpretationen der Relationssymbole $P_1, \ldots, P_r$ aus σ eine Partition bilden. Das ist bekanntermaßen keine Einschränkung des allgemeinen Falls: Statt einer σ-Ordnung $\mathfrak{A}$ betrachtet man die gefärbte Ordnung $\mathfrak{A}'$, in der jedes Element a die Farbe $\{i|a \in P_i^{\mathfrak{A}}\}$ hat. Es sollte klar sein, wie man Aussagen über $\mathfrak{A}$ in Aussagen über $\mathfrak{A}'$ überführt und umgekehrt.

4.5.1 Gefärbte Ordnungen als Worte

Betrachtet man Farben als Buchstaben eines Alphabetes, dann ist eine gefärbte Ordnung ein Wort und umgekehrt ein Wort eine gefärbte Ordnung:

Definition 36. Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Farbmenge bzw. ein Alphabet, Sei weiter $a_0 \dots a_{m-1} \in \mathcal{A}^*$ ein Wort über $\mathcal{A}$. Die zugehörige gefärbte Ordnung ist

$$\mathrm{Ord}(a_0 \dots a_{m-1}) := (m, <, (P_a)_{a \in \mathcal{A}}) \quad \text{mit} \quad P_a := \{i < m | a_i = a\} \ .$$

Die Modellklasse eines MSO-Satzes über gefärbte Ordnungen kann so als Menge von Worten aufgefaßt werden. Man könnte schreiben

$$a_0 \dots a_{m-1} \models \varphi \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ord}(a_0 \dots a_{m-1}) \models \varphi \ .$$

In diesem Sinne definiert φ eine Sprache. Diese Betrachtungsweise hat nur einen Sinn, wenn wir jetzt noch

4.5.2 Endliche deterministische Automaten

betrachten. Sie sind gegeben durch eine endliche Menge von Zuständen $\mathcal{Z}$, in die sie gelangen können. Ein Automat arbeitet Worte über einem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ ab. Zu Beginn ist er in einem ausgezeichneten Ausgangszustand, dann liest er Buchstabe für Buchstabe des Wortes und geht nach jedem Lesevorgang in einen neuen Zustand über. In welchen genau, das regelt die für diesen Automaten eigene Übergangsfunktion

$$t: \ \mathcal{Z} \times \mathcal{A} \to \mathcal{Z} \ .$$

$t(z, a)$ ist dann der Zustand, in den der Automat übergeht, wenn er im Zustand z den Buchstaben a liest. Weiter gibt es eine ausgezeichnete Teilmenge von *akzeptierenden* Zuständen. Man sagt, ein Automat akzeptiert ein Wort, wenn er nach dem Abarbeiten des Wortes in einem akzeptierenden Zustand ist. Die Sprache, die ein Automat akzeptiert, ist die Menge der Worte, die er akzeptiert. Die Sprachen $\Sigma \subset \mathcal{A}^*$, für die es einen Automaten gibt, der sie akzeptiert, heißen *reguläre Sprachen.*

4.5.3 Der Satz von Büchi

Satz 37 (Satz von Büchi). *Die regulären Sprachen sind genau die Modellklassen von MSO-Sätzen.*

Wir werden zeigen:

Satz 38. *Die regulären Sprachen sind genau die Modellklassen von MFP-Sätzen. Eine reguläre Sprache wird sogar von einem MFP-Satz beschrieben, in dem nur ein einziger Fixpunktquantor auftritt.*

Wenn man berücksichtigt, daß σ-Ordnungen und gefärbte Ordnungen in unserem Kontext gleichwertig sind, folgt sofort:

Korollar 39. MSO $\preccurlyeq$ MFP *in endlichen σ-Ordnungen. Insbesondere existiert zu jeder $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse $\mathfrak{K}$ endlicher σ-Ordnungen ein MFP-Satz $\centerdot \in \mathfrak{K}$, der auf genau die Ordnungen in $\mathfrak{K}$ zutrifft.*

Für dieses „insbesondere" beachte man, daß jede $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse von einem passenden Hintikka-Satz in MSO beschrieben wird. □

Beweis von Satz 38: Dieser Beweis ist eine Abwandlung des Beweises von W. Thomas in [Th82], in dem er die entsprechende Aussage für MSO zeigt.

Sei $\Sigma \subset \mathcal{A}^*$ eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}$. Wir betrachten jetzt den Automaten, der Σ akzeptiert. Wie er arbeitet wollen wir in geeigneter Weise beschreiben. Die Zustände des Automaten seien 0-1 – Folgen der Länge $n+4$:

$$\mathrm{zust}(i) \quad := \quad 110a_1 \dots a_n 0 \quad \text{mit } a_j = 1 \Leftrightarrow j = i$$

Der Grund für diese zunächst sonderbare Darstellung der Zustände ist, daß wir auf diese Weise eine Folge von Zuständen als 0-1–Folge ($n+4$-facher Länge) so kodieren können, daß wir, wenn eine solche 0-1–Folge gegeben ist, auch ohne Abzählen feststellen können, wo ein (Code eines) Zustand(s) beginnt, nämlich dort, wo die Ziffernfolge 11 steht, an allen anderen Stellen steht eine 1 zwischen zwei Nullen. Eine 0-1–Folge wiederum soll auch als Teilmenge einer Ordnung aufgefaßt werden, deren Größe mindestens die Länge der Folge ist:

Notation: Sei $Z: \; i \to \{0,1\}$ eine 0-1 - Folge. Dieser ordnen wir die Menge

$$M(Z) := \{j < i \mid Z(j) = 1\}$$

zu. Ist Z' eine weitere 0-1 - Folge, dann bezeichne $Z^\frown Z'$ die Konkatenation dieser Folgen.

Mit dieser Definition ist beispielsweise $M(\mathrm{zust}(i)) = \{0, 1, i+2\}$.

Die Existenz gewisser Teilmengen kann auf diese Weise über die Existenz gewisser Zustandsfolgen etwas aussagen.

Sei $\bar{t}$ die auf Worte erweiterte Übergangsfunktion des Automaten. $\bar{t}$ ordne also jedem Zustand Z und jedem Wort den Zustand zu, in den der Automat übergeht, wenn er, beginnend in Z, das Wort „abarbeitet".

Ein Wort $a_0 \dots a_{m-1}$ führt zu einer Folge von Zuständen. Jeden $n+4$-ten greifen wir uns heraus:

$$\begin{aligned} Z_0 \quad &:= \quad \mathrm{zust}(1) \text{ (der Ausgangszustand) }, \\ Z_{i+1} \quad &:= \quad \bar{t}(Z_i, a_{i(n+4)} \dots a_{(i+1)(n+4)-1}) \text{ für } (i+1)(n+4) < m-1 \;. \end{aligned}$$

Die Sequenz der 0-1–Folgen $Z_1,\ Z_1^\frown Z_2,\ Z_1^\frown Z_2^\frown Z_3, \ldots$ definiert eine monotone Folge

$$Y_1 := M(Z_1) \subset Y_2 := M(Z_1^\frown Z_2) \subset Y_3 := M(Z_1^\frown Z_2^\frown Z_3) \subset \ldots$$

von Teilmengen der Ordnung $\mathrm{Ord}(a_0 \ldots a_{m-1})$. Man beachte dazu: Wenn Z_k das letzte definierte $Z_?$ ist, dann ist $k(n+4) < m-1$. Diese Folge wollen wir als die Stufen eines Fixpunktprozesses wiedergewinnen. Damit die Formeln leichter zu lesen sind, verwenden wir min und max als Konstanten für das erste und das letzte Element der Ordnung. Selbstverständlich kann man diese zusätzlichen Konstanten wieder eliminieren. In unserem Beispiel wäre also $\max = m-1$. Wir suchen jetzt eine Formel $\varphi(y, Y)$, in der Y positiv auftritt, so daß für den in $\mathfrak{A} = \mathrm{Ord}(a_0 \ldots a_{m-1})$ durch sie definierten Operator $\mathcal{F}_\varphi^{\mathfrak{A}}$ gilt:

$$\mathcal{F}_\varphi^{\mathfrak{A}}(\emptyset) \;=\; M(\bar{t}(\mathrm{zust}(1), a_0 \ldots a_{n+4-1})) \;=\; Y_1 \tag{8}$$

$$\mathcal{F}_\varphi^{\mathfrak{A}}(Y_i) \;=\; Y_{i+1} \text{ falls } (i+1)(n+4) < \max\ . \tag{9}$$

Wenn $i(n+4) < \max \leq (i+1)(n+4)$ ist, dann wird das Wort $a_{\min} \ldots a_{\max}$ dann akzeptiert, wenn $\bar{t}(Z_i, a_{i(n+4)} \ldots a_{\max})$ ein akzeptierender Endzustand ist. Damit man dies dem Fixpunkt auch ansieht, wollen wir φ so definieren, daß zu (8) und (9) noch hinzukommt:

Für $i(n+4) < \max \leq (i+1)(n+4)$:

$$\mathcal{F}_\varphi^{\mathfrak{A}}(Y_i) \;=\; \begin{cases} Y_i \cup \{\max\} & \text{falls } \bar{t}(Z_i, a_{i(n+4)} \ldots a_{\max}) \text{ ein ak-} \\ & \text{zeptierender Endzustand ist} \\ Y_i & \text{sonst.} \end{cases} \tag{10}$$

Wenn $\varphi(y, Y)$ so definiert ist, dann beschreibt $\max \in [\mathrm{LFP}_{y,Y}\varphi(y, Y)]$ die von dem betrachteten Automaten erzeugte Sprache.

Doch nun zur Definition von φ:
$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_4$. Damit (8) erfüllt sein wird, setzen wir

$$\varphi_1(y) \;:=\; \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}^{n+4}} ([\min, \min + n + 3] \cong \alpha \wedge \bigvee_{j \in M(\bar{t}(Z_0, \alpha))} y = \min + j)\ .$$

Das ist der „Induktionsanfang”. Es sollte darin anstelle von „$\cong \alpha$“ genauer heißen: „$\cong \mathrm{Ord}(\alpha)$“. Die kurzen Zeilen zwingen aber zur kürzeren Schreibweise. Nun zum Induktionsschritt, also zu dem Teil von φ, der (9) wahr macht. Es bezeichne $\mathcal{Z}$ die Menge der Zustände.

$$\begin{aligned} \varphi_2(y, Y) \;:=\; & \bigvee_{Z \in \mathcal{Z}} \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}^{n+4}} \exists x (x + 2n + 7 < \max \wedge \overbrace{\bigwedge_{j \in Z} x + j \in Y}^{Y \cap [x, x+n+3] \text{ kodiert } Z} \wedge \\ & [x + n + 4, x + 2n + 7] \cong \alpha \wedge \bigvee_{j \in M(\bar{t}(Z, \alpha))} y = x + n + 4 + j)\ . \end{aligned}$$

Kommen wir zum Ende der Induktion, das (10) wahr machen soll. $\mathcal{A}^{\leq k}$ sei darin die Menge der Worte, deren Länge höchstens k ist.

$$\begin{aligned}\varphi_3(y,Y) \quad :=\quad & \bigvee_{Z\in\mathcal{Z}} \bigvee_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}^{\leq n+4}\\ \bar{t}(Z,\alpha)\text{ akzeptierend}}} \exists x(x+n+3<\max\leq x+2n+7\\ & \wedge \bigwedge_{j\in Z} x+j\in Y \;\wedge\; [x+n+4,\max]\cong\alpha \;\wedge\; y=\max)\ .\end{aligned}$$

Da keines der $\varphi_{1,2,3}$ in einer Ordnung der Größe $\leq n+4$ wahr wird, müssen wir diesen Fall noch extra berücksichtigen:

$$\varphi_4(y) \quad :=\quad \max\leq\min+n+3\wedge \bigvee_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}^{\leq n+4}\\ \alpha\text{ wird akzeptiert}}} [\min,\max]\cong\alpha\wedge y=\max\ .$$

Jetzt überlegt man sich leicht, daß tatsächlich (8) bis (10) erfüllt ist, und somit $\max\in[\mathrm{LFP}_{y,Y}\varphi(y,Y)]$ der gesuchte Satz ist. □

Damit ist gezeigt, daß jede reguläre Sprache Modellklasse eines MFP-Satzes über gefärbte Ordnungen ist, in dem nur ein Fixpunktquantor auftritt.

4.6 ω, ω^* und $\mathbb{Z}$ mit einstelligen Prädikaten

Daß wir jetzt unter der großen Auswahl an unendlichen σ-Ordnungen gerade ω, ω^* und $\mathbb{Z}$ herausgreifen, wird verständlich sein, wenn wir einmal bei den zerstreuten Ordnungen sind. Dort treten dann diese Ordnungen neben den endlichen als „Kondensate" auf, die Keime, die als Bildungsprinzip alles Zerstreute erzeugen. Hier geht es jetzt um die Frage: Wann sind zwei σ-Ordnungen, deren $<$-Redukt isomorph zu ω ist, $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalent? Wie lassen sich die Äquivalenzklassen in MFP beschreiben? Ein ganz wesentliches Hilfsmittel dabei ist der

Satz von Ramsey
Ist $\mathcal{Q}:=\{Q_1,\dots,Q_q\}$ eine Partition von $\{\{x,y\}\mid x\neq y\in\omega\}$ dann gibt es eine unendliche $\mathcal{Q}$-homogene Teilmenge $N\subset\omega$, d.h. es gibt ein $i\leq q$, für das gilt: Für alle $x,y\in N$, $x\neq y$ ist $\{x,y\}\in Q_i$. □

Üblicherweise spricht man bei den Q_i auch von Farben der Paare $\{x,y\}$. Da wir Farben schon vergeben haben, sprechen wir hier ad hoc von *Qualitäten* der Paare.

Diesen Satz wollen wir anwenden, um die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen von σ-Ordnungen der Gestalt $\mathfrak{A}=(\omega,<,(P^{\mathfrak{A}})_{P\in\sigma})$ zu beschreiben. Sei $i<j\in\mathfrak{A}$. Wir ordnen dem Paar $\{i,j\}$ als Qualität die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse der Subordnung $[i,j)$, also $[i,j)/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}}$, zu. Es gibt nur endlich viele solche Klassen, daher ist der Satz von Ramsey anwendbar.

Er liefert uns eine homogene Teilmenge $\{i_0 < i_1 < \ldots\} \subset \omega$ für diese Qualitäten. Jetzt zerlegen wir $\mathfrak{A} =: \sum_{j\in\omega} \mathfrak{A}_j$ mit

$$\mathfrak{A}_j = \begin{cases} [0, i_0) & \textit{für } j = 0 \\ [i_{j-1}, i_j) & \textit{für } j > 0 \end{cases} .$$

Nach Wahl der i_k ist für $i, j > 0$ offensichtlich $\mathfrak{A}_i \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A}_j$, und so ist mit TAS1 $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A}_0 + \omega\mathfrak{A}_1$. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ eine σ-Ordnung, für die eine Zerlegung

$$(+) \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \omega\mathfrak{B}_1$$

existiert, und ist $\mathfrak{B}_i \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A}_i$ $(i = 0, 1)$, dann ist $\mathfrak{B} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A}$. Mit Definition 29 können wir schreiben:

$$\mathfrak{A}/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}} = \mathfrak{A}_0/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}} + \omega\mathfrak{A}_1/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}} .$$

Diese Überlegungen helfen jetzt weiter bei der Suche nach einer MFP-Beschreibung von $\mathfrak{A}/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}}$.

Seien zwei $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1$ von endlichen σ-Ordnungen gegeben. Wir suchen jetzt einen MFP-Satz $\varphi_{\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1}$, der auf genau die hier in Frage kommenden σ-Ordnungen $\mathfrak{B}$ zutrifft, für die eine Zerlegung wie in (+) existiert mit $\mathfrak{B}_i \in \mathfrak{K}_i$ für $i = 0, 1$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1} \; := \; & \exists \min \exists x (\forall y \min \leq y \wedge [\min, x) \in \mathfrak{K}_0 \wedge \text{„Der Fixpunkt} \\ & \quad \mathrm{LFP}_{y,Y}(y = x \vee \exists z \in Y([z, y) \in \mathfrak{K}_1 \wedge \forall y' < y[z, y') \notin \mathfrak{K}_1)) \\ & \quad \text{ist kofinal in der Ordnung''}. \end{aligned}$$

Die Subformeln $[x, y) \in \mathfrak{K}_j$ haben wir ja schon nach Korollar 39 zur Verfügung. Sie sind die Relativierung des Satzes $\centerdot \in \mathfrak{K}_j$ auf die Menge $\{z \mid x \leq z < y\}$. Der Fixpunktprozeß in dem Satz $\varphi_{\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1}$ ist nach ω Schritten abgeschlossen, bei jedem Schritt kommt höchstens ein neues Element hinzu, und für je zwei aufeinanderfolgende y, y' im Fixpunkt gilt $[y, y') \in \mathfrak{K}_1$. Das soll zur Begründung dafür genügen, weshalb dieser Satz das Gewünschte leistet.

Setzen wir jetzt für eine Klasse $\mathfrak{K}$ von σ-Ordnungen, deren $<$-Redukt isomorph zu ω ist

$$\begin{aligned} \centerdot \in \mathfrak{K} \; := \; \bigvee\{\varphi_{\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1} \mid \; & \mathfrak{K}_0 \text{ und } \mathfrak{K}_1 \text{ sind } \equiv_{\mathrm{MSO}_n}\text{-Klassen von endlichen } \sigma\text{-Ordnungen}, \\ & \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 + \omega\mathfrak{K}_1\} \end{aligned}$$

(man beachte: diese Disjunktion ist endlich!), dann haben wir damit in der Tat eine MFP-Beschreibung der Klasse $\mathfrak{K}$.

Die gleichen Überlegungen für ω^* und $\mathbb{Z}$ führen zu entsprechenden Ergebnissen. Bei einer Ordnung $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <, (P^{\mathfrak{A}})_{P\in\sigma})$ müssen wir den Satz von Ramsey auf den positiven und den negativen Teil von $\mathbb{Z}$ jeweils getrennt anwenden. Ergebnis ist dann eine Äquivalenz

$$\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^*\mathfrak{A}_{-1} + \mathfrak{A}_0 + \omega\mathfrak{A}_1$$

mit endlichen σ-Ordnungen $\mathfrak{A}_{-1}$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$. Der zu $\varphi_{\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1}$ entsprechende Satz $\varphi_{\mathfrak{K}_{-1},\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_1}$ sieht dann ein bißchen komplizierter aus, birgt aber keine neue Idee. Fassen wir zusammen:

Satz 40. *Jede $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse $\mathfrak{K}$ von σ-Ordnungen, deren $<$-Redukt endlich, isomorph zu ω, ω^* oder $\mathbb{Z}$ ist, ist in MFP beschreibbar, d.h. es gibt einen MFP-Satz $\blacksquare \in \mathfrak{K}$, der genau auf die Ordnungen in $\mathfrak{K}$ zutrifft.* □

Wagen wir jetzt den nächsten Schritt, nämlich zu den

4.7 Wohlordnungen

Die Klasse der Wohlordnungen ist in MFP definierbar. Denn $\mathfrak{A}$ ist eine Wohlordnung, wenn $\mathfrak{A}$ eine Ordnung ist, und wenn das wohlgeordnete Anfangsstück von $\mathfrak{A}$ ganz $\mathfrak{A}$ ist. Das wohlgeordnete Anfangsstück erhält man als kleinsten Fixpunkt, der durch die Formel $\mathrm{LFP}_{x,X}\forall y < x\ y \in X$ definiert wird. Es interessiert uns wieder die Frage nach der Äquivalenz von MSO und MFP und nach dem Aussehen der Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$. Eine Antwort können wir ganz schnell geben:

Im Überabzählbaren geht's schief: *In Wohlordnungen ist MSO echt stärker als MFP, denn $\aleph_1$ ist in MSO charakterisierbar, in MFP nicht.*

Beweis: $\aleph_1$ kann in MSO als diejenige Limesordinalzahl beschrieben werden, die keine zu ω isomorphe kofinale Teilmenge hat, in der aber jedes Element $\neq 0$ einen direkten Vorgänger oder die Kofinalität ω hat. Für MFP gilt der Satz von Löwenheim und Skolem, es gibt somit eine zu $\aleph_1$ $\equiv_{\mathrm{MFP}}$-äquivalente abzählbare Ordinalzahl (ω^ω ist so eine). □

Ab hier sollen alle betrachteten Wohlordnungen/Ordinalzahlen abzählbar sein, auch wenn das nicht jedesmal erwähnt wird.

In einem Punkt werden wir von dem, was mancher vielleicht als üblichen Standard empfindet, abweichen. Und zwar haben wir bisher das Produkt zweier Ordnungen $I \cdot \mathfrak{A}$ so notiert, daß die Indexordnung, in der jeder Punkt durch die andere ersetzt wird, als erster Faktor erscheint. Diese Konvention wollen wir der Einheitlichkeit zuliebe beibehalten. Es soll hier also gelten: $\alpha \cdot \beta \ :\cong\ \sum_{i\in\alpha}\beta$.

Äquivalenz von MFP und MSO

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß man mit MFP genau die gleichen Eigenschaften abzählbarer Wohlordnungen ausdrücken kann wie mit MSO. Ein guter Weg dorthin, der außerdem zeigt, was dies für Eigenschaften sind, ist, sich zu überlegen, worin zwei Wohlordnungen übereinstimmen sollten, damit man sie als $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalent erkennen kann, welche Merkmale eine Wohlordnung als zu einer bestimmten $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse gehörig qualifizieren. Sind diese auch in MFP „erkennbar", dann stimmen die Logiken überein. Dieses Vorgehen sieht formal so aus: Wir geben zu jedem $n \in \omega$ und jedem $\beta < \omega_1$ einen MFP-Satz φ_β^n an, der alle wichtigen Merkmale von β beschreibt, genauer, für den gilt:

(i) $\beta \models \varphi_\beta^n$
(ii) $\alpha \models \varphi_\beta^n \;\Rightarrow\; \alpha \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \beta$
(iii) $\{\varphi_\beta^n \mid \beta < \omega_1\}$ ist endlich für jedes $n \in \omega$.

Dann gilt nämlich auch für $\psi \in \mathrm{MSO}_n$: $\quad \psi \leftrightarrow \bigvee\{\varphi_\alpha^n \mid \alpha < \omega_1,\ \alpha \models \psi\}$.

Wenige Kenntnisse von den $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen genügen uns dafür schon, die bemerkenswerterweise allein schon die Endlichkeit von $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$ und die Theorieadditionssätze liefern.

Proposition 41. *Es gibt Funktionen $q,\ k',\ c' : \omega \to \omega$, so daß für alle n gilt:*

(a) Für alle abzählbaren $\alpha \geq 1$: $\alpha \cdot \omega^{q(n)} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^{q(n)}$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $l, m \geq k'(n)$ und alle α:
$$l \equiv m \bmod c'(n) \quad \Rightarrow \quad l\alpha \equiv_{\mathrm{MSO}_n} m\alpha.$$

Beweis: Zu (a):
Dieser Beweis ist [Sh75] entnommen: Ein Schubfachschluß liefert uns $r < s < \omega$ mit $\omega^r \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^s$. Zuerst zeigen wir $\omega^{r+1} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^{r+2}$. Falls $s = r+1$ ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega^{r+2} &\cong \sum_{i\in\omega}(\omega^r + \omega^{r+1}) \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \sum_{i\in\omega}(\omega^s + \omega^{r+1}) \\ &\cong \sum_{i\in\omega}\omega^s \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \sum_{i\in\omega}\omega^r \cong \omega^{r+1} \quad . \end{aligned}$$

(a) zeigen wir jetzt für $q := r+1$ mit einer Induktion über α. Der Nachfolgerschritt sieht dabei folgendermaßen aus:

$$(\alpha+1)\omega^q = \alpha\cdot\omega^q + \omega^q \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^q + \omega^q \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^q + \omega^{q+1} = \omega^{q+1} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^q \quad .$$

Sei α eine (abzählbare!) Limeszahl. Wir zerlegen $\alpha = \sum_{i\in\omega} \alpha_i$ mit passenden $\alpha_i < \alpha$. Es ist dann:

$$\alpha\omega^q = \sum_{i\in\omega} \alpha_i\omega^q \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \sum_{i\in\omega} \omega^q \cong \omega^{q+1} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \omega^q \quad .$$

Zu (b):
Folgerung 32 aus dem Theorieadditionssatz TAS2 für MSO (s. S. 51) in Verbindung mit Satz 33 über die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen endlicher Ordnungen liefert uns $c'(n)$ und $k'(n)$. □

Diese Proposition legt die Vermutung nahe, daß, wenn wir α als Summe von ω-Potenzen schreiben, MSO_n keine Aussagen über Potenzen größer als $\omega^{q(n)}$ machen kann (a), und daß bei kleineren Potenzen innerhalb einer $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse alles zyklisch aussieht (b). Wir wollen das präzisieren: Der Ordinalzahl

$$\beta \;=\; \gamma \cdot \omega^{q(n)} + m_{q(n)-1} \cdot \omega^{q(n)-1} + \ldots + m_1 \cdot \omega + m_0 \tag{11}$$

mit natürlichen Zahlen m_i ordnen wir eine Folge

$$\mathcal{F}^n_\beta : \; q(n) + 1 \longrightarrow c'(n) + k'(n)$$

zu, die die in MSO_n beschreibbaren Merkmale von β in dem Sinne widerspiegeln soll, daß man aus $\mathcal{F}^n_\alpha = \mathcal{F}^n_\beta$ auf $\alpha \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \beta$ schließen kann: Desweiteren wird $\mathcal{F}$ in MFP beschreibbar sein, d.h. wir werden zu gegebenem $\mathcal{F}^n_\beta$ ein $\varphi^n_\beta \in$ MFP angeben, so daß gilt:

$$\forall\alpha \; \alpha \models \varphi^n_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}^n_\alpha = \mathcal{F}^n_\beta \quad . \tag{12}$$

Da bei festem n die Anzahl der verschiedenen $\mathcal{F}^n_\beta$ endlich ist, erfüllen die so definierten φ^n_β (i) - (iii) von oben: wir sind dann fertig.

Nun die Definition der $\mathcal{F}^n_\beta$: Sei dazu β wie in (11):

$$\mathcal{F}^n_\beta(q(n)) \;:=\; \begin{cases} 0 \text{ falls } \gamma = 0 \\ 1 \text{ falls } \gamma > 0 \end{cases}$$

und für $l < q(n)$:

$$\mathcal{F}^n_\beta(l) \;:=\; \begin{cases} m_l & \text{falls } m_l < k'(n) \\ \text{das } m \in [k'(n), k'(n) + c'(n)) \text{ mit } m \equiv m_l \bmod c'(n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überlegen wir uns jetzt, daß in der Tat gilt:

Lemma 42.
Zwei abzählbare Ordinalzahlen β' und β sind sicher dann $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalent, wenn $\mathcal{F}^n_{\beta'} = \mathcal{F}^n_\beta$ ist.

Seien dazu

$$\begin{array}{lcl} \beta & = & \gamma \cdot \omega^q + m_{q-1} \cdot \omega^{q-1} + \ldots + m_1 \cdot \omega + m_0 \ \text{ und} \\ \beta' & = & \gamma' \cdot \omega^q + m'_{q-1} \cdot \omega^{q-1} + \ldots + m'_1 \cdot \omega + m'_0 \ \text{ mit } q = q(n). \end{array}$$

Sei $\mathcal{F}^n_\beta = \mathcal{F}^n_{\beta'}$. Aus $\mathcal{F}^n_\beta(q) = \mathcal{F}^n_{\beta'}(q)$ folgt mit der Proposition 41 (a) die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Äquivalenz der ersten Summanden: $\gamma \cdot \omega^q \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \gamma' \cdot \omega^q$. Entsprechend verwendet man die Gleichheit an Stellen $l < q$. Aus $\mathcal{F}^n_\beta(l) = \mathcal{F}^n_{\beta'}(l)$ folgert aus Proposition 41 (b): $m_l \cdot \omega^l \equiv_{\mathrm{MSO}_n} m'_l \cdot \omega^l$ und so mit TAS1 schließlich $\beta \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \beta'$. □

Was jetzt noch zu leisten ist, ist die φ^n_β zu finden, die (12) erfüllen. Wir werden sie definieren als eine Konjunktion

$$\varphi^n_\beta \ := \ \bigwedge_{l \leq q(n)} \text{„}\mathcal{F}^n_{\boldsymbol{.}}(l) = \mathcal{F}^n_\beta(l)\text{“},$$

wobei „$\mathcal{F}^n_{\boldsymbol{.}}(l) = \mathcal{F}^n_\beta(l)$“ ein Satz ist, der genau für die α gilt mit $\mathcal{F}^n_\alpha(l) = \mathcal{F}^n_\beta(l)$. Dazu einige

Vorüberlegungen. Für jedes l gibt es einen erste-Stufe Satz $\lim^l$, der genau in den Vielfachen von ω^l gilt und eine Formel $\lim^l(x)$, die das gleiche von x (oder $x = 0$) besagt. Somit ist es (mit einer Relativierung) möglich, über die Teilordnung der ω^l-Vielfachen (incl. 0), LIM^l, zu sprechen. Man kann Aussagen formulieren der Gestalt: „in LIM^l gilt ψ“, die in den Wohlordnungen α gültig sind, in denen die Teilordnung der Vielfachen von ω^l, $(\{\gamma \cdot \omega^l < \alpha \mid \gamma \geq 0\}, <)$, Modell von ψ ist.

Sei jetzt $\mathcal{F}^n_\beta =: (m_0, \ldots, m_{q(n)})$ vorgegeben. „$\mathcal{F}^n_{\boldsymbol{.}}(l) = m_l$“ ist für $m_l < k'(n)$ bereits in der ersten Stufe ausdrückbar. Etwas lästig ist dabei, daß man unterscheiden muß, ob $\lim^l(\beta)$ gilt oder nicht (das sieht man $\mathcal{F}^n_\beta$ ja an, es ist dann $m_0 = \ldots = m_{l-1} = 0$). Sei beispielsweise $0 < m_l < k'(n)$ und $l < q(n)$ und nicht $\lim^l(\beta)$, dann ist Folgendes zu formalisieren:

„In LIM^l gilt: $\exists x(\lim(x) \wedge \exists^{=m_l} y(x < y)$“.

Da man auch MFP-Formeln relativieren kann, kann man auch über MFP-Eigenschaften von LIM^l sprechen. So bereitet es wenig Mühe mit Hilfe eines LFP-Quantors auszudrücken, $\mathcal{F}^n_{\boldsymbol{.}}(l) = m_l$ für $m_l \geq k'(n)$. Sei beispielsweise $\lim^l(\beta)$, dann wäre Folgendes zu formalisieren:

$\lim^l \wedge$ in LIM^l gilt: $\exists x$(x ist das letzte Element und
$x \in [\mathrm{LFP}_{y,Y}(y =$letzter Limespunkt$+m_l - 1 \vee \exists z(Yz \wedge y = z + c'(n)))])$.

So können wir φ^n_β wie angekündigt definieren und haben unser Ziel erreicht. □

Damit ist auch geklärt, wie die Modellklassen $\mathrm{Mod}(\varphi)$ für $\varphi \in \mathrm{MSO}$ aussehen: Sie sind endliche Vereinigungen von $\mathrm{Mod}(\varphi^n_\beta)$.

Im Beweis haben wir nur positive LFP-Quantoren gebraucht und diese auch nicht geschachtelt. Mit etwas Anstrengung ist es sogar möglich, mit nur einem einzigen LFP-Quantor in φ^n_β auszukommen! Das liefert uns das

Korollar 43. *Jeder MFP-Satz ist in Wohlordnungen äquivalent zu einem MFP-Satz der Gestalt $\bigvee_i \varphi_i$, wobei in φ_i höchstens ein positiver LFP-Quantor auftritt.*

Jeder MSO-Satz ist in abz. Wohlordnungen äquivalent zu einem MSO-Satz der Gestalt $\bigvee_i \varphi_i$, wobei in φ_i höchstens ein universeller Mengenquantor auftritt.

□

4.7.1 Die $\equiv_{\mathrm{MSO}}$-Klassen abzählbarer Wohlordnungen

Lemma 42 gibt eine schöne algebraische Beschreibung der $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen von Wohlordnungen. Daraus, und aus der Tatsache, daß bereits in der ersten Stufe jedes $\alpha < \omega^\omega$ mit einem Satz axiomatisierbar ist, folgt eine übersichtliche Beschreibung der $\equiv_{\mathrm{MSO}}$-Klassen:

Korollar 44 (Beschreibung der $\equiv_{\mathrm{MSO}}$-Klassen).
Zwei (abzählbare) Wohlordnungen sind genau dann MSO-äquivalent, wenn sie modulo ω^ω gleich sind, genauer: Für $\delta_1, \delta_2 < \omega^\omega$, $\alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$ gilt

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \omega^\omega + \delta_1 \equiv_{\mathrm{MSO}} \alpha_2 \cdot \omega^\omega + \delta_2 \Leftrightarrow\ & \delta_1 = \delta_2 \quad \textit{und} \\ & (\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \textit{oder} \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0)\end{aligned}$$

□

Die gleiche Beschreibung gilt (auch ohne die Einschränkung abzählbar) für die Äquivalenzen $\equiv_{\mathrm{FO}}$ und $\equiv_{\mathrm{MFP}}$. Somit folgt

Folgerung *FO, MFP und MSO sind bezüglich des schwächeren, von $\prec_\equiv$ abgeleiteten, Äquivalenzbegriffes auf abzählbaren Ordinalzahlen äquivalent.*

4.7.2 Ein Vergleich mit der ersten Stufe

Um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie die $\equiv_{\mathrm{FO}_n}$-Klassen aussehen, kann man genauso vorgehen, denn Proposition 41 gilt analog auch für FO. Hier können wir die darin auftretenden Funktionen konkret angeben: $q(n) = \frac{n}{2}$ (aufgerundet), $k'(n) = 2^n - 1$ und $c'(n) = 1$. Das sind „scharfe" Grenzen. Daß $c'(n) = 1$ ist, sorgt für den entscheidenden Unterschied zwischen MFP und FO: Zwischen großen Zahlen unterscheidet FO_n überhaupt nicht mehr, während MFP_n immerhin noch Unterschiede modulo $c'(n) > 2$ sieht.

4.8 Zerstreute Ordnungen

4.8.1 Einleitung und Motivation

An dieser Stelle möchte ich ein paar Worte auch über die Entstehensgeschichte der hier vorgestellten Ergebnisse verlieren und damit vielleicht zum besseren „Metaverständnis" beitragen. Lange Zeit ging ich von der Vorstellung aus, daß auch innerhalb der zerstreuten Ordnungen MFP und MSO übereinstimmen. Das war für mich auch aus ästhetischen Gründen eine naheliegende Annahme. Im Hinblick auf die Tatsache, daß jede Ordnung dichte Summe von zerstreuten ist, war es zu verführerisch zu hoffen, daß im zerstreuten Teil von Ordnungen MFP genausoviel sieht wie MSO: Es sollte doch der Kondensationsprozeß zerstreute Ordnungen für die Fixpunktlogik handhabbar machen! (In welchem Maße das der Fall ist klärt der Abschnitt über Kondensate und Fixpunkte). Voreingenommen in diese Richtung machte auch ein

Vergleich mit zerstreuten Topologien. W. Kramer hat in [Kra85] die Ausdrucksstärke der Sprache für Topologien, L_t (s. [FlZ80]), unter anderem in zerstreuten krümeligen Räumen (und die Topologie von abzählbaren zerstreuten Ordnungen sind dies) untersucht und mit der von MSO (mit Prädikat für die offenen Teilmengen) verglichen. L_t hat viel Ähnlichkeit mit der Fixpunktlogik. Es zeigt sich, daß L_t und MSO in zerstreuten krümeligen Räumen übereinstimmen. In abzählbaren regulären Räumen kann L_2 (wie MSO syntaktisch, nur daß die Zweite-Stufe-Quantoren nur über die offenen Teilmengen rangieren) über den perfekten Kern sprechen, L_t nicht. Das ist der einzige Unterschied. Der perfekte Kern ist jedoch leicht als größter monadischer Fixpunkt zu erhalten, weshalb für abzählbare reguläre Räume gilt:

$$L_t + \mathrm{MFP} = L_2 \ .$$

Das ließ zum einen erwarten, daß Zerstreutheit von Ordnungen in MFP festellbar ist, wie die Zerstreutheit einer Topologie in $L_t + \mathrm{MFP}$ feststellbar ist, zum anderen, daß MFP und MSO in zerstreuten Ordnungen übereinstimmen, da L_t und MSO in deren Topologien dies tun. Beides wird sich als falsch erweisen. Zum einen unterscheiden sich Ordnungen, für MFP sichtbar, viel stärker als ihre Topologien, die ja nur einen kleinen Teil der Information in einer Ordnung wiedergeben. Zum anderen sind die Cantor-Bendixson-Ableitungen in Ordnungstopologien, die den Kondensationen in zerstreuten Räumen entsprechen (s. [Bo90]), eine abgeschlossene *ein*stellige Teilmenge, wohingegen die Kondensationen Äquivalenzklassen einer *zwei*stelligen Äquivalenzrelation sind.

Zunächst also schien das Ziel klar: die Äquivalenz von MFP und MSO auf zerstreuten Ordnungen. Doch jeder Versuch, einen Beweis für dieses Vorurteil zu finden, schlug fehl, die Suche nach einem Gegenbeispiel zunächst allerdings auch. Jeder Fehlschlag auf der einen Seite brachte mich auf der anderen wieder ein Stück weiter. So wird jetzt hier zum einen gezeigt, wie weit die Äquivalenz von MSO und MFP noch gilt, und zum anderen die Grenze mit einem Gegenbeispiel genau markiert.

Zuerst werden wir das Verhältnis zwischen Kondensaten und Fixpunkten klären mit der Feststellung, daß jedes Kondensationsniveau einen Fixpunktprozeß erfordert. Dann wird sich zeigen, daß Zerstreutheit nicht MFP-definierbar ist (Abschnitt 4.8.4). Anschließend machen wir eine für das Verständnis des weiteren nicht unbedingt erforderliche Eskapade mit der Überlegung, daß es sehr schwer sein würde, ähnlich wie bei den Wohlordnungen nach charakteristischen Eigenschaften zu suchen, die eine zerstreute Ordnung als zu einer bestimmten $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse gehörig qualifizieren. Im Abschnitt 4.8.6 finden wir ein erstes positives Ergebnis, in dem die Überlegungen über gefärbte Ordnungen und über Kondensationen mit den Theorieadditionssätzen als Katalysator zusammenfließen: Für jedes endliche h sind mit MFP genau die gleichen Eigenschaften zerstreuter Ordnungen der Höhe h beschreibbar wie mit MSO.

Es folgt dann eine längere Suche nach einfachen Repräsentanten der $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen. In der Hoffnung, damit auch einen Schlüssel für eine MFP-Beschreibung der $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen zu finden, werden wir zwar betrogen, aber sie wird uns an genau den Punkt führen, an dem MSO MFP überholt: Jeder MSO-Satz der Form $\exists X \varphi \restriction X$ hat ein MFP-Äquivalent (Abschnitt 4.8.8). Kompaktheit ist eine Eigenschaft von Ordnungen, die in MSO aber nicht in MFP ausdrückbar ist (Abschnitt 4.8.9). Um das beweisen zu können, werden wir noch einmal einen Abstecher in die Spielhölle der Logiker machen müssen und ein weiteres Spiel für den Nachweis der $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$-Äquivalenz von Ordnungen kennenlernen.

4.8.2 Die Kondensation zerstreuter Ordnungen

Ein Standardhilfsmittel bei der Untersuchung zerstreuter Ordnungen ist der Prozeß der Kondensation nach endlichen Intervallen, der dem Cantor-Bendixson-Prozeß in der Topologie entspricht (vgl. [Bo92]). Auch hier spielen die Kondensate einer zerstreuten Ordnung eine große Rolle, weshalb sie hier kurz und knapp definiert werden sollen. Eine ausführlichere Behandlung findet man z.B. in [Ros, Kap. 5].

Definition 45. Sei $\mathfrak{A}$ eine Ordnung und $x \in \mathfrak{A}$. Wir definieren das α-te Kondensat um x, $K_\alpha(x)$, und die α-te Kondensation von $\mathfrak{A}$, $K_\alpha[\mathfrak{A}]$, wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} K_1(x) & := & \{y \mid \text{zwischen } y \text{ und } x \text{ liegen nur endlich viele Elemente}\} \\ K_\alpha[\mathfrak{A}] & := & \text{die Ordnung } (\{K_\alpha(x) \mid x \in \mathfrak{A}\}, < \text{ (kanonisch definiert)})^1 \\ K_{\alpha+1}(x) & := & \{y \mid K_1(K_\alpha(x)) = K_1(K_\alpha(y)) \text{ in der Ordnung } K_\alpha[\mathfrak{A}]\,\} \end{array}$$

und für Limeszahlen λ:

$$K_\lambda(x) \ := \ \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha(x) \ .$$

Eine Ordnung $\mathfrak{A}$ ist dadurch als zerstreut charakterisiert, daß es eine Ordinalzahl α gibt mit $K_\alpha[\mathfrak{A}] \cong \mathbb{1}$.

Der *Rang* oder die *Höhe* einer zerstreuten Ordnung $\mathfrak{A}$, $rg(\mathfrak{A})$, ist das kleinste α mit $K_\alpha[\mathfrak{A}] \cong 1$. Wenn von der *Breite* einer Ordnung die Rede ist, dann soll damit die Größe der vorletzten Kondensationsschicht, falls vorhanden, gemeint sein, also $|K_{rg(\mathfrak{A})-1}[\mathfrak{A}]|$.

Sehr oft werden wir bei einer Induktion über die Höhe einer Ordnung diese in Ordnungen kleinerer Höhe zerlegen. Die Möglichkeit dazu eröffnet uns

Lemma 46. *Ist $\mathfrak{A}$ eine abzählbare Ordnung der Höhe α, dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum_{j\in J} \mathfrak{A}_j$ mit endlichem J oder $J \in \{\omega, \omega^*, \mathbb{Z}\}$ und $rg(\mathfrak{A}_j) < \alpha$ für alle $j \in J$.*

Ist $\alpha = \beta+1$, so kann $J = K_\beta[\mathfrak{A}]$ und zu jedem $j \in J$ ein $a_j \in \mathfrak{A}$ gewählt werden, so daß $\mathfrak{A} = \sum_{j\in J} K_\beta(a_j)$ ist.

Dies ist eine wohlbekannte Eigenschaft zerstreuter Ordnung und soll hier nicht bewiesen werden.

Ein ganz nützlicher Begriff ist der Abstand zweier Punkte:

Definition 47. Sei $\mathfrak{A}$ zerstreut und $x, y \in \mathfrak{A}$, $x < y$. Wir bestimmen die *Distanz* von x und y, $d(x,y)$, indem wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha+1 & := & \min\{\beta \mid K_\beta(x) = K_\beta(y)\} & \text{und} \\ n & := & |\{K_\alpha(z) \mid K_\alpha(x) < K_\alpha(z) \le K_\alpha(y) \text{ in } K_\alpha[\mathfrak{A}]\}| & \text{zu} \\ d(x,y) & := & \alpha \cdot \omega + n & \text{zusammensetzen.} \end{array}$$

Beispiel. In der auf Seite 96 gezeigten Ordnung ist $d(a,c) = \omega^2 + 1$.

Folgendes Lemma beschreibt eine charakteristische Eigenschaft zerstreuter Ordnungen, die wir auch noch brauchen werden.

[1] Die Kondensate $K_1(x)$ bilden eine Partition aus konvexen Teilmengen von $\mathfrak{A}$. $K_1(x) < K_1(y)$ bedeutet $K_1(x) \neq K_1(y)$ und $x < y$.

Lemma 48. *Sind drei Punkte $x < z < y$ einer zerstreuten Ordnung gegeben, dann ist* $\min\{d(x,z), d(z,y)\} < d(x,y)$. □

Die Kondensate $K_1(x)$ sind Intervalle, die als Ordnung endlich, isomorph zu ω, zu ω^* oder zu $\mathbb{Z}$ sind. Diese Ordnungen sind sozusagen die Keime, die als Bildungsprinzip alles Zerstreute erzeugen. Aus diesem Grunde haben wir sie im Kapitel 4.6 näher untersucht.

4.8.3 Kondensate und Fixpunkte

In MFP ist es problemlos möglich zu sagen, daß zwei Punkte endlichen Abstand haben. Von Punkt zu Punkt zu wandern und zu schauen, was man dabei so aufsammelt, scheint ja der Prototyp eines Fixpunktprozesses in Ordnungen überhaupt zu sein. Damit ist es sehr plausibel, anzunehmen, daß man in MFP über Kondensate $K_n(x)$ sprechen kann, genauer gesagt, daß die Kondensate $K_n(x)$ in MFP definierbare Teilmengen sind. Mit einer ersten Fixpunktbildung wird man vielleicht $K_1(x)$ erhalten, mit einer zweiten dann $K_2(x)$ usw. Dabei käme dann heraus, daß man mit n zusätzlichen Fixpunktquantoren Aussagen φ über ein Kondensat $K_n(x)$ machen kann. Das werden wir in diesem Abschnitt präzisieren und beweisen. Nicht ganz unwahrscheinlich erscheint es, daß man mit etwas mehr Geschick den ganzen Kondensationsprozeß, gleichgültig wie lange er geht, mit einem einzigen oder wenigstens einer festen Anzahl von Fixpunktquantoren „nachvollziehen" kann. Dann müßte man die Zerstreutheit in MFP ausdrücken können, indem man sagt, „der Kondensationsprozeß hört mit $\mathbb{1}$ auf", oder: „alles kondensiert einmal zusammen". Daß genau dies nicht geht, daß im Allgemeinen wirklich ein Fixpunktprozeß nur ein Kondensationsniveau erschließt, wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

Wie man über Kondensate und Kondensationen spricht

Wir wollen zeigen:

Satz 49. *Zu jedem $n \in \omega$ und jedem MFP-Satz φ (über Ordnungen) gibt es einen MFP-Satz $(K_n[\boldsymbol{.}] \models \varphi)$ mit der suggerierten Bedeutung: $\mathfrak{A} \models (K_n[\boldsymbol{.}] \models \varphi)$ genau dann wenn $K_n[\mathfrak{A}] \models \varphi$. Dieser Satz hat einen um n höheren Fixpunktrang als φ.*

Da dies via Induktion über den Aufbau von φ geschehen soll, müssen wir die Aussage für Formeln mit freien Variablen (auch Relationsvariablen) verallgemeinern. Damit das Lemma leichter formuliert werden kann, noch eine Definition vorweg:

Definition 50. Sei $\mathfrak{A}$ eine Ordnung und $U \subset \mathfrak{A}$. U heißt *verträglich mit K_n* falls für jedes $a \in U$ gilt: $K_n(a) \subset U$. In diesem Fall definieren wir
$K_n[U] := \{K_n(x) \mid x \in U\} \subset K_n[\mathfrak{A}]$.

Bemerkung. Die Vereinigung von K_n-verträglichen Mengen U_i ist K_n-verträglich. Es ist $K_n[\bigcup_i U_i] = \bigcup_i K_n[U_i]$.

Lemma 51. *Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_l, X_1, \ldots, X_{l'})$ eine MFP-Formel, in der höchstens die angegebenen Variablen frei auftreten (in der die X_i aber nicht notwendig nur positiv auftreten), dann existiert eine Formel $(K_n[\cdot] \models \varphi)$ mit den gleichen freien Variablen, so daß für jede Ordnung $\mathfrak{A}$ und $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{A}$ und K_n-verträglichen Teilmengen $U_1, \ldots, U_{l'} \subset \mathfrak{A}$ gilt:*

(*)
$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \models (K_n[\cdot] \models \varphi)[a_1, \ldots, a_l, U_1, \ldots, U_{l'}] \quad \Leftrightarrow \\ K_n[\mathfrak{A}] \models \varphi[K_n(a_1), \ldots, K_n(a_l), K_n[U_1], \ldots, K_n[U_{l'}]] \ .\end{gathered}$$

Insbesondere ist $\{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models (K_n[\cdot] \models \varphi)[a, a_2, \ldots a_l, \bar{U}]\}$ verträglich mit K_n. Der Fixpunktrang von $(K_n[\cdot] \models \varphi)$ ist um n größer als der von φ.

Beweis: Wir führen eine Induktion über n.

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, da $K_0[\mathfrak{A}] \cong \mathfrak{A}$. Im Induktionsschritt sei jetzt $n > 0$, wir führen für dieses n eine Induktion über den Aufbau von φ.

$(K_n[\cdot] \models x = y) \ := \ (K_{n-1}[\cdot] \models \varphi_e(x, y))$, wobei $\varphi_e(x, y)$ besage „x und y haben endliche Distanz”,

$$\varphi_e(x, y) := y \in \mathrm{LFP}_{z,Z}(z = x \vee \exists u \in Z(z = u + 1 \vee u = z + 1)) \ .$$

$z = u + 1$ steht darin für die Formel $u < z \wedge \forall x(\neg(u < x \wedge x < z))$. Diese Formel leistet das Gewünschte, denn genau dann, wenn in $K_{n-1}[\mathfrak{A}]$ die „Punkte” $K_{n-1}(x)$ und $K_{n-1}(y)$ endliche Entfernung haben, ist $K_n(x) = K_n(y)$.

$(K_n[\cdot] \models x < y) \ := \ x < y \wedge \neg(K_n[\cdot] \models x = y)$. Dazu ist nichts zu sagen.

$(K_n[\cdot] \models x \in X) \ := \ x \in X$.
Hier brauchen wir die Verträglichkeit von U mit K_n, da nur in diesem Fall aus $K_n(x) \in K_n[U]$ auf $x \in U$ geschlossen werden kann.

$(K_n[\cdot] \models \neg\psi) := \neg(K_n[\cdot] \models \psi)$, auch dazu ist wohl nichts zu sagen.

$(K_n[\cdot] \models \psi \vee \chi) \ := \ (K_n[\cdot] \models \psi) \vee (K_n[\cdot] \models \chi)$.

$(K_n[\cdot] \models \exists x\psi) \ := \ \exists x(K_n[\cdot] \models \psi)$. Hier geht alles „straightforward”.

$(K_n[\centerdot] \models y \in \mathrm{LFP}_{x,X}\psi(x,X)) \ := \ y \in \mathrm{LFP}_{x,X}(K_n[\centerdot] \models \psi(x,X))$. Da wird's komplizierter. Am besten wir vergleichen den Fixpunktprozeß auf der rechten Seite von (*) mit dem auf der linken. Seien dazu

$$\begin{aligned} X_\alpha &:= \{a \mid \mathfrak{A} \models (K_n[\centerdot] \models \psi)[a, \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta]\} \text{ und} \\ Y_\alpha &:= \{K_n(a) \mid K_n[\mathfrak{A}] \models \psi[K_n(a), \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta]\} \end{aligned}$$

die Stufen der jeweiligen Fixpunktprozesse. Parameter (irgendwie belegte weitere freie Variablen) können dabei selbstverständlich auftreten, sind aber ohne Bedeutung und daher nicht aufgeführt. (*) gilt nach Induktionsvoraussetzung für ψ. Wir können also insbesondere annehmen, daß X_α verträglich mit K_n ist, sofern es $\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ ist. Aus der K_n-Verträglichkeit von $X_0 = \emptyset$ erhalten wir induktiv: X_α ist K_n-verträglich.

Jetzt wollen wir zeigen: $K_n[X_\alpha] = Y_\alpha$. Für $\alpha = 0$ ist das klar, da beide Mengen leer sind. Sei $\alpha > 0$. Die Behauptung folgt aus den Äquivalenzen

$$\begin{array}{rcll} a \in X_\alpha & \Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models (K_n[\centerdot] \models \psi)[a, \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta] & \text{Def. von } X_\alpha \\ & \Leftrightarrow & K_n[\mathfrak{A}] \models \psi[K_n(a), K_n[\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta]] & \text{Induktionsvoraussetzung f. } \psi \\ & \Leftrightarrow & K_n[\mathfrak{A}] \models \psi[K_n(a), \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta)] & \text{I.V. für } \alpha \text{ u. Bemerkung S. 67} \\ & \Leftrightarrow & K_n(a) \in Y_\alpha & \text{Def. von } Y_\alpha. \end{array}$$

Da jetzt auch ein Element im Fixpunkt X_∞ genau dann liegt, wenn sein n-tes Kondensat im Fixpunkt Y_∞ liegt, ist (*) auch für diesen Fall gezeigt. □

Folgerung 52. *Die Kondensate (endlicher Höhe) sind definierbare Teilmengen, d.h. es gibt zu jedem $n \in \omega$ eine Formel $y \in K_n(x)$ mit der suggerierten Bedeutung.*

Beweis: Man nehme die Formel $(K_n[\centerdot] \models y = x)$. □

Satz 49 erlaubt uns also, über Kondensate $K_n(x)$ und Kondensationen $K_n[\mathfrak{A}]$ in der Weise zu sprechen, daß man sagen kann: „In $K_n[\mathfrak{A}]$ gilt ..." oder „es gibt x mit $K_n(x)$ hat die Eigenschaft ψ". Letzteres ist etwa die Relativierung $\exists x(\psi \upharpoonright K_n(x))$. Was man nicht sagen kann ist „es gibt ein n, so daß in $K_n[\mathfrak{A}]$ gilt ..." oder „es gibt ein Kondensat $K_n(x)$ mit der Eigenschaft ψ". Daß wir nicht etwa nur zu ungeschickt vorgegangen sind, sondern daß dies im Allgemeinen tatsächlich nicht geht zeigt der folgende Abschnitt.

4.8.4 Zerstreutheit ist zu konfus für MFP

Es soll gezeigt werden, daß es keinen MFP Satz gibt, der genau in allen zerstreuten Ordnungen gilt. Ganz einfach hingegen ist Zerstreutheit in MSO ausdrückbar. Man kann ja sagen „es gibt keine dichte Teilmenge mit mehr als einem Punkt":

$$\neg\exists X(\exists x, y \in X\, x \neq y \wedge \forall x \forall y(x, y \in X \wedge x < y \rightarrow \exists z \in X\, x < z < y) \ .$$

Nebenbei wird der Beweis auch eine strikte Quantorenhierarchie aufzeigen, nämlich, daß man mit $n+1$ monadischen Fixpunktquantoren über zerstreute Ordnungen echt mehr ausdrücken kann als mit n. Bevor wir loslegen noch ein ganz kurzer Ausflug zu den

Potenzen von $\mathbb{Z}$.

Sie sind besonders homogene zerstreute Ordnungen. Man kann $\mathbb{Z}^n$ naheliegend als $\mathbb{Z}\cdot\mathbb{Z}^{n-1}$ definieren. Das hat den Nachteil, daß man diese Definition nicht transfinit fortsetzen kann. In [Ros] ist eine induktive Definition für alle Ordinalzahlen gegeben. Diese ergibt

$$\mathbb{Z}^\omega \ := \ (\sum_{n\in\omega} \omega \cdot \mathbb{Z}^n)^* + \sum_{n\in\omega} \omega \cdot \mathbb{Z}^n \ .$$

Etwas anschaulicher ist vielleicht noch folgende explizite Definition von $\mathbb{Z}^\omega$ als $\{g : \omega \to \mathbb{Z} \mid g(x) = 0$ für fast alle $x\}$, wobei $f < g$ sein soll, wenn für $x = \max\{y|f(y) \neq g(y)\}$ gilt $f(x) < g(x)$. Wie auch immer, es handelt sich um eine zerstreute Ordnung der Höhe ω, und jedes Kondensat $K_{n+1}(x)$ ist Summe $\sum_{i\in\mathbb{Z}} K_n(y_i)$ mit geeigneten y_i. Es gilt für $n \in \omega$

$$\mathbb{Z}^\omega \ \cong \ \mathbb{Z}^\omega \cdot \mathbb{Z}^n \ . \tag{13}$$

Bezeichne wieder FO+nMFP die Menge der MFP-Sätze vom Fixpunktrang höchstens n. Es soll gezeigt werden:

Satz 53. *Sind I und J $\equiv_{\mathrm{FO}}$-äquivalente Ordnungen und $n \in \omega$, so ist*

$$\begin{array}{lccc} & I \cdot \mathbb{Z}^n & \equiv_{\mathrm{FO}+n\mathrm{MFP}} & J \cdot \mathbb{Z}^n \ , \\ \textit{aber} & \mathbb{Z}^{n+1} & \not\equiv_{\mathrm{FO}+(n+1)\mathrm{MFP}} & \mathbb{Z}^{n+2} \ . \end{array}$$

Korollar 54. *FO+nMFP $\subsetneqq$ FO+$(n+1)$MFP in zerstreuten Ordnungen.*

Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ $\equiv_{\mathrm{FO}}$-äquivalent sind, sind mit Satz 53 die Ordnungen $\mathbb{Z}^{n+1} \cong \mathbb{Z}\cdot\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{Z}^{n+2} \cong \mathbb{Z}^2 \cdot \mathbb{Z}^n$ $\equiv_{\mathrm{FO}+n\mathrm{MFP}}$-äquivalent, nicht aber $\equiv_{\mathrm{FO}+(n+1)\mathrm{MFP}}$-äquivalent. □

Bevor wir zum Beweis des Satzes mit dem passenden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel loslegen, sollten wir uns an eine Eigenschaft von FO erinnern:

Erinnerung. *Es gilt $\omega \equiv_{\mathrm{FO}} \omega + I \cdot \mathbb{Z}$ für beliebige Ordnungen I.* □

Beweis von Satz 53:
Wir wollen zeigen, daß der $\exists$rhalter das Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{FO}_k+n\mathrm{MFP}}(I\mathbb{Z}^n; J\mathbb{Z}^n)$ gewinnt, sofern $I \equiv_{\mathrm{FO}_k} J$ gilt. In diesem Spiel sind k erste-Stufe-Züge und n Fixpunktzüge erlaubt.

zur Notation: Die Elemente von $I\mathbb{Z}^n$ sind Tupel $(i, \bar{x})$, die geordnet sind gemäß $(i, \bar{x}) < (j, \bar{y}) \Leftrightarrow i < j$ oder $i = j \wedge \bar{x} < \bar{y}$.

Für $n = 0$ ist die Behauptung klar.

Sei $n > 0$. Für Paare (n', k') mit $n' < n$ oder $n' = n \wedge k' < k$ sei die Behauptung schon gezeigt. Betrachten wir den Fall, in dem der $\forall$erderber in $\mathrm{S}_{\mathrm{FO}_k+n\mathrm{MFP}}$ als erstes einen FO-Zug spielt. Wähle er dabei etwa $(i, \bar{x}) \in \mathfrak{A} := I\mathbb{Z}^n$. Gemäß seiner Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{FO}_k}(I, J)$ [2] findet der $\exists$rhalter zu $i \in I$ ein $j \in J$. Es verbleibt ${}^{<}i \equiv_{\mathrm{FO}_{k-1}} {}^{<}j$, und so gewinnt der $\exists$rhalter mit der Induktionsvoraussetzung auch das Spiel

$$\mathrm{S}_{\mathrm{FO}_{k-1}+n\mathrm{MFP}}((-\infty, i) \cdot \mathbb{Z}^n; (-\infty, j) \cdot \mathbb{Z}^n) \ .$$

Das gleiche gilt für die Intervalle ${}^{>}i \cdot \mathbb{Z}^n$ und ${}^{>}j \cdot \mathbb{Z}^n$. Die Intervalle $\{i\} \cdot \mathbb{Z}^n$ und $\{j\} \cdot \mathbb{Z}^n$ sind isomorph. So kommt der $\forall$erderber nicht zum Sieg.

Betrachten wir nun den Fall, in dem der $\forall$erderber als erstes einen Fixpunktzug wählt. Wähle er darin etwa $U \subset \mathfrak{A}$. Die Antwort des $\exists$rhalters ist denkbar einfach:

$$V := \begin{cases} J \cdot \mathbb{Z}^n & \text{falls } U \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst } . \end{cases}$$

Wir müssen uns überlegen, daß der $\exists$rhalter sich eine so größzügige Haltung erlauben darf. Zunächsteinmal ist klar, daß er sich später um diese Mengen U und V nicht mehr kümmern muß. Er kann dann so tun, als wären sie nie fixiert worden, denn wann immer ein gewähltes Element in U liegt wird das ihm zugeordnete in V liegen. Aber jetzt muß er zu beliebigem $b \in V$ noch ein passendes $a \in U$ finden. Das geht so: sei $b = (j, y, \bar{y}) \in J \cdot \mathbb{Z}^n = V$. Wir wissen jetzt nur, daß es

[2] Das ist das k-Züge-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die erste Stufe zwischen I und J

irgendwo in U ein $a = (i, x, \bar{x})$ geben muß. Das ist die Antwort des ∃rhalters. Wir teilen die Ordnungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf:

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{A}_1 & := & \{(i', x', \bar{x}') \mid i' < i \vee (i' = i \wedge x' < x)\} & \cong\ {}^{<}i \cdot \mathbb{Z}^n + \omega^* \cdot \mathbb{Z}^{n-1} \\
 & & & \cong\ ({}^{<}i \cdot \mathbb{Z} + \omega^*) \cdot \mathbb{Z}^{n-1} \\
\mathfrak{A}_2 & := & \{(i, x, \bar{x}') \mid \bar{x}' \in \mathbb{Z}^{n-1}\} & \cong\ \mathbb{Z}^{n-1} \\
\mathfrak{A}_3 & := & \{(i', x', \bar{x}') \mid (i' = i \wedge x' > x) \vee i' > i\} & \cong\ \omega \cdot \mathbb{Z}^{n-1} + {}^{>}i \cdot \mathbb{Z}^n \\
 & & & \cong\ (\omega + {}^{>}i \cdot \mathbb{Z}) \cdot \mathbb{Z}^{n-1}
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{B}_1 & := & \{(j', y', \bar{y}') \mid j' < j \vee (j' = j \wedge y' < y)\} & \cong\ ({}^{<}j \cdot \mathbb{Z} + \omega^*) \cdot \mathbb{Z}^{n-1} \\
\mathfrak{B}_2 & := & \{(j, y, \bar{y}') \mid \bar{y}' \in \mathbb{Z}^{n-1}\} & \cong\ \mathbb{Z}^{n-1} \\
\mathfrak{B}_3 & := & \{(j', y', \bar{y}') \mid (j' = j \wedge y' > y) \vee j' > j\} & \cong\ (\omega + {}^{>}j \cdot \mathbb{Z}) \cdot \mathbb{Z}^{n-1}
\end{array}$$

Da $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3$ ist, müssen wir uns überlegen, daß der ∃rhalter das Spiel zwischen entsprechenden Intervallen erfolgreich fortsetzen kann. Für das Paar $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ wollen wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Gemäß der Erinnerung oben ist ${}^{<}i \cdot \mathbb{Z} + \omega^* \equiv_{\mathrm{FO}} {}^{<}j \cdot \mathbb{Z} + \omega^*$ (auch dann, wenn ${}^{<}i$ oder ${}^{<}j$ leer sein sollten), deshalb können wir das auch. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$, und $(\mathfrak{A}_2, a)$ ist isomorph zu $(\mathfrak{B}_2, b)$. Also gewinnt der ∃rhalter auch in diesem Fall.

Es bleibt zu zeigen, daß man $\mathbb{Z}_n$ von $\mathbb{Z}_{n+1}$ mit einem Satz vom Fixpunktrang n trennen kann. Der Satz $(K_n[\boldsymbol{.}] \models \forall x \forall y\, x = y)$ ist ein solcher (s. Satz 49). Er gilt in $\mathbb{Z}^n$, nicht aber in $\mathbb{Z}^{n+1}$. □

Ein wesentlicher Punkt dieses Beweises ist die Transitivität von $\mathbb{Z}^n$. Daß $(\mathfrak{A}_2, a) \cong (\mathfrak{B}_2, b)$ war für beliebige a, b erlaubte letztendlich die großzügige Wahl von V im entscheidenden Fixpunktzug.

Aus dem gerade bewiesenen Satz 53 folgt jetzt sofort

Folgerung 55.
$\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}^{n+1} \equiv_{\mathrm{MFP}_n} \mathbb{Z}^{n+1}$. *Das bedeutet, daß Zerstreutheit nicht MFP-definierbar ist.*

Beweis: Man beachte $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z} \equiv_{\mathrm{FO}} \mathbb{Z}$. □

Die Frage, ob sich Zerstreutheit wenn schon nicht mit einem einzigen Satz, so doch vielleicht mit einer Satzmenge definieren läßt, können wir sofort verneinen, denn es gibt zwei $\equiv_{\mathrm{MFP}}$-äquivalente Ordnungen, von denen genau eine zerstreut ist:

$$\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}^\omega \equiv_{\mathrm{MFP}} \mathbb{Z}^\omega \quad .$$

Das folgt sofort mit Hilfe von (13) und Satz 53.

Zuletzt wollen wir noch zeigen, daß es mit einem zweistelligen Fixpunkt durchaus möglich ist, Zerstreutheit zu definieren.

Ein zweistelliger Fixpunkt entdeckt Zerstreutheit

Wir geben einen FP^2_4-Satz an, der genau in zerstreuten Ordnungen gilt:

$$\forall x \forall y (x < y \to (x,y) \in \mathrm{LFP}_{x,y,X} \forall z (x < z < y \to (X\,xz \vee X\,zy))) \enspace .$$

Die Bedeutung dieses Satzes macht man sich am anschaulichsten mit Hilfe des Spiels $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ klar. Das sieht in diesem Falle so aus:

0. Der ∀iderleger gibt $x < y$ an, der B∃weiser nennt eine Ordinalzahl α.
1. Der ∀iderleger wählt $z \in (x,y)$.
2. Der B∃weiser belegt (x,y) neu, und zwar setzt er $y := z$ oder $x := z$. Dann definiert er α in eine kleinere Ordinalzahl um. Das Spiel wird bei 1. fortgesetzt.

Verloren hat der Spieler, der als erstes seine Aufgabe nicht mehr erfüllen kann. Wir überlegen uns, daß der B∃weiser genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn die zugrundeliegende Ordnung zerstreut ist: eine reizvolle Möglichkeit, die uns Satz 14 eröffnet, sich die Bedeutung des angegebenen Satzes klarzumachen. Ist die Ordnung zerstreut, dann kann im Punkt 0. der B∃weiser die Ordinalzahl $\alpha := d(x,y)$ (Def. 47) angeben, und im Punkt 2. wird er das Intervall (x,y) so umdefinieren, daß die neuen Grenzen eine kleinere Distanz als die alten haben. Das ist mit Lemma 48 möglich. Diese neue Distanz gibt er dann als neues α an. Wenn diese =1 ist, kann der ∀iderleger seine Aufgabe in 1. nicht mehr erfüllen.

Ist umgekehrt die Ordnung $\mathfrak{A}$ nicht zerstreut, dann existiert $\mathbb{Q} \cong Q \subset \mathfrak{A}$. Der ∀iderleger kann dann in 0. und 1. stets $x, y, z \in Q$ wählen, wonach dem B∃weiser in 2. bald die Ordinalzahlen ausgehen werden. □

4.8.5 Es gibt sehr viele Ordnungen der Höhe 2

Auch wenn es in MFP nicht möglich ist, zerstreute Ordnungen zu definieren, was in MSO geht, so ist dennoch die Frage sinnvoll, ob denn die Ausdrucksstärke dieser beiden Logiken innerhalb der zerstreuten Ordnungen übereinstimmt. Den Weg, den wir bei den Wohlordnungen eingeschlagen haben, nämlich nach charakteristischen Eigenschaften der MSO_n-Klassen zu suchen und diese dann in MFP auszudrücken, diesen Weg hier ebenfalls zu gehen würde erheblich viel schwerer sein, wie das folgende Beispiel zeigen wird. Es ist einfach unüberschaubar, welche Ordnungen alle in einer einzigen Klasse liegen, in welchen Eigenschaften diese übereinstimmen müssen. Konnten wir noch jede Wohlordnung mit endlicher Höhe (also $< \omega^\omega$) mit einem einzigen FO-Satz beschreiben, so zeigt sich, daß dies für zerstreute Ordnungen unmöglich ist. Zwar gewinnt man sehr leicht einen Überblick über die Ordnungen der Höhe 1, aber mühelos konstruiert man sich $2^{\aleph_0}$ viele nichtisomorphe Ordnungen der Höhe 2. Das folgende Beispiel zeigt: Es gibt nichtisomorphe, aber $\equiv_{\mathrm{MSO}}$-äquivalente Ordnungen der Höhe 2.

Konstruktion zweier nichtisomorpher aber MSO-äquivalenter zerstreuter Ordnungen der Höhe 2

Die beiden Ordnungen werden jeweils durch eine Funktion $g : \mathbb{Z} \to \omega \setminus \{0\}$ wie folgt gegeben sein:

$$\mathfrak{A}_g \;:=\; \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_i \;\text{ mit }\; \mathfrak{A}_{2i} \;:=\; \mathbb{Z} \;\text{ und }\; \mathfrak{A}_{2i+1} \;:=\; (g(i), <) \;.$$

Es ist klar, daß die erste Kondensation von $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist und, als Folge von Ordnungen betrachtet, sich hier ständig $\mathbb{Z}$ mit einem $g(i)$ abwechselt. Zwei solche Ordnungen (etwa durch g_1 und g_2 in dieser Weise gegeben) sind genau dann isomorph, wenn g_1 und g_2 nur gegeneinander verschoben sind, wenn es also ein $v \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $g_1(x) = g_2(x - v)$ für alle x gilt. Unsere Aufgabe ist es nun, g_1 und g_2 nicht gegeneinander verschoben so zu bestimmen, daß es dennoch für jede natürliche Zahl n eine Verschiebung $v_n \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß an jeder Stelle x gilt: $g_1(x) \equiv_{\mathrm{MSO}_n} g_2(x - v_n)$. Dann nämlich sind die durch g_1 bzw. g_2 beschriebenen Strukturen $\mathfrak{A}_{g_1}$ und $\mathfrak{A}_{g_2}$ für jedes n mit dem Theorieadditionssatz TAS1 $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalent.

Da $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$ nur endlich viele Äquivalenzklassen hat, somit also eine unendliche, finden wir eine Folge von Ordnungen $(n_k)_{k \in \omega}$, in der jedes n_k $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalent zu allen seinen Nachfolgern n_l mit $l \geq k$ ist. Diese n_k werden wir geschickt als Werte einer Funktion g verteilen, und zwar werden wir Zahlen $b_k \in \mathbb{Z}$ bestimmen, für die gelten wird:

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall k \geq 1\ g(x) = n_k \;\Leftrightarrow\; x \equiv b_k \bmod 2^k \;. \tag{14}$$

Wir beginnen mit $b_1 = 0$, setzen also n_1 an alle geraden Stellen (n_0 verwenden wir nicht). Danach sind also die Werte $g(x)$ mit $x \bmod 4 \in \{1, -1\}$ noch undefiniert. Wir können also $b_2 := 1$ setzen.
Jetzt sind die Werte $g(x)$ mit $x \bmod 8 \in \{-1, 3\}$ noch undefiniert. Wir können also $b_3 := -1$ setzen.

Sind b_k und so auch die Urbilder von n_k bestimmt, so sind die Werte $g(x)$ mit $x \equiv b_k + 2^{k-1} \bmod 2^k$ also für $x \bmod 2^{k+1} \in \{b_k + 2^{k-1}, b_k - 2^{k-1}\}$ noch undefiniert. Wir setzen:

$$b_{k+1} := \begin{cases} b_k + 2^{k-1} & \text{falls } b_k < 0 \\ b_k - 2^{k-1} & \text{falls } b_k > 0 \;. \end{cases}$$

Setzen wir $|b_k| < 2^{k-1}$ voraus (was für $k = 3$ stimmt), so hat b_{k+1} ein anderes Vorzeichen als b_k und es gilt wieder: $|b_{k+1}| < 2^k$.
Jetzt sind die Werte $g(x)$ mit $x \equiv b_{k+1} + 2^k \bmod 2^{k+1}$ noch unbestimmt. Nach diesem Muster fahren wir fort und erhalten so die Formel:

$$b_k := 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^{k-2} \quad = \quad \frac{1}{3}(1 - (-2)^{k-1}) \ .$$

Eine leichte Induktion oder auch schon genaues Hinsehen zeigt:

$$\text{für alle } k > 3: \quad 2^{k-3} < |b_k| < 2^{k-2} \tag{15}$$

und $2b_k \equiv 2b_{k-1} \bmod 2^{k-1}$, woraus folgt:

$$\forall j \leq k \quad 2b_k \equiv 2b_j \bmod 2^j \ . \tag{16}$$

Da wir nach jedem Schritt $g(x)$ definieren für das am nächsten bei 0 gelegene x, das noch kein g-Bild hat, ist klar, daß wir schließlich eine totale Funktion erhalten. Wir setzen: $g_1 := g$ und $g_2(x) := g_1(-x)$. Es folgt mit (14):

$$\begin{aligned} g_1(x) = n_k \Leftrightarrow & \quad x \equiv b_k \bmod 2^k \\ \Leftrightarrow & \quad -x \equiv -b_k \bmod 2^k \\ \Leftrightarrow & \quad 2b_k - x \equiv b_k \bmod 2^k \\ \Leftrightarrow & \ g_1(2b_k - x) = n_k \qquad \Leftrightarrow g_2(x - 2b_k) = n_k. \end{aligned} \tag{18}$$

g_1 und g_2 sind nicht gegeneinander verschoben, definieren also nicht die gleiche Struktur. Denn mit (18) und (14) ergibt sich:

$$\text{Genau für } v \equiv 2b_k \bmod 2^k \text{ gilt: } g_2(x - v) = n_k \Leftrightarrow g_1(x) = n_k \ . \tag{19}$$

Da aber sowohl $2|b_k|$ als auch $2^k - 2|b_k|$ wegen (15) unbeschränkt sind, kann keine Verschiebung v alle n_k gleichzeitig übereinanderschieben.

Zum Schluß müssen wir uns noch überlegen, daß es für jedes $k \in \omega$ eine Verschiebung $v_k \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß stets $g_1(x) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} g_2(x - v_k)$ gilt. $v_k := 2b_k$ leistet dies, denn (19) und ein Blick auf (16) überzeugt uns davon, daß, wenn v_k die n_k übereinanderschiebt, auch die n_j mit $j < k$ übereinandergeschoben werden. Da aber für $l, m > k$ gilt: $n_l \equiv_{\mathrm{MSO}_k} n_m$, ist nun alles gezeigt. □

4.8.6 Höhenbeschränkung führt zu MSO $\preccurlyeq$ MFP

Wie wir gesehen haben, ist es möglich, über die Kondensate und Kondensationen zu sprechen. (Vgl. Satz 49). Das legt die Hoffnung nahe, wenigstens bei *fester* gegebener Höhe h die Frage nach einem MFP-Äquivalent der MSO_n-Sätze über Ordnungen dieser Höhe beantworten zu können. Das vorhergehende Kapitel läßt es angeraten sein, den Weg über eine explizite algebraische Beschreibung der Äquivalenzklassen nicht einzuschlagen. Wir werden es stattdessen mit einer Induktion über die Höhe h versuchen. Jede Ordnung der Höhe $h+1$ ist eine „überschaubare" Summe von Ordnungen der Höhe $\leq h$. Hat man diese schon „klassifiziert", dann sollte man auch die Höhe $h+1$ in den Griff bekommen. Genau das werden wir versuchen. Wir verfolgen das

Ziel: *Zu jeder Ordnung $\mathfrak{A}$ von endlicher Höhe und jedem $n \in \omega$ gibt es einen MFP-Satz $\psi^n_{\mathfrak{A}}$, für den gilt:*

(i) $\mathfrak{A} \models \psi^n_{\mathfrak{A}}$,

(ii) $\mathfrak{B} \models \psi^n_{\mathfrak{A}} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A}$,

(iii) für jede Höhe $h \in \omega$ ist die Menge $\{\psi^n_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A}$ zerstreut, $rg(\mathfrak{A}) \leq h\}$ endlich.

Hiermit gibt es zu jedem MSO-Satz φ vom Quantorenrang n und jeder Höhe $h \in \omega$ einen MFP-Satz

$$\mathrm{MFP}^h(\varphi) \ := \ \bigvee\{\psi^n_{\mathfrak{A}} \mid rg(\mathfrak{A}) \leq h,\ \mathfrak{A} \models \varphi\} \ , \tag{20}$$

der in Ordnungen einer Höhe höchstens h das Gleiche besagt wie φ. Sich das zu überlegen ist eine einfache Übung. Da in der Regel der Satz $\mathrm{MFP}^h(\varphi)$ umso komplexer sein wird, je größer h ist, gewinnen wir auf diese Weise keinen zu φ *in allen Ordnungen* äquivalenten Satz. Das drückt auch der Sachverhalt aus, daß in (*iii*) die Höhenbeschränkung $rg(\mathfrak{A}) \leq h$ wirklich nötig ist. $\psi^n_{\mathfrak{A}}$ beschreibt einen zu kleinen Teil der $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse von $\mathfrak{A}$.

Die Definition der $\psi^n_{\mathfrak{A}}$

$\psi^n_{\mathfrak{A}}$ wird induktiv über die Höhe von $\mathfrak{A}$ definiert. Ist $rg(\mathfrak{A}) = 0$, dann ist $\mathfrak{A}$ einelementig und als $\psi^n_{\mathfrak{A}}$ kann der Satz dienen: $\exists x \forall y\, x = y$. Das war nicht schwer. Sei deswegen $rg(\mathfrak{A}) = h+1 > 0$ und die $\psi^n_{\mathfrak{B}}$ für $\mathfrak{B}$ von kleinerem Rang schon gefunden. Wir betrachten die Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum_{i \in K_h[\mathfrak{A}]} K_h(x_i)$ mit geeigneten $x_i \in \mathfrak{A}$. Wir wissen, daß $K_h[\mathfrak{A}]$ endlich ist, isomorph zu ω, zu ω^* oder zu $\mathbb{Z}$. Diese Ordnung $K_h[\mathfrak{A}]$ färben wir mit den Farben $\sigma := \{P_{\mathfrak{K}} \mid \mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}\}$ ein, wobei ein Punkt $K_h(a) \in K_h[\mathfrak{A}]$ die Farbe $P_{\mathfrak{K}}$ tragen soll, wenn das Intervall $K_h(a)$ als Ordnung in der Klasse $\mathfrak{K}$ liegt. Wir kommen so zu der σ-Ordnung

$$\bar{\mathfrak{A}} \ := \ (K_h[\mathfrak{A}], <, (P^{\bar{\mathfrak{A}}}_{\mathfrak{K}})_{\mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}}) \ .$$

Aus der Information, die in dieser Ordnung steckt, können wir die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse von $\mathfrak{A}$ zurückgewinnen. Es genügt aber schon weniger. Das genau war die Motivation für den Theorieadditionssatz TAS2 (Satz 30, S. 48), den wir hier anwenden wollen. Er liefert uns ein $k = k(n, |\sigma|)$, mit dem wir folgendermaßen schließen können: Ist eine σ-Ordnung $\mathfrak{B}$ gegeben und für jedes $b \in B$ eine Ordnung K_b, und ist $b \in P_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{B}}$ genau für die Klasse $\mathfrak{K}$, in der K_b liegt, dann gilt:

$$\mathfrak{B} \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}} \;\Rightarrow\; \sum_{b \in \mathfrak{B}} K_b \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A} \;. \tag{21}$$

Die $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Klasse der σ-Ordnung $\bar{\mathfrak{A}}$ ist in MFP beschreibbar (Satz 40). Wir haben also einen MFP-Satz $\centerdot \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}}$ in der Sprache $\{<, (P_{\mathfrak{K}})_{\mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}}\}$, der genau diese Klasse beschreibt. Der gesuchte Satz $\psi_{\mathfrak{A}}^n$ wird besagen „$(K_n[\centerdot]$, richtig eingefärbt$)\equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}}$".

Die Induktionsvoraussetzung gibt uns die Möglichkeit, ‚richtig einzufärben', nämlich für jede $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse $\mathfrak{K}$ einen MFP-Satz $\mathrm{MFP}^h(\varphi_{\mathfrak{K}})$, der auf Ordnungen der Höhe $\leq h$ genau dann zutrifft, wenn sie in $\mathfrak{K}$ liegen. Die Relativierung dieses Satzes auf die definierbare Teilmenge $K_h(x)$ ist eine Formel $K_h(x) \in \mathfrak{K}$ in der Sprache $\{<\}$ mit der suggerierten Bedeutung.

Jetzt setzen wir alle Bausteine zusammen: Wir wenden Lemma 51 auf den Satz $\centerdot \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}}$ an, wobei wir formal die auftretenden $P_{\mathfrak{K}}$ als freie Relationsvariablen betrachten. Das liefert uns einen Satz $K_h[\centerdot] \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}}$, in dem allerdings noch die als Variablen aufgefaßten Symbole $P_{\mathfrak{K}}$ auftreten. Diese sollen durch die K_h-verträglichen Teilmengen $\{x | K_h(x) \in \mathfrak{K}\}$ belegt werden. Das erreichen wir, indem wir alle Subformeln der Gestalt $x \in P_{\mathfrak{K}}$ jeweils durch $K_h(x) \in \mathfrak{K}$ ersetzen. Jetzt haben wir den gesuchten Satz $\psi_{\mathfrak{A}}^n$ in der Sprache der Ordnungen.

Auch auf die Gefahr hin, mit den formalen Ausführungen mehr zu verwirren als zu erhellen, sei hier (ii) nachgewiesen:

Sei $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}}^n$.
Wir setzen $P_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{B}} := \{b \in \mathfrak{B} \mid K_h(b) \in \mathfrak{K}\}$ und $P_{\mathfrak{K}}^{K_h[\mathfrak{B}]} := \{K_h(b) \mid K_h(b) \in \mathfrak{K}\}$ für $\mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}$. Damit ist $K_h[P_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{B}}] = P_{\mathfrak{K}}^{K_h[\mathfrak{B}]}$, und es gilt:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}}^n & \Leftrightarrow & (\mathfrak{B}, (P_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{B}})_{\mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}}) \models (K_h[\centerdot] \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}}) & (\text{Def. v. } \psi_{\mathfrak{A}}^n) \\ & \Leftrightarrow & (K_h[\mathfrak{B}], (P_{\mathfrak{K}}^{K_h[\mathfrak{B}]})_{\mathfrak{K} \in \equiv_{\mathrm{MSO}_n}}) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \bar{\mathfrak{A}} & (\text{Lemma 51}) \\ & \Rightarrow & \mathfrak{B} = \sum_{K_h(b) \in K_h[\mathfrak{B}]} K_h(b) \equiv_{\mathrm{MSO}_n} \mathfrak{A} & (\text{Nach (21)}). \end{array}$$

Bei festem h hängt der Satz $\centerdot \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \bar{\mathfrak{A}}$ nur von der $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Klasse von $\bar{\mathfrak{A}}$ ab, wovon es nur endlich viele gibt. Damit ist auch (iii) erfüllt.

Fassen wir zusammen:

Satz 56 (MSO $\preccurlyeq$ MFP bei Höhenbeschränkung).
Für jede endliche Höhe h gilt: MSO und MFP stimmen auf zerstreuten Ordnungen der Höhe höchstens h überein.

Folgerung 57. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerstreute Ordnungen von endlicher Höhe, dann gilt*

$$\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MFP}} \mathfrak{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MSO}} \mathfrak{B} \ .$$

Beweis: Interessant ist die Richtung „$\Rightarrow$". Sei also $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MFP}} \mathfrak{B}$ und φ ein MSO-Satz. Seien die Höhen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide durch h beschränkt. Wir finden jetzt $\mathrm{MFP}^h(\varphi)$ wie in (20). Es gelten die Äquivalenzen

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \mathrm{MFP}^h(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \mathrm{MFP}^h(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi \ ,$$

die die Behauptung beweisen. □

Wie wir sehen werden, kann Folgerung 57 für unendliche Höhen nicht richtig sein.

Was uns die Höhenbeschränkung beschert hat, das war das induktive Hochhangeln von Höhe zu Höhe bei der Definition der $\psi^n_{\mathfrak{A}}$. Als wir die Ordinalzahlen betrachteten, konnten wir mit kombinatorischen Argumenten mit einem Schlag alle großen Höhen erledigen, indem wir feststellten: Wichtig ist nur, was unten passiert. Das spiegelte Proposition 41 (a) wider. Hier könnte eine ähnliche Situation vorliegen, tut es aber nicht. Das wußte ich lange Zeit nicht. Meine Bemühungen, zu Bedingungen zu kommen, unter denen Ordnungen verschiedener, beliebig großer Höhen MSO_n-äquivalent sind, gingen zunächst von der Feststellung aus, daß es zu hohen Ordnungen stets äquivalente niedrige geben muß. Wie gewinnt man diese? Wie sieht ein „einfaches" Repräsentantensystem für die MSO_n-Klassen aus? Ist erst einmal ein solches Repräsentantensystem gefunden, kann man dann vielleicht zu jeder Ordnung darin einen MFP-Satz finden, der ihre MSO_n-Klasse beschreibt?

Die Antwort auf diese Fragen führt zwar nicht zum zunächst erhofften Ziel, aber erstens sehr weit in diese Richtung und zweitens genau an die Stelle, an der MFP in der Aufholjagd zu MSO scheitert. Deswegen werden wir den durch diese Fragen vorgegebenen Weg weiter verfolgen.

4.8.7 Repräsentanten für die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen

Es ist unser Ziel, ein einfaches endliches System von Ordnungen zu finden, das ein Repräsentantensystem der MSO_k-Klassen abzählbarer zerstreuter Ordnungen umfaßt. Da alle abzählbaren zerstreuten Ordnungen durch Bildung von endlichen Summen, ω- oder ω^*-Summen aus bereits „hergeleiteten" Ordnungen entstehen, ist es sinnvoll, diese Summenbildungen genauer zu untersuchen. Sei $k \in \omega$. In den nächsten beiden Abschnitten werden wir zweierlei zeigen:

1. Zu jeder zerstreuten Ordnung endlicher Breite existiert eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilordnung kleiner Breite.

2. Zu jeder zerstreuten Ordnung gibt es eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilordnung kleiner Höhe.

„klein" wird dabei heißen $\leq$ Anzahl der MSO_k-Klassen. Da diese Zahl ab nun häufiger auftreten wird, geben wir ihr einen Namen:

$$t(k) := \| \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \| = \text{Anzahl der } \mathrm{MSO}_k\text{-Klassen von Ordnungen} \ .$$

Wie man Ordnungen schmal macht

Lemma 58. *Ist $\sum_{j\in J}\mathfrak{A}_j$ eine endliche Summe von Ordnungen, dann gibt es eine $\sim_k$-äquivalente Teilsumme mit höchstens $t(k)$ vielen Summanden, d.h. es existiert $J' \subset J$, $|J'| \leq t(k)$ und $\sum_{j\in J}\mathfrak{A}_j \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \sum_{j\in J'}\mathfrak{A}_j$.*

Beweis: Ist $|J| > q$, dann muß es $j_1 < j_2$ geben mit $\sum_{j\leq j_1} A_j \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \sum_{j\leq j_2} A_j$. Damit ist

$$\sum_{j\in J}\mathfrak{A}_j = \sum_{j\leq j_2}\mathfrak{A}_j + \sum_{j>j_2}\mathfrak{A}_j \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \sum_{j\leq j_1}\mathfrak{A}_j + \sum_{j>j_2} A_j \ .$$

Letztere Summe hat jetzt weniger Summanden als die erste. Dieses Vorgehen wiederholen wir solange, bis eine Teilsumme mit höchstens q Summanden übrigbleibt. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wie man Ordnungen niedrig macht

Lemma 59. *Zu jeder abzählbaren zerstreuten Ordnung gibt es eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Subordnung, deren Rang höchstens $t(k)$ ist.*

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine abzählbare zerstreute Ordnung der Höhe α. Wir zeigen das Lemma mit einer Induktion über α. Betrachten wir zuerst den Limesfall. Sei etwa $\mathfrak{A} = \sum_{i\in\omega}\mathfrak{A}_i$ mit $rg(\mathfrak{A}_i) < \alpha$ (beachte Lemma 46). Die Induktionsvoraussetzung besagt, daß jedes $\mathfrak{A}_i$ eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilordnung $\bar{\mathfrak{A}}_i$ vom Rang höchstens $t(k)$ besitzt. Dann ist $\sum_{i\in\omega}\bar{\mathfrak{A}}_i$ eine zu $\mathfrak{A}$ $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilsumme von endlichem Rang, auf die wir die Induktionsvoraussetzung erneut anwenden können.

Ist $rg(\mathfrak{A}) = \beta + 1$, dann gewinnen wir ganz genauso eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilordnung von endlichem Rang. Also können wir annehmen: $t(k) < rg(\mathfrak{A}) < \omega$.

Wir wollen jetzt $\mathfrak{A}$ so ausdünnen, daß der Rang klein wird, und wir aber in der gleichen $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Klasse bleiben. Das geht ähnlich wie im Lemma 58. Dazu definieren wir zu $x \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{array}{rcl} o(x) & := & \max\{h \mid \text{ es gibt } h' < h \ K_{h'}(x) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} K_h(x)\} \\ u(x) & := & \min\{h' \mid K_{h'}(x) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} K_{o(x)}(x)\} \\ O & := & \{K_{o(x)}(x) \mid x \in \mathfrak{A}\} \\ U & := & \{K_{u(x)}(x) \mid x \in \mathfrak{A}\} \\ O' & := & \{K_\alpha(x) \in O \mid \text{ für alle } \beta > \alpha : \ K_\beta(x) \notin O\} \ . \end{array}$$

Ein Schubfachschluß aus $rg(\mathfrak{A}) > t(k)$ liefert $u(x) < o(x)$. Leicht verifiziert man die

Bemerkung. $\bigcup O' = \mathfrak{A}$. □

Zu jedem $i \in O'$ wählen wir ein $x_i \in \mathfrak{A}$ fest mit $K_{o(x_i)}(x_i) = i$ und gewinnen so eine Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & O' & \to & U \\ & K_{o(x_i)}(x_i) & \mapsto & K_{u(x_i)}(x_i) \ . \end{array}$$

Bemerkung. (a) Für alle $K \in O'$: $K \equiv_{\mathrm{MSO}_k} f(K) \subset K$

(b) Die Intervalle in O' sind paarweise disjunkt, und so gilt mit der letzten Bemerkung:

$$\mathfrak{A} = \sum_{i \in O'} K_{o(x_i)}(x_i) \ ,$$

wobei O' als (kanonisch) geordnet vorausgesetzt wird.

(a) ist klar. Zu (b): sei $x_i < x_j$. Falls $o(x_i) = o(x_j)$, dann sind die zugehörigen Kondensate $K_{o(x_i)}(x_i)$ bzw. $K_{o(x_j)}(x_j)$ disjunkt, weil sie nach Wahl der x_i nicht gleich sein können. Ist $o(x_i) < o(x_j)$, und sind diese Kondensate nicht disjunkt, dann ist $K_{o(x_j)}(x_i) = K_{o(x_j)}(x_j) \in O'$. Dies aber widerspricht der Definition von O'.

Wir setzen nun $$\mathfrak{A}' := \bigcup f(O') = \textstyle\sum_{i \in O'} K_{u(x_i)}(x_i) \ .$$

In $\mathfrak{A}$ wird also jedes Intervall aus O' durch sein $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalentes f-Bild ersetzt. Da diese Bilder genauso angeordnet sind wie O', ergibt sich $\mathfrak{A}' \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \mathfrak{A}$.

Das nächste Lemma zeigt, daß der Rang von $\mathfrak{A}'$ kleiner ist als der von $\mathfrak{A}$, so daß wir, wenn wir dieses Vorgehen genügend oft wiederholen, schließlich eine Ordnung vom Rang höchstens $t(k)$ gewinnen, wonach Lemma 59 bewiesen ist. □

Lemma 60.
Sei $\mathfrak{A}$ zerstreut, $\mathfrak{A} = \sum_{i\in I} K_{o(x_i)}(x_i)$, und für alle $i \in I$ sei $u(x_i) < o(x_i)$. Dann hat die Summe $\sum_{i\in I} K_{u(x_i)}(x_i)$ kleineren Rang als $\mathfrak{A}$.

Beweis: Wir führen eine Induktion über den Rang von $\mathfrak{A}$. Ist dieser 1, dann ist die Sache klar. Sei er also $h+1$ und das Lemma für Ordnungen von kleinerem Rang bewiesen. Wir können $\mathfrak{A}$ nun in seine h-ten Kondensate zerlegen, etwa

$$\mathfrak{A} \ := \sum_{j\in K_h[\mathfrak{A}]} K_h(a_j) \text{ mit geeigneten } a_j \in \mathfrak{A} \ .$$

Wir nehmen an, daß $o(x_i) \leq h$ gilt für alle $i \in I$. (Sonst ist I einelementig, und alles sowieso ganz einfach). Wir können jetzt auch I zerlegen:

$$I \ := \sum_{j\in K_h[\mathfrak{A}]} I_j \text{ mit } I_j \ := \ \{i \mid K_{o(x_i)}(x_i) \subset K_h(a_j), \text{ d.h. } x_i \in K_h(a_j)\}$$

Jetzt ist $K_h(a_j) = \sum_{i\in I_j} K_{o(x_i)}(x_i)$ und damit die Induktionsvoraussetzung anwendbar, d.h. $rg(\sum_{i\in I_j} K_{u(x_i)}(x_i)) < h$. Da $rg(K_h[\mathfrak{A}]) = 1$ ist, folgt

$$rg\left(\sum_{j\in K_h[\mathfrak{A}]} \sum_{i\in I_j} K_{u(x_i)}(x_i)\right) < h+1 \ .$$

□

Jetzt haben wir die algebraischen Hilfsmittel, die uns auf dem vorgezeigten Weg weiterhelfen.

Einfache Repräsentanten – der Satz von Leonhard und Läuchli wird erweitert

Beliebige abzählbare zerstreute Ordnungen erhält man aus der Ordnung $\mathbb{1}$ durch Bildung endlicher Summen, $\mathbb{Z}$-, ω- und ω^*-Summen. Interessiert uns die Verschiedenartigkeit der Ordnungen nur modulo $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Äquivalenz, dann vereinfachen sich diese Bildungsprinzipien erheblich. Was an Komplexität der Ordnungen mit der „modulo $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Brille" noch sichtbar ist soll jetzt untersucht werden.

Definition 61. Durch Induktion über $i \in \omega$ definieren wir simultan für alle s Mengen von zerstreuten Ordnungen:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_0^s & := & \{\mathbb{1}\} \\ \mathcal{M}_{i+1}^s & := & \{\omega^* \sum_{j<s} M_j + \sum_{j<s} M'_j + \omega \sum_{j<s} M''_j \mid M_j, M'_j, M''_j \in \mathcal{M}_i^s \cup \{\emptyset\}\} \ . \end{array}$$

Es ist $\mathcal{M}_i^s \subset \mathcal{M}_{i+1}^s$ und es gilt der

Satz 62. *Zu jeder abzählbaren zerstreuten Ordnung $\mathfrak{A}$ gibt es ein $M \in \mathcal{M}^{t(k)}_{t(k)}$ mit $M \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \mathfrak{A}$ und $M \subset \mathfrak{A}$. Jedes $\mathcal{M}^s_i$ ist endlich.*

Beweis: Die Endlichkeit von $\mathcal{M}^s_{i+1}$ ergibt sich aus der von $\mathcal{M}^s_i$. Sei $\mathfrak{A}$ gegeben. Lemma 59 liefert uns eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Subordnung einer Höhe $h \leq t := t(k)$. Es genügt somit, mit einer Induktion über h zu zeigen, daß es zu jeder Ordnung der Höhe h in $\mathcal{M}^t_h$ eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilordnung gibt. Das wollen wir jetzt tun.

$h = 0$: Ordnungen von diesem Rang bestehen aus genau einem Punkt.

Sei $rg(\mathfrak{A}) = h+1$ $(h \in \omega)$ und die Behauptung für Ordnungen von kleinerem Rang bereits bewiesen. Wir führen den Beweis für den Fall $K_h[\mathfrak{A}] \cong \omega$, die anderen Fälle sind analog zu behandeln. Wir können mit einem Ramsey-Argument wie in Kapitel 4.6 $\mathfrak{A}$ zerlegen, indem wir $i_0 < i_1 < i_2 < \ldots \in \omega$ finden, so daß mit geeigneten $x_i \in A$ und $I_j := (i_j, i_{j+1}]$ die Zerlegung existiert

$$\mathfrak{A} = \sum_{i \leq i_0} K_h(x_i) + \sum_{j \in \omega} \sum_{i \in I_j} K_h(x_i) \quad ,$$

wobei für alle $j, j' \in \omega$ die Äquivalenz gilt:

(a) $$\sum_{i \in I_j} K_h(x_i) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \sum_{i \in I_{j'}} K_h(x_i) \quad .$$

Es gibt nach Lemma 58 zu jeder der Summen $\sum_{i \in I_j} \ldots$ eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente Teilsumme mit höchstens t Summanden, zu I_j also ein $I'_j \subset I_j$, $|I'_j| \leq t$ mit

(b) $$\sum_{i \in I_j} K_h(x_i) \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \sum_{i \in I'_j} K_h(x_i) \quad .$$

(Die allererste Summe wird ebenso behandelt, indem wir formal $I_{-1} := [0, i_0]$ setzen und den Fall $j = -1$ mit einschließen.) Da nun $rg(K_h(x_i)) \leq h$ ist, können wir mit der Induktionsvoraussetzung zu jedem $i \in \bigcup_j I'_j$ eine Teilordnung $T_i \subset K_h(x_i)$ finden mit $T_i \in \mathcal{M}^t_h$ und

(c) $$T_i \equiv_{\mathrm{MSO}_k} K_h(x_i) \quad .$$

$\mathcal{M}^t_h$ ist endlich, somit ist auch die Anzahl der verschiedenen Summen mit höchstens t Summanden aus $\mathcal{M}^t_h$ endlich. Es muß also eine der Summen $\sum_{i \in I'_j} T_i$ unendlich oft auftreten, also eine unendliche Teilmenge $J \subset \omega$ geben, so daß für alle $j_1, j_2 \in J$ gilt: $\sum_{i \in I'_{j_1}} T_i = \sum_{i \in I'_{j_2}} T_i$. Diese Summe ist wegen (a) außerdem $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalent zu $\sum_{i \in I'_j} T_i$ für jedes $j \in \omega$. Setzen wir (a), (b) und (c) zusammen, so haben wir:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j \geq -1} \sum_{i \in I_j} K_h(x_i) \quad &\equiv_{\mathrm{MSO}_k} \quad \textstyle\sum_{i \in I'_{-1}} T_i + \sum_{j \in \omega} \sum_{i \in I'_j} T_i \\
&\equiv_{\mathrm{MSO}_k} \quad \textstyle\sum_{i \in I'_{-1}} T_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I'_j} T_i \\
&= \quad \textstyle\sum_{i \in I'_{-1}} T_i + \omega \sum_{i \in I'_{j_0}} T_i \; \in \mathcal{M}^t_{h+1} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $j_0 \in J$ beliebig gewählt werden kann, und sind am Ziel. □

Als Satz von Leonhard und Läuchli wird in [Ros] die Aussage von Satz 62 für FO und ohne den Zusatz „$M \subset \mathfrak{A}$" vorgestellt.

Es ist möglich, jede einzelne Struktur in $\mathcal{M}_n^s$ mit einem MFP-Satz zu beschreiben (mit ähnlichen Methoden wie sie in Kapitel 4.8.6 verwendet wurden), was uns aber nicht weiterbringt, da uns ja die $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Klassen dieser Ordnungen interessieren. Auch wenn das Vorhaben, diese zu beschreiben, scheitert, wird es sich als sinnvoll erweisen, in diese Richtung erst einmal weiterzuarbeiten. Ein nächster Schritt wird von der von Satz 62 motivierten Frage geleitet: Kann man für jede Ordnung in $\mathcal{M}_\cdot^\cdot$ ausdrücken, daß sie einbettbar ist, d.h. einen MFP-Satz finden, der genau in den zerstreuten Ordnungen gilt, in die sie einbettbar ist? Es ist naheliegend zu versuchen, den gesuchten MFP-Satz mit einer Induktion über den Aufbau der Ordnungen in $\mathcal{M}_\cdot^\cdot$ zu definieren. Für diesen Zweck scheint die induktive Zerlegung der Ordnungen in $\mathcal{M}_\cdot^\cdot$, wie sie durch die Definition der $\mathcal{M}_\cdot^\cdot$ vorgegeben ist, weniger geeignet. Es scheint wünschenswert, die Ordnungen in $\mathcal{M}_\cdot^\cdot$ so zerlegt zu haben, daß die Bauteile jeweils ein erstes und letztes Element haben. Diesen Wunsch werden wir uns verwirklichen:

Noch ein einfaches Repräsentantensystem

Definition 63. Durch Induktion über $i \in \omega$ definieren wir Mengen von zerstreuten Ordnungen:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{N}_0 & := & \{ \mathbb{1} \} \\ \mathcal{N}_{i+1} & := & \{\omega N, \omega^* N, \omega N + \omega^* N' \mid N, N' \in \mathcal{N}_i,\ N \text{ und } N' \text{ haben je sowohl ein} \\ & & \qquad\qquad \text{erstes als auch ein letztes Element}\} \\ & & \cup\{N + N' \mid N, N' \in \mathcal{N}_i, N' \text{ hat ein erstes oder } N \text{ ein letztes Element}\} \\ \mathcal{N} & := & \cup_{i\in\omega}\mathcal{N}_i \end{array}$$

Wieder ist $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_{i+1}$ und es gilt wieder:

Satz 64. *Zu jedem $k \in \omega$ existiert ein $s = s(k) \in \omega$, so daß $\mathcal{N}_s$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-Klassen zerstreuter Ordnungen umfaßt. Genauer: Es gibt für jede zerstreute Ordnung $\mathfrak{A}$ ein $N \in \mathcal{N}_s$ mit $N \equiv_{\mathrm{MSO}_k} \mathfrak{A}$ und $N \subset \mathfrak{A}$. $\mathcal{N}_s$ ist zudem endlich.*

Die Endlichkeit der $\mathcal{N}_i$ ergibt sich leicht induktiv, das Weitere folgt sofort aus

Lemma 65. *Es gibt eine Funktion $f : \omega \times \omega \to \omega$, so daß für alle $n, s \in \omega$ gilt: $\mathcal{M}_n^s \subset \mathcal{N}_{f(n,s)}$*

Beweis: Natürlich führen wir wieder eine Induktion über n. Es ist klar, daß $\mathcal{M}_0^s = \mathcal{N}_0$ ist. Für den Induktionsschritt überlegen wir uns, daß gilt:

(a) Sind $A, B \in \mathcal{N}_k$, so ist $A + B \in \mathcal{N}_{k+3}$.

(b) Ist $A \in N_k$, so ist $\{\omega A,\ \omega^* A\} \subset \mathcal{N}_{k+4}$.

Ist das gezeigt, dann ist, wenn alle M_j, M_j', M_j'' in $\mathcal{N}_k$ liegen:

$$\underbrace{\omega^* \overbrace{\sum_{j<s} M_j}^{\in\mathcal{N}_{k+3s} \text{ nach (a)}}}_{\in\mathcal{N}_{k+3s+4} \text{ nach (b)}} + \underbrace{\sum_{j<s} M_j' + \omega \sum_{j<s} M_j''}_{\in\mathcal{N}_{k+3s+7}} \in \mathcal{N}_{k+3s+10} \ .$$

Wenn wir also $f(n, s) := n(3s + 10)$ setzen, dann erfüllt dieses f das Lemma. Es bleibt also noch, (a) und (b) zu zeigen.

Zu (a): Wenn weder A ein letztes, noch B ein erstes Element hat (und nur dieser Fall ist interessant), dann überlegt man sich leicht, daß es $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{N}_k$ gibt mit

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \omega A_2 \\ B &= \omega^* B_2 + B_1 \ , \end{aligned}$$

wobei A_2 und B_2 sowohl ein erstes und ein letztes Element haben. Es ist dann

$$A + B = A_1 + \underbrace{\omega A_2 + \omega^* B_2}_{\in\mathcal{N}_{k+1}} + B_1 \ \in \ \mathcal{N}_{k+3} \ .$$

Zu (b): Habe A z.B. weder ein erstes noch ein letztes Element, dann ist

$$A \ = \ \omega^* A_1 + A_2 + \omega A_3 \quad \text{mit } A_{1,2,3} \in \mathcal{N}_k,$$

wobei A_1 und A_3 jeweils ein erstes und ein letztes Element haben. Jetzt ist

$$\omega A = \underbrace{\omega^* A_1 + A_2 + A_3}_{\in\mathcal{N}_{k+3}} + \omega \underbrace{(\underbrace{\omega A_3 + \omega^* A_1}_{\in\mathcal{N}_{k+1}} + \underbrace{A_2 + A_3}_{\in\mathcal{N}_{k+1}})}_{\in\mathcal{N}_{k+2}} \quad \in \mathcal{N}_{k+4} \ .$$

Damit ist Lemma 65 bewiesen. □

4.8.8 Wie weit man in Richtung MSO $\preccurlyeq$ MFP kommt

Motiviert von der Tatsache, daß in jeder Ordnung eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_k}$-äquivalente aus $\mathcal{N}$ enthalten ist, werden wir als nächstes versuchen, zu jedem $N \in \mathcal{N}$ einen MFP-Satz $N \prec \centerdot$ zu finden, der in genau den Ordnungen gilt, in die N einbettbar ist. Man kann hoffen, in der (endlichen) Menge

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}) \ := \ \{N \in \mathcal{N}_{s(n)} \mid N \prec \mathfrak{A}\}$$

soviel Information über $\mathfrak{A}$ zu finden, daß nicht mehr viel fehlt, um die $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klasse von $\mathfrak{A}$ vollständig festzulegen. Was noch fehlt, ist die Information, *wie* ein $N \in \mathcal{N}_s$ in $\mathfrak{A}$ einbettbar ist, wie das Komplement dieser Einbettung sich mit dieser „mischt". Wie wir sehen werden, ist dies ein echter Mangel von MFP. Das zeigt auf der einen Seite das positive Ergebnis von Kapitel 4.8.8, daß MSO-Sätze, die Aussagen über eine Teilmenge machen, nicht aber darüber, wie sie in der Ordnung liegt, ein MFP-Äquivalent besitzen, auf der anderen Seite das negative Ergebnis von Kapitel 4.8.9, daß es in MFP nicht möglich ist, auszudrücken, daß eine Ordnung in zwei Hälften zerfällt, wovon die erste kein letztes und die zweite kein erstes Element besitzt. Hier gerade ist es eben notwendig über eine Teilmenge *und* deren Komplement zu sprechen.

Wenden wir uns jetzt dem positiven Ergebnis zu.

Wie man die Aussagen $N \prec \centerdot$ gewinnt

Gesucht ist also zu $N \in \mathcal{N}$ ein Satz $N \prec \centerdot =: \varphi_N$, der in einer zerstreuten Ordnung $\mathfrak{A}$ genau dann gilt, wenn N in $\mathfrak{A}$ einbettbar ist. Selbstverständlich findet man φ_N mit einer Induktion über den Aufbau von N.

$N = \mathbb{1}$: Wir setzen dann $\varphi_N := \exists x x = x$.

$N = N_1 + N_2$: Habe N_1 etwa ein letztes Element, dann ist

$$\varphi_N := \exists x(\varphi_{N_1} \restriction \{y|y \leq x\} \wedge \varphi_{N_2} \restriction \{y|y > x\})$$

zu setzen. Entsprechend ist der Fall zu behandeln, in dem N_2 ein erstes Element hat.

$N = \omega M$:
Das ist natürlich viel interessanter. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Formel $M \prec [x, y)$ (die Relativierung von $M \prec \centerdot$ auf $[x, y)$). Damit können wir definieren:

$$\varphi_N \ := \ \exists a\, a \in \mathrm{GFP}_{x,X} \exists y(M \prec [x, y) \wedge y \in X) \ .$$

Mit dem Semantikspiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ (vgl. Kap. 2.1.2) machen wir uns klar, was φ_N besagt. Die Spielregeln sind hier:

0. Der B∃weiser gibt ein $x \in \mathfrak{A}$ an.

1. Der B∃weiser gibt $y \in \mathfrak{A}$ an mit $M \prec [x, y)$. Findet er kein solches, hat er verloren.

2. Es wird $x := y$ gesetzt und das Spiel bei 1. fortgesetzt.

Im Fall $\mathfrak{A} \models \varphi_N$ kann der B∃weiser einen unendlich langen Spielverlauf erfolgreich durchstehen (Satz 14). Er konstruiert dabei eine Folge $x_0 < x_1 < \ldots$ mit $M \prec [x_i, x_{i+1})$. Existiert umgekehrt eine solche Folge (ist also $\omega \cdot M \prec \mathfrak{A}$), dann kann er das Spiel beliebig lang spielen. Also besagt φ_N gerade das, was es soll.

Der Fall $N = \omega^* \cdot M$ ist analog zu behandeln.

$N = \omega N_1 + \omega^* N_2$: Hier ist die Lösung nicht so naheliegend. Wir bilden die Mengen

$$\begin{array}{rcl} L & := & \{x | \neg\varphi_{\omega N_1} \restriction \{y | y < x\},\ \text{also}\ \omega N_1 \not\prec {}^{<}x\} \quad \text{und} \\ R & := & \{x | \neg\varphi_{\omega^* N_2} \restriction \{y | x < y\}\}\ . \end{array}$$

Diese Mengen sind nach Induktionsvoraussetzung und den gerade behandelten Fällen MFP-definierbar. Wenn man beachtet, daß L ein Anfangsstück und R ein Endstück der Ordnung bildet, dann ist es eine einfache Übung, zu zeigen, daß folgendes gilt:

$$N \prec \mathfrak{A} \Leftrightarrow L \cup R \neq \mathfrak{A} \quad \text{oder} \quad (L \cap R = \emptyset \wedge \omega N_1 \prec L \wedge \omega^* N_2 \prec R)\ .$$

Das ist in MFP formalisierbar. □

Was damit erreicht ist

Wir suchen jetzt nach einer möglichst großen Menge Φ von MSO-Sätzen, die ein MFP-Äquivalent haben. Das ist nach so viel Anstrengung nicht mehr schwer. Es sei noch einmal erinnert an die

Bezeichnung: Sei $\mathfrak{A}$ eine zerstreute Ordnung und $s = s(n)$ so groß, daß $\mathcal{N}_s$ ein vollständiges Repräsentantensystem der $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-Klassen von Ordnungen im Sinne von Satz 64 umfaßt. Dann sei

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}) := \{N \in \mathcal{N}_s \mid N \prec \mathfrak{A}\}\ ,$$

und für eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}_s$ sei $(\mathcal{E}_n(\centerdot) = \mathcal{T})$ der MFP-Satz, der genau in den Ordnungen $\mathfrak{B}$ gilt mit $\mathcal{E}_n(\mathfrak{B}) = \mathcal{T}$.

Man kann etwa definieren $(\mathcal{E}_n(\centerdot) = \mathcal{T}) := \bigwedge_{N \in \mathcal{T}} \varphi_N \wedge \bigwedge_{N \notin \mathcal{T}} \neg\varphi_N$. Damit haben wir als leichte Folgerung:

Korollar 66. *Sei ψ ein MSO-Satz. Dann gibt es zu dem Satz $\varphi := \exists X\psi \restriction X$ einen äquivalenten MFP-Satz, wobei $\psi \restriction X$ die Relativierung von ψ auf X bezeichne. Und zwar gilt, wenn n der Quantorenrang von ψ ist,*

$$\varphi \leftrightarrow \bigvee_{\mathfrak{A} \models \varphi} „\mathcal{E}_n(\centerdot) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{A})".$$

Beweis: Die Richtung „$\rightarrow$" ist klar. Sei für die Richtung „$\leftarrow$"

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi = \exists X\psi \restriction X$,

(2) $\mathfrak{B} \models „\mathcal{E}_n(\centerdot) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{A})"$ also $\mathcal{E}_n(\mathfrak{B}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{A})$.

Zu zeigen ist: $\mathfrak{B} \models \varphi$. (1) liefert uns eine Teilmenge $U \subset A$, die Modell von ψ ist. Mit Satz 64 erhalten wir eine Ordnung $N \in \mathcal{N}_{s(n)}$, die in U einbettbar ist, also auch in $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A})$ liegt, und die zu U $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalent und damit Modell von ψ ist. (2) erlaubt, N auch in $\mathfrak{B}$ einzubetten. Damit gilt also $\mathfrak{B} \models \exists X\psi \restriction X$. □

Bis hier haben wir also gezeigt, daß die Sätze in

$$\Phi := \{\exists X\psi \restriction X \mid \psi \in \mathrm{MSO}\}$$

ein MFP-Äquivalent haben. Bemerkenswert ist, daß der MSO-Satz „es gibt eine dichte Teilmenge" (vgl. Seite 69) in Φ liegt. Wie wir wissen, gibt es aber keinen in allen Ordnungen dazu äquivalenten MFP-Satz! Korollar 66 gilt also wirklich nur innerhalb der zerstreuten Ordnungen.

Φ können wir nun noch vergrößern, indem wir in Sätzen aus Φ freie erste-Stufe-Variablen zulassen, alle FO-Formeln hinzunehmen und dann die so erhaltene Formelmenge gegen Boolesche Kombinationen und erste-Stufe Quantoren abschließen. Sei Φ' die so erhaltene Satzmenge, dann gilt:

Satz 67. *Zu jedem Satz in Φ' gibt es einen äquivalenten in MFP.*

Beweis: Da alle erste-Stufe Operationen auch in MFP möglich sind, ist klar, daß es genügt, wenn wir zu Formeln der Gestalt $\varphi(\bar{x}) := \exists X\psi(\bar{x}) \restriction X$ mit freien Variablen $\bar{x}$ äquivalente MFP-Formeln angeben können. Dazu erweitern wir die Definition von $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A})$: Seien $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{A}$ und sei π die Permutation, die die a_i in aufsteigende Reihenfolge bringt, d.h. es gelte $a_{\pi(1)} < \ldots < a_{\pi(l)}$. Wir setzten

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a}) \ := \ (\mathcal{E}_n({}^{<}a_{\pi(1)}), \mathcal{E}_n((a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)})), \ldots, \mathcal{E}_n((a_{\pi(l-1)}, a_{\pi(l)})), \mathcal{E}_n({}^{>}a_{\pi(l)}), \pi) \ ,$$

was bedeutet, daß, wenn $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{B}, \bar{b})$ gilt, die a_i genauso geordnet sind wie die b_i, und in die entsprechenden durch $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$ gegebenen offenen Intervalle jeweils genau die gleichen Ordnungen aus $\mathcal{N}_{s(n)}$ einbettbar sind. Einfach gewinnen wir MFP-Formeln „$\mathcal{E}_n(\centerdot) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a})$" mit $|\bar{a}|$ vielen freien Variablen und der suggerierten Bedeutung. Ist jetzt $\psi(\bar{x})$ eine MSO-Formel vom Quantorenrang n, dann gilt für $\varphi(\bar{x}) := \exists X \psi(\bar{x}) \restriction X$:

$$\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{(\mathfrak{A},\bar{a}) \models \varphi(\bar{x})} „\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \mathcal{E}_n(\centerdot)" \ .$$

Wieder ist die Richtung „$\rightarrow$" trivial. Die andere ergibt sich ähnlich wie oben: Sei

(1) $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_l) \models \varphi$,

(2) $\mathcal{E}_n(\mathfrak{B}, \bar{b}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a})$.

Zu zeigen ist wieder $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$. OBdA. nehmen wir $a_1 < \ldots < a_l$ also $\pi = \mathrm{id}$ an. Es ist dann, wegen (2), auch $b_1 < \ldots < b_l$. (1) liefert uns eine Teilmenge $U \subset A$ mit $U \models \psi(\bar{a})$. [3] Wir zerlegen U in die Teile $U \cap {}^{<}a_1$, $U \cap (a_1, a_2)$, $\ldots$, $U \cap {}^{>}a_l$ und finden zu jedem dieser Teile eine $\equiv_{\mathrm{MSO}_n}$-äquivalente Teilmenge $V_{\ldots}$ des entsprechenden Intervalls in B. (Also z.B. $V_{<b_1} \subset {}^{<}b_1 \subset B$ mit $V_{<b_1} \equiv_{\mathrm{MSO}_n} U \cap {}^{<}a_1$.)

Für $V := V_{<b_1} \cup \ldots \cup V_{(b_{l-1}, b_l)} \cup V_{<b_l} \cup \{b_i | a_i \in U\}$ gilt jetzt „$(U, \bar{a}) \equiv_{\mathrm{MSO}_n} (V, \bar{b})$", wie man sich am einfachsten mit einem Ehrenfeucht-Spiel überlegt, und so $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$. $\square$

Bemerkung. Nicht jeder MFP-Satz ist zu einem in Φ' äquivalent.

Beweis: Der Satz „Die Ordnung hat geradzahlig viele Elemente“ hat kein Äquivalent in Φ'. Denn es ist leicht möglich zu jedem l und n Ordnungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ anzugeben, von denen genau eine geradzahlig ist, und für die gilt: Der B∃weiser gewinnt das l-Züge-FO-Spiel $\mathrm{S}_{\mathrm{FO}_l}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ so, daß nur partielle Isomorphismen $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ erspielt werden, die $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{B}, \bar{b})$ erfüllen. $\square$

4.8.9 MSO $\not\leq$ MFP in zerstreuten Ordnungen

Wie wir gesehen haben, können wir in MFP ausdrücken: Es gibt eine Teilmenge mit gewissen Eigenschaften, die sich auf diese Teilmenge beziehen, in der Regel nicht aber auf die Art, wie die Teilmenge im Rest der Ordnung darinnen liegt. Genau dieser Mangel führt auch tatsächlich zu einem MSO-Satz ohne MFP-Äquivalent.

[3] Zwar muß nicht $\{\bar{a}\} \subset U$ sein, es sollte aber dennoch klar sein, was hier $U \models \psi(\bar{a})$ bedeutet.

Wie man die Grenze zwischen MSO und MFP aufspürt

Erinnern wir uns an das Projekt, das mit der Suche nach einfachen Repräsentanten begann, die mit dem Aufspüren von $\mathcal{N}$ erfolgreich war, und das damit enden sollte, daß man zu jedem $N \in \mathcal{N}$ einen Satz findet, der die MSO_n-Klasse von N beschreibt. Das würde man mit einer Induktion über den Aufbau der Ordnungen in $\mathcal{N}$ versuchen, etwa mit dem Ansatz: Wenn es einen Satz $(\centerdot \equiv_{\mathrm{MFP}_n} N)$ und einen Satz $(\centerdot \equiv_{\mathrm{MFP}_n} N')$ gibt, dann auch einen, der genau in den Ordnungen gilt, die in zwei Teile zerfallen, wovon der erste zu N und der zweite zu N' äquivalent ist. Das ist problemlos möglich, da ja N ein letztes oder N' ein erstes Element hat. Als nächstes würde man den Schritt von N zu ωN versuchen, d.h. von dem Satz $(\centerdot \equiv_{\mathrm{MSO}_n} N)$ zu einem Satz $(\centerdot \in \omega(N/_{\equiv_{\mathrm{MSO}_n}}))$ zu kommen. Auch dieser Schritt ist, wie wir sehen werden, möglich. Als letztes bliebe dann noch der Schritt von N und N' zu $\omega N + \omega^* N'$. Und bei genau diesem Schritt scheitert das Projekt.

MFP kann ausdrücken: Es gibt *eine* unbeschränkte Folge, und die durch die Folgenglieder gegebenen Intervalle haben eine bestimmte Eigenschaft. Die intuitive Vorstellung, die das Spiel $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ von der monadischen Fixpunktlogik vermittelt, macht dies plausibel: Man springt in einem Fixpunktprozeß von Punkt zu Punkt so durch die ganze Ordnung, daß die Sprungintervalle die gegebene Eigenschaft haben. Dabei muß man sich immer nur den jeweils letzten Punkt merken. Diese Vorstellung ist richtig. Bei dem Versuch aber, auszudrücken: Es gibt *zwei* unendliche Folgen, die von außen beliebig nah aufeinanderzulaufen,[4] bei diesem Versuch übernimmt sich MFP. Die *monadische* Fixpunktlogik kann eben nur Aussagen über *eine* Folge machen, nicht gleichzeitig über zwei und deren relative Lage zueinander. Auch hier vermittelt das Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ eine durchaus gute Vorstellung davon, warum das in diesem Fall nicht geht. Wir werden uns damit noch beschäftigen.

Doch jetzt zu dem, was noch geht:

Wie man $\centerdot \in \omega\mathfrak{K}$ ausdrückt,...

... wenn man $\centerdot \in \mathfrak{K}$ schon kennt. Wir zeigen:

Bemerkung. Ist $\varphi(x, y)$ eine MFP-Formel (etwa die Formel $[x, y) \in \mathfrak{K}$), dann gibt es den Satz „$\centerdot \in \omega\varphi$", d.h. einen Satz ψ, der genau in den Ordnungen $\mathfrak{A}$ gilt, in denen es eine Folge $a_0 < a_1 < \ldots \in \mathfrak{A}$ gibt, mit $\mathfrak{A} := \sum_{i\in\omega}[a_i, a_{i+1})$ und $\mathfrak{A} \models \varphi(a_i, a_{i+1})$ für alle i.

[4] Siehe (23) auf Seite 90

Beweis: φ induziert auf Ordnungen $\mathfrak{A}$ eine Halbordnung $<_\varphi$, und zwar sei $<_\varphi$ die transitive Hülle von $\{(a,b) \mid \varphi(a,b) \wedge a < b\}$. Somit stehe $x <_\varphi y$ für die Formel

$$y \in \mathrm{LFP}_{z,Z}((\varphi(x,z) \wedge x < z) \vee \exists u \in Z(u < z \wedge \varphi(u,z))) \ .$$

Damit bilden wir den Satz

$$\exists \min(\forall y \min \leq y \wedge \min \in \mathrm{GFP}_{x,X} \forall u \exists y(x <_\varphi y \wedge u \leq y \wedge y \in X) \ .$$

Als in der logischen Spielhölle Erfahrene bereitet es uns nicht viel Mühe, diesen Satz in ein Spiel zu übersetzen, um seine Bedeutung zu verstehen:

0. Es wird $x :=$ das erste Element der Ordnung gesetzt.

1. Der $\forall$iderleger wählt u, der B$\exists$weiser muß dann ein größeres y angeben mit $x <_\varphi y$.

2. Es wird $x := y$ gesetzt und das Spiel bei 1. fortgesetzt.

Kann der B$\exists$weiser dieses Spiel unendlich lang spielen, wenn der $\forall$iderleger in 1. eine kofinale Folge von u's ausspielt, dann „konstruiert" er in diesem Spielverlauf gerade eine kofinale $<_\varphi$-Kette. Existiert umgekehrt eine solche, dann ist klar, daß er dieses Spiel unendlich lange erfolgreich übersteht. □

Wem das zu verspielt ist, der muß sich überlegen, daß für den in Frage stehenden Fixpunkt X_∞ gilt:

$x \in \mathfrak{X}_\infty \quad \Leftrightarrow \quad$ x liegt auf einer zu ω isomorphen $<_\varphi$-Kette, die unbeschränkt in der Ordnung liegt.

Man braucht offenbar, daß die Ordnung Kofinalität ω hat. Das mit einem Fixpunktsatz auszudrücken ist nicht möglich ($\omega^\omega \equiv_{\mathrm{MFP}} \omega_1$).

Kompaktheit ist zuviel für MFP

Wie schon erwähnt, kommt man in große Schwierigkeiten, wenn man die Bemerkung aus dem letzten Abschnitt entsprechend für „$\centerdot \in \omega\varphi + \omega^*\varphi'$" zeigen will, selbst wenn φ und φ' garnichts besagen. Das motiviert uns, die Eigenschaft $\mathcal{E}$ zu definieren:

$$\mathfrak{A} \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}$$
$$:\Longleftrightarrow$$
$\mathfrak{A}$ ist zerlegbar in ein Anfangsstück P und ein Endstück $Q := A \setminus P$, so daß weder P ein letztes noch Q ein erstes Element hat.

(23) $$\Longleftrightarrow$$

$\omega + \omega^*$ ist so in $\mathfrak{A}$ einbettbar, daß kein Element mehr zwischen ω und ω^* liegt.
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{1} + \mathfrak{A} + \mathbb{1} \text{ ist nicht kompakt.}$$

Zur Erinnerung: Eine Ordnung (bzw. deren Topologie) ist genau dann kompakt, wenn jede aufsteigende Folge ein Supremum und jede absteigende ein Infimum hat. Die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besagt also „die Kompaktheit ist in der Mitte verletzt". (Ob sie am Rand verletzt ist, ob es also ein erstes und letztes Element gibt, das sieht bereits FO).

Leicht kann man $\mathcal{E}$ in MSO ausdrücken:

$$\begin{aligned}\exists X(X \neq \emptyset \wedge \exists x \notin X \wedge \forall x((x \in X \wedge \forall y(y < x \rightarrow y \in X) \wedge \exists z \in X x < z)\\ \vee (x \notin X \wedge \exists y(y \notin X \wedge y < x)))) \ .\end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß $\mathcal{E}$ nicht in MFP definierbar ist. Dazu werden wir den üblichen Weg einschlagen, indem wir zwei Strukturen angeben, von denen genau eine $\mathcal{E}$ hat und zeigen, wie der $\exists$rhalter ein passendes Spiel gewinnt.

Die Strukturen, die es zeigen sollen

...ergeben sich völlig kanonisch auf der Suche nach Ordnungen, die schön homogen sind (das war ja schon an den $\mathbb{Z}^n$ so toll), und auf die $\mathcal{E}$ gerade so eben nicht zutrifft (wie z.B. bei Wohlordnungen). Was herauskommt ist dann auch eine Mischung aus Wohlordnung und $\mathbb{Z}^n$:

Definition 68. Induktiv definieren wir $\mathcal{Z}_n$ (eine Veranschaulichung ist auf Seite 96 zu finden):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1 &:= \mathbb{Z}\\ \mathcal{Z}_{n+1} &:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_n + \mathbb{1}) \ .\end{aligned}$$

Mit einer leichten Induktion über n überlegt man sich, daß $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{Z}_n$ nicht zutrifft, sehr wohl aber auf $\mathcal{Z}_n + \mathcal{Z}_n$. Wir werden zeigen:

Satz. *Für jedes $n \in \omega$ existiert $q \in \omega$ mit $\mathcal{Z}_q \equiv_{\mathrm{MFP}_n} \mathcal{Z}_q + \mathcal{Z}_q$.*

Erhebliche Probleme bereitet es, diesen Satz mit Hilfe des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}}$ zu beweisen. Es zeigt sich, daß dieses Spiel einfach nicht zu der vorliegenden Fragestellung passen will, man scheitert an für das zu klärende Problem unwesentlichen Schwierigkeiten, in denen der hier wesentliche Unterschied der Strukturen völlig untergeht. Das sei hier kurz erläutert. Aus kombinatorischen Gründen wird sich ergeben, daß $\mathcal{Z}_q \equiv_{\mathrm{MFP}_n} \mathcal{Z}_{q+1}$ ist für ein hinreichend großes q. Es scheint aber enorm schwer zu sein, daraus eine Gewinnstrategie für den $\exists$rhalter im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_n}(\mathcal{Z}_q, \mathcal{Z}_{q+1})$ zu basteln. Doch genau diese Schwierigkeit muß man auch für die vorliegende Frage ersteinmal in den Griff bekommen – eine Schwierigkeit, die den Blick auf das eigentliche Problem aber verstellt. Für dieses erscheint das von der infinitären Logik hergeleitete Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ viel angemessener: Hier setzen und versetzen die Spieler Steine auf den Strukturen. Sie erspielen so Folgen, und um Folgen geht es hier ja auch.[5] Dieses Spiel ist aber zu stark, weshalb der $\forall$erderber es mit $\mathcal{Z}_q$ und $2\mathcal{Z}_q$ auch tatsächlich gewinnt. Er gewinnt dies aber nicht etwa, indem er den hier wesentlichen Unterschied der Strukturen aufzeigt (nämlich $\mathcal{E}$), sondern indem er ausnutzt, daß der $\exists$rhalter gezwungen ist, zwei Punkte unterschiedlichen „Häufungsgrades“[6] einander zuzuordnen. Er gewinnt dieses Spiel also so ähnlich, wie er das Spiel zwischen zwei verschiedenen Ordinalzahlen gewinnt, so äquivalent sie in irgendeiner Logik auch immer sein mögen (vgl. Beispiel auf S. 25). Hier muß also ein neues Spiel her, das die Vorteile von $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$, nämlich so einfach und der vorliegenden Frage angepaßt zu sein, und von $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$, nämlich ‚notwendig' zu sein, vereint. Deswegen machen wir noch einmal einen Exkurs in die Spielhölle der Logiker.

4.8.10 Das Spiel gut-bös-$S_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

…ergibt sich aus dem bereits in Kapitel 2.1.3 vorgestellten Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn man dem $\exists$rhalter das Leben mit einer Zusatzregel einfacher macht, die hier motiviert und eingeführt werden soll. In einer Spielsituation des Spiels $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sind bestimmte Elemente in beiden Strukturen ausgezeichnet (markiert, mit einem Stein belegt, einer Variablen zugeordnet und was für Sprechweisen noch so üblich sind). Damit sind Intervalle zwischen, vor und hinter ihnen gegeben. Die Zuordnung der fixierten Elemente induziert eine Zuordnung dieser Intervalle, und eine Spielstrategie des $\forall$erderbers wird sicher so aussehen, daß er das einander zugeordnete Intervallpaar sucht, das hinreichend verschieden ist und dorthinein seinen nächsten Stein (ver)setzt. Wie wir im Beispiel mit den Ordinalzahlen am Ende von Abschnitt 2.1.3 gesehen haben, können Intervalle durchaus $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-äquivalent und dennoch in diesem Sinne für den $\forall$erderber „hinreichend verschieden“

[5] Die intuitive Sprechweise ‚Steine (ver)setzen' ist soviel schöner als ‚Variablen (um-) defineren', daß sie entgegen der Forderung nach Einheitlichkeit weiter verwendet wird.

[6] Der Begriff ist Gegenstand der Definition 72

sein. Diesen unfairen Vorteil gegenüber dem ∃rhalter, der ja nur die $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-Äquivalenz der Strukturen zeigen will und nicht mehr, wollen wir ihm nehmen, indem wir ihm verbieten, in solche (für den ∃rhalter „gute") Intervalle Steine zu setzen, die sicher $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-äquivalent sind. Formal realisieren wir diese Idee folgendermaßen:

Definition 69 (Regelerweiterung).
Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Ordnungen und sei *gut* $\subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{Pot}(\mathfrak{B})$ eine Relation zwischen Subordnungen von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$. Gelte für jedes Paar $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, das in dieser Relation *gut* steht, $\mathfrak{X} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathfrak{Y}$, dann soll mit *gut*-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ das Spiel bezeichnet werden, das aus $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ [7] mit folgender Zusatzregel sich ergibt:

- Seien in einer Spielsituation $x_1, \ldots, x_j$ belegt, der Einfachheit halber sei etwa $x_1 < \ldots < x_j$, (d.h. in beiden Strukturen seien die Belegungen in dieser Reihenfolge), dann werden dadurch in beiden Strukturen Intervalle gegeben:

$$I_i^{\mathfrak{X}} := \left\{ \begin{array}{ll} (-\infty, x_1^{\mathfrak{X}}] & \text{für } i = 0 \\ [x_i^{\mathfrak{X}}, x_{i+1}^{\mathfrak{X}}] & \text{für } 1 \leq i < j \\ [x_i^{\mathfrak{X}}, \infty) & \text{für } i = j \end{array} \right\} \text{ für } \mathfrak{X} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ .$$

  Ist $(I_i^{\mathfrak{A}}, I_i^{\mathfrak{B}})$ ein *gut*es Paar, d.h. ist $(I_i^{\mathfrak{A}}, I_i^{\mathfrak{B}}) \in gut$, dann darf der ∀erderber den nächsten Stein nicht in diese Intervalle legen.

Es gilt der

Satz 70. *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Ordnungen, $k \in \omega$ und gut $\subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{Pot}(\mathfrak{B}) \cap \equiv_{\mathrm{MFP}_k}$, d.h. ein gutes Paar von Subordnungen sei $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-äquivalent. Dann gilt: Gewinnt der ∃rhalter das Spiel gut-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, dann ist $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathfrak{B}$.*

Für *gut* $= \emptyset$ ergibt sich Satz 15. Beim Beweis läßt es sich leider nicht umgehen, mit in Subformeln von MFP-Sätzen vorkommenden freien Relationsvariablen fertig werden zu müssen. Wir wollen nämlich zeigen, daß der ∃rhalter eine Gewinnstrategie im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ für MFP_k, hat, wenn er das *gut*-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$-Spiel gewinnt. In $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ werden in Fixpunktzügen Teilmengen U, V fixiert. U wird vom ∀erderber vorgegeben, V ist die Antwort des ∃rhalters, das bedeutet, wenn $x^{\mathfrak{X}}$ in U liegt, dann muß das zugeordnete $x^{\mathfrak{Y}}$ in V liegen ($\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$). Das motiviert folgende allgemeinere Fassung des *gut*-bös-Spiels, die man nach dem Beweis von Satz 70 getrost wieder vergessen kann.

Regelverallgemeinerung: Seien Ordnungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben und darin Teilmengen $U_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, U_{s_1}^{\mathfrak{A}}, V_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, V_{s_2}^{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ und $V_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, V_{s_1}^{\mathfrak{B}}, U_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, U_{s_2}^{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$. Gebe

[7] s. Kap. 2.1.3

es weiter eine Relation $gut \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{Pot}(\mathfrak{B})$, für die gilt: Ist $(I, J) \in gut$, dann gewinnt der $\exists$rhalter das Spiel für $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(I, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; J, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})\ .$$ [8]

Das Spiel

$$gut\text{-bös-}\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$$

ist das Spiel, das sich aus gut-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ergibt, wenn man folgende Regel hinzufügt:

- Der $\exists$rhalter muß stets so spielen, daß in jeder sich ergebenden Spielsituation, in der $x_i^{\mathfrak{X}} \in U_j^{\mathfrak{X}}$ gilt, auch $x_i^{\mathfrak{Y}} \in V_j^{\mathfrak{Y}}$ für $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ und alle vorkommenden i, j erfüllt ist.

Die Regel, die dem $\forall$erderber verbietet, in *gut*e Intervallpaare zu spielen, bleibt selbstverständlich bestehen. Aus dem folgenden Lemma folgt der Satz 70.

Lemma 71. *Sei eine Situation wie in der Regelverallgemeinerung gegeben. Gewinnt der $\exists$rhalter das Spiel*

$$gut\text{-}b\ddot{o}s\text{-}\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})\ ,$$

dann gewinnt er auch das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(\mathfrak{A}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$.

Beweis: Der Einfachheit halber verwenden wir die Notationen

$$\begin{array}{lll} \mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k} & \text{für} & \mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(\mathfrak{A}, \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; \mathfrak{B}, \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}}) \quad \text{und} \\ \mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}} & \text{für} & gut\text{-bös-}\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \ldots; \mathfrak{B}, \ldots). \end{array}$$

Außerdem sprechen wir bei gegebener Spielsituation, d.h. Variablenbelegung, auch oft von einem *gut*en Intervall $I = [x_i, x_j]$ und meinen damit das in dieser Spielsituation gegebene *gut*e Intervall*paar* $([x_i^{\mathfrak{A}}, x_j^{\mathfrak{A}}], [x_i^{\mathfrak{B}}, x_j^{\mathfrak{B}}])$ oder kürzer $(I^{\mathfrak{A}}, I^{\mathfrak{B}})$.

Wir führen eine Induktion über k. Ist $k = 0$, dann ist garnichts zu zeigen. Sei also $k > 0$. Ist das Paar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *gut*, dann sind wir auch fertig.

Wähle der $\forall$erderber im fraglichen Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ als ersten Zug einen erste-Stufe-Zug, wähle er etwa $a \in \mathfrak{A}$. Wir lassen dann den $\forall$erderber $x_1^{\mathfrak{A}} := a$ setzen im Spiel $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$. Die Antwort $x_1^{\mathfrak{B}} =: b$, die der $\exists$rhalter seiner Gewinnstrategie folgend

[8] Dieses Spiel ist das in Kap. 2.1.1 Seite 18 beschriebene Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für MFP, in dem bereits die Mengen $\bar{U}, \bar{V}$ fixiert wurden, und zwar in der oben angedeuteten Weise, so daß also der $\exists$rhalter Sorge tragen muß, daß, wenn der $\forall$erderber ein Element in einem U_i wählt, die Antwort in V_i liegt.

gibt, ist jetzt auch die richtige Antwort im MFP_k-Spiel. Die Zugehörigkeiten zu den fixierten Teilmengen stimmen. Ist eines der entstandenen Intervallpaare, etwa $((-\infty,a],(-\infty,b])$, *gut*, dann kann dort der $\exists$rhalter definitionsgemäß das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}({}^{\leq}a,\bar{U},\ldots)$ gewinnen, und so natürlich auch das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{k-1}}({}^{\leq}a,\bar{U},\ldots)$. Ist dagegen z.B. $[a,\infty)$, $[b,\infty)$ böse (d.h. nicht *gut*), dann darf der $\forall$erderber dort weiterspielen. Wenn er den Stein x_1 nicht mehr anrührt und ständig rechts von ihm weiterspielt, dann muß der $\exists$rhalter gewinnen, wenn er seiner Gewinnstrategie für $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ folgt. Somit zeigt sich, daß er auch für das Spiel

$$\textit{gut}\text{-bös-}\mathsf{S}_{L^{k-1}_{\infty\omega}}({}^{\geq}a,\bar{U}^{\mathfrak{A}},\bar{V}^{\mathfrak{A}};{}^{\geq}b,\bar{V}^{\mathfrak{B}},\bar{U}^{\mathfrak{B}})$$

eine Gewinnstrategie hat. Die Induktionsvoraussetzung liefert ihm dann eine Gewinnstrategie für $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{k-1}}({}^{\geq}a,\ldots,{}^{\geq}b,\ldots)$. Damit kann er also das begonnene Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ in jedem Fall erfolgreich fortsetzen.

Sei nun der erste Zug von $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ ein Fixpunktzug. Wähle der $\forall$erderber etwa die Teilmenge $U\subset\mathfrak{A}$. Wir betrachten jetzt sämtliche Spielverläufe des Spiels $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$, in denen der $\exists$rhalter seiner Gewinnstrategie folgt. Hierbei treten die verschiedensten *gut*en Intervalle auf. All diese *gut*en Intervalle, die irgendwann irgendwo zwischen fixierten Elementen auftreten, berücksichtigt der $\exists$rhalter bei der Wahl von V: Sei etwa $[x,y]$ ein (nach z.B. 1283 Zügen) auftretendes *gut*es Intervall. Der $\exists$rhalter gewinnt demnach das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}([x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}],\ldots;[x^{\mathfrak{B}},y^{\mathfrak{B}}],\ldots)$. In diesem Spiel lassen wir den $\forall$erderber einen Fixpunktzug spielen, indem wir ihn $U\cap[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]$ vorgeben lassen. Die Antwort des $\exists$rhalters gemäß Gewinnstrategie sei $V_{[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]}\subset[x^{\mathfrak{B}},y^{\mathfrak{B}}]$. Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} V := \bigcup\{V_{[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]} \mid\ & [x,y] \text{ ist in irgendeinem vom } \exists\text{rhalter gemäß Gewinnstra-}\\ & \text{tegie gespielten Spielverlauf von } \mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}} \text{ ein } \textit{gut}\text{es Intervall.}\}\\ \cup\{b\in\mathfrak{B} \mid\ & \text{es gibt } a\in U, \text{ so daß die Zuordnung } a\mapsto b \text{ in irgendeinem}\\ & \text{vom } \exists\text{rhalter gemäß Gewinnstrategie gespielten Spielverlauf}\\ & \text{von } \mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}} \text{ erspielt wird. }\} \end{aligned}$$

Dieses V ist die richtige Antwort auf das vorgegebene U: Jetzt wählt der $\forall$erderber $b\in V$. Ist $b=x_i^{\mathfrak{B}}$ für ein in irgendeinem Spielverlauf gesetztes x_i, dann ist das zugeordnete $a=x_i^{\mathfrak{A}}\in U$ die richtige Antwort. Es entsteht dann eine Situation, wie sie weiter unten im folgenden Fall auch entsteht.

Nehmen wir daher $b\in V_{[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]}$ an. Das Intervallpaar $([x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}],[x^{\mathfrak{B}},y^{\mathfrak{B}}])$ sei in der Spielsituation s von $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ ein *gut*es. Nach Wahl von $V_{[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]}$ findet der $\exists$rhalter zu b gemäß seiner Gewinnstrategie im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}([x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}],\ldots)$ ein $a\in U\cap[x^{\mathfrak{A}},y^{\mathfrak{A}}]$, das auch eine passende Antwort im betrachteten Fixpunktzug von $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ ist. Daß das Paar (a,b) die richtigen Zugehörigkeiten zu den Mengen $\bar{U},\bar{V}$ hat, ist klar. Jetzt müssen wir uns noch überlegen, daß der $\exists$rhalter das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$

auf jedem der drei Intervallpaare, die durch $(-\infty, x], [x, y], [y, \infty)$ gegeben sind, weiterspielen kann.

Sei z.B. $(-\infty, x]$ ein *gut*es Intervall (im Sinne von $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$), d.h. der $\exists$rhalter gewinnt $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}((-\infty, x^{\mathfrak{A}}], \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; (-\infty, x^{\mathfrak{B}}], \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$. Wenn der $\forall$erderber in der Spielsituation s den Stein x_1 auf x legt und alle anderen entfernt, tritt $(-\infty, x]$ als *gut*es Intervall tatsächlich in diesem Spielverlauf auf, wurde also bei der Wahl von V berücksichtigt. Also hat nach Wahl von $V_{(-\infty, x^{\mathfrak{A}}]} \subset V \cap (-\infty, x^{\mathfrak{B}}]$ der $\exists$rhalter eine Gewinnstrategie im Spiel

$$\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{k-1}}((-\infty, x^{\mathfrak{A}}], \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; (-\infty, x^{\mathfrak{B}}], \bar{V}^{\mathfrak{B}}V, \bar{U}^{\mathfrak{B}}) \ .$$

(Man beachte, daß die V-Mengen jederzeit vergrößert werden dürfen, Lemma 12). Um dieses Intervall brauchen wir uns in dem Fall also nicht mehr zu kümmern. Die gleiche Argumentation gilt natürlich auch für das *gut*e Intervall $[x, y]$.

Nehmen wir jetzt an, $[y, \infty)$ sei böse. Legt der $\forall$erderber in der Spielsituation s den Stein x_1 auf y und entfernt alle anderen, dann darf er anschließend das Spiel in dieses böse Intervall fortsetzen. Wenn er nun den Stein x_1 nie wieder anrührt und fortwährend rechts davon spielt und der $\exists$rhalter seiner Gewinnstrategie für $\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}$ folgt, dann zeigt er damit, daß er auch das Spiel

$$\mathsf{S}_{\mathrm{alt}} := \textit{gut}\text{-bös-}\mathsf{S}_{L^{k-1}_{\infty\omega}}([y^{\mathfrak{A}}, \infty), \bar{U}^{\mathfrak{A}}, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; [y^{\mathfrak{B}}, \infty), \bar{V}^{\mathfrak{B}}, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$$

gewinnt. (Die Variablen sind hier $x_2, \ldots, x_k$). Aber nicht nur das; dieses Spiel folgt sogar den Regeln des Spiels

$$\mathsf{S}_{\mathrm{neu}} := \textit{gut}_{\mathrm{neu}}\text{-bös-}\mathsf{S}_{L^{k-1}_{\infty\omega}}([y^{\mathfrak{A}}, \infty), \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; [y^{\mathfrak{B}}, \infty), \bar{V}^{\mathfrak{B}}V, \bar{U}^{\mathfrak{B}}) \ ,$$ [9]

denn: Ist I in irgendeiner Spielsituation ein *gut*es Intervall im Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{alt}}$, gewinnt der $\exists$rhalter demnach $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}(I^{\mathfrak{A}}, \bar{U}, \bar{V}; I^{\mathfrak{B}}, \bar{V}, \bar{U})$. Das *gut*e Intervall I wurde bei der Wahl von V berücksichtigt. Somit folgern wir aus $V_{I^{\mathfrak{A}}} \subset V \cap I^{\mathfrak{B}}$, daß der $\exists$rhalter auch $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{k-1}}(I^{\mathfrak{A}}, \bar{U}U, \bar{V}; I^{\mathfrak{B}}, \bar{V}V, \bar{U})$ gewinnt. $\textit{gut}_{\mathrm{neu}}$ ist also eine Relation, wie wir sie in der Induktionsvoraussetzung brauchen. Ist weiter irgendwann in einer Spielsituation von $\mathsf{S}_{\mathrm{alt}}$ $x_i^{\mathfrak{A}} \in U$ für $2 \leq i \leq k$, so folgt aus der Definition von V sofort $x_i^{\mathfrak{B}} \in V$. Also gewinnt der $\exists$rhalter tatsächlich $\mathsf{S}_{\mathrm{neu}}$, und wir können die Induktionsvoraussetzung darauf anwenden: Wir erhalten, daß der $\exists$rhalter das begonnene Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_k}$ auch auf dem Intervall $[y, \infty)$ $k-1$ Züge lang erfolgreich fortsetzen kann.

Damit ist Lemma 71 bewiesen. $\square$

Nach diesem Einschub kehren wir

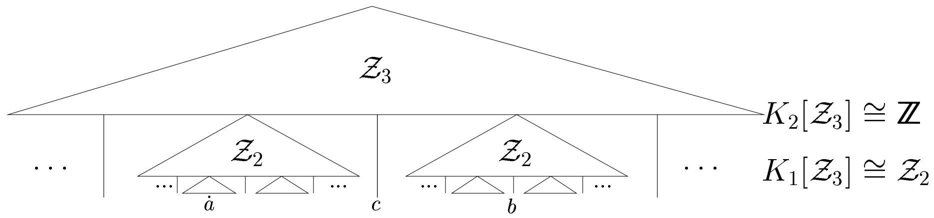
[9] Die Relation *gut* ist ein bißchen abzuändern: (I, J) ist $\textit{gut}_{\mathrm{neu}}$ wenn (I, J) *gut* ist und der $\exists$rhalter das Spiel $\mathsf{S}_{\mathrm{MFP}_{k-1}}(I, \bar{U}^{\mathfrak{A}}U, \bar{V}^{\mathfrak{A}}; J, \bar{V}^{\mathfrak{B}}V, \bar{U}^{\mathfrak{B}})$ gewinnt.

4.8.11 Zurück zu MSO $\not\preceq$ MFP

Erinnern wir uns jetzt an die Strukturen $\mathcal{Z}_n$, mit denen uns das vorgestellte Spiel bevorsteht. Es war

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &:= \mathbb{Z} \\ \mathcal{Z}_{n+1} &:= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(\mathcal{Z}_n + \mathbb{1}) \end{aligned}$$

Dieses Bild von $\mathcal{Z}_3$ soll sie veranschaulichen:



Nachdem wir wissen, welches Spiel uns mit den vorgestellten Strukturen $\mathcal{Z}_n$ bevorsteht, liegt auf der Hand, in welcher Weise wir diese Strukturen weiter untersuchen sollten, nämlich mit dem Ziel, möglichst viele *gut*e Intervallpaare zu finden, um dem $\exists$rhalter das Leben leicht zu machen. Wir suchen also jetzt nach Bedingungen, unter denen zwei Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathcal{Z}_q$ sicher $\equiv_{\mathrm{MFP}_n}$-äquivalent sind.

Die $\mathcal{Z}_n$ sind sehr homogene Strukturen, das einzige, was die Punkte unterscheidet, ist ihre „Stifthöhe" oder der „Häufungsgrad":

Definition 72. Sei $q \in \omega$, $x \in \mathcal{Z}_q$. Wir definieren den Häufungsgrad oder auch die *Stifthöhe von* x, $sh(x)$, wie folgt:

$$\begin{aligned} sh(x) &:= \min\{h \mid K_{h+1}(x) \not\cong \mathbb{1}\} \\ &= \max\{h \mid \text{es gibt Folge } (x_i)_{i\in\omega} \to x \text{ mit } sh(x_i) = h-1\} \ . \end{aligned}$$

Die bei der Definition von $\mathcal{Z}_{n+1}$ auftretenden Punkte $\mathbb{1}$ sind genau die mit Stifthöhe n. In Zukunft werden sie auch *Stifte der Höhe* n genannt werden. Aus der Zeichnung wird die Wahl des Begriffes „Stifthöhe" verständlich. Der Punkt a hat Stifthöhe 0. Der Punkt b ist ein Stift der Höhe 1 und c einer der Höhe 2. Höhere Stifte treten in $\mathcal{Z}_3$ nicht auf. Die Zerlegung $\mathcal{Z}_{n+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(\mathcal{Z}_n + \mathbb{1})$ ist auch die Zerlegung in die n-ten Kondensate $\sum K_n(x_i)$. Es ist $K_m(x) \cong \mathcal{Z}_m$ oder $K_m(x) \cong \mathbb{1}$, je nachdem ob $sh(x) < m$ ist oder nicht.

Die gegebene Darstellung der $\mathcal{Z}_n$ ist zwar recht anschaulich, aber für die uns bevorstehenden technischen Rechnereien etwas schlecht handhabbar. Deswegen geben wir nun eine andere Definition. Wir gehen von der Frage aus: Ist a ein Stift der Höhe 0, wie sieht dann die Hälfte rechts von a, ${}^{\geq}a$, aus?

Definition 73. Induktiv definieren wir die Ordnungen $\frac{\mathcal{Z}_n}{2}$:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\mathcal{Z}_1}{2} & := & \omega \\ \text{für } n > 1: & \frac{\mathcal{Z}_n}{2} & := & \frac{\mathcal{Z}_{n-1}}{2} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{n-1}) \\ & & = & \sum_{i<n} \omega(1 + \mathcal{Z}_i) \ . \end{array}$$

Auf diese Weise kann man sich natürlich auch $\frac{\mathcal{Z}_\omega}{2}$ definiert denken. Gleich werden wir einsehen, daß gilt:

Bemerkung. Für $n \leq \omega$: $\quad \mathcal{Z}_n = (\frac{\mathcal{Z}_n}{2})^* + \frac{\mathcal{Z}_n}{2}$.

Und so ist dann auch $\mathcal{Z}_\omega$ definiert, eine Ordnung, die wir nicht eigentlich brauchen. Es ist aber bequem, sie als das „Monstermodell" zur Verfügung zu haben, in dem alles lebt, in dem alle $\mathcal{Z}_n$ als offene Intervalle (x, y) auftreten. Umgekehrt gibt es zu jedem Intervall $(x, y) \subset \mathcal{Z}_\omega$ ein q mit $(x, y) \subset \mathcal{Z}_q \subset \mathcal{Z}_\omega$. In diesem Sinne werden wir Aussagen über $\mathcal{Z}_\omega$ machen und damit $\mathcal{Z}_q$ meinen für jedes hinreichend große q.

Beweis der Bemerkung mit einer Induktion über n:

$$\begin{array}{rll} (\frac{\mathcal{Z}_n}{2})^* + \frac{\mathcal{Z}_n}{2} & = \omega^*(\mathcal{Z}_{n-1} + 1) + \frac{\mathcal{Z}_{n-1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_{n-1}}{2} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{n-1}) \ ^{10} & \\ & = \omega^*(\mathcal{Z}_{n-1} + 1) + \mathcal{Z}_{n-1} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{n-1}) & \text{(I.V.)} \\ & = \mathcal{Z}_n \ . & \end{array}$$

□

Mit diesen $\frac{\mathcal{Z}_n}{2}$ müssen wir ein wenig herumspielen.

Lemma 74. *Sei $a \in \mathcal{Z}_\omega$, $sh(a) = 0$ und $k > 0$. Dann existieren $a^{k+} := \min\{x > a | sh(x) = k\}$ und $a^{k-} := \max\{x < a | sh(x) = k\}$, und es gilt:*

$$[a, a^{k+}) \cong (a, a^{k+}) \cong \frac{\mathcal{Z}_k}{2} \text{ und } (a^{k-}, a] \cong \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* \ .$$

In der Zeichnung S. 96 ist z.B. $c = a^{2+}$.

Beweis: Wir führen eine Induktion über k. Der Fall $k = 1$ sollte klar sein. Sei also $k > 1$. Es ist $[a, a^{k+}) = [a, a^{k-1+}) + [a^{k-1+}, a^{k+})$. Um das zweite Intervall bestimmen zu können, betrachten wir $K_k(a^{k-1+}) = K_k(a) \cong \mathcal{Z}_k$. Jetzt ist offensichtlich $a^{k+} = \min\{y | y > K_k(a)\}$. Damit ist also $[a^{k-1+}, a^{k+}) \cong \omega(1+\mathcal{Z}_{k-1})$ und so mit der Induktionsvoraussetzung

$$[a, a^{k+}) \cong \frac{\mathcal{Z}_{k-1}}{2} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{k-1}) \cong \frac{\mathcal{Z}_k}{2} \ .$$

□

[10] $\frac{\mathcal{Z}_n}{2}^*$ steht natürlich für $(\frac{\mathcal{Z}_n}{2})^*$

Lemma 75. *Jedes offene Intervall* $(x,y) \subset \mathcal{Z}_\omega$ *hat die Gestalt:*

$$\frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* + s(\frac{\mathcal{Z}_m}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_m}{2}^*) + \frac{\mathcal{Z}_l}{2}$$

mit $k = sh(x)$, $l = sh(y)$ *und* $m = \max\{sh(a) | a \in (x,y)\}$, $s \in \omega$.

Beweis: Seien k, l, m wie im Lemma. Die Strecke von x nach y teilen wir auf: Wir wählen a_0 einen Stift der Höhe 0 mit $x = a_0^{k-}$ und b_0 mit Stifthöhe 0 und $y = b_0^{l+}$. Wir können auch in den Fällen $m \leq k$ oder $m \leq l$ a_0 und b_0 so wählen, daß $a_0^{m+} \leq b_0^{m-}$ ist. Nach Definition von m ist $[a_0^{m+}, b_0^{m-}) \cong s'(1+\mathcal{Z}_m)$ mit $s' \in \omega$, denn es muß $K_{m+1}(a_0^{m+}) = K_{m+1}(b_0^{m-}) \cong \mathcal{Z}_{m+1}$ sein. Es folgt also mit Lemma 74:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} (x,y) & = & (x,a_0] & + & (a_0, a_0^{m+}) & + & [a_o^{m+}, b_0^{m-}) & + & \{b_0^{m-}\} & + & (b_0^{m-}, b_0) & + & [b_0, y) \\ & \cong & \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* & + & \frac{\mathcal{Z}_m}{2} & + & s'(1+\mathcal{Z}_m) & + & 1 & + & \frac{\mathcal{Z}_m}{2}^* & + & \frac{\mathcal{Z}_l}{2} \\ & \cong & \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* & + & & & (s'+1)(\frac{\mathcal{Z}_m}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_m}{2}^*) & & & & & + & \frac{\mathcal{Z}_l}{2} \end{array}$$

□

Noch ist nicht genug gerechnet. Das „Verschluckverhalten” von Ordinalzahlen, das uns in Proposition 41 so gute Dienste geleistet hat, ist $\omega^k + \omega^l \cong \omega^l$ für alle $k < l$. Etwas Entsprechendes brauchen wir auch hier. Das folgende Lemma zeigt z.B. auch, daß in Lemma 75 im Falle $m < l$ oder $m < k$ nur die äußeren beiden Summanden auftreten (müssen).

Lemma 76. *Sei* $s \in \omega$, $k < l < \omega$. *Dann ist* $\frac{\mathcal{Z}_l}{2} \cong s(\frac{\mathcal{Z}_k}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^*) + \frac{\mathcal{Z}_l}{2}$.

Beweis: Für $k = l-1$ ergibt sich:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\mathcal{Z}_l}{2} & = & \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{l-1}) & (\text{Def. v. } \frac{\mathcal{Z}_l}{2}) \\ & = & \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + \omega(1 + \mathcal{Z}_{l-1}) & (\text{Bem. S. 97}) \\ & = & \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_l}{2} & (\text{Def. v. } \frac{\mathcal{Z}_l}{2}). \end{array}$$

Sei jetzt $k < l-1$. Wir nehmen an, die Behauptung stimmt für alle Paare l', k' mit $k' < l' < l$, also auch für $l' = l-1$. Dann haben wir

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathcal{Z}_l}{2} & = & \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_l}{2} \\ & = & \frac{\mathcal{Z}_k}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{l-1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_l}{2} \\ & = & \frac{\mathcal{Z}_k}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_k}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_l}{2} \ . \end{array}$$

□

Jetzt endlich können wir einsehen, was man längst vermutet hat:

Satz 77. *Für alle $k \in \omega$ gibt es $q = q(k) \in \omega$, so daß gilt:*

(1) $\frac{\mathcal{Z}_q}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_q}{2}^* \equiv_{\mathrm{MFP}_k} s(\frac{\mathcal{Z}_q}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_q}{2}^*)$ *für alle* $s \in \omega \setminus \{0\}$.

(2) $\frac{\mathcal{Z}_q}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_{q+1}}{2}$.

(3) $\mathcal{Z}_q \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathcal{Z}_{q+1}$.

Beweis: Es muß $r < s$ geben mit $\frac{\mathcal{Z}_r}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_s}{2}$.
Zu (1): Nach Lemma 76 ist $\frac{\mathcal{Z}_s}{2} = \frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_s}{2}$. Damit gewinnen wir:

$$\frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_s}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^*.$$

Zu (2): Sei $r + 1 < s$ (sonst sind wir fertig). Es ist wie oben

$$\frac{\mathcal{Z}_r}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_s}{2} = \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_s}{2}$$

woraus durch Addition von $1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^*$ auf beiden Seiten und wegen $\frac{\mathcal{Z}_s}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_r}{2}$ folgt:

$$\frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2}^* + \frac{\mathcal{Z}_r}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_r}{2}^* = \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2} + 1 + \frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2}^* \ .$$

und durch Multiplikation mit ω schließlich $\frac{\mathcal{Z}_{r+1}}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_{r+2}}{2}$. Wir können also in beiden Fällen $q = r + 1$ setzen.

(3) folgt aus (2). □

Jetzt sind wir dem Ziel, zu bestimmen, wann zwei Intervalle $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-äquivalent-sind, schon sehr nahe. Es folgt eine Definition, die uns das Schreiben leichter machen soll. Wir wollen ausdrücken, daß zwei Zahlen entweder beide groß (nämlich $\geq q(k)$) oder gleich sind.

Definition 78. Seien $i, j \in \omega$. Wir schreiben $i \stackrel{k}{=} j$ wenn $i = j$ oder $i, j \geq q(k)$ mit $q(k)$ aus Satz 77 ist.

Bemerkung. Aus $i \stackrel{k}{=} j$ folgt $\frac{\mathcal{Z}_i}{2} \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \frac{\mathcal{Z}_j}{2}$.

Das folgt sofort aus Satz 77. Jetzt endlich können wir ernten:

Satz 79. *Seien $[x, y]$, $[x', y'] \subset \mathcal{Z}_\omega$ zwei Intervalle mit einer Höhe größer $q(k)$. Es ist sicher dann $[x, y] \equiv_{\mathrm{MFP}_k} [x', y']$, wenn $sh(x) \stackrel{k}{=} sh(x')$ und $sh(y) \stackrel{k}{=} sh(y')$ ist.*

Beweis: Wir stellen die Intervalle (x, y) bzw. (x', y') wie in Lemma 75 dar mit Zahlen k, l, m bzw. k', l', m'. Nach Voraussetzung ist $\max\{k, l, m\} \geq q(k)$ und $\max\{k', l', m'\} \geq q(k)$. Daher erhält man die Behauptung leicht aus Lemma 75 und Satz 77. □

4.8.12 Wie der $\exists$rhalter mit den $\mathcal{Z}_q$ spielt

Um zu zeigen, daß $\mathcal{E}$ in MFP nicht definierbar ist, nehmen wir die Strukturen

$$\mathfrak{A}_k := \mathcal{Z}_{q+k} + 1 + \mathcal{Z}_{q+k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_k := \mathcal{Z}_{q+1} + \mathcal{Z}_{q+1}$$

und als Relation *gut* die Paare von Intervallen $([a,a'],[b,b']) \in \mathrm{Pot}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{Pot}(\mathfrak{B})$, die isomorph oder nach Satz 79 $\equiv_{\mathrm{MFP}_k}$-äquivalent sind. Wir zeigen:

Satz 80. *Es ist $\mathfrak{A}_k \equiv_{\mathrm{MFP}_k} \mathfrak{B}_k$,*
denn der $\exists$rhalter gewinnt das Spiel gut-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$.

Bevor wir das beweisen, führen wir erstmal ein paar nützliche Notationen ein. Es sei $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_l + \mathfrak{B}_r$ mit $\mathfrak{B}_l, \mathfrak{B}_r \cong \mathcal{Z}_{q+1}$ (l und r erinnern hier an *links* und *rechts*, nicht an natürliche Zahlen). Eine Spielsituation s ist gegeben durch die Zuordnung

$$(+) \qquad (x_j^{\mathfrak{A}})_{j \le r} \mapsto (x_j^{\mathfrak{B}})_{j \le r}$$

der in diesem Augenblick belegten Variablen $x_1, \ldots, x_r$.

Ist s diese Spielsituation, dann soll $\mathsf{s} \restriction i$ die Spielsituation $(x_j^{\mathfrak{A}})_{j \le i} \mapsto (x_j^{\mathfrak{B}})_{j \le i}$ bezeichnen ($i \le r$). Eine solche muß s irgendwann vorangegangen sein. $\mathsf{s} \restriction 0$ ist die Spielsituation, in der überhaupt keine Variablen belegt sind (kein Stein liegt).

Der $\exists$rhalter wird so spielen, daß es in jeder Spielsituation s genau ein böses (also nicht *gut*es) Intervall(paar) gibt. Dieses sei mit $B(\mathsf{s}) = (B(\mathsf{s})^{\mathfrak{A}}, B(\mathsf{s})^{\mathfrak{B}})$ bezeichnet. $B(\mathsf{s})^{\mathfrak{A}}$ werden wir das böse Intervall in $\mathfrak{A}$ und $B(\mathsf{s})^{\mathfrak{B}}$ das böse Intervall in $\mathfrak{B}$ nennen.

$B(\mathsf{s})^{\mathfrak{B}}$ wird stets das „mittlere" Intervall in $\mathfrak{B}$ sein, dasjenige, auf das $\mathcal{E}$ zutrifft, in das $\frac{\mathcal{Z}_{q+1}}{2} + \frac{\mathcal{Z}_{q+1}}{2}^*$ konvex einbettbar ist. Dieses ist natürlich eindeutig identifizierbar. Der $\forall$erderber wird so stets gezwungen, „in die Mitte" zu spielen, dahin, wo der hier wichtige Unterschied der Strukturen verborgen ist. Mit diesem Spiel leistet der $\exists$rhalter also gerade mal das Nötigste, indem er sich aufs Wesentliche beschränken kann: ein ästhetischer Reiz dieses Spiels.

Bezeichnung: Die Schreibweise $X \Subset Y$ soll heißen: X ist *konvexe* Teilmenge von Y.

Wir werden jetzt zeigen: Der $\exists$rhalter kann so spielen, daß in den bösen Intervallen immer noch genügend Platz ist. In $\mathfrak{B}$ ist ja stets $\frac{\mathcal{Z}_{q+1}}{2} + \frac{\mathcal{Z}_{q+1}}{2}^*$ in das böse Intervall einbettbar, aber auch in $\mathfrak{A}$ wird in einer Spielsituation s wie in (+) noch mindestens eine Kopie von $\mathcal{Z}_{q+k-r}$ innerhalb des bösen Intervalls liegen. Genauer: Es wird in einer Spielsituation (+) gelten:

Für alle $i = 0, \ldots, r$ gibt es $\mathcal{Z}(i, \mathrm{s}) \Subset B(\mathrm{s} \upharpoonright i)^{\mathfrak{A}}$ mit $\mathcal{Z}(i, \mathrm{s}) \cong \mathcal{Z}_{q+k-i}$ und

(*) $$\mathcal{Z}(r, \mathrm{s}) \Subset \mathcal{Z}(r-1, \mathrm{s}) \Subset \ldots \Subset \mathcal{Z}(0, \mathrm{s}) \ .$$

Insbesondere gilt stets $B(\mathrm{s})^{\mathfrak{A}} \cap \mathcal{Z}(i, \mathrm{s}) \neq \emptyset$ für $i = 0, \ldots, r$. Desweiteren gilt $sh(x_i^{\mathfrak{A}}) \stackrel{k}{=} sh(x_i^{\mathfrak{B}})$ für $i = 1, \ldots, r$.

Zu Spielbeginn ist (*) trivialerweise erfüllt. Man wähle als $\mathcal{Z}(0, \mathrm{s})$ irgendeine der beiden Kopien von $\mathcal{Z}_{q+k}$ in $\mathfrak{A}$.

Sei s wie in (+) und (*) in dieser Situation erfüllt. Zwei Möglichkeiten zur Fortsetzung des Spiels hat der $\forall$erderber:

a) er belegt die nächste Variable x_{r+1} oder

b) er setzt $x_f := x_i$ $(f < i)$ und befreit dann alle x_j mit $j > f$ von ihrer Belegung. (Jeweils in beiden Strukturen).

In jedem Falle bezeichne s' die neue Spielsituation.

Zu a):
Wählt der $\forall$erderber $x_{r+1}^{\mathfrak{X}}$ in der Nähe (d.h. im q-ten Kondensat) eines bereits ausgezeichneten Punktes $x_i^{\mathfrak{X}}$ und ist $x_{r+1}^{\mathfrak{X}} \neq x_i^{\mathfrak{X}}$, dann muß $sh(x_i^{\mathfrak{A}}) = sh(x_i^{\mathfrak{B}}) < q$ sein und so $K_q(x_i^{\mathfrak{A}}) \cong K_q(x_i^{\mathfrak{B}}) \cong \mathcal{Z}_q$. Gemäß dieses Isomorphismus' findet der $\exists$rhalter dann $x_{r+1}^{\mathfrak{Y}}$ in entsprechender Nähe zu $x_i^{\mathfrak{Y}}$ $(\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})$, also so, daß $(K_q(x_i^{\mathfrak{A}}), x_i^{\mathfrak{A}}, x_{r+1}^{\mathfrak{A}}) \cong (K_q(x_i^{\mathfrak{B}}), x_i^{\mathfrak{B}}, x_{r+1}^{\mathfrak{B}})$ ist.

Nehmen wir also an, der $\exists$rhalter wählt $x_{r+1}^{\mathfrak{X}}$ nicht aus dem q-ten Kondensat eines schon gewählten Elementes. Dann wollen wir Satz 79 anwenden, so daß wieder (*) erfüllt sein wird.

Es ist

(24) $$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_{q+k-r-1} + \mathbb{1}) \ \cong \ \mathcal{Z}(r, \mathrm{s}) \subset B(\mathrm{s})^{\mathfrak{A}} \ .$$

Wir unterscheiden die Fälle $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$.

Bestimmt der $\forall$erderber $x_{r+1}^{\mathfrak{B}} \in B(\mathrm{s})^{\mathfrak{B}}$, dann wählt der $\exists$rhalter $x_{r+1}^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{Z}(r, \mathrm{s})$ mit passender Stifthöhe, d.h. mit $sh(x_{r+1}^{\mathfrak{A}}) \stackrel{k}{=} sh(x_{r+1}^{\mathfrak{B}})$. Auf diese Weise liegt wegen (24) auch $x_{r+1}^{\mathfrak{A}}$ nicht im q-ten Kondensat eines alten Elementes $x_i^{\mathfrak{A}}$ mit $i \leq r$. Das Intervall in $\mathfrak{B}$, das zum neuen bösen Intervall $B(\mathrm{s}')^{\mathfrak{B}}$ werden soll, liegt rechts oder links von $x_{r+1}^{\mathfrak{B}}$. Nehmen wir an, es liegt rechts von $x_{r+1}^{\mathfrak{B}}$. Dann ist das Intervallpaar links von x_{r+1}, $({}^{\leq}x_{r+1}^{\mathfrak{A}} \cap B(\mathrm{s})^{\mathfrak{A}}, {}^{\leq}x_{r+1}^{\mathfrak{B}} \cap B(\mathrm{s})^{\mathfrak{B}})$, nach Wahl von $x_{r+1}^{\mathfrak{A}}$ und wegen (*) in der Situation s mit Satz 79 ein *gut*es. Im neuen bösen Intervall $B(\mathrm{s}')^{\mathfrak{A}}$ gibt es wegen (24) sogar unendlich viele Kopien von $\mathcal{Z}_{q+k-r-1}$.

Und so ist natürlich $\mathcal{Z}(r+1, \mathsf{s}') \Subset \mathcal{Z}(r, \mathsf{s})$ schnell gefunden. Setzt man nun noch $\mathcal{Z}(i, \mathsf{s}') := \mathcal{Z}(i, \mathsf{s})$ für $i \leq r$, dann ist (*) in der neuen Situation s' wieder erfüllt.

Bestimmt der $\forall$erderber hingegen $a := x_{r+1}^{\mathfrak{A}}$, dann liegt rechts oder links von a noch mindestens ein Teil von $\mathcal{Z}(r, \mathsf{s})$. Nehmen wir letzteres an. In diesem Teil kann später $\mathcal{Z}(r+1, \mathsf{s}')$ gefunden werden. Es soll also $B(\mathsf{s}')^{\mathfrak{A}} = {}^{\leq}a \cap B(\mathsf{s})^{\mathfrak{A}}$ werden. So wählt der $\exists$rhalter in $\mathfrak{B}_r \cap B(\mathsf{s})^{\mathfrak{B}}$ und nicht aus dem q-ten Kondensat eines alten Elementes ein $b =: x_{r+1}^{\mathfrak{B}}$ mit $\stackrel{k}{=}$-gleicher Stifthöhe wie a. Dann ist das Intervall $B(\mathsf{s}) \cap {}^{\geq}x_{r+1}$ *gut* und $B(\mathsf{s}') = {}^{\leq}x_{r+1} \cap B(\mathsf{s})$.

In dem nichtleeren Teil von $\mathcal{Z}(r, \mathsf{s})$, der dann in $B(\mathsf{s}')^{\mathfrak{A}}$ liegt, findet man jetzt mühelos $\mathcal{Z}_{q+k-r-1} \cong \mathcal{Z}(r+1, \mathsf{s}') \Subset \mathcal{Z}(r, \mathsf{s})$. Wieder ist (*) mit $\mathcal{Z}(i, \mathsf{s}') := \mathcal{Z}(i, \mathsf{s})$ für $i \leq r$ erfüllt.

Zu b):
Sei $a := x_i^{\mathfrak{A}}$ und $b := x_i^{\mathfrak{B}}$. Nimmt der $\forall$erderber in der Situation s die Steine $x_f, \ldots, x_k$ von den Strukturen, dann ist vorübergehend $B(\mathsf{s} \restriction f-1)$ das böse Intervall. Dahinein wird jetzt x_f gesetzt, nämlich auf a bzw. b. Es war

$$(25) \qquad \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_{q+k-f} + \mathbb{1}) \ \cong \ \mathcal{Z}(f-1, \mathsf{s}) \Subset B(s \restriction f-1)^{\mathfrak{A}} \ .$$

Sei jetzt beispielsweise $b \in \mathfrak{B}_r$, dann ist das neue böse Intervall $B(\mathsf{s}')^{\mathfrak{X}}$ links von a bzw. b:

$$B(\mathsf{s}') = B(\mathsf{s} \restriction f-1) \cap (-\infty, x_i] \ .$$

$\mathcal{Z}(i, \mathsf{s})$ liegt links von a. Mit (25) und

$$\mathcal{Z}(i, \mathsf{s}) \subsetneq \mathcal{Z}(f-1, \mathsf{s}) \subset B(\mathsf{s} \restriction f-1)^{\mathfrak{A}}$$

erkennt man, daß es links von a, ja sogar links von $\mathcal{Z}(i, \mathsf{s})$ innerhalb von $\mathcal{Z}(f-1, \mathsf{s})$ ein zu $\mathcal{Z}_{q+k-f}$ isomorphes Intervall gibt, dieses können wir als $\mathcal{Z}(f, \mathsf{s}')$ verwenden. Wieder setzen wir $\mathcal{Z}(j, \mathsf{s}') := \mathcal{Z}(j, \mathsf{s})$ für $j < f$ und erhalten so (*) für die Situation s', denn für $i < f$ ist $B(\mathsf{s}' \restriction i) = B(\mathsf{s} \restriction i)$.

Da das böse Intervall so nie leer wird, gewinnt der $\exists$rhalter das Spiel *gut*-bös-$\mathsf{S}_{L^k_{\infty\omega}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. □

Wie die Zerstreutheit von Ordnungen so ist auch die Kompaktheit zerstreuter Ordnungen nicht nur durch keinen MFP-Satz, sondern auch nicht mit Hilfe einer ganzen Satzmenge ausdrückbar. Der eben ausgeführte Beweis zeigt mit nur wenig Änderungen: $\mathcal{Z}_\omega + 1 + \mathcal{Z}_\omega \equiv_{\mathrm{MFP}} \mathcal{Z}_\omega + \mathcal{Z}_\omega$. Damit ist auch erwiesen, daß Folgerung 57 nicht auf unendliche Höhen ausweitbar ist. Aus dieser Sicht kann man sagen: Das, was $\mathbb{Z}^\omega$ als gerade eben zerstreute unter den Ordnungen ist, ist $1 + \mathcal{Z}_\omega + 1$ als gerade eben kompakte unter den zerstreuten Ordnungen. So wie MSO, und MFP nicht, die Zerstreutheit von $\mathbb{Z}^\omega$ ‚sieht', so ‚sieht' MSO, und MFP nicht, die Kompaktheit von $1 + \mathcal{Z}_\omega + 1$. Betrachtet man außerdem, in welcher Weise dies jeweils zu Tage trat, dann ist gerechtfertigt, was in der Einleitung behauptet wurde: Was die zerstreuten unter allen Ordnungen sind, das sind die kompakten unter den zerstreuten.

Zum Abschluß wollen wir noch zeigen, wie man mit einem zweistelligen Fixpunkt die Eigenschaft $\mathcal{E}$ beschreiben kann.

Ein zweistelliger Fixpunkt entdeckt Kompaktheit

Wir geben einen FP^2_6-Satz an, der genau in den abzählbaren Ordnungen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt:

$$\exists x, y(x < y \wedge (x, y) \in \mathrm{GFP}_{x,y,X} \forall u \exists z, z'(x < z < z' < y \wedge \neg(z < u < z') \wedge X\, zz') \enspace .$$

Wieder nutzen wir die Gelegenheit zum Spielen und kramen $\mathsf{S}(\mathfrak{A} \models \varphi?)$ hervor. Die Gültigkeit des angegebenen Satzes wird darin wie folgt diskutiert:

0. Der B∃weiser wählt $x < y$.
1. Der ∀iderleger wählt ein u (zwischen x und y).
2. Der B∃weiser verkleinert das Intervall (x, y), indem er $z < z'$ daraus angibt mit $u \notin (z, z')$.
3. Es wird $x := z$ und $y := z'$ gesetzt. Das Spiel wird bei 1. fortgesetzt.

Hat $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, dann gibt es $Q_1, Q_2 \subset \mathfrak{A}$, mit $Q_1 \cong \omega$, $Q_2 \cong \omega^*$, ${}^{>}Q_1 \cap {}^{<}Q_2 = \emptyset$ und $Q_1 < Q_2$. Der B∃weiser kann das Spiel unendlich lang spielen, indem er in 0. $x \in Q_1$ und $y \in Q_2$ und in 2. auch $z \in Q_1$ und $z' \in Q_2$ mit den geforderten Eigenschaften sucht.

Kann der B∃weiser umgekehrt dieses Spiel unendlich lang spielen, auch wenn der ∀iderleger nach und nach in 1. jeden Punkt der Ordnung als u wählt, dann konstruiert er genau solche Mengen Q_1 und Q_2. Q_1 ist die Menge aller z und Q_2 die aller z', die der B∃weiser in diesem unendlich langen Spielverlauf angibt. □

Schlußbemerkung

Meine mathematisch unverbildeten Stil- und Formberater vermißten an dieser Stelle ein Schlußwort. Sie schlugen eine Zusammenfassung oder die Formulierung einer weiterführenden Erkenntnis vor. Am geeignetsten, das Interesse des Lesers nocheinmal zu bündeln, schien mir dann die Frage, die sie hier ins Manuskript schrieben:

„Was hat man – der Leser, die Menschheit und ich weiß nicht wer noch – von diesen Spielchen?“

Diese „Spielchen“ haben sich hier als eine brauchbare und anschauliche Beweismethode für die Ausdrückbarkeit oder Nichtausdrückbarkeit gewisser Eigenschaften in der Fixpunktlogik erwiesen. Sie erlauben eine Einsicht, wie sich die Fixpunktlogik von der infinitären Logik und der Zweiten Stufe abgrenzt. Deshalb hege ich die Hoffnung, daß sich schon noch ein Mathematiker finden wird, der etwas von ihnen hat.

Finis Operis

Literaturverzeichnis

[Ba77] J. Barwise, *On Moschovakis' Closure Ordinals*, Journal of Symbolic Logic **42** (1977) 292-296.

[Bo92] U. Bosse, *An Ehrenfeucht-Fraïssé Game for Fixpoint Logic and Stratified Fixpoint Logic,* Lecture Notes in Computer Science **702** (Selected Papers from the 6th Workshop, CSL '92), Springer Verlag.

[Bo90] U. Bosse, *Kardinalsequenzen superatomarer Boolescher Algebren*, Diplomarbeit am Institut für Logik der Universität Freiburg, 1990

[Cal90] Ariel Calò, *The Expressive Power of Transitive Closure,* M. Sc. Thesis, Technion-Israel Inst. of Technology, Haifa 1990.

[ChH82] A. Chandra and D. Harel, *Structure and Complexity of Relational Queries*, Journal of Computer and System Sciences **25** (1982) 99-128.

[ChH85] A. Chandra and D. Harel, *Horn Clause Queries and Generalizations,* J. Logic Programming **1** (1985) 1-15.

[Co92] K. J. Compton *Stratified Least Fixpoint Logic*, wird erscheinen.

[Da87] E. Dahlhaus, *Skolem Normal Forms Concerning the Least Fixed Point,* in: "Computation Theory and Logic" (Ed. E. Börger), Lecture Notes in Computer Science Nr. 270, Springer 1987, 101-106.

[dR87] M. de Rougemont, *Second Order and Inductive Definability on Finite Structures*, Zeitschrift f. mathem. Logik und Grundlagen der Mathematik **33** (1987) 47-63.

[FlZ80] J. Flum, M. Ziegler, *Topological Model Theory,* Lecture Notes in Mathematics **769**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1980

[GrC92] E. Grädel und G. L. McColm, *Hierarchies in Transitive Closure Logic, Stratified Datalog and Infinitary Logic*, wird in Annals of Pure and Applied Logic erscheinen.

[Gro92] M. Grohe, *Fixpunktlogiken in der endlichen Modelltheorie*, Diplomarbeit am Institut für mathematische Logik der Universität Freiburg, 1992.

[Gro93] M. Grohe, *Bounded arity hierarchies in fixed point logics*, Lecture Notes in Computer Science (Selected Papers from the 7$^{\text{th}}$ Workshop, CSL '93), Springer Verlag.

[Gro94] M. Grohe *The Structure of Fixed–Point Logics*, Dissertation am Institut für mathematische Logik der Universität Freiburg, Oktober 1994

[GS86] Y. Gurevich and S. Shelah, *Fixed Point Extensions of First Order Logic,* Annals of Pure and Applied Logic **32** (1986), 265-280.

[Her89] B. Herwig, *Zur Modelltheorie von L_μ*, Dissertation am Institut für mathematische Logik der Universität Freiburg, 1989

[Imm82] N. Immerman, *Upper and Lower Bounds for First Order Expressibility,* Journal of Computer and System Sciences **25** (1982) 76-98.

[Imm86] N. Immerman, *Relational Queries Computable in Polynomial Time,* Information and Control **68** (1986), 86-104.

[Imm87] N. Immerman, *Languages that capture complexity classes,* SIAM Journal of computation, **16** (1987), 760-778.

[Ko91] Ph. Kolaitis, *The Expressive Power of Stratified Logic Programs,* Information and Computation **90** (1991) 50-66.

[Kra85] Wolfgang Kramer, *Die Ausdrucksstärke der Sprache L_2 für abzählbare T_3-Räume*, Dissertation am Institut für mathematische Logik der Universität Freiburg, 1985.

[KV92] Ph. Kolaitis and M. Vardi, *Fixpoint logic vs. infinitary logic in Finite-model Theory*, to appear.

[Mo74] Y. Moschovakis, *Elementary Induction on Abstract Structures,* North-Holland, Amsterdam 1974.

[Ra69] M. O. Rabin, *Decidability of second order theories and automata on infinite trees* Trans. A.M.S. **149** (1969), 1-35.

[Ros] J. G. Rosenstein, *Linear Orderings*, Academic Press, New York 1982

[Sh75] S. Shelah, *The monadic theory of order*, Annals of Mathematics **102** (1975), 379-419

[Th82] W. Thomas, *Classifying Regular Events in Symbolic Logic*, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 25, No. 3, Dezember 1982, 360-376

[Va82] M. Vardi, *Complexity of Relational Query Languages*, Proc. of 14$^{\text{th}}$ ACM Symposium on Theory of Computing (1982) 137-146.