Zur Modelltheorie von Moduln

Dissertation
zur Erlangung der
Doktorwürde
der
Mathematischen Fakultät
der
Albert–Ludwigs–Universität
Freiburg i. Br.
vorgelegt
von
Gunter Geisler

Herbst 1994

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Danke schön.

Nein, schön wär's zwar, aber das wage ich nun doch nicht – deshalb hier eine erweiterte Version:

Martin Ziegler danke ich für Mathematik.

Ich danke dem Logik-Kollektiv der Uni Freiburg (unter anderem Bernhard Herwig, Heike Mildenberger, Martin Otto, Frank Wagner und Erika Wagner-Klimt) für zuteil gewordene Unterstützung, in erster Linie aber Martin Erkens für mehrfache Rettung aus Computer-Not und manch mitfühlendes, freundliches Wort. – Mike Prest bin ich für die Überlassung des Themas zu Dank verpflichtet.

Mir danke ich gar nicht – oder allenfalls vielleicht: für nicht nachlassendes Interesse an meiner Arbeit. Für alles andere aber:

Нико, все же: Спасибо большое.

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, einen vollständigen und im wesentlichen modelltheoretischen Beweis für die Entscheidbarkeit der Modultheorie über zahmen Köcheralgebren zu geben; nahezu alle hier gewonnenen Ergebnisse haben in der einen oder anderen Form mit diesem Beweis zu tun, bereiten ihn vor, oder sind durch mit ihm zusammenhängende Untersuchungen gefunden worden. Dieser Entscheidbarkeitssatz verallgemeinert das entsprechende Resultat von Baur für Quadrupel. Der Beweis für den allgemeineren Fall der zahmen Köcher unterscheidet sich allerdings erheblich von Baurs Originalbeweis: Mike Prest hat gezeigt, daß die Modultheorie über wilden Köcheralgebren unentscheidbar ist und den hier gezeigten Satz bereits vermutet. Er hat vorgeschlagen, zunächst das Ziegler-Spektrum zahmer Köcheralgebren zu beschreiben und dann mit einem Satz von Ziegler auf die Entscheidbarkeit zu schließen. Erstaunlicherweise ist unser Beweis für die Entscheidbarkeit aber viel einfacher als von Prest angenommen und benutzt lediglich die genaue Kenntnis der endlichdimensionalen Unzerlegbaren und den hier eingeführten zentralen Begriff der pp-Äquivalenz. Tiefere algebraische Ergebnisse werden wir nicht verwenden; stattdessen argumentieren wir konsequent modelltheoretisch. Es sei hier angemerkt, daß damit nachgewiesen ist, daß für Köcheralgebren modelltheoretische und algebraische Komplexität übereinstimmen: Die Modultheorie über einer solchen Algebra ist genau dann entscheidbar, wenn sie zahm oder von endlichem Darstellungstyp ist; im wilden Fall ist sie unentscheidbar.

Als recht schwierig erweist sich dagegen die Beschreibung des Ziegler-Spektrums der uns interessierenden – das heißt: zahmen – Köcheralgebren; hier wird dennoch eine vollständige Lösung gegeben. Daraus ergeben sich dann ein weiterer Beweis für die Entscheidbarkeit (gemäß dem ursprünglichen Vorschlag von Prest) und einige Resultate über die endliche Axiomatisierbarkeit von Modultheorien. Nebenbei beweisen wir einige algebraische Sätze neu; insbesondere zeigen wir, wie man leicht die Existenz von

Auslander-Reiten-Folgen über einer Artin-Algebra folgern kann und analysieren die entsprechende Situation über artinschen Ringen.

Die wichtigsten neuen Ergebnisse finden sich in den Kapiteln 3, 6, 8 und 9: Kapitel 3 handelt von Auslander-Reiten-Folgen und ihrem Zusammenhang mit dem Ziegler-Spektrum; einige Sätze aus diesem Kapitel hat Herzog unabhängig von mir gezeigt. Kapitel 6 enthält den eben beschriebenen Beweis der Entscheidbarkeit. Und die letzten beiden Kapitel sind dem Ziegler-Spektrum der zahmen Köcheralgebren gewidmet: Sie sind wohl das Herz dieser Arbeit.

Daß die Arbeit etwas länglich geraten ist, liegt neben der recht aufwendigen Untersuchung des Ziegler-Spektrums zahmer Köcheralgebren in den letzten beiden Kapiteln daran, daß ich mich bemüht habe, alle benutzten Resultate hier zusammenzustellen, um dem Leser zeitraubendes Nachforschen in der Literatur zu ersparen. Außerdem habe ich die gewünschten Informationen nicht immer in zitierfähiger Form gefunden; das betrifft insbesondere Kapitel 5.

Zu Beginn eines jeden Kapitels und Abschnittes werden genauere Inhaltsangaben gegeben. Mit Hilfe des Index sollten sich die Definitionen der wichtigsten Begriffe lokalisieren lassen.

Kapitel 1

Präliminarien

In diesem Kapitel sind einige später verwandte Tatsachen zusammengestellt, teils trivialer, teils weniger trivialer Natur; teils mit, teils ohne Beweis. Beweise bereits bekannter Resultate gebe ich dann, wenn die in der Literatur gegebenen mir verbesserbar schienen oder wenn ich keine gute Quelle finden konnte.

Abschnitt 1.1 dient im wesentlichen der Festlegung der Notation; in Abschnitt 1.2 dreht sich alles um den Begriff der freien Realisierung (Prest), der eine große Rolle spielt, wenn endlich präsentierte Moduln interessieren. In Abschnitt 1.3 gebe ich neben einigen bekannten Tatsachen die von Martin Ziegler stammende Beschreibung des Ziegler-Spektrums von Dedekind-Ringen wieder. 1.4 enthält neben Bekanntem aus der Algebra weitere Informationen zu freien Realisierungen, wenn der zugrundeliegende Ring artinsch ist; Abschnitt 1.5 ist im wesentlichen der Dualität bei Artin-Algebren gewidmet: Neben algebraischen Tatsachen, für die ich in Ermangelung einer guten Quelle Beweise gebe, finden sich dort auch Verallgemeinerungen mehrerer Resultate aus [PRZ 94]. In 1.6 habe ich erste Präliminarien über Köcheralgebren zusammengefaßt.

1.1 Allgemeines

Fast alle hier zitierten Resultate finden sich in [Zie 84] und [Pre 88], den beiden Standardwerken zur Modelltheorie von Moduln. Meist handelt es sich um Bekanntes; lediglich die Punkte iii., iv. und v. in Lemma 1.1.7 sind vielleicht neu (und trivial), und auch der Beweis von Lemma 1.1.10 stammt von mir.

Auch in Fragen der Notation richte ich mich im allgemeinen nach wenigstens einer der eben erwähnten Arbeiten. Im folgenden einige kleine Abweichungen und Festlegungen:

R sei ein beliebiger Ring mit Einselement; Moduln sind, wenn nichts anderes vereinbart wird, Linksmoduln über R. Homomorphismen, manchmal auch nur kurz: Abbildungen, sind im allgemeinen R-Homomorphismen. R-Mod (bzw. Mod-R) bezeichnet die Kategorie aller R-Linksmoduln (bzw. aller R-Rechtsmoduln), R-mod (bzw. mod-R) die aller endlich präsentierter R-Linksmoduln (bzw. aller endlich präsentierter R-Rechtsmoduln). Zwischen Elementen und Tupeln werde ich nicht immer konsequent unterscheiden. Formeln φ, ψ usw. sind im allgemeinen pp-Formeln, das heißt: In der üblichen Sprache (für R-Linksmoduln) ${}_RL$, die für einen festen Ring R ein Konstantensymbol 0, ein binäres Funktionssymbol $+$, ein unäres Funktionssymbol $-$, und für jedes $r \in R$ ein unäres Funktionssymbol enthält, sind pp-Formeln die Formeln der Gestalt $\exists \bar{y}\, Ay = B\bar{x}$, mit Matrizen A und B über R und Variablentupeln $\bar{x}$ und $\bar{y}$. (Eine entsprechende Sprache L_R hat man für R-Rechtsmoduln.) Die Menge der pp-Formeln (in n Variablen) ist ein modularer Verband; $+$-irreduzibel, $\leq$, etc. sind in diesem Sinne zu verstehen. Ein pp-Paar φ/ψ ist ein Paar von pp-Formeln (mit der gleichen Anzahl freier Variablen), so daß gilt $\psi \leq \varphi$. Mit $\varphi/\psi(M)$ bezeichne ich für ein solches pp-Paar einerseits die Gruppe $\varphi(M)/\psi(M)$, andererseits auch deren Kardinalität. Unter einer Invariantenbedingung verstehe ich eine Aussage der Gestalt $\varphi/\psi \in [m, n]$, wobei $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Die Theorie aller R-Moduln nenne ich ${}_RT$; das heißt zum Beispiel, daß ${}_RT \vdash \psi \to \varphi$, falls für alle R-Moduln M gilt $\psi(M) \leq \varphi(M)$. Es gilt der fundamentale

Satz 1.1.1 *(Baur) Sei R ein Ring. Jede ${}_RL$-Formel ist modulo ${}_RT$ äquivalent zu einer Konjunktion der Form $\sigma \wedge \psi$, wobei σ eine boolesche Kombination von Invariantenbedingungen und ψ eine boolesche Kombination von pp-Formeln ist.*

Als unmittelbare Folgerung erhält man den folgenden Satz, der die Bedeutung von pp-Formeln deutlich macht:

Satz 1.1.2 *(Baur) Für jeden Modul M über R ist jede ${}_RL$-Formel äquivalent zu einer booleschen Kombination von pp-Formeln.* ∎

Und es ergibt sich ebenfalls sofort

Satz 1.1.3 *Jede ${}_RL$-Aussage ist modulo ${}_RT$ äquivalent zu einer booleschen Kombination von Invariantenbedingungen.* ∎

Für $\bar{a} \in M$ sei $\mathrm{tp}^+(\bar{a}) := \{\varphi \mid M \models \varphi(\bar{a})\}$, entsprechend $\mathrm{tp}^-(\bar{a}) := \{\psi \mid M \models \neg\psi(\bar{a})\}$. Der pp-Typ von $\bar{a}$ ist dann $\text{pp-tp}(\bar{a}) := \mathrm{tp}^+(\bar{a}) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in \mathrm{tp}^-(\bar{a})\}$. Entsprechend schreibe ich für einen pp-Typ p: $p = p^+ \cup p^-$.

Fundamental ist der folgende wohlbekannte Satz (Punkt ii. gehört Rothmaler.); der Beweis ist einfach (oder siehe etwa [Zie 84], [JL 89], [Her 93] – letzteres für Punkt iii.).

Satz 1.1.4 *Sei R ein beliebiger Ring, sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, i ohne Einschränkung die Inklusion, π die Projektion. Dann sind äquivalent (und die Folge heißt rein-exakt, die Einbettung von M' in M rein, und die Surjektion von M auf M'' reiner Epimorphismus):*

i. *Für alle pp-Formeln $\varphi(\bar{x})$ und $\bar{a} \in M'$ folgt aus $M \models \varphi(\bar{a})$ schon $M' \models \varphi(\bar{a})$.*

ii. *Für alle pp-Formeln $\varphi(x)$* in einer freien Variablen *und $a \in M'$ folgt aus $M \models \varphi(a)$ schon $M' \models \varphi(a)$.*

iii. *Für alle rein-injektiven unzerlegbaren Rechtsmoduln U ist $U \otimes M' \to U \otimes M$ injektiv.*

iv. *Für jedes $N \in R$*-mod *ist $\mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M'')$ surjektiv.*

v. *Für jeden (bzw. jeden endlich präsentierten) Rechtsmodul X ist $X \otimes M' \to X \otimes M$ injektiv.*

vi. *$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ ist direkter Limes von zerfallenden exakten Folgen.*

vii. *Für alle pp-Formeln φ ist $\varphi(M/M') = \varphi(M) + M'/M'$.*

viii. *Die induzierte Folge von Rechtsmoduln $0 \longrightarrow M''^{\star} \longrightarrow M^{\star} \longrightarrow M'^{\star} \longrightarrow 0$ zerfällt. Dabei bezeichne $M^{\star}$ hier (und in Satz 1.1.5) den Rechtsmodul* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Ein Modul M' heißt rein-injektiv (bzw. ein Modul M'' rein-projektiv), wenn jede Folge wie in Satz 1.1.4 zerfällt. Diese Begriffe haben zahlreiche äquivalente Formulierungen: Für den Begriff der Rein-Projektivität vergleiche man etwa Satz 1.2.6; eine Auswahl von äquivalenten Definitionen der Rein-Injektivität gibt der folgende Satz. (Nicht berücksichtigt sind funktorielle

Versionen.) Dabei sei für eine unendliche Menge I und einen R-Linksmodul M der Modul $M^{[I]}$ definiert als $\{(m_i)_{i\in I} \in M^I \mid |\{i \in I | m_i \neq 0\}| < |I|\}$. Für Beweise siehe wieder [Zie 84], [JL 89].

Satz 1.1.5 *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i. *M ist rein-injektiv.*

ii. *Jeder konsistente pp-Typ mit Parametern aus M wird in M realisiert.*

iii. *Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $|A| \leq |R| + \omega$ wird jeder konsistente pp-Typ mit Parametern aus A in M realisiert.*

iv. *Ist $N' \leq N$ rein und $f : N' \to M$ ein Morphismus, dann läßt sich f auf ganz N ausdehnen.*

v. *Für jede Menge I gibt es eine Fortsetzung des durch Summation induzierten Morphismus $M^{\oplus I} \to M$ von $M^{\oplus I}$ auf ganz M^I.*

vi. *Für jede unendliche Menge I zerfällt die natürliche Einbettung $M \to M^I/M^{[I]}$.*

vii. *Für jede absteigend gerichtete Familie von durch partielle pp-Typen definierte Untergruppen M_i, $i \in I$, ist der natürliche Morphismus von M in den inversen Limes der M_i surjektiv.*

viii. *$M \to M^{\star\star}$ zerfällt; hier ist wieder $M^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.*

Mit $\mathrm{H}(p)$ werde die rein-injektive Hülle des pp-Typs p bezeichnet. Der Typ p heißt unzerlegbar, wenn $\mathrm{H}(p)$ unzerlegbar ist. Nach dem Zieglerschen Unzerlegbarkeitskriterium ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $\psi_1, \psi_2 \notin p$ ein $\varphi \in p$ existiert mit $(\varphi \wedge \psi_1) + (\varphi \wedge \psi_2) \notin p$, und $x = 0 \notin p$, oder, äquivalent dazu: falls für alle $\psi_1, \psi_2 \notin p$ ein $\varphi \in p$ existiert mit $(\varphi \wedge \psi_1) + \psi_2 \notin p$, und $x = 0 \notin p$.

Die Menge der rein-injektiven Unzerlegbaren von R, ${}_RI$, trägt eine Topologie und heißt dann das Ziegler-Spektrum des Ringes R. Eine Basis sind die

$$(\varphi/\psi) := \{U \in {}_RI \mid \varphi/\psi(U) > 1\}.$$

Ist T eine unter $\oplus$ abgeschlossene Theorie von R-Moduln, dann sei $\mathrm{I}(T)$ die zugehörige abgeschlossene Teilmenge des Ziegler-Spektrums, die aus allen rein-injektiven Unzerlegbaren besteht, die als direkte Summanden in Modellen von T vorkommen. Man erhält so eine Entsprechung der abgeschlossenen

Teilmengen von $_RI$ und der unter $\oplus$ abgeschlossenen Theorien, bzw. Klassen von Moduln. Solche Modulklassen werden später auch als abgeschlossen bezeichnet. I(M) sei eine Schreibweise für I($Th(M^{\oplus\omega})$). Gelegentlich schreibe ich für eine abgeschlossene Teilmenge A des Ziegler-Spektrums und einen beliebigen Modul M auch $M \in A$: Das soll heißen, daß M Modell der A entsprechenden Klasse von Moduln ist.

Daß rein-injektive Unzerlegbare wichtig sind, zeigt

Satz 1.1.6 *(Ziegler) Jeder Modul ist elementar äquivalent zu einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer.*

Eine wichtige Rolle spielt der Begriff der Neg-Isoliertheit: Abweichend von [Pre 88] heißt ein pp-Typ p neg-isoliert, falls es eine pp-Formel ψ gibt, so daß $_RT \vdash p \leftrightarrow p^+ \cup \{\neg\psi\}$. p heißt dann auch neg-isoliert durch ψ. Aus dem Zieglerschen Unzerlegbarkeitskriterium folgt, daß ein neg-isolierter Typ unzerlegbar ist. (Bei unzerlegbaren Typen stimmt diese Definition mit der Prestschen überein.) Für rein-injektive Unzerlegbare U gilt: Ist pp-tp(a) neg-isoliert für ein $a \in U \setminus 0$, dann für alle $a \in U \setminus 0$ ([Pre 88, Corollary 9.19, Proposition 9.24]). Ein solches U heißt dann neg-isoliert. Das nächste Lemma ist teilweise in [Pre 88, Proposition 8.3] enthalten. (Für weitere – und neue – Äquivalenzen siehe Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4.)

Lemma 1.1.7 *Sei p unzerlegbar. Dann sind äquivalent:*

i. *p ist neg-isoliert.*

ii. *Es gibt einen pp-Typ q mit $p^+ \subset q^+$ (kurz: $p < q$), so daß gilt: Aus $p' > p$ folgt $p' \geq q$.*

iii. *Es gibt $\psi \notin p$, so daß aus $\psi' \notin p$ folgt, daß es $\varphi \in p$ gibt mit $\psi' \wedge \varphi \leq \psi$.*

iv. *Es gibt $\psi \notin p$, so daß aus $\psi \leq \psi' \notin p$ folgt, daß es $\varphi \in p$ gibt mit $\psi' \wedge \varphi \leq \psi$.*

v. *Es gibt $\psi \notin p$, so daß aus $\psi \leq \psi' \notin p$ folgt, daß es $\varphi \in p$ gibt mit $\psi' \wedge \varphi \leq \psi$ und $\psi \leq \varphi$.*

Ist q wie in ii., dann heißt p auch neg-isoliert durch q.

Beweis: Die Äquivalenz von i. und ii. ist einfach (und [Pre 88, Proposition 8.3]), die von i. und iii. ist die Definition. Die übrigen Äquivalenzen folgen leicht unter Verwendung des Zieglerschen Unzerlegbarkeitskriteriums. ■

Lemma 1.1.8 *Sei p unzerlegbar und endlich erzeugt (siehe Seite 14 für die Definition), etwa ${}_RT \vdash p^+ \leftrightarrow \varphi_0$. Dann sind äquivalent:*

i. *p ist neg-isoliert.*

ii. *Es gibt einen endlich erzeugten (!) pp-Typ $q > p$, so daß gilt: Aus $p' > p$ folgt $p' \geq q$.*

iii. *Es gibt $\psi \notin p$ mit ${}_RT \vdash p \leftrightarrow \varphi_0 \wedge \neg\psi$.*

iv. $\mathrm{H}(p)$ *ist isoliert im Ziegler-Spektrum.*

Beweis: Die Äquivalenz von i. und ii. ist [Pre 88, Proposition 8.8], die von i. und iii. ist klar, und die von i. und iv. ist etwa [Pre 88, Corollary 9.26]. ■

Ist φ eine pp-Formel für R-Linksmoduln, so sei $\mathrm{D}\varphi$ die duale pp-Formel für R-Rechtsmoduln. (Vergleiche [Pre 88, Her 93].) Wichtig ist (siehe etwa [Ste 75, Proposition I.8.8])

Lemma 1.1.9 *Seien X ein R-Rechtsmodul, M ein R-Linksmodul, $\bar{x} \in X$ und $\bar{a} \in M$ Tupel der gleichen Länge. Dann sind äquivalent:*

i. $\bar{x} \otimes \bar{a} = 0$ *in* $X \otimes_R M$.

ii. *Es gibt eine pp-Formel φ (für R-Linksmoduln), so daß $M \models \varphi(\bar{a})$ und $X \models \mathrm{D}\varphi(\bar{x})$.*

An Algebra setze ich fast nichts voraus oder zitiere dies ausführlich, zum Beispiel in Abschnitt 1.6. Das nächste Lemma ist mehr algebraischer Natur; mit $\mathrm{E}(M)$ werde die injektive Hülle des Moduls M bezeichnet:

Lemma 1.1.10 *M sei ein endlich präsentierter Modul. Dann sind äquivalent:*

i. *M ist injektiv in R-*mod.

ii. *M ist absolut rein, das heißt rein in jeder Erweiterung.*

iii. $\mathrm{H}(M) = \mathrm{E}(M)$.

Beweis: Für i. nach ii. sei X ein beliebiger R-Modul, $M \subseteq X$. Es genügt zu zeigen, daß M rein in jedem endlich erzeugten Untermodul N, $M \subseteq N \subseteq X$, ist. Ein solcher hat die Form $N \simeq R^n/I$ mit einem Ideal $I \leq R^n$. Die Inklusion von M in N induziert Einbettungen von M in jedes R^n/J, wobei $J \leq I$ ein Ideal ist, das die Relationen von M enthält. Da M endlich präsentiert ist, induziert die Inklusion von M in N also Einbettungen in jedes R^n/J, wo J ein genügend großes endlich erzeugtes Unterideal von I ist. Aber M ist nach Voraussetzung direkter Summand, insbesondere rein in diesen R^n/J. Also ist M auch rein in N.

Umgekehrt sei $M = \langle \bar{a} \rangle$ absolut rein und enthalten in dem endlich präsentierten N. Wir argumentieren mit dem weiter unten eingeführten Begriff der freien Realisierung. Wegen Satz 1.2.2 ist $(N, \bar{a})$ frei für eine pp-Formel φ. Nach Voraussetzung gilt auch $M \models \varphi(\bar{a})$, es gibt also einen die Inklusion zerfällenden Homomorphismus $(N, \bar{a}) \rightarrow (M, \bar{a})$. Das ist i. Für ii. nach iii. genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{H}(M)$ injektiv ist; dazu wiederum reicht es zu sehen, daß es absolut rein ist. Das folgt aber leicht aus der Konstruktion rein-injektiver Hüllen (Maximalität der in ihnen realisierten pp-Typen).

Es gelte nun iii., gegeben sei $M \subseteq N \subseteq \mathrm{E}(N)$. Für ii. zeigen wir die Reinheit von M in $\mathrm{E}(N)$ (und damit erst recht in N). Aber $M \subseteq \mathrm{H}(M) = \mathrm{E}(M) \subseteq \mathrm{E}(N)$, und die letzte Inklusion zerfällt. Somit ist M rein in $\mathrm{H}(M)$ und dieses in $\mathrm{E}(N)$, also M rein in $\mathrm{E}(N)$. ■

Ein Modul M ist genau dann unzerlegbar, wenn sein Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(M)$ kein nichttriviales Idempotentes e enthält. Nichttriviale Idempotente sind Nullteiler, also Nichteinheiten, und da mit einem Idempotenten e auch $1 - e$ Idempotentes ist, enthält der Endomorphismenring eines zerlegbaren Moduls insbesondere zwei Nichteinheiten, deren Summe 1 ergibt; die Menge der Nichteinheiten ist dann also kein Ideal, und der Modul hat jedenfalls keinen lokalen Endomorphismenring. Mit anderen Worten: Moduln mit lokalem Endomorphismenring sind unzerlegbar. (Für all dies siehe auch [Kas 77].) Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig (siehe etwa $\mathbf{Z}$), wohl aber falls M endliche Länge hat oder rein-injektiv ist.

1.2 Freie Realisierungen

In diesem Abschnitt sind einige später benutzte elementare Tatsachen versammelt, die um die Begriffe freie Realisierung, rein-projektiv kreisen. Der Begriff der freien Realisierung stammt von Prest, von ihm sind auch Lemma 1.2.1 und Satz 1.2.2 ([Pre 88]); die hier gegebenen Beweise sind von mir.

In [Her 92] kommen Teile von Lemma 1.2.3, Lemma 1.2.4 und Lemma 1.2.5 implizit vor, von den Äquivalenzen aber stets höchstens eine Richtung. Auch hier stammen die Beweise von mir. Satz 1.2.6 ist von Warfield ([War 69]), der Beweis von mir (und wohl der übliche); Lemma 1.2.7 ist vermutlich Folklore, sein Beweis von mir. Wir beginnen mit

Definition 1.1 M sei ein R-Modul, $\bar{a} \in M$ und $\varphi(\bar{x})$ eine pp-Formel. Das Paar $(M, \bar{a})$ heißt freie Realisierung von φ, falls M endlich präsentiert ist und ${}_RT \vdash \mathrm{tp}^+(\bar{a}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})$. Der Typ $\mathrm{tp}^+(\bar{a})$ (bzw. auch pp-tp$(\bar{a})$) heißt dann endlich erzeugt (durch φ).

Manchmal sagen wir auch nur, $(M, \bar{a})$ sei frei für φ. Das nächste Lemma werden wir ohne Kommentar ständig verwenden (siehe [Pre 88]):

Lemma 1.2.1 *M sei endlich präsentiert, $a \in M$, φ eine pp-Formel. Dann sind äquivalent:*

i. (M, a) ist freie Realisierung von φ.

ii. $a \in \varphi(M)$, und für jeden R-Modul N und jedes $b \in \varphi(N)$ gibt es einen Morphismus $f : M \to N$ mit $f(a) = b$.

Die von nun an verwandte Schreibweise $f : (M, a) \to (N, b)$ bedeute, daß f ein Homomorphismus von M nach N ist mit $f(a) = b$. – Es ist klar, daß umgekehrt aus der Existenz eines f wie im Lemma folgt, daß $b \in \varphi(N)$.

Beweis: Von i. nach ii. sieht man so: M sei erzeugt von $c_1, \dots, c_n$, deren Relationen aus der pp-Formel $\theta(x_1, \dots, x_n)$ folgen; a sei von der Form $a = \psi(c_1, \dots, c_n)$. Dann gilt

$$ {}_RT \vdash \varphi(x) \to \exists x_1 \dots x_n (\theta(x_1, \dots, x_n) \wedge x = \psi(x_1, \dots, x_n)). $$

Also gibt es zu b wie in ii. Elemente $d_1, \dots, d_n$ aus N, die θ erfüllen und so daß $b = \psi(d_1, \dots, d_n)$. Nach Wahl von θ existiert dann ein Morphismus, der c_i nach d_i und somit a nach b wirft. Die umgekehrte Richtung ist klar. ■

Satz 1.2.2 *Zu jeder konsistenten pp-Formel φ gibt es eine freie Realisierung (M, a). Jedes Paar (M, a) mit endlich präsentiertem M ist freie Realisierung einer geeigneten pp-Formel.*

Beweis: Der zweite Teil folgt ganz analog wie i. nach ii. im Beweis von Lemma 1.2.1. Der erste Teil folgt so: Die pp-Formel $\varphi = \varphi(\bar{x})$ hat die Form $\exists \bar{y}\ B\bar{y} = A\bar{x}$ mit geeigneten Matrizen A und B über R (also B eine $k \times m$-Matrix, A eine $k \times n$-Matrix). Dabei sei die Länge des Tupels $\bar{y}$ gerade m, und die von $\bar{x}$ sei n. Sei $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis von R^m, entsprechend $\bar{f}$ die von R^n. Dann hat das Paar $(M, \bar{a})$, mit $M := R^m \oplus R^n / \langle B\bar{e} - A\bar{f} \rangle$ und $\bar{a}$ den Restklassen von $\bar{f}$ die universelle Eigenschaft von Lemma 1.2.1 ii. (Man beachte: $B\bar{e} - A\bar{f}$ ist ein k-Tupel in $R^m \oplus R^n$.) $\blacksquare$

Freie Realisierungen einer pp-Formel sind nicht eindeutig bestimmt. (Man kann ja direkte Summanden zu jeder freien Realisierung hinzufügen und erhält wieder eine.) In manchen Situationen kann man aber eine Art minimale freie Realisierung finden; siehe Lemma 1.4.2.

Übrigens folgt nun sofort, daß ein partieller Homomorphismus $f : M \to N$ mit endlich erzeugtem Definitionsbereich von einem endlich präsentierten Modul M in einen beliebigen Modul N stets zu einem Homomorphismus erweiterbar ist: Denn sei der Definitionsbereich von f etwa erzeugt durch $\bar{a} \in M$. Dann ist $(M, \bar{a})$ freie Realisierung einer pp-Formel φ, es gilt $N \models \varphi(f(\bar{a}))$, und also existiert die gewünschte Erweiterung wegen der universellen Eigenschaft von Lemma 1.2.1.

Im nächsten Lemma halten wir einige (folkloristische?) Tatsachen (siehe teilweise [Her 92]) fest:

Lemma 1.2.3

i. *M sei endlich präsentiert, $M = \langle \bar{a} \rangle$. Dann sind äquivalent:*

   (a) *M ist projektiv.*

   (b) *$(M, \bar{a})$ ist frei für eine pp-Formel der Form $A \mid \bar{x}$, das heißt $\exists \bar{y}\ A\bar{y} = \bar{x}$.*

   Für (a) nach (b) wird die Voraussetzung $M = \langle \bar{a} \rangle$ nicht gebraucht.

ii. *Für eine pp-Formel φ sind äquivalent:*

   (a) *Es gibt eine freie Realisierung $(M, \bar{a})$ von φ, mit $M = \langle \bar{a} \rangle$.*

   (b) *φ ist modulo ${}_RT$ äquivalent zu einer pp-Formel der Gestalt $A\bar{x} = 0$.*

   (c) *Es gibt eine freie Realisierung $(M, \bar{a})$ von φ, so daß $M = R^n / \langle A\bar{e} \rangle$, wobei $\bar{e}$ die kanonischen Erzeugenden von R^n sind, für eine geeignete Matrix A und $\bar{a}$ das Bild von $\bar{e}$ unter der Projektion.*

Jede freie Realisierung von φ hat dann die Gestalt wie in (c).

iii. *Zu einer pp-Formel der Gestalt $A \mid \bar{x}$ gibt es stets eine freie Realisierung $(M, \bar{a})$ mit einem freien R-Modul M.*

iv. *$(M, \bar{a})$ sei frei für $A\bar{x} = 0$. Dann ist $\langle \bar{a} \rangle$ direkter Summand in M.*

Beweis: Es gelte i.(a), M sei also direkter Summand eines $R^n = \langle \bar{e} \rangle$. Dann gibt es eine Matrix A mit $A\bar{e} = \bar{a}$. Man sieht leicht, daß $(M, \bar{a})$ dann die universelle Eigenschaft von Lemma 1.2.1 ii. für $A \mid \bar{x}$ erfüllt. Umgekehrt sei nun M wie in i.(b); f sei eine Surjektion der Form $(R^n, \bar{e}) \to (M, \bar{a})$, wobei $R^n = \langle \bar{e} \rangle$. Es gibt ein $\bar{b} \in M$ mit $A\bar{b} = \bar{a}$; sei etwa $\bar{b} = f(\bar{d})$ für geeignetes $\bar{d} \in R^n$. Da $R^n \models A \mid A\bar{d}$, gibt es ein $g : (M, \bar{a}) \to (R^n, A\bar{d})$. Dann ist $fg = 1$ auf $\bar{a}$ und also auf ganz $M = \langle \bar{a} \rangle$: M ist direkter Summand von R^n. Das beweist i.(a) und beendet i.

Zu ii.: Sei nun $(M = \langle \bar{a} \rangle, \bar{a})$ freie Realisierung von φ; sei $\varphi \equiv \exists \bar{y}\ B\bar{y} = C\bar{x}$. Sei etwa $\bar{b} \in M$ mit $B\bar{b} = C\bar{a}$; es gibt eine Matrix D, so daß $\bar{b} = D\bar{a}$, also $BD\bar{a} = C\bar{a}$ und $(BD - C)\bar{a} = 0$. Setze $A := BD - C$. Dann zeigt wieder Lemma 1.2.1, daß $(M, \bar{a})$ frei ist für $A\bar{x} = 0$. Das ist die Richtung von (a) nach (b). Die Umkehrung von (b) nach (a) folgt, ebenso wie (b) nach (c) und iii., sofort aus dem Beweis von Satz 1.2.2. Da freie Realisierungen $(\langle \bar{a}_i \rangle, \bar{a}_i)$ isomorph sind, ist der Zusatz klar. Von ii.(c) nach (a) oder (b) ist klar. Das beendet ii. und iii.

Zu iv.: $A\bar{a} = 0$ gilt in $\langle \bar{a} \rangle$, also gibt es ein die Inklusion zerfällendes $(M, \bar{a}) \to (\langle \bar{a} \rangle, \bar{a})$. ∎

Lemma 1.2.4 *M sei endlich präsentiert, $\bar{a} \in M$.*

i. *Ist $(M, \bar{a})$ frei für eine pp-Formel φ, dann ist $\varphi(M)$ zyklischer* $\mathrm{End}_R M$-*Untermodul von M (genauer: von M^n).*

ii. *Endlich erzeugte* $\mathrm{End}_R M$-*Untermoduln von M sind pp-definierbar über R.*

Beweis: $\varphi(M)$ wird als $\mathrm{End}_R M$-Untermodul von $\bar{a}$ erzeugt: Denn für $\bar{b} \in \varphi(M)$ gibt es $f : (M, \bar{a}) \to (M, \bar{b})$, also ist $\bar{b} = f(\bar{a})$, $f \in \mathrm{End}_R M$. Umgekehrt gilt für $\bar{b} = f(\bar{a})$, $f \in \mathrm{End}_R M$, wegen $\varphi(\bar{a})$ auch $\varphi(\bar{b})$.

Es genügt, die zweite Behauptung nur für zyklische Untermoduln zu zeigen. Sei also $N = \langle \bar{a} \rangle$ als $\mathrm{End}_R M$-Untermodul. $(M, \bar{a})$ ist frei für eine pp-Formel φ. Dann gilt $\varphi(M) = N$. Denn jedes Element aus N hat die Form

$f(\bar{a})$ für ein $f \in \mathrm{End}_R M$, erfüllt also φ. Und umgekehrt gibt es zu $\bar{b} \in \varphi(M)$ wegen der Freiheit ein $f : (M, \bar{a}) \to (M, \bar{b})$. ■

Und als letztes Lemma zum Thema der freien Realisierungen hier noch

Lemma 1.2.5 *Sei $(M, \bar{a})$ freie Realisierung der pp-Formel φ, $M = \langle \bar{a} \rangle$. Dann sind äquivalent:*

i. $\mathrm{End}_R M$ *ist lokal.*

ii. M *ist unzerlegbar, und* φ *ist* $+$*-irreduzibel.*

Für eine Verfeinerung dieses Lemmas im Falle eines artinschen Ringes siehe Lemma 1.4.3. Man beachte, daß wegen Lemma 1.2.3 M die Form $R^n / \langle A\bar{e} \rangle$ und φ die Gestalt $A\bar{x} = 0$ hat.

Beweis: Sei zunächst $\mathrm{End}_R M$ lokal. Dann ist – wie am Ende von Abschnitt 1.1 bemerkt – M unzerlegbar. Sei nun im Verband der pp-Formeln $\varphi = \psi_1 + \psi_2$, mit ${}_RT \vdash \psi_i \to \varphi$; also gilt $\varphi(M) = \psi_1(M) + \psi_2(M)$. Wegen Lemma 1.2.4 ist $\varphi(M)$ zyklischer $\mathrm{End}_R M$-Modul, insbesondere ist $\varphi(M)$ nicht Summe zweier echter $\mathrm{End}_R M$-Untermoduln. Also ist etwa $\varphi(M) = \psi_1(M)$. Da $(M, \bar{a})$ frei für φ ist, gilt also auch ${}_RT \vdash \varphi \leftrightarrow \psi_1$.

Sei nun umgekehrt M unzerlegbar und φ $+$-irreduzibel, sei $f \in \mathrm{End}_R M$. Es ist $\bar{a} = f(\bar{a}) + (1 - f)(\bar{a})$. Sei $(M, f(\bar{a}))$ frei für ψ_1, $(M, (1 - f)(\bar{a}))$ frei für ψ_2, wobei ohne Einschränkung gelte ${}_RT \vdash \psi_i \to \varphi$. Dann folgt aus der universellen Eigenschaft der freien Realisierung (siehe Lemma 1.2.1), daß ${}_RT \vdash \varphi = \psi_1 + \psi_2$. Nach Voraussetzung gilt also etwa ${}_RT \vdash \varphi \leftrightarrow \psi_1$, also $\mathrm{tp}^+(f(\bar{a})) = \mathrm{tp}^+(\bar{a})$, $\text{pp-tp}(f(\bar{a})) = \text{pp-tp}(\bar{a})$.

Es gibt also einen Homomorphismus $g : (M, f(\bar{a})) \to (M, \bar{a})$, der folglich $gf = 1$ auf $\bar{a}$, also auf ganz M erfüllt. f ist insbesondere injektiv und $\mathrm{im}(f)$ direkter Summand von M. Wegen der Unzerlegbarkeit von M folgt, daß $\mathrm{im}(f) = M$ und somit f auch surjektiv. ■

Endlich präsentierte Moduln (also freie Realisierungen) sind insbesondere rein-projektiv, wie der folgende Satz von Warfield zeigt ([War 69]):

Satz 1.2.6

i. N *ist rein-projektiv genau dann wenn* N *direkter Summand in einer direkten Summe endlich präsentierter Moduln ist.*

ii. Jeder Modul ist Bild eines rein-projektiven Moduls unter einem reinen Epimorphismus.

Beweis: Es ist klar, daß direkte Summen rein-projektiver Moduln, ebenso wie direkte Sumanden solcher, wieder rein-projektiv sind. Daher folgt der Satz sofort aus den nächsten beiden Behauptungen.

Behauptung 1: Endlich präsentierte Moduln sind rein-projektiv.

Beweis der Behauptung: Sei N endlich präsentiert, erzeugt von $\bar{a}$ und $(N, \bar{a})$ frei für φ. Sei weiter $g : E \to N$ reiner Epimorphismus. Es gibt also ein $\bar{b} \in \varphi(E)$ mit $g(\bar{b}) = \bar{a}$. Da $(N, \bar{a})$ frei für φ ist, existiert andererseits ein $h : (N, \bar{a}) \to (E, \bar{b})$. Da N von $\bar{a}$ erzeugt wird, zerfällt h den Epimorphismus g.

Behauptung 2: Jeder Modul N ist Bild einer direkten Summe endlich präsentierter Moduln unter einem reinen Morphismus.

Beweis der Behauptung: Sei M ein endlich präsentierter Modul; sei $E_M := \oplus_f M$, wobei f die von Null verschiedenen Morphismen von M nach N durchläuft. Und sei schließlich $E := \oplus_M E_M$, wobei M ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen endlich präsentierter Moduln durchläuft. Dann wird auf natürliche Weise ein Morphismus $g : E \to N$ induziert, der surjektiv ist, da insbesondere die endlich erzeugten freien Moduln R^n direkte Summanden von E sind. Wegen Satz 1.1.4 ist g reiner Epimorphismus. ■

Lemma 1.2.7 *Ein rein-projektiver Modul N mit lokalem Endomorphismenring ist endlich präsentiert.*

Beweis: Mit dem vorangehenden Satz 1.2.6 erhalten wir eine Darstellung $N \oplus X = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit einem Modul X und endlich präsentierten M_i. Sei $a \in N \setminus 0$, etwa (in etwas ungenauer Schreibweise) $a \in \bigoplus_{i \in I_0} M_i =: M$ mit einer endlichen Menge $I_0 \subseteq I$. Nun sei $\pi : N \to M$ die durch die Projektion $N \oplus X \to M$ induzierte Abbildung, $\pi' : M \to N$ entsprechend die durch die Projektion auf N induzierte Abbildung. Dann gilt $1_N = \pi'\pi + (1 - \pi'\pi)$; da $\mathrm{End}_R N$ lokal ist, folgt, daß einer der beiden Summanden ein Automorphismus ist. Weil aber $(1 - \pi'\pi)(a) = a - a = 0$ ist, muß $\pi'\pi$ ein Automorphismus sein. Also ist N direkter Summand des endlich präsentierten Moduls M, somit selbst endlich präsentiert. ■

1.3 Dedekind-Ringe

Dedekind-Ringe, vor allem Hauptidealringe – nämlich $k[X]$, k ein kommutativer Körper – sind grundlegend für die Beschreibung der Ziegler-Spektra von Köcheralgebren. Deshalb fasse ich hier kurz die relevante Information, vor allem aus [Zie 84], zusammen, um Notationen festzulegen. Die ersten Lemmata sind natürlich wohlbekannt; die Aussagen über das Spektrum stammen von Martin Ziegler ([Zie 84]). Ich habe hier lediglich die Rechnungen von Lemma 1.3.4 durchgeführt.

Lemma 1.3.1 *Ein endlich erzeugter (kommutativer) Körper ist endlich.*

Beweis: Sei L endlich erzeugter Körper, F der Primkörper von L. Es genügt zu zeigen, daß L algebraisch über F ist. Aber L wird durch ein Ideal in $F[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben, welches nach dem Hilbertschen Nullstellensatz eine Nullstelle im algebraischen Abschluß $\tilde{F}$ von F hat: L läßt sich also über F in $\tilde{F}$ einbetten. ∎

Die nötigen algebraischen Tatsachen über Dedekind-Ringe findet man überall, zum Beispiel auch in [Kap 74]. Wir zitieren für späteren Gebrauch eine Folgerung aus [Kap 74, Theorem 60]:

Lemma 1.3.2 *Ein Dedekind-Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen ist ein Hauptidealbereich.*

Sei R nun ein Dedekind-Ring. Den Fall, daß R ein Körper ist, werden wir, da er stets uninteressant ist, meist ausschließen. Zunächst noch ein Lemma:

Lemma 1.3.3 *Sei R Dedekind-Ring und kein Körper, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal.*

i. $R/\mathfrak{p}^n \simeq R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n R_\mathfrak{p}$.

ii. $\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n \simeq R/\mathfrak{p}$.

Beweis: i. ist klar, und ii. folgt mit i. so:

$$R/\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}^{n-1}R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n R_\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n.$$

Dabei ist der erste Isomorphismus i., der dritte wird durch den Isomorphismus von i. induziert, und der zweite ist klar ($R_\mathfrak{p}$ ist Hauptidealring.). ∎

Man beachte noch, daß ein endlicher Dedekind-Ring (als endlicher Integritätsbereich) ein Körper ist. Von nun an setzen wir voraus, R sei (unendlicher) Dedekind-Ring und kein Körper. Martin Ziegler hat das Ziegler-Spektrum von R bestimmt; eine vollständige Liste der rein-injektiven Unzerlegbaren ohne Wiederholungen ist:

- Moduln der Form $R/\mathfrak{p}^n$, $\mathfrak{p}$ maximales Ideal, $n \geq 1$,
- $R_{\mathfrak{p}^\infty} = K/R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ (Prüfer-Moduln, oder kurz: Prüfer), $\mathfrak{p}$ maximales Ideal, K der Quotientenkörper von R,
- $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$-adische Moduln, oder kurz: $\mathfrak{p}$-adische),$\mathfrak{p}$ maximales Ideal, und
- K, der Quotientenkörper von R.

Man kann Umgebungsbasen angeben:

- $R/\mathfrak{p}^n$ wird isoliert durch $(O_{R/\mathfrak{p}^n})$, mit
$$O_{R/\mathfrak{p}^n} := (\mathfrak{p}^{n-1} \,|\, x \wedge \mathfrak{p}x = 0)/(\mathfrak{p}^n \,|\, x \wedge \mathfrak{p}x = 0).$$
- Eine Umgebungsbasis von $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ wird gegeben durch die $(O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}})$, mit
$$O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}} := (\mathfrak{p}x = 0 \wedge \mathfrak{p}^m \mid x)/\, x = 0, m \geq 1,$$
wobei in $\mathrm{I}(R)$ gilt:
$$(O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}}) = \{R_{\mathfrak{p}^\infty}\} \cup \{R/\mathfrak{p}^n \mid n > m\}.$$
- Eine Umgebungsbasis von $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}$ wird gegeben durch die $(O^m_{\tilde{R}_{\mathfrak{p}}})$, mit
$$O^m_{\tilde{R}_{\mathfrak{p}}} := \mathfrak{p}^m | x \,/\, \mathfrak{p}^{m+1} | x, m \geq 1,$$
wobei in $\mathrm{I}(R)$ gilt:
$$(O^m_{\tilde{R}_{\mathfrak{p}}}) = \{\tilde{R}_{\mathfrak{p}}\} \cup \{R/\mathfrak{p}^n \mid n > m\}.$$
- Umgebungsbasis von K sind die (O^r_K), mit
$$O^r_K := (x = x) \,/\, rx = 0, r \in R,$$
wobei (O^r_K) in $\mathrm{I}(R)$ koendlich ist und bis auf endlich viele der Isolierten $R/\mathfrak{p}^n$ alle rein-injektiven Unzerlegbaren enthält.

Für Anwendungen in Kapitel 7 stellen wir hier noch die von 1 verschiedenen pp-Indizes der Form $O(U)$ zusammen, O eines der eben angegebenen pp-Paare, U eines der rein-injektiven Unzerlegbaren:

Lemma 1.3.4 *R sei Dedekind-Ring und kein Körper.*

i. $O_{R/\mathfrak{p}^n}(R/\mathfrak{p}^n) = |R/\mathfrak{p}|$.

ii. $O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}}(R/\mathfrak{p}^n) = |R/\mathfrak{p}|$, *falls* $n > m$, $O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}}(R_{\mathfrak{p}^\infty}) = |R/\mathfrak{p}|$.

iii. $O^m_{\tilde{R}_\mathfrak{p}}(R/\mathfrak{p}^n) = |R/\mathfrak{p}|$, *falls* $n > m$, $O^m_{\tilde{R}_\mathfrak{p}}(\tilde{R}_\mathfrak{p}) = |R/\mathfrak{p}|$.

iv. $O^r_K(R/\mathfrak{p}^n) = |R/\mathfrak{p}|^{n-k_\mathfrak{p}}$, *falls in der Primidealzerlegung von* (r) *das Ideal* $\mathfrak{p}$ *genau* $k_\mathfrak{p}$*-mal vorkommt.* $O^r_K(U) = \infty$, *falls* U *eines der nicht-isolierten rein-injektiven Unzerlegbaren ist und* $r \in R \setminus 0$.

Alle anderen pp-Indizes sind gleich 1.

Beweis: Hier bezeichne $\varphi/\psi(U)$ einerseits die abelsche Gruppe $\varphi(U)/\psi(U)$, andererseits auch deren Kardinalität.

i. folgt sofort mit Lemma 1.3.3, denn $O_{R/\mathfrak{p}^n}(R/\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n$.

Zu ii. beachte man, daß $O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}}(R/\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n$, falls $n > m$ (und $= 0$ sonst), und nun Lemma 1.3.3; weiter $O^m_{R_{\mathfrak{p}^\infty}}(R_{\mathfrak{p}^\infty}) = (\mathfrak{p}x = 0/x = 0)(K/R_\mathfrak{p}) = |R/\mathfrak{p}|$, denn ein Isomorphismus zwischen $R/\mathfrak{p}$ und $(\mathfrak{p}x = 0/x = 0)(K/R_\mathfrak{p})$ wird gegeben durch $a + \mathfrak{p} \mapsto a/p + R_\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = (p)$.

Zu iii.: Es ist $O^m_{\tilde{R}_\mathfrak{p}}(R/\mathfrak{p}^n) = (\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)/(\mathfrak{p}^{m+1}/\mathfrak{p}^n) \simeq \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^{m+1} \simeq R/\mathfrak{p}$, falls $n > m$; außerdem gilt die Gleichheit $O^m_{\tilde{R}_\mathfrak{p}}(\tilde{R}_\mathfrak{p}) = O^m_{\tilde{R}_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$, die aus der elementaren Äquivalenz von $\tilde{R}_\mathfrak{p}$ und $R_\mathfrak{p}$ folgt.

Zu iv.: K und die $\mathfrak{p}$-adischen Moduln sind torsionsfrei, und mit R sind auch K und $R_\mathfrak{p}$, also auch K und $\tilde{R}_\mathfrak{p}$ unendlich; folglich gilt für $r \neq 0$, daß $O^r_K(V) = |V| = \infty$, falls V eines der $\tilde{R}_\mathfrak{p}$ oder K ist. Es ist leicht zu sehen, daß auch die $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ unendlich sind (echt absteigende Kette von pp-Untergruppen $\mathfrak{p}^i x = 0$); da sie nur $\mathfrak{p}$-Torsion haben, ist auch für sie alles klar. Die pp-Indizes $O^r_K(R/\mathfrak{p}^n)$ ergeben sich leicht mit Lemma 1.3.3. ■

Die Topologie läßt sich also wie folgt beschreiben: Die Unzerlegbaren $R/\mathfrak{p}^n$ sind isoliert, haben daher Cantor-Bendixon-Rang 0, und sie sind abgeschlossen; die Prüfer- und $\mathfrak{p}$-adischen Moduln haben Rang 1, und das einzige Unzerlegbare von Rang 2 ist K. Der Abschluß eines der Prüfer- oder $\mathfrak{p}$-adischen Moduln V ist gerade $\{V, K\}$.

1.4 Artinsche Ringe

Dieser kurze Abschnitt enthält Wohlbekanntes aus der Algebra, außerdem Lemma 1.4.2 von Prest ([Pre 88]), das erlaubt, den Begriff der endlichen Hülle (Prest) eines endlich erzeugten pp-Typs zu definieren. Lemma 1.4.3 verbessert für artinsche Ringe Lemma 1.2.5 und scheint neu zu sein.

Sei im folgenden R ein linksartinscher Ring.

Für einen (Links-) Modul M über R sind äquivalent (siehe etwa [Kas 77, Folgerung 9.3.12]):

i. M ist endlich erzeugt.

ii. M ist artinsch.

iii. M ist noethersch.

Insbesondere ist also R^n noethersch, und damit ist eine weitere äquivalente Aussage

iv. M ist endlich präsentiert.

Es gilt, daß ein endlich präsentierter Modul genau dann projektiv in R-mod ist, wenn er projektiv in R-Mod ist; ist nämlich M projektiv in R-mod, so ist M direkter Summand in einem R^n, damit also auch projektiv in R-Mod. die entsprechende Aussage für Injektivität gilt aber auch bei artinschen Ringen im allgemeinen nicht. Stattdessen hat man nur Lemma 1.1.10.

Lemma 1.4.1 *(Fittings Lemma) Sei R artinscher Ring, M endlich erzeugter Modul und $f \in \mathrm{End}_R M$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $M = \mathrm{im}(f^k) \oplus \ker(f^k)$.*

Das ist klar und steht überall.

Im artinschen Fall hat man eine Art Eindeutigkeit von (minimalen) freien Realisierungen, die es erlaubt, einen Hüllenbegriff für endliche Teilmengen von endlich präsentierten Moduln bzw. für endlich erzeugte pp-Typen zu definieren, der sich für die Kategorie der endlich präsentierten Moduln als ähnlich nützlich erweist, wie der Begriff der rein-injektiven Hülle in der Kategorie aller Moduln:

Lemma 1.4.2 *Seien $(M, \bar{a})$ und $(N, \bar{b})$ minimale freie Realisierungen der pp-Formel φ, das heißt kein echter direkter Summand von M bzw. N ist ebenfalls freie Realisierung von φ. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : (M, \bar{a}) \to (N, \bar{b})$.*

Es genügt zu verlangen, daß kein echter direkter Summand, der $\bar{a}$ enthält, frei für φ ist, das heißt, daß $\bar{a}$ in keinem echten direkten Summanden liegt; analog für $\bar{b}$.

Beweis: Denn es gibt $f : (M, \bar{a}) \to (N, \bar{b})$ und $g : (N, \bar{b}) \to (M, \bar{a})$; wegen Lemma 1.4.1 gibt es ein n mit $M = \mathrm{im}(gf)^n \oplus \ker(gf)^n$. Da gf auf $\bar{a}$ die Identität ist, folgt $\bar{a} \in \mathrm{im}(gf)^n$; wegen der Minimalität ist also $M = \mathrm{im}(gf)^n$ und $\ker(gf)^n = 0$, insbesondere also f injektiv und g surjektiv. Mit N schließt man analog. ■

Nun kann man für einen endlich erzeugten pp-Typ p die *endliche Hülle* (besser wäre eigentlich: endlich präsentierte Hülle) von p, $\mathrm{N}(p)$, definieren als die minimale freie Realisierung der pp-Formel φ mit ${}_RT \vdash p \leftrightarrow \varphi$. Der Beweis des Lemmas zeigt auch, wie man die endliche Hülle einer endlichen (oder endlich erzeugten) Teilmenge eines endlich präsentierten Moduls definieren muß. – Hier noch eine Ergänzung zu Lemma 1.2.5:

Lemma 1.4.3 *R sei artinsch, $(M = \langle\bar{a}\rangle, \bar{a})$ freie Realisierung von φ. Dann sind äquivalent:*

i. M ist unzerlegbar.

ii. $\mathrm{End}_R M$ ist lokal.

iii. φ ist $+$-irreduzibel.

Beweis: Wegen Lemma 1.2.5 genügt es, iii. nach ii. zu zeigen, und wie im Beweis dieses Lemmas folgt für $f \in \mathrm{End}_R M$, daß ohne Einschränkung $\text{pp-tp}(\bar{a}) = \text{pp-tp}(f(\bar{a}))$. Es gibt also ein g, so daß gf auf $\bar{a}$ die Identität ist, f insbesondere injektiv. Wegen Lemma 1.4.1 ist ist für ein geeignetes n aber $M = \mathrm{im}(f^n) \oplus \ker(f^n)$. Weil f injektiv ist, ist $\ker(f^n) = 0$ und also f auch surjektiv. ■

In der Darstellungstheorie von artinschen Ringen sind die folgenden Begriffe zentral:

Definition 1.2 Sei R ein beliebiger Ring.

i. R heißt links-rein-halbeinfach, falls jeder R-Linksmodul direkte Summe unzerlegbarer R-Linksmoduln ist.

ii. R heißt von endlichem Darstellungstyp (links), falls R links-rein-halbeinfach ist und es nur endlich viele endlich erzeugte unzerlegbare R-Linksmoduln gibt.

Für Informationen zu diesen Begriffen, insbesondere für das Folgende (und viele äquivalente Formulierungen), siehe etwa [Pre 88] und am besten [Pre 84].

Ein links-rein-halbeinfacher Ring ist links-artinsch, und unzerlegbare R-Linksmoduln sind endlich erzeugt. Ein Ring ist genau dann links-rein-halbeinfach, wenn jeder R-Modul (damit meine ich nun wieder: Linksmodul) rein-injektiv ist. Daher ist ein (dann links-artinscher) Ring von endlichem Darstellungstyp (links), genau dann wenn er links-rein-halbeinfach ist und es nur endlich viele unzerlegbare Moduln gibt. Ein links-artinscher Ring ist genau dann von endlichem Darstellungstyp (links), wenn er links- und rechts-rein-halbeinfach ist, also genau dann wenn er von endlichem Darstellungstyp (rechts) ist. Man sagt dann kurz, er sei von endlichem Darstellungstyp.

1.5 Artin-Algebren

Unser Hauptinteresse gilt endlichdimensionalen Algebren über Körpern; da viele der zum Beweis des Entscheidbarkeitsatzes benötigten Resultate aber für die größere Klasse der Artin-Algebren gelten, führen wir diese hier kurz ein.

Artin-Algebren sind schön, weil es für sie im Gegensatz zu beliebigen artinschen Ringen eine gute Dualitätstheorie gibt. Fundamental hierfür ist der wohlbekannte Satz 1.5.2; der hier von mir gegebene Beweis ist motiviert durch [Har 67]. 1.5.3 bis 1.5.6 verallgemeinern Ergebnisse aus [PRZ 94] und sind von mir, allerdings keine Heldentaten; Lemma 1.5.7 und Korollar 1.5.8 sind vermutlich bekannt, die Beweis hier aber meine.

Definition 1.3 Ein Ring R heißt Artin-Algebra, falls er endlich erzeugt über seinem Zentrum ist und dieses artinsch ist.

Das Zentrum einer Artin-Algebra R werde ich stets mit C bezeichnen; äquivalent wäre es zu definieren: R ist eine C-Algebra über einem kommutativen artinschen Ring C und als Modul über diesem endlich erzeugt.

Beispiele für Artin-Algebren sind endliche Ringe, kommutative artinsche Ringe, endlichdimensionale Algebren über Körpern.

Eine Artin-Algebra ist links- und rechtsartinsch, also auch links- und rechtsnoethersch. Für einen (Links-) Modul M über einer Artin-Algebra R sind äquivalent (Dies folgt aus der Überlegung auf Seite 22.):

i. M ist endlich erzeugt (als R- oder C-Modul).

ii. M ist artinsch (als R- oder C-Modul).

iii. M ist noethersch (als R- oder C-Modul).

iv. M ist endlich präsentiert (als R-oder C-Modul).

Da C kommutativ ist, sind pp-Untergruppen (über R oder C) von M auch C-Untermoduln. Insbesondere erfüllen endlich erzeugte Moduln die dcc und acc für pp-definierbare Untergruppen. Folglich sind endlich erzeugte Moduln totaltranszendent und somit erst recht rein-injektiv.

Trivialerweise ist jeder endlich erzeugte Modul direkte Summe von (unzerlegbaren) Moduln mit lokalem Endomorphismenring. Es gilt also der Satz von Krull-Remak-Schmidt über die Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung. (Wenn man will, folgt dies auch aus den entsprechenden Sätzen über rein-injektive Moduln.)

Für einen endlich erzeugten Modul M sind äquivalent:

i. M ist injektiv (bzw. projektiv) in R-mod.

ii. M ist injektiv (bzw. projektiv) in R-Mod.

Denn ist M injektiv in R-mod, dann ist (siehe Lemma 1.1.10) $\mathrm{H}(M) = \mathrm{E}(M)$; da aber M rein-injektiv ist, folgt $M = \mathrm{H}(M) = \mathrm{E}(M)$, und M ist injektiv. Die Umkehrung ist klar. Die Aussage über Projektivität wurde schon im Abschnitt über artinsche Ringe gezeigt.

Die für uns wesentliche Eigenschaft, die Artin-Algebren von beliebigen artinschen Ringen unterscheidet und die wir ständig ausnutzen werden, ist die Existenz einer Dualität (für R-mod und mod-R), die die übliche Dualität bei Vektorräumen über Körpern verallgemeinert. Da mir keine vernünftige Referenz für die später benötigten Tatsachen bekannt ist, stelle ich sie hier kurz zusammen (Man vergleiche aber [Har 67].); dabei bezeichne $\mathrm{rad}(R)$ das Jacobson-Radikal des Ringes R:

Tatsache 1.5.1 *Sei C kommutativ artinsch. Dann hat C nur endlich viele maximale Ideale und $C/\mathrm{rad}(C)$ ist halbeinfach, also endliches Produkt von Körpern.*

(Siehe etwa [Kas 77].)

Satz 1.5.2 *C sei kommutativ artinsch, E sei die injektive Hülle (in der Kategorie der C-Moduln) von $C/\mathrm{rad}(C)$. Dann ist E als C-Modul endlich erzeugt und injektiver Kogenerator in C-*mod *und in C-*Mod.

Beweis: Endlich erzeugte Moduln haben Kompositionsreihen mit Kompositionsfaktoren der Form $C/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Sei nun X ein C-Modul, sei $x \in X \setminus 0$. Um zu sehen, daß E Kogenerator ist, ist zu zeigen, daß es einen Morphismus $X \to E$ gibt, der x auf ein Element ungleich 0 wirft. Wegen der Injektivität von E genügt es, einen Morphismus $f : Cx \to E$ mit $f(x) \neq 0$ (das heißt $f \neq 0$) anzugeben. Cx hat eine Kompositionsreihe der anfangs angegebenen Form, etwa $Cx = C_0 \geq C_1 \geq \ldots$. Dann hat also Cx einen Quotienten der Form $C/\mathfrak{m}$ (nämlich Cx/C_1); die Projektion auf diesen Quotienten liefert also einen Morphismus ungleich Null $Cx \to C/\mathfrak{m}$. Die Faktorisierung $Cx \to C/\mathrm{rad}(C) \to C/\mathfrak{m}$ zeigt, daß x auf ein Element ungleich Null in $C/\mathrm{rad}(C) \leq E$ abgebildet wird. – Es bleibt zu zeigen, daß E endlich erzeugt ist: Wir zeigen zunächst:

Behauptung: $\mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, E) \simeq C/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal.

Beweis der Behauptung: Nach [SV 72, Proposition 2.27] folgt, daß $\mathrm{ann}_E(\mathfrak{m}) \subseteq C/\mathrm{rad}(C)$. (Denn dort wird gezeigt, daß $\mathrm{ann}_E(\mathfrak{m})$ injektive Hülle (als $C/\mathfrak{m}$-Vektorraum) von $C/\mathrm{rad}(C) \cap \mathrm{ann}_E(\mathfrak{m})$ ist; da Vektorräume stets injektiv sind, folgt $C/\mathrm{rad}(C) \cap \mathrm{ann}_E(\mathfrak{m}) = \mathrm{ann}_E(\mathfrak{m})$, also das Gewünschte.) Aber für jedes $f \in \mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, E)$ gilt $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{ann}_E(\mathfrak{m})$. Also ist $\mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, E) = \mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, C/\mathrm{rad}(C))$, und letzteres bleibt zu bestimmen. Aber offenbar ist $\mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, C/\mathrm{rad}(C))$ isomorph zu $\mathrm{ann}_{C/\mathrm{rad}(C)}(\mathfrak{m})$, und die Behauptung folgt aus der

Teilbehauptung: $\mathrm{ann}_{C/\mathrm{rad}(C)}(\mathfrak{m}) \simeq C/\mathfrak{m}$.

Beweis der Teilbehauptung: $C/\mathrm{rad}(C)$ ist isomorph zum Produkt der $C/\mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n}$ die maximalen Ideale von C durchläuft. Dann ist aber $\mathrm{ann}_{C/\mathrm{rad}(C)}(\mathfrak{m})$ gleich $C/\mathfrak{m}$, da $\mathfrak{m}$ in $C/\mathfrak{n}$ nur 0 annuliert, falls $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$. Damit ist die Teilbehauptung, und somit auch die Behauptung, bewiesen.

Nun hat C eine Kompositionsreihe mit Quotienten der Form $C/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ maximales Ideal. $\mathrm{Hom}_C(C, E)$ hat dann eine Kompositionsreihe mit Quotienten der Gestalt $\mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}, E)$; nach der eben gezeigten Behauptung sind die in dieser Kompositionsreihe auftretenden Faktoren aber isomorph den Faktoren derjenigen von C, folglich also $\mathrm{Hom}_C(C, E)$ endlich erzeugt. Aber dieser Modul ist isomorph zu E. ■

Sei nun R weiter eine Artin-Algebra mit Zentrum C, sei E wie eben definiert. Ist M ein C-Modul, so nennen wir den C-Modul $\mathrm{Hom}_C(M, E)$ das Duale von M und bezeichnen ihn mit $M^\star$. Man beachte, daß dies vom Gebrauch von $\star$ in Satz 1.1.4 und Satz 1.1.5 abweicht.

Für R-Linksmoduln M wird $\mathrm{Hom}_C(M, E)$ durch die Festsetzung fr :

$m \mapsto f(rm), r \in R, m \in M, f \in \mathrm{Hom}_C(M, E)$ zu einem R-Rechtsmodul, den wir ebenfalls mit $M^\star$ bezeichnen: Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich sein, ob der C-Modul oder der R-Modul gemeint ist.

Definiert man nun analog [PRZ 94] für C-Untermoduln W des R-Moduls M, daß $W^\perp := \{f \in M^\star \mid f \restriction W = 0\}$ und entsprechend für C-Untermoduln V von $M^\star$, daß $V^\perp := \{a \in M \mid f(a) = 0 \text{ für alle } f \in V\}$, dann gilt entsprechend [PRZ 94] (hierfür wird nur gebraucht, daß E injektiver Kogenerator ist) für $W \leq M$, daß $W^{\perp\perp} = W$; für endlicherzeugtes $V \leq M^\star$, daß $V^{\perp\perp} = V$; und für C-Untermoduln $W_1 \leq W_2$ von M, daß $(W_2/W_1)^\star \simeq W_1^\perp/W_2^\perp$. Da der letzte Isomorphismus die R-Strukturen (von links bzw. rechts), so vorhanden, respektiert, gilt insbesondere für R-Untermoduln $U \leq M$, daß $(M/U)^\star \simeq U^\perp$, als R-Rechtsmoduln.

Bevor wir die wesentlichen Eigenschaften dieser Dualität notieren, zunächst noch ein Lemma zu C-Moduln:

Lemma 1.5.3 *Sei M ein endlich präsentierter C-Modul. Dann ist die kanonische Abbildung $M \to M^{\star\star}$ von M in das Biduale von M ein Isomorphismus und $M^\star$ ebenfalls endlich präsentiert.*

Beweis: M hat eine Kompositionsreihe mit Faktoren der Form $C/\mathfrak{m}$; wie im letzten Absatz des Beweises von Satz 1.5.2 sieht man, daß dann $M^\star$ endlich präsentiert ist. (Außerdem zeigt dieses Argument, daß M und $M^\star$ die gleiche Mächtigkeit haben; dies wird gleich gebraucht.) Das zeigt die zweite Behauptung.

Die erste Behauptung zeigt man durch Induktion über die Länge von M: Hat M die Länge 1, dann ist M ein Modul der Form $C/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Die Behauptung im Beweis von Satz 1.5.2 zeigt, daß dann M und sein Biduales $M^{\star\star}$ (im allgemeinen nicht-kanonisch) isomorph sind; da die natürliche Abbildung $M \to M^{\star\star}$ sicherlich nicht die Nullabbildung ist, und da M und sein Biduales Körper sind (und da ein C-Morphismus erst recht $C/\mathfrak{m}$-Morphismus ist), muß sie ein Isomorphismus sein.

M habe nun Länge größer 1. Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

mit Moduln M', M'' kleinerer Länge. Dadurch wird ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M')^{\star\star} \arrow[r] & M^{\star\star} \arrow[r] & (M'')^{\star\star} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induziert, in dem die beiden äußeren Morphismen nach Induktionsvoraussetzung Isomorphismen sind. Also ist auch $M \to M^{\star\star}$ Isomorphismus. ■

Ist M nun ein endlich präsentierter R-Modul, dann sieht man sofort, daß die angegebenen C-Morphismen die R-Modulstruktur respektieren. Wir erhalten also zusammenfassend:

Satz 1.5.4 *Sei R Artin-Algebra, M ein R-Modul.*

i. *Seien W und $W_1 \leq W_2$ C-Untermoduln von M, V ein endlich erzeugter C-Untermodul von $\mathrm{D}(M)$. Dann gilt $W = W^{\perp\perp}$, $V = V^{\perp\perp}$ und $(W_2/W_1)^\star \simeq W_1^\perp/W_2^\perp$.*

ii. *Sei U ein R-Untermodul von M. Dann hat man einen Isomorphismus (von R-Rechtsmoduln) $(M/U)^\star \simeq U^\perp$.*

iii. *Ist M endlich präsentierter R-Modul, dann ist auch $M^\star$ endlich präsentiert, und die kanonische Abbildung von M in sein Biduales $M^{\star\star}$ ist ein Isomorphismus.* ■

Korollar 1.5.5 *R sei Artin-Algebra, M ein R-Modul, $U \leq M$ R-Untermodul. Dann ist $U^\perp$ genau dann endlich erzeugt, wenn M/U endlich erzeugt ist, und in diesem Fall ist $M/U \simeq (U^\perp)^\star$.*

Beweis: Denn nach Satz 1.5.4 ii. ist $(M/U)^\star \simeq U^\perp$; falls also M/U endlich erzeugt ist, dann auch $U^\perp$. Umgekehrt ist wieder wegen Satz 1.5.4 ii. mit $U^\perp$ auch $(M/U)^\star$ endlich erzeugt, somit (Satz 1.5.4 iii.) auch $(M/U)^{\star\star}$. Da M/U jedenfalls injektiv eingebettet ist in $(M/U)^{\star\star}$, ist auch M/U endlich erzeugt. Dann folgt aber $M/U \simeq (M/U)^{\star\star} \simeq (U^\perp)^\star$, wieder mit Satz 1.5.4. ■

Die Ergebnisse von [PRZ 94, Section 1.3] lassen sich auch auf Artin-Algebren übertragen: Ganz analog wie dort kann man, indem man $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ durch E ersetzt und $M^\star$ gemäß der hiesigen Definition interpretiert, das Duale einer Theorie T von R-Linksmoduln, $\mathrm{D}T$, definieren und beweisen (Hier benutzt man, daß pp-Untergruppen von R-Moduln C-Moduln sind und endlich präsentierte C-Moduln N mit ihrem $N^\star$ gleichmächtig sind; siehe die Beobachtung im Beweis von Lemma 1.5.3.):

Satz 1.5.6 *R sei eine Artin-Algebra, D die oben definierte Dualität für Artin-Algebren, T eine Theorie von R-Linksmoduln. Dann gilt:*

i. $\mathrm{D}T$ *ist wohldefiniert.*

ii. T *ist konsistent genau dann wenn* $\mathrm{D}T$ *konsistent ist.*

iii. Ein R-Linksmodul M ist Modell von T genau dann wenn $M^\star$ Modell von $\mathrm{D}T$ *ist.* ■

Ein R-Untermodul N des R-Moduls M heiße koendlich erzeugt, falls M/N endlich erzeugt ist. Es ist klar, daß der Schnitt $N_1 \cap N_2$ zweier koendlich erzeugter Untermoduln wieder koendlich erzeugt ist (da $M/N_1 \cap N_2 \hookrightarrow M/N_1 \times M/N_2$; und da mit $M/N_1 \times M/N_2$ also auch $M/N_1 \cap N_2$ endlich erzeugt ist – hier wird nur verwandt, daß R noethersch ist). Außerdem gilt für $g : M \to M' \geq N$, daß mit M'/N auch $M/g^{-1}(N)$ endlich erzeugt ist, denn $M/g^{-1}(N) \hookrightarrow M'/N$ (und R noethersch).

Lemma 1.5.7 *Sei R Artin-Algebra, M ein R-Linksmodul und $a \in M \setminus 0$. Dann gibt es einen koendlich erzeugten R-Untermodul $N \leq M$, der a nicht enthält.*

Beweis: Da E injektiver Kogenerator in der Kategorie der C-Moduln ist, gibt es ein $f \in M^\star$ mit $f(a) \neq 0$. Betrachte den C-Untermodul $\ker(f)$ von M; es gilt $a \notin \ker(f)$ und $M/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f) \leq E$; da E endlich präsentierter C-Modul (wegen Satz 1.5.2) und somit noethersch ist, ist $\mathrm{im}(f)$ endlich erzeugter C-Untermodul. $\ker(f)$ ist also ein koendlich erzeugter C-Untermodul, der a nicht enthält.

Sei nun $1 = a_1, \ldots, a_s$ ein C-Erzeugendensystem von R. Nach den Bemerkungen vor dem Lemma ist dann $N := \bigcap_{i=1}^s a_i^{-1}(\ker(f))$ koendlich erzeugt, enthält a nicht und ist R-Untermodul. ■

Korollar 1.5.8 *R sei Artin-Algebra. Die koendlich erzeugten Untermoduln eines R-Moduls bilden eine absteigend gerichtete, kofinale Familie.*

Beweis: Dies ist nur Lemma 1.5.7 (zusammen mit den Bemerkungen unmittelbar davor). ■

Sind C_1 und C_2 zwei kommutative Unterringe der Artin-Algebra R, so daß R endlich erzeugt über C_i ist, dann werden durch C_1 und C_2 wie eben durch C zunächst zwei Dualitäten induziert. Man kann aber zeigen (siehe [Har 67]), daß sie natürlich äquivalent sind. Deshalb werde ich bei Artin-Algebren stets von *der* Dualität reden, ohne tatsächlich zu verwenden, daß C das Zentrum von R ist. Jeder kommutative Unterring, über dem R endlich erzeugt ist, tut es auch.

1.6 Endlichdimensionale Algebren

Die Entscheidbarkeitsergebnisse in Kapitel 6 handeln von endlichdimensionalen Algebren; in diesem Abschnitt fasse ich einige grundlegende (und wohlbekannte) Aussagen zusammen (nicht immer in größtmöglicher Allgemeinheit), allerdings ohne Beweis. In der Literatur werden im allgemeinen Algebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern betrachtet, eine Einschränkung, die wir uns hier nicht auferlegen wollen. Die Notation ist Standard; für nicht erklärte Begriffe vergleiche man etwa [Pie 82], [Kue 88], [CLS ??], sowie die im Literaturverzeichnis angegebenen Sammelbände.

k sei stets ein kommutativer, aber nicht notwendig unendlicher Körper. *Alle Algebren sind, wenn nichts anderes gesagt wird, endlichdimensionale k-Algebren, insbesondere also Artin-Algebren.*

Eine Algebra A heißt reduziert (auch: basisch), falls $A/J(A)$ endliches Produkt von Divisionsringen ist; sie heißt zusammenhängend, falls sie als Ring unzerlegbar ist. Sei im folgenden $A \simeq P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ die Zerlegung von A (als A-Linksmodul) in Unzerlegbare; zur Erinnerung: Dann sind die P_i die endlichdimensionalen unzerlegbaren Projektiven. A ist genau dann basisch, wenn die P_i paarweise nichtisomorph sind. Da man Bijektionen zwischen den Isomorphieklassen endlichdimensionaler unzerlegbarer Projektiver, den Isomorphieklassen endlichdimensionaler unzerlegbarer Injektiver und den Isomorphieklassen endlichdimensionaler einfacher Moduln hat (etwa [CLS ??]), gibt es auch jeweils s solche. Zu einer Algebra A gibt es eine reduzierte (ebenfalls endlichdimensionale k-) Algebra B, die Morita-äquivalent zu A ist, die Basische Algebra zu A; sie ist im wesentlichen eindeutig bestimmt ([Pie 82, Seite 101 ff]). Ist $A/J(A) \simeq \prod_{i=1}^{l} \mathbf{M}_{n_i}(D_i)$, dann ist $B/J(B) \simeq \prod_{i=1}^{l} D_i$. Die D_i sind im allgemeinen (echte, nichtkommutative) algebraische Erweiterungen von k; ist k aber algebraisch abgeschlossen, so ist $A/J(A) \simeq \prod_{i=1}^{l} \mathbf{M}_{n_i}(k)$ und also $B/J(B) \simeq k^l$.

Interessiert man sich nur für die Modultheorie einer Algebra A, darf man oft annehmen, A sei basisch und zusammenhängend ([Pre 88], [Kue 88]); im einzelnen wird darauf hingewiesen werden. Der Einfachheit halber sei für den Rest dieses Kapitels A als reduziert und zusammenhängend vorausgesetzt. (Es ist stets klar, wie die allgemeineren Versionen der im folgenden genannten Sätze und Definitionen aussehen.)

Für die Definition eines Köchers Δ, einer Köcheralgebra $k[\Delta]$ (mit oder ohne Relationen) verweise ich auf die schon angegebenen Werke. *Unter einer Köcheralgebra verstehe ich im folgenden im allgemeinen eine Köcheralgebra ohne Relationen!* Ich setze Köcher als zusammenhängend voraus; das bedeutet genau, daß die zugehörige Köcheralgebra zusammenhängend ist. Δ sei stets ein zusammenhängender, meist sogar endlicher, Köcher. Bekanntlich sind Köcherdarstellungen "das gleiche" wie Moduln über der entsprechenden Köcheralgebra; wir werden im allgemeinen mit Darstellungen argumentieren. Ist Δ ein (endlicher) Köcher mit Eckenmenge E und Kantenmenge (gerichteter Kanten) K, dann seien Darstellungen als $(M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$ notiert, kurz auch als (M, f) oder M. Die Kategorie der Darstellungen von Δ (über k) bezeichne ich (streng genommen in Abweichung von früher Vereinbartem) mit $k[\Delta]$-Mod. – In Kapitel 8 wird die folgende triviale Tatsache benutzt:

Tatsache 1.6.1

i. *$M = (M_\alpha)$ und $N = (N_\alpha)$ seien Köcherdarstellungen, $\overline{M}$ und $\overline{N}$ die entsprechenden Moduln über der Köcheralgebra und $f : M \to N$. Dann sind äquivalent:*

   (a) *f ist Epimorphismus (bzw. Monomorphismus).*

   (b) *$f : \overline{M} \to \overline{N}$ ist eine surjektive (bzw. injektive) Abbildung.*

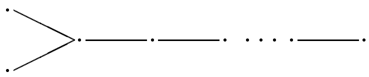
   (c) *Alle $f_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha$ sind surjektiv (bzw. injektiv).*

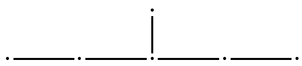
ii. *R sei ein beliebiger Ring, φ und ψ pp-Formeln, M und N R-Moduln, $f : M \to N$. Ist $\psi(M) \subseteq \varphi(M)$ und $f\psi(M) = \psi(N)$, so folgt $\psi(N) \subseteq \varphi(N)$.*

Beweis: ii. ist ganz trivial; die Äquivalenz der ersten beiden Punkte in i. ist wohlbekannt und die des zweiten und dritten folgt, weil $\overline{M} = \oplus M_\alpha$ und $M_\alpha = \{x \in \overline{M} \mid ex = x\}$ für ein geeignetes Idempotentes e. ■

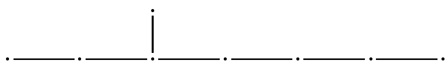
Einige Köcher haben Namen:

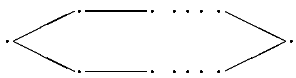
A_n

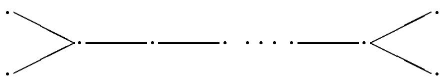
D_n 

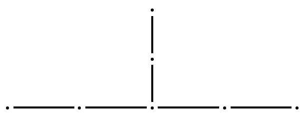
E_6 

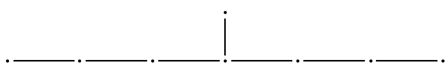
E_7 

E_8 

$\tilde{\mathrm{A}}_n$ 

$\tilde{\mathrm{D}}_n$ 

$\tilde{\mathrm{E}}_6$ 

$\tilde{\mathrm{E}}_7$ 

$\tilde{\mathrm{E}}_8$ 

Die Köcher A_n, $n \geq 1$, D_n, $n \geq 4$, E_6, E_7 und E_8 heißen Dynkin-Köcher; dabei gibt der Index die Anzahl derPunkte des Graphen an. Die Köcher $\tilde{\mathrm{A}}_n$, $n \geq 1$, $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $n \geq 4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ heißen Euklidische Köcher; hier ist die Anzahl der Punkte gleich dem Index $+1$. Ein Köcher ist ja eigentlich ein gerichteter Graph; diese Beispiele sind so zu verstehen, daß eine beliebige Orientierung betrachtet wird, meistens so, daß der entstehende Köcher keine gerichteten Zyklen hat (relevant natürlich nur bei $\tilde{\mathrm{A}}_n$).

Lemma 1.6.2 *$k[\Delta]$ ist genau dann endlichdimensional, wenn Δ keine gerichteten Zyklen hat.*

Beweis: Das ist klar, da die k-Dimension von $k[\Delta]$ gerade die Anzahl der Wege in Δ ist. ■

Satz 1.6.3 *Sei A eine k-Algebra beliebiger Dimension. Dann sind äquivalent:*

i. $\dim_k A < \omega$ *und* $A/J(A) \simeq k^n$ *für ein* n.

ii. Es gibt einen endlichen Köcher Δ mit Relationen $r_1, \ldots, r_l$, so daß für das von den Wegen der Länge 1 erzeugte zweiseitige Ideal W gilt $W^2 \supseteq k[\Delta](r_1, \ldots, r_l)k[\Delta] \supseteq W^m$, m geeignet, und

$$A \simeq k[\Delta, (r_1, \ldots, r_l)].$$

(A ist also Köcheralgebra mit Relationen.)

Köcheralgebren (mit Relationen), das heißt Algebren wie in ii., sind also insbesondere reduziert.

Korollar 1.6.4 *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra mit $A/J(A) \simeq \prod_{i=1}^{l} \mathbf{M}_{n_i}(k)$. Dann ist A Morita-äquivalent zu einer Köcheralgebra mit Relationen. Insbesondere ist jede endlichdimensionale k-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k Morita-äquivalent zu einer Köcheralgebra mit Relationen.* ■

Eine Algebra A heißt hereditär, falls Untermoduln projektiver Moduln wieder projektiv sind.

Satz 1.6.5 *Eine Köcheralgebra mit Relationen ist genau dann hereditär, wenn sie Algebra eines Köchers ohne Relationen und ohne orientierte Zyklen ist.*

Da "hereditär" Morita-invariant ist, folgt:

Korollar 1.6.6 *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra mit $A/J(A) \simeq \prod_{i=1}^{l} \mathbf{M}_{n_i}(k)$. Dann ist A hereditär, genau dann wenn A Morita-äquivalent zu einer Köcheralgebra ohne Relationen ist. Insbesondere gilt:*

Eine hereditäre endlichdimensionale Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist Morita-äquivalent zu einer Köcheralgebra ohne Relationen und orientierte Zyklen, und jede solche ist hereditär, endlichdimensional und reduziert. ■

Sei A weiter endlichdimensionale k-Algebra, aber nun zusätzlich hereditär. τ und τ^{-1} bezeichnen die Konstruktionen Auslander-Translat bzw. Inverses des Auslander-Translats; diese sind, da A hereditär ist, Funktoren. (Für dies und das Folgende siehe zum Beispiel [Rin 79, Seite 329-336]; dies ist eine der wenigen Quellen, wo k nicht als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt wird.) Sei U endlichdimensionales Unzerlegbares. Dann ist $\tau(U)$ Null oder wieder endlichdimensional unzerlegbar. Es ist $\tau(U) = 0$ genau dann, wenn U projektiv ist. Ist $\tau(U) \neq 0$, dann ist $U \simeq \tau^{-1}\tau(U)$. Entsprechend ist $\tau^{-1}(U) = 0$ genau dann, wenn U injektiv ist, und im anderen Fall ist $U \simeq \tau\tau^{-1}(U)$ und $\tau^{-1}(U)$ unzerlegbar endlichdimensional.

Ist U ein endlichdimensionales Unzerlegbares, dann heißt U präprojektiv (bzw. präinjektiv), falls es ein m gibt mit $\tau^{m}(U) = 0$ (bzw. $\tau^{-m}(U) = 0$). Dies ist äquivalent dazu, daß $U = \tau^{-l}(P)$ für ein l und einen unzerlegbaren (endlichdimensionalen) projektiven Modul P (bzw. $U = \tau^{l}(I)$ für ein l und einen unzerlegbaren (endlichdimensionalen) injektiven Modul I. Präprojektive (bzw. präinjektive) Moduln sind hier also stets unzerlegbar (und endlichdimensional); dies weicht vom üblichen Sprachgebrauch ab.

Es sei $\mathcal{P}_0$ die Menge der endlichdimensionalen projektiven Unzerlegbaren, sowie $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i-1} \cup \tau^{-1}\mathcal{P}_{i-1}$ so daß also $\mathcal{P} := \cup_i \mathcal{P}_i$ die Menge der präprojektiven Unzerlegbaren ist. Sei dual dazu $\mathcal{I}_0$ die Menge der präinjektiven (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren, und – ganz analog zu der eben gemachten Definition – $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_{i-1} \cup \tau\mathcal{I}_{i-1}$. Dann ist also $\mathcal{I} := \cup_i \mathcal{I}_i$ die Menge der präinjektiven Unzerlegbaren. Es gilt für U, daß $U \in \mathcal{I}_i$ genau dann, wenn $U^\star \in \mathcal{P}_i$: Denn für endlich präsentiertes M gilt offenbar, daß M genau dann injektiv ist, wenn $M^\star$ projektiv ist. (Jeweils in R-mod; aber über Artin-Algebren ist M injektiv in R-mod genau dann wenn es injektiv in R-Mod ist, entsprechend für projektiv. Siehe Seite 25.) Also stimmt die Behauptung für $i = 0$; der Rest folgt mit einer trivialen Induktion aus der Beschreibung von τ als Komposition von * und Tr (Tr gefolgt von *), vergleiche etwa [Rin 79, Seite 329].

A ist genau dann von endlichem Darstellungstyp, wenn es ein endlichdimensionales Unzerlegbares gibt, das sowohl präprojektiv als auch präinjektiv ist (und dann sind alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren präprojektiv und präinjektiv). Sonst sind die $2s$ Serien von endlichdimensionalen Unzerlegbaren $\tau^{-i}(P)$, $\tau^i(I)$, $i \in \mathbf{N}$, P projektiv endlichdimensional und unzerlegbar, I injektiv endlichdimensional und unzerlegbar, paarweise disjunkt. In diesem Fall (unendlicher Darstellungstyp) gibt es auch weitere endlichdimensionale Unzerlegbare, die regulären Unzerlegbaren, deren Menge mit $\mathcal{R}$ bezeichnet werde. In dem uns vor allem interessierenden zahmen Fall (siehe unten) kann man die Moduln in $\mathcal{P}$ (bzw. $\mathcal{I}$, $\mathcal{R}$) auch anders charakterisieren (via Defekt, siehe unten). Wichtig ist die folgende Tatsache ([Rin 86, Lecture 2]):

Tatsache 1.6.7 *A sei hereditär. Dann faktorisiert jeder Morphismus $U \to V$, mit $U \in \mathcal{P}, V \in \mathcal{I}$ über ein $W \in \mathcal{R}$, das heißt hat die Form $U \to W \to V$.*

Seien $P_1, \ldots, P_s$ die endlichdimensionalen unzerlegbaren projektiven Moduln. Für einen endlichdimensionalen Modul M sei $\underline{\dim}(M)$, der Dimensionstyp, definiert als $(k_1, \ldots, k_s)$, wobei k_i die Anzahl der Kompositionsfaktoren von M ist, die isomorph zu dem einfachen Faktormodul von P_i sind. Von dieser Beschreibung werden wir so keinen Gebrauch machen; wir verwenden aber:

i. Für endlichdimensionale unzerlegbare nicht-reguläre Moduln U, V folgt aus $\underline{\dim}(U) = \underline{\dim}(V)$ bereits $U \simeq V$; solche Moduln, die durch Unzerlegbarkeit und Dimensionstyp bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, heißen diskret.

ii. Für $\underline{\dim}$ hat man im Falle einer Köcheralgebra $k[\Delta]$ die folgende Kennzeichnung: Die einfachen Faktormoduln der P_i (oder hier besser P_α) sind gerade die Darstellungen $M^\alpha = (M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$ $(\alpha \in E)$ mit M_α eindimensional und allen anderen $M_\beta = 0$. Folglich ist für eine endlichdimensionale unzerlegbare Darstellung $(M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$ die Größe $k_\alpha = \dim(M_\alpha)$.

Es gibt eine reguläre Transformation c auf $\mathbf{R}^s$, die Coxeter-Transformation, so daß für $U \in \mathcal{I} \cup \mathcal{R}$ gilt $\underline{\dim}(\tau(U)) = c(\underline{\dim}(U))$; entsprechend für $U \in$

$\mathcal{P} \cup \mathcal{R}$: $\underline{\dim}(\tau^{-1}(U)) = c^{-1}(\underline{\dim}(U))$. Weiter gibt es eine unter c invariante quadratische Form q auf $\mathbf{R}^s$, so daß gilt: A ist von endlichem Darstellungstyp genau dann wenn q positiv definit ist. Ist q positiv semidefinit und nicht definit, dann heißt A zahm (und wild, falls q indefinit ist). In diesem (zahmen) Fall ist das Radikal von q ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbf{R}^s$, der von einem Vektor $\bar{h} = (h_i)$, mit natürlichen Zahlen h_i, erzeugt wird, so daß wenigstens eines der $h_i = 1$ ist. Ein unzerlegbarer (endlichdimensionaler) Modul U mit $\underline{\dim}(U)$ ein Vielfaches von $\bar{h}$ heißt stetig. (Die Bezeichnungen sind hier uneinheitlich; gelegentlich heißen solche U auch homogen.) Außerdem gibt es in dieser Situation eine unter c invariante Linearform ungleich Null, den Defekt, $\delta : \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}$ – man setzt $\delta(U) := \delta(\underline{\dim}(U))$ – mit $\delta(P_i) \in \mathbf{Z}$ für alle $1 \leq i \leq s$ und $\delta(P_i) = 1$ für wenigstens ein i, und so daß für endlichdimensionale Unzerlegbare U gilt: $\delta(U) < 0$ genau dann, wenn U präprojektiv, $\delta(U) > 0$ genau dann, wenn U präinjektiv, und $\delta(U) = 0$, genau dann wenn U regulär. Wegen der Invarianz von δ unter c folgt sofort, daß τ und τ^{-1} Defekt erhalten.

Insbesondere folgt also:

Behauptung: Die Menge der endlichdimensionalen Unzerlegbaren ist disjunkte Vereinigung von $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ und $\mathcal{I}$. Außerdem gilt, daß ein endlichdimensionales Unzerlegbares entweder stetig oder diskret ist. Stetige (endlichdimensionale) U sind regulär; die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig, weil es auch diskrete reguläre Unzerlegbare geben kann. Folglich sind Präprojektive und Präinjektive diskret. – Es ist stets $\mid \delta(U) \mid \leq 6$.

Weitere Informationen zu diesen Begriffen (an Hand von Beispielen) finden sich in Kapitel 5; siehe insbesondere die Zusammenfassung auf Seite 173 für eine ähnliche, grobe Beschreibung *aller* rein-injektiver Unzerlegbarer, also einschließlich der unendlichdimensionalen, im Falle von Köcheralgebren $k[\Delta]$, Δ ein Euklidischer Köcher ohne orientierte Zyklen (dort ausgeführt für die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$).

Unabhängig von der Orientierung von Δ und unabhängig vom zugrundeliegenden Körper k gilt:

Satz 1.6.8 *Δ sei ein endlicher zusammenhängender Köcher ohne gerichtete Zyklen.*

i. $k[\Delta]$ ist genau dann von endlichem Darstellungstyp, wenn Δ ein Dynkin-Köcher ist.

ii. $k[\Delta]$ ist genau dann zahm, wenn Δ ein Euklidischer Köcher ist.

Wegen Korollar 1.6.6 folgt daraus

Korollar 1.6.9 *Sei k algebraisch abgeschlossen, A endlichdimensionale hereditäre k-Algebra.*

i. A ist genau dann von endlichem Darstellungstyp, wenn A Morita-äquivalent zu einem $k[\Delta]$ ist, Δ ein Dynkin-Köcher.

ii. A ist genau dann zahm, wenn A Morita-äquivalent zu einem $k[\Delta]$ ist, Δ ein Euklidischer Köcher ohne gerichtete Zyklen. ∎

Für eine Verallgemeinerung von Korollar 1.6.9 siehe etwa [Dla 92, 1.(iv) Theorem (ii), Seite 189].

Kapitel 2

Das Ziegler-Spektrum. Teil I

Dies ist das erste von zwei Kapiteln mit Informationen zum Ziegler-Spektrum verschiedener Typen von Ringen. Das Ziegler-Spektrum von Dedekind-Ringen ist bereits in Abschnitt 1.3 beschrieben. Hauptziel meiner Untersuchungen ist die Bestimmung des Ziegler-Spektrums für zahme Köcheralgebren $k[\Delta]$, Δ einer der Euklidischen Köcher; es wird erst in Kapitel 8 erreicht. Hier beginne ich in 2.1 mit der größeren Klasse der Artin-Algebren; der wichtigste Satz in diesem Abschnitt ist wohl Korollar 2.1.4: Die Menge der endlichdimensionalen Unzerlegbaren ist dicht im Ziegler-Spektrum einer Artin-Algebra. Um die unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren über einer zahmen Köcher-Algebra in den Griff zu bekommen, ist das noch nicht gut genug; zu unübersichtlich ist die Menge der endlichdimensionalen Unzerlegbaren selbst bei dieser so wohluntersuchten Klasse von Algebren. Zum Glück gilt Satz 2.2.1, das Hauptresultat von Abschnitt 2.2: Er erlaubt eine genaue Beschreibung der Menge aller rein-injektiven Unzerlegbaren über einer zahmen Köcheralgebra $k[\Delta]$ (siehe etwa Korollar 6.2.4). Daraus ergibt sich später schnell die Entscheidbarkeit der Modultheorie solcher Algebren; außerdem ist diese Beschreibung natürlich Voraussetzung für die Bestimmung der Topologie. Abschnitt 2.3 ist mehr eine Randbemerkung: Dort analysiere ich das Ziegler-Spektrum kommutativer (von Neumann-) regulärer Ringe (Korollar 2.3.3); dies wird in Kapitel 7 benutzt.

2.1 Artin-Algebren

Hier gebe ich zunächst einen neuen, einfachen Beweis des Satzes von Okoh ([Oko 80]), daß rein-injektive Unzerlegbare über einer Artin-Algebra direkter Summand eines direkten Produkts endlich präsentierter Moduln sind (Satz 2.1.3). Lemmata 2.1.1 und 2.1.2 sind dementsprechend wohl ebenfalls neu. Das für das Folgende so entscheidende Korollar 2.1.4 ist von Prest, ebenso wie Satz 2.1.5 und Satz 2.1.6. Neu – und viel einfacher – sind dagegen wieder ihre Beweise. Bemerkenswert scheint mir vor allem der Beweis des für die Beschreibung des Ziegler-Spektrums wichtigen Satzes 2.1.6: Er ist rein modelltheoretisch und kommt insbesondere, anders als der Prestsche Originalbeweis, ohne die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen über Artin-Algebren aus. (Den Zusammenhang von Auslander-Reiten-Folgen und Satz 2.1.6 untersuche ich in Kapitel 3.) Dieser Abschnitt schließt mit einem neuen und – wie ich finde – recht originellen Beweis eines Ergebnisses von Ringel, Tachikawa und Auslander (Satz 2.1.9); neu scheint die Richtung von ii. nach i. in Satz 2.1.9 zu sein.

Lemma 2.1.1 *Seien $U \leq M$ R-Moduln, $\varphi(\bar{x})$ eine pp-Formel der Form $\exists \bar{y}\, B\bar{y} = \bar{x}$. Dann ist $\varphi(M/U) = \varphi(M) + U/U$.*

Beweis: $\supseteq$ ist klar. Es gelte umgekehrt $\varphi(\bar{a} + U)$. Dann gibt es $\bar{b} + U$ mit $B(\bar{b}+U) = \bar{a}+U$, also $B\bar{b} = \bar{a}+\bar{u}$ für ein $\bar{u} \in U$. Damit ist $\bar{a}+\bar{u} \in \varphi(M)$ und $\bar{a} + U = (\bar{a} + \bar{u}) + U \in \varphi(M) + U$. ∎

Für beliebige pp-Formeln ist dieses Lemma natürlich nicht richtig; man vergleiche etwa $R = M = \mathbf{Z}$, mit $U = 2\mathbf{Z}, \varphi(x) \equiv 2x = 0, a = 1 \in M$.

Lemma 2.1.2 *Sei $\varphi(\bar{x})$ eine pp-Formel, M ein R-Modul, $\bar{a} \in M$. Für ein absteigend gerichtetes, kofinales System $\mathcal{U}$ von Untermoduln $U \in \mathcal{U}$ gelte $M/U \models \varphi(\bar{a} + U)$. Dann gilt $M \models \varphi(\bar{a})$.*

Beweis: $\varphi(\bar{x})$ hat die Form $\exists \bar{y}\; B\bar{y} = A\bar{x}$, also $\psi(A\bar{x})$ für $\psi(\bar{z}) \equiv \exists \bar{y}\; B\bar{y} = \bar{z}$. Nach Voraussetzung gilt für $U \in \mathcal{U}$, daß $A\bar{a} + U \in \psi(M/U)$, nach dem vorigen Lemma also $A\bar{a}+U \in \psi(M)+U$, und somit, wegen der Kofinalität, $A\bar{a} \in \psi(M)$, $\bar{a} \in \varphi(M)$. ∎

Es folgen nun einige Resultate über Artin-Algebren, die zwar bekannt sind, hier aber ohne Zuhilfenahme tiefer algebraischer Ergebnisse neu bewiesen werden. Der Schlüssel zu ihnen ist die Existenz einer Dualität mit idealen Eigenschaften zwischen R-mod und mod-R; diese Dualität erlaubt es uns unter anderem, wesentliche Teile von [PRZ 94] auf Artin-Algebren zu übertragen (siehe auch Satz 1.5.4, Korollar 1.5.5, Satz 1.5.6). Da für beliebige artinsche Ringe im allgemeinen keine ähnlich gute Dualität existiert, gelingt es leider nicht, die neuen, einfachen Beweise auf diese Klasse von Ringen zu verallgemeinern, obwohl einige der folgenden Sätze auch für sie gelten.

Satz 2.1.3 *(Okoh) R sei Artin-Algebra.*

i. Jeder R-Linksmodul M ist rein in einem direkten Produkt endlich präsentierter unzerlegbarer Moduln.

ii. Insbesondere ist ein Modul genau dann direkter Summand in einem direkten Produkt endlich präsentierter (unzerlegbarer) Moduln, wenn er rein-injektiv ist.

Beweis: Wegen Lemma 2.1.2 genügt es, eine absteigend gerichtete, kofinale Familie $\mathcal{U}$ von koendlich erzeugten Untermoduln U zu finden. Denn dann ist $M \longrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} M/U$ eine reine Injektion. Die Existenz einer solchen Familie liefert aber Korollar 1.5.8. Und die M/U zerfallen in unzerlegbare (endlich präsentierte) Summanden, die wiederum Quotienten von M nach Untermoduln sind. Das zeigt i.

Ist nun M rein-injektiv, dann zeigt i. die eine Richtung von ii. Da andererseits endlich präsentierte Moduln rein-injektiv sind (siehe Seite 25), folgt auch die andere. ■

Korollar 2.1.4 *(Prest) R sei Artin-Algebra. Die Menge der endlich präsentierten Unzerlegbaren ist dicht im Ziegler-Spektrum.* ■

Dieses wichtige Ergebnis werden wir für hereditäre endlichdimensionale Algebren über Körpern noch verfeinern, siehe Satz 2.2.1 und Satz 6.2.5. Bevor wir uns den endlich präsentierten Unzerlegbaren über einer Artin-Algebra zuwenden, hier noch eine andere Version des Beweises von Satz 2.1.3, die wir später benutzen werden (siehe die Überlegung nach dem Beweis von Satz 8.2.1), da sie Kontrolle über die auftretenden Faktormoduln M/U ermöglicht:

Es sei $\mathcal{V}$ eine aufsteigend gerichtete, kofinale Familie von endlich erzeugten (Rechts-) Untermoduln V von $M^\star$. Dann ist die Familie $\mathcal{U} := \{V^\perp \mid V \in \mathcal{V}\}$ eine absteigend gerichtete, kofinale Familie von koendlich erzeugten R-Untermoduln von M, wie sie für den Beweis des Satzes von Okoh benötigt wird: Denn wegen Satz 1.5.4 i. ist $V^{\perp\perp} \simeq V$ endlich erzeugt, also ist Korollar 1.5.5 auf $V^\perp \leq M$ anwendbar und liefert $M/V^\perp \simeq (V^{\perp\perp})^\star = V^\star$. Ebenfalls mit Satz 1.5.4 ergibt sich, daß $V^\star$ endlich erzeugt ist, und also sind die $U \in \mathcal{U}$

koendlich erzeugt. Da $\mathcal{V}$ aufsteigend gerichtet ist, ist $\mathcal{U}$ absteigend gerichtet. Die Kofinalität sieht man so: Sei $a \in M \setminus 0$; sei $f \in M^\star$ mit $f(a) \neq 0$. Dann gibt es $V \in \mathcal{V}$, das f enthält. Es ist dann a nicht in $V^\perp$, was zu zeigen war.

Satz 2.1.5 *R sei Artin-Algebra. Endlich präsentierte Unzerlegbare sind abgeschlossen im Ziegler-Spektrum.*

Beweis: Sei U ein endlich präsentiertes Unzerlegbares, sei V ein rein-injektives Unzerlegbares im Abschluß von U, etwa $V = \mathrm{H}(p) = \mathrm{H}(a)$, $p = \text{pp-tp}(a)$. Da U endlich präsentiert ist (genauer: wegen der dcc/acc, siehe Seite 25), gibt es ein $\varphi_0 \in p$, so daß $\varphi_0(U)$ die kleinste pp-definierbare Untergruppe unter den $\varphi(U)$, $\varphi \in p$, ist. Betrachte $\sum_{\psi \notin p} \psi \cap \varphi_0(U)$. Wiederum weil U endlich präsentiert ist, ist dies eine pp-definierbare Untergruppe, etwa $\psi_0(U)$, die in $\varphi_0(U)$ enthalten ist; ohne Einschränkung sei $\psi_0 \leq \varphi_0$.

Behauptung: $\varphi_0/\psi_0(U) > 1$.

Beweis der Behauptung: Seien ψ_1, $\psi_2 \notin p$. Da p unzerlegbar ist, gibt es $\varphi \in p$ mit $\psi_1 \cap \varphi + \psi_2 \cap \varphi \notin p$. Also ist $\varphi_0/(\psi_1 \cap \varphi + \psi_2 \cap \varphi)(V) > 1$, folglich auch $\varphi_0/(\psi_1 \cap \varphi + \psi_2 \cap \varphi)(U) > 1$. Aber da wegen der Wahl von φ_0 gilt $\varphi_0(U) \leq \varphi(U)$, haben wir auch $\varphi_0/(\psi_1 \cap \varphi_0 + \psi_2 \cap \varphi_0)(U) > 1$. Nun folgt die Behauptung induktiv, denn ψ_0 ist endliche Summe solcher ψ_1, ψ_2.

Sei nun $b \in \varphi_0(U) \setminus \psi_0(U)$. Dann ist der pp-Typ von b gerade p und folglich $U \simeq V$: Denn sei $\varphi/\psi \in p$. Es ist $b \in \varphi_0(U) \leq \varphi(U)$. Wäre $b \in \psi(U)$, so auch $b \in \psi \cap \varphi_0(U)$, also insbesondere $b \in \psi_0(U)$, Widerspruch. Also ist $b \in \varphi(U) \setminus \psi(U)$, und $\varphi/\psi \in \text{pp-tp}(b)$, somit $p = \text{pp-tp}(b)$ und $U \simeq V$. ■

Satz 2.1.6 *R sei Artin-Algebra. Endlich präsentierte Unzerlegbare sind isoliert im Ziegler-Spektrum.*

Dieser Satz ist, ebenso wie Satz 2.1.5, erstmals von Prest (allerdings auf ganz anderem Wege) bewiesen worden; Prest benutzt zum Beispiel im Beweis von Satz 2.1.6 Sätze von Auslander über die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen. Wir geben hier einen direkten Beweis und zeigen später, wie man umgekehrt aus der Isoliertheit der endlich präsentierten Unzerlegbaren auf die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen schließen kann (siehe Satz 3.3.3).

Beweis: Der Beweis beginnt zunächst genau wie der vorige: Sei U ein endlich präsentiertes Unzerlegbares, sei $a \in U \setminus 0$. Da U endlich präsentiert ist, gibt es eine pp-Formel φ_0 mit ${}_RT \vdash \mathrm{tp}^+(a) \leftrightarrow \varphi_0$ (Satz 1.2.2). Ebenfalls weil U endlich präsentiert ist, gibt es ein ψ_1, so daß $\psi_1(U)$ die größte pp-definierbare

Untergruppe von $\varphi_0(U)$ ist, die a nicht enthält (Man argumentiert wie im Beweis von Satz 2.1.5.). Sei $a^\star \in \mathrm{D}\psi_1(U^\star) \setminus \mathrm{D}\varphi_0(U^\star)$ (Satz 1.5.6). $U^\star$ ist ebenfalls endlich präsentiert, folglich gibt es, wieder mit Satz 1.2.2, ψ_0 mit $T_R \vdash \mathrm{tp}^+(a^\star) \leftrightarrow \mathrm{D}\psi_0$. Ohne Einschränkung sei $\mathrm{D}\psi_0 \leq \mathrm{D}\psi_1$.

Behauptung: pp-tp(a) wird durch $\varphi_0 \cap \psi_0$ neg-isoliert.

Beweis der Behauptung: Zunächst ist $a \notin \varphi_0 \cap \psi_0(U)$: Denn sonst wäre, nach Wahl von φ_0, $\varphi_0 \leq \varphi_0 \cap \psi_0$, insbesondere also $\varphi_0 \leq \psi_0$, also $\mathrm{D}\psi_0 \leq \mathrm{D}\varphi_0$ (nach Definition von D); dies widerspricht aber $a^\star \in \mathrm{D}\psi_0(U^\star) \setminus \mathrm{D}\varphi_0(U^\star)$. Sei nun $\chi \notin \mathrm{tp}^+(a)$; zu zeigen ist $\chi \cap \varphi_0 \leq \varphi_0 \cap \psi_0$. Ohne Einschränkung sei $\chi \leq \varphi_0$. Dann gilt $\chi(U) \leq \psi_1(U)$, also $\mathrm{D}\psi_1(U^\star) \leq \mathrm{D}\chi(U^\star)$. Folglich ist $a^\star \in \mathrm{D}\chi(U^\star)$, nach Wahl von ψ_0 also $\mathrm{D}\psi_0 \leq \mathrm{D}\chi$, somit $\chi \leq \psi_0$, also $\chi \leq \varphi_0 \cap \psi_0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da U endlich präsentiert ist, ergibt sich aus der Behauptung sofort die Isoliertheit von U (wegen Lemma 1.1.8). ■

Zusammen mit Korollar 2.1.4 folgt nun ohne weiteres

Korollar 2.1.7 *R sei Artin-Algebra. Die isolierten Punkte des Ziegler-Spektrums sind genau die endlich präsentierten Unzerlegbaren.* ■

Insbesondere sind also unendlich-erzeugte rein-injektive Unzerlegbare nicht isoliert. Etwas genauer gilt sogar:

Bemerkung 2.1.8 *(Prest) R sei eine Artin-Algebra. Unendlich-erzeugte rein-injektive Unzerlegbare sind nicht neg-isoliert.*

Beweis: Denn sei etwa U ein solches Unzerlegbares, sei $a \in U \setminus 0$. U ist direkter Summand in einem direkten Produkt endlich präsentierter Unzerlegbarer $U_i, i \in I$ (wegen Satz 2.1.3). Sei $a_i \in U_i$ die i-te Komponente von a. Für alle i ist pp-tp$(a_i) \geq$ pp-tp(a), und es ist $\mathrm{tp}^+(a) = \bigcap_i \mathrm{tp}^+(a_i)$; wäre pp-tp$(a)$ neg-isoliert, so gäbe es ein i_0 mit $\mathrm{tp}^+(a_{i_0}) = \mathrm{tp}^+(a)$, $U_{i_0} \simeq U$, Widerspruch. ■

Wir halten noch fest, daß sich aus dem bisher Gezeigten ein witziger Beweis des Satzes von Ringel/Tachikawa/Auslander ergibt; das ist im wesentlichen die Richtung von i. nach ii. im folgenden Satz, siehe [RT 74], [Aus 76] (und auch [Pre 88, Theorem 11.38]). Von ii. nach i. scheint noch nicht bemerkt worden zu sein.

Satz 2.1.9 *R sei eine Artin-Algebra. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt nur endlich viele endlich erzeugte Unzerlegbare.*

ii. *Alle rein-injektiven Unzerlegbaren sind endlich erzeugt.*

iii. *Es gibt nur endlich viele rein-injektive Unzerlegbare.*

iv. *Das Ziegler-Spektrum hat die diskrete Topologie.*

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Korollar 2.1.5 und Korollar 2.1.7, wenn man die folgende topologische Trivialität zu Hilfe nimmt:

Sei X ein quasikompakter topologischer Raum, $X_0 \subseteq X$ eine dichte Menge offen-abgeschlossener Punkte. Dann ist X_0 genau dann endlich, wenn $X = X_0$, genau dann wenn X endlich, und dies ist genau dann der Fall, wenn X diskret ist. ■

Weitere Äquivalenzen sind etwa:

v. R ist links-rein-halbeinfach.

vi. R ist von endlichem Darstellungstyp.

Denn wie schon in Abschnitt 1.4 bemerkt, folgt aus v. Punkt ii. In [Aus 76] und in [RT 74] wird von i. nach v. gezeigt. Nach Definition ist vi. äquivalent zu v. & i.

In der Tat gilt einiges von Satz 2.1.9 auch für links-artinsche Ringe: vi. ist nach Definition äquivalent zu v. & i. Aus iv. folgt wegen der Quasikompaktheit des Ziegler-Spektrums iii., aus iii. wegen [Pre 88, Corollary 11.24, Proposition 11.27] Punkt i. Wegen [Aus 76] oder [RT 74] ergibt sich aus i. Punkt v., und – wie schon in Abschnitt 1.4 erwähnt – daraus Punkt ii. Damit folgt aus i. auch ii., somit iii. Aus vi. folgt wegen [Pre 88, Theorem 11.38, Corollary 9.26] Punkt iv. Zusammenfassend erhalten wir also die Äquivalenz von i., iii., iv. und vi.; aus jeder von i., iii., iv. oder vi. ergibt sich v., und aus v. folgt ii.

Die Richtung von v. nach vi. (äquivalent: nach i.) ist ein bekanntes offenes Problem; zu der offenbar noch offenen Richtung von ii. nach v. kann ich nichts sagen.

2.2 Endlichdimensionale hereditäre Algebren

Hauptergebnis dieses Abschnitts ist Satz 2.2.1; von Prest stammt die Formulierung von 2.2.1 im Spezialfall von Köcheralgebren $k[\Delta]$, Δ ein Euklidischer Köcher. Mein Beweis folgt seinem unvollständigen Argument; einige der Lemmata tauchen bei ihm implizit auf ([Pre 85], [Pre 88]). Neu scheinen die hier eingeführten Ränge r und R zu sein. Satz 2.2.1 ist ganz zentral für alles Folgende: Mit seiner Hilfe kann man die Menge der rein-injektiven Unzerlegbaren über einer Köcheralgebra $k[\Delta]$, Δ ein Euklidischer Köcher, genau beschreiben, weil es gelingt, die (endlichdimensionalen) regulären Unzerlegbaren über solchen Algebren gut zu überblicken (siehe Abschnitt 6.2, insbesondere Korollar 6.2.4).

Satz 2.2.1 *Sei R eine endlichdimensionale hereditäre Algebra über einem kommutativen Körper, sei R von unendlichem Darstellungstyp. Dann enthält der Abschluß der Menge der regulären (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren im Ziegler-Spektrum alle unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren.*

Vor dem Beweis einige Lemmata; dabei bezeichne, wie schon in Abschnitt 1.6, τ das Auslander-Translat. Im folgenden, bis einschließlich des Beweises von Satz 2.2.1, sei R eine Algebra wie im Satz, U, V seien endlichdimensionale Unzerlegbare, M, N beliebige endlichdimensionale Moduln. Zusätzlich sei R ohne Einschränkung reduziert und zusammenhängend: Denn ist $R = R_1 \oplus R_2$, dann sind die R_i wieder hereditär, außerdem – als topologische Räume – $\mathrm{I}(R) = \mathrm{I}(R_1) \dot\cup \mathrm{I}(R_2)$. Und die Basische Algebra zu R ist zu R Morita-äquivalent, so daß ihr Ziegler-Spektrum homöomorph zu dem von R ist (siehe weiter unten in Kapitel 4 Satz 4.1.8 bzw. das Argument im Beweis von Satz 4.1.7).

Definition 2.1 Sei R wie vereinbart, sei U ein endlichdimensionales Unzerlegbares. Dann sei

i. $\mathrm{r}(U) := \min\{i \mid U \in \mathcal{P}_i\}$; hierbei sei $\min \emptyset = \infty$.

Sei nun U zusätzlich präprojektiv, sei

ii. $\dim^\star(U) := \dim \tau^{\mathrm{r}(U)}(U)$.

iii. $\mathrm{R}(U) := (\mathrm{r}(U), \dim^\star(U))$, wobei $\mathrm{R}(U) < \mathrm{R}(V)$ bezüglich der lexikographischen Anordnung zu verstehen ist.

Für endlichdimensionales M sei

iv. $\mathrm{R}(M) := \min\{\mathrm{R}(U)|U$ unzerlegbarer präprojektiver direkter Summand von $M\}$.

Man beachte, daß $\mathrm{r}(U)$ genau dann eine natürliche Zahl ist, wenn U ein präprojektives endlichdimensionales Unzerlegbares ist; ebenso ist $\mathrm{R}(M) \neq \infty$ genau dann, wenn M ein präprojektives endlichdimensionales Unzerlegbares als direkten Summanden enthält.

Lemma 2.2.2 *Ist V präprojektiv und $f : U \to V$ ein von 0 verschiedener Morphismus, dann ist auch U präprojektiv, und außerdem gilt $\mathrm{r}(U) \leq \mathrm{r}(V)$. Ist V sogar projektiv, dann ist f eine isomorphe Einbettung, U ebenfalls projektiv und $\dim(U) < \dim(V)$ oder $U \simeq V$.*

Beweis: Wir dürfen annehmen, es sei $\mathrm{r}(U) \geq \mathrm{r}(V) = n$. Es gibt also ein $P \in \mathcal{P}$ mit $\tau^n(f) : \tau^n(U) \to \tau^n(V) = P$. Da $\mathrm{r}(U), \mathrm{r}(V) \geq n$, ist $f = \tau^{-n}\tau^n f$, also insbesondere $\tau^n f \neq 0$. Da R hereditär ist, ist $\mathrm{im}(\tau^n f)$ projektiv, folglich zerfällt $\tau^n U \to \mathrm{im}(\tau^n f)$. Wegen der Unzerlegbarkeit von $\tau^n U$ muß dies also ein Isomorphismus sein. Demnach ist $\tau^n U$ projektiv, U präprojektiv, und $\mathrm{r}(U) = n$.

Ist V projektiv, dann ist $n = 0$, und damit ist der Rest klar. ∎

Lemma 2.2.3 *Seien U, V präprojektiv und $f : U \to V$ ein Morphismus ungleich 0. Dann ist $\mathrm{R}(U) < \mathrm{R}(V)$ oder f ein Isomorphismus, jedenfalls also $\mathrm{R}(U) \leq \mathrm{R}(V)$.*

Beweis: Wegen Lemma 2.2.2 folgt sofort $\mathrm{r}(U) \leq \mathrm{r}(V)$. Falls $\mathrm{r}(U) = \mathrm{r}(V) = n$, so wende man den zweiten Teil von Lemma 2.2.2 an auf $\tau^n f : \tau^n(U) \to \tau^n(V)$; da $\tau^n f \neq 0$, ergibt sich, daß $\dim^\star(U) = \dim(\tau^n U) < \dim(\tau^n V) = \dim^\star(V)$ (und somit $\mathrm{R}(U) < \mathrm{R}(V)$) oder $\tau^n f$ ist ein Isomorphismus – und somit auch f. ∎

Wir erhalten damit

Lemma 2.2.4 *Sei $f : M \to V$ ein von Null verschiedener Morphismus, V präprojektiv. Dann ist $\mathrm{R}(M) \leq \mathrm{R}(V)$. Gilt Gleichheit, dann induziert f einen Isomorphismus zwischen einem geeigneten unzerlegbaren direkten Summanden von M und V.*

Beweis: Denn es gibt ein unzerlegbares U, direkter Summand von M, so daß f eingeschränkt auf U ungleich 0 ist. Folglich ist $\mathrm{R}(M) \leq \mathrm{R}(U) \leq \mathrm{R}(V)$, mit Lemma 2.2.3. Die zweite Behauptung folgt sofort. ■

Lemma 2.2.5 *Sei X ein unendlich erzeugtes Unzerlegbares (nicht notwendig rein-injektiv), sei $M \leq X$ ein endlich erzeugter Untermodul. Dann gibt es endlich erzeugte N, $M \leq N \leq X$, von beliebig großem Rang $\mathrm{R}(N)$ (eventuell gleich unendlich.)*

Beweis: Es genügt natürlich, ein endlich erzeugtes N mit $\mathrm{R}(N) > \mathrm{R}(M)$ zu finden. Ohne Einschränkung sei $M \neq 0$. M zerfällt in eine endliche direkte Summe endlich erzeugter Unzerlegbarer, $M = \oplus_{i=1}^{n} U_i$. Da X nicht endlich erzeugt ist, sind die U_i nicht rein in X; es gibt also einen endlich erzeugten Untermodul $N \geq M$, so daß die U_i bereits in N nicht rein sind. Sei N noch minimal so gewählt, das heißt so, daß kein echter direkter Summand von N die gleiche Eigenschaft hat. Wenn N keinen präprojektiven Summanden hat, sind wir fertig (da $\mathrm{R}(N)$ dann unendlich ist). Sei also V ein präprojektiver direkter Summand von N, mit $\mathrm{R}(V) = \mathrm{R}(N)$. Wegen der Minimalität von N ist die Projektion von M nach V nicht der Nullmorphismus. (Man könnte sonst V in der direkten Zerlegung von N weglassen.) Mit Lemma 2.2.4 folgt nun $\mathrm{R}(M) \leq \mathrm{R}(V) = \mathrm{R}(N)$. Bei Gleichheit induzierte f (mit Lemma 2.2.4) aber einen Isomorphismus zwischen einem direkten Summanden U_i und V; U_i wäre damit rein in N, Widerspruch. Also gilt sogar $\mathrm{R}(M) < \mathrm{R}(V) = \mathrm{R}(N)$. ■

Korollar 2.2.6 *Es gibt keinen Morphismus ungleich Null von einem unendlichdimensionalen Unzerlegbaren in ein präprojektives Unzerlegbares. Insbesondere gilt: Unendlichdimensionale Unzerlegbare haben keine präprojektiven Quotienten.*

Wiederum ist hier keine Voraussetzung über Rein-Injektivität des unendlichdimensionalen Unzerlegbaren nötig.

Beweis: Sei X ein unendlichdimensionales Unzerlegbares, sei $f : X \to V$ ein Morphismus ungleich 0. Wähle ein endlich präsentiertes $M \leq X$, so daß die Einschränkung von f auf M ungleich 0 ist. Mit Lemma 2.2.5 findet man ein N, $M \leq N \leq X$, mit $\mathrm{R}(N) > \mathrm{R}(V)$. Widerspruch zu Lemma 2.2.4. ■

Entsprechendes gilt natürlich auch für die duale Situation, das heißt für präinjektive Unzerlegbare: Wir definieren für endlich präsentiertes M, daß

$\mathrm{R}'(M) := \mathrm{R}(\mathrm{D}(M))$; gleichbedeutend ist es, $\mathrm{r}'(U)$ zu definieren als kleinstes i mit $U \in \mathcal{I}_i$ und R' dann analog zu R. Durch Dualisieren erhält man nun leicht

Lemma 2.2.7 *Ist U präinjektiv und $f : U \to V$ ein von 0 verschiedener Morphismus, dann ist auch V präinjektiv, und außerdem $U \simeq V$ oder $\mathrm{R}'(U) > \mathrm{R}'(V)$. Gibt es einen von Null verschiedenen Morphismus von U nach M, so folgt $\mathrm{R}'(M) \leq \mathrm{R}'(U)$.* ■

Korollar 2.2.8 *Sei X ein unendlichdimensionales Unzerlegbares. Dann gibt es keinen von Null verschiedenen Morphismus von einem präinjektiven Unzerlegbaren nach X. Insbesondere hat X keine präinjektiven Untermoduln.*

Beweis: Wir zeigen zunächst

Behauptung: Sei M ein endlich präsentierter Untermodul von X, sei weiter $\mathrm{R}'(M) \neq \infty$. Dann gibt es einen endlich präsentierten Untermodul $N \geq M$ von X mit $\mathrm{R}'(N) < \mathrm{R}'(M)$.

Beweis der Behauptung: Wähle N wie im Beweis von Lemma 2.2.5. (Die Minimalität von N wird hier aber gar nicht verwendet.) Sei nun U ein unzerlegbarer (präinjektiver) direkter Summand von M mit $\mathrm{R}'(M) = \mathrm{R}'(U)$. Die Inklusion $U \to N$ zeigt (Lemma 2.2.7), daß entweder $\mathrm{R}'(N) < \mathrm{R}'(U)$ – dann sind wir fertig –, oder die Inklusion induziert einen Isomorphismus auf einen direkten Summanden von N; dann wäre aber U rein in N, Widerspruch.

Sei nun f ein von Null verschiedener Morphismus vom präinjektiven U nach X. Lemma 2.2.7 zeigt, daß $\mathrm{R}'(\mathrm{im} f)$ endlich ist. Fortgesetzte Anwendung der Behauptung ergibt einen Widerspruch. ■

Nun können wir den Beweis von Satz 2.2.1 geben:

Beweis: Sei X ein unendlichdimensionales rein-injektives Unzerlegbares. Wegen des Satzes von Okoh, Satz 2.1.3, ist X direkter Summand in einem Produkt endlichdimensionaler Unzerlegbarer. Wegen Korollar 2.2.6 darf man annehmen, X sei direkter Summand in einem Produkt regulärer und präinjektiver Unzerlegbarer; insbesondere liegt X schon im Abschluß der regulären und präinjektiven Unzerlegbaren.

Sei nun (φ/ψ) eine basis-offene Umgebung von X. Wir müssen zeigen, daß sie ein reguläres Unzerlegbares enthält. Liegen in (φ/ψ) nur endlich viele präinjektive Unzerlegbare, $V_1, \ldots, V_n$, dann sind wir fertig: Wegen Satz 2.1.5 ist $A := \{V_1, \ldots, V_n\}$ abgeschlossen; $(\varphi/\psi)\backslash A$ ist dann eine offene Umgebung

O von X, die keine präinjektiven Unzerlegbaren enthält. Nach dem ersten Absatz dieses Beweises muß O folglich ein reguläres Unzerlegbares enthalten.

Wir dürfen also annehmen, (φ/ψ) enthalte unendlich viele Präinjektive.

Behauptung 1: Es gibt eine nur von φ abhängige natürliche Zahl n, so daß für alle R-Moduln Y und $a \in Y$ gilt: Aus $Y \models \varphi(a)$ folgt, es gibt ein $M(\in R\text{-mod})$, $a \in M \leq Y$, $M \models \varphi(a)$ und $\dim M \leq n$. (klar)

Behauptung 2: Es gibt nur endlich viele präinjektive Unzerlegbare V mit $\dim(V) \leq n$.

Beweis der Behauptung: Für präinjektive Unzerlegbare U und V gilt nach Abschnitt 1.6, daß aus $\underline{\dim}(U) = \underline{\dim}(V)$ folgt $U \simeq V$. Aber unter der Bedingung $\dim(U) \leq n$ gibt es nur endlich viele mögliche $\underline{\dim}(U)$. Das beweist Behauptung 2.

Insbesondere gibt es also eine Zahl s, so daß für präinjektive Unzerlegbare V mit $\dim(V) \leq n$ gilt $\mathrm{r}'(V) \leq s$. Außerdem existieren nur endlich viele präinjektive Unzerlegbare V mit $\mathrm{r}'(V) \leq s$, denn alle $\mathcal{I}_i$ sind ja endlich. Da R aber von unendlichem Darstellungstyp ist, findet man ein präinjektives Unzerlegbares $U \in (\varphi/\psi)$ mit $\mathrm{r}'(U) > s$. Sei etwa $U \models \varphi(a)$, und sei (mit Behauptung 1) $M \leq U$, $a \in M$, $M \models \varphi(a)$ mit $\dim(M) \leq n$.

Sei V ein beliebiger unzerlegbarer direkter Summand von M. Nach Konstruktion ist $\dim(V) \leq n$, V kann also nicht präinjektiv sein. (Denn sonst folgte nach Wahl von s, daß $\mathrm{r}'(V) \leq s$, wegen Lemma 2.2.7 auch $\mathrm{r}'(U) \leq s$, Widerspruch.) Folglich faktorisiert die Einbettung $V \to U$ über eine endliche direkte Summe von regulären Unzerlegbaren: Entweder ist nämlich V selbst schon regulär, oder es ist präprojektiv, und dann folgt dies aus Tatsache 1.6.7. Die Inklusion $M \to U$ läßt sich, indem wir die Einbettungen der direkten Summanden von M nach U zusammensetzen, also schreiben als $M \xrightarrow{f} \oplus_{i \in I} U_i \longrightarrow U$, mit regulären unzerlegbaren U_i. Sei a_i die U_i-Komponente von $f(a)$. Da in M nun $\varphi(a)$ gilt, folgt für alle i, daß $U_i \models \varphi(a_i)$; zudem existiert ein i_0 mit $U_{i_0} \models \neg\psi(a_{i_0})$, da sonst $U \models \psi(a)$ folgte. Dieses reguläre U_{i_0} liegt dann in (φ/ψ). ■

2.3 Kommutative reguläre Ringe

Dieser Abschnitt enthält weitgehend Bekanntes, das, teils ohne Beweis, etwa in [Pre 88] enthalten ist. Hauptresultat ist Korollar 2.3.3. Sein Beweis und der von Lemma 2.3.2 (von Bouscaren) sind von mir, wahrscheinlich aber die einzig möglichen. – Wir zitieren als erstes ohne Beweis die folgende einfache

Tatsache 2.3.1 *R sei ein kommutativer (von Neumann-) regulärer Ring.*

i. Die endlich erzeugten Ideale von R sind genau die Ideale der Form Re, e ein Idempotent.

ii. Zwei Ideale sind gleich, wenn sie die gleichen Idempotenten enthalten.

iii. R-Moduln sind absolut rein, das heißt insbesondere: Alle rein-injektiven Moduln sind auch injektiv.

iv. Die basis-offenen Mengen der Standardbasis des Ziegler-Spektrums haben die Form $(ex = 0/x = 0)$ mit $e = e^2$.

v. Die unzerlegbaren Moduln sind genau die Moduln der Form $R/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal.

vi. Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ und ein Idempotent e ist $e \notin \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $1-e \in \mathfrak{m}$. Außerdem gilt im Ziegler-Spektrum, daß $R/\mathfrak{m} \in (ex = 0/x = 0)$ genau dann, wenn $e \in \mathfrak{m}$.

Dabei kann man i. oder iii. als Definition von (kommutativ von Neumann-) regulär nehmen. ii. folgt sofort aus i.; Punkt v. (ist ganz einfach und) zeigt, daß alle Unzerlegbaren rein-injektiv und endlich erzeugt sind. – Als Beispiel für die (einfache) Art von Argumenten, die hier vorkommen, sei kurz vi. gezeigt: Da $e(1-e) = 0 \in \mathfrak{m}$ und maximale Ideale erst recht prim sind, folgt die erste Behauptung sofort. $R/\mathfrak{m}$ ist ein einfacher Modul; da wegen der Kommutativität von R pp-Untergruppen auch R-Untermoduln sind, folgt $(ex = 0/x = 0)(R/\mathfrak{m}) \in \{R/\mathfrak{m}, 0\}$. Also liegt $R/\mathfrak{m}$ genau dann in der offenen Menge $(ex = 0/x = 0)$, wenn $(ex = 0/x = 0)(R/\mathfrak{m}) = R/\mathfrak{m}$, genau dann wenn $Re \subseteq \mathfrak{m}$, genau dann wenn $e \in \mathfrak{m}$.

Für den Rest dieses Abschnitts seien stets R kommutativ regulär, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ maximale Ideale, e, f Idempotente.

Lemma 2.3.2 *R sei kommutativ (von Neumann-) regulär. Es sind äquivalent:*

i. $(ex = 0/x = 0)$ ist eine minimale nichtleere offene Menge im Ziegler-Spektrum.

ii. Re ist maximales Ideal.

In diesem Fall isoliert $(ex = 0/x = 0)$ das Unzerlegbare R/Re.

Da dieses Lemma (von Bouscaren) in [Pre 88] ohne Beweis gegeben wird, hier ein

Beweis: Sei Re nicht maximal. Dann gibt es ein $\mathfrak{m}$, das Re echt enthält, also auch ein endlich erzeugtes Ideal I, enthalten in $\mathfrak{m}$, das echt größer als Re ist. Wegen Tatsache 2.3.1 hat I die Form Rf. $(fx = 0/x = 0)$ ist offen und nicht leer (denn $R/\mathfrak{m}$ ist darin enthalten), außerdem in $(ex = 0/x = 0)$ enthalten: Denn ist $R/\mathfrak{n}$ ein Unzerlegbares in $(fx = 0/x = 0)$, so $f \in \mathfrak{n}$, wegen $e \in Rf$ also auch $e \in \mathfrak{n}$ und damit wiederum $R/\mathfrak{n} \in (ex = 0/x = 0)$.

Für die Richtung von i. nach ii. genügt es nun, zu zeigen, daß die Inklusion echt ist. Das Ideal $\langle e, 1 - f\rangle$ ist nicht R: Sonst gibt es eine Zerlegung $1 = se + t(1 - f)$, folglich $e = 1e = se^2 + t(1 - f)e = se^2 = se$ und $f = f1 = fse = fe \in Re$, Widerspruch zur Wahl von Rf. Also existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \supseteq \langle e, 1 - f\rangle$. Folglich (wegen 2.3.1) ist $R/\mathfrak{n} \in (ex = 0/x = 0) \setminus (fx = 0/x = 0)$, was zu zeigen war.

Umgekehrt gelte nun ii., sei $R/\mathfrak{n}$ in der offenen Menge $(ex = 0/x = 0)$ enthalten. Also ist $e \in \mathfrak{n}$, wegen der Maximalität von Re folglich $Re = \mathfrak{n}$, $R/Re = R/\mathfrak{n}$: $(ex = 0/x = 0)$ enthält demnach nur einen Punkt, ist also minimal und isoliert R/Re. ∎

Korollar 2.3.3

i. *Die isolierten Punkte des Ziegler-Spektrums sind genau die Unzerlegbaren der Form $R/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugtes maximales Ideal, also von der Form Re ist.*

ii. *Die offenen Mengen $(ex = 0/x = 0)$ der Standardbasis sind offen-abgeschlossen. Punkte im Ziegler-Spektrum sind abgeschlossen.*

Beweis: Ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt, so also von der Form Re, und dann zeigt Lemma 2.3.2 die Isoliertheit von $R/\mathfrak{m}$. Ist umgekehrt $R/\mathfrak{m}$ isoliert, so auch durch eine geeignete basis-offene Menge $(ex = 0/x = 0)$. Diese ist dann insbesondere minimal offen nicht leer, daher ist, wieder wegen Lemma 2.3.2, Re maximal und $R/Re \in (ex = 0/x = 0)$, also $R/\mathfrak{m} \simeq R/Re$ (sogar $Re = \mathfrak{m}$). Das beweist i.

Wegen 2.3.1 ist das Komplement von $(ex = 0/x = 0)$ gerade $((1 - e)x = 0/x = 0)$; $(ex = 0/x = 0)$ ist also auch abgeschlossen. Tatsache 2.3.1 ii. zeigt, daß $R/\mathfrak{m}$ das einzige Unzerlegbare in $\bigcap_{e\in\mathfrak{m}}(ex = 0/x = 0)$ ist; $R/\mathfrak{m}$ ist abgeschlossen. ∎

Kapitel 3

Auslander-Reiten-Folgen

In diesem Abschnitt wollen wir unter anderem zeigen, wie man auf modelltheoretischem Wege die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen in der Kategorie der endlich präsentierten Moduln über einer Artin-Algebra R nachweisen kann; ausgelöst hat diese Überlegungen Prests Beweis von Lemma 2.1.6, der im Gegensatz zu unserem die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen verwendet. Es zeigt sich, daß der Zusammenhang zwischen der Existenz von Auslander-Reiten-Folgen und dem Begriff der Isoliertheit, jedenfalls bei artinschen Ringen, ganz transparent ist (Satz 3.3.3). Für beliebige Ringe ist Lemma 3.2.3 das entsprechende Hauptresultat.

Abschnitt 3.1 enthält wohl weitgehend Bekanntes: Definitionen und grundlegende Tatsachen. In 3.2 finden sich Charakterisierungen der Moduln M, für die es eine Auslander-Reiten-Folge (in R-Mod) mit linkem bzw. rechtem Endglied M gibt (Satz 3.2.5 und Satz 3.2.6, bzw. Satz 3.2.1). Das zentrale neue Ergebnis dort ist aber wohl Lemma 3.2.3, das den Begriff der Neg-Isoliertheit in ein neues Licht rückt. Abschnitt 3.3 untersucht – meist unter der Voraussetzung, daß der zugrundeliegende Ring artinsch ist – die entsprechenden Fragen für R-mod (Satz 3.3.3 und Satz 3.3.5). Abschnitt 3.4 faßt die Ergebnisse für Artin-Algebren zusammen.

3.1 Definitionen

Die Resultate dieses Abschnitts sind wohl bekannt; die Beweise sind von mir, da ich in der Literatur – die sich meist nur mit R-mod befaßt – keine finden konnte. Die wichtigsten Ergebnisse sind 3.1.4 bis 3.1.7.

Definition 3.1 Eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

heißt Auslander-Reiten-Folge (in R-Mod), falls:

i. sie nicht zerfällt;

ii. jedes $h : M \to X$, das keine zerfallende Injektion ist, faktorisiert über f: $h = h'f$ für ein geeignetes $h' : E \to X$;

iii. jedes $h : X \to N$, das keine zerfallende Surjektion ist, faktorisiert über g: $h = gh'$ für ein geeignetes $h' : X \to E$.

Entsprechend heißt eine kurze exakte Sequenz von endlich präsentierten Moduln, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, Auslander-Reiten-Folge in R-mod, falls die Bedingungen i. bis iii. für endlich präsentierte Moduln X erfüllt sind.

Auslander-Reiten-Folge werden auch fast zerfallende Folgen genannt. Die Bedingungen ii. und iii. werde ich getrennt untersuchen, daher die folgende Definition, deren Terminologie ich von [Her 92] übernehme:

Definition 3.2 Ein Morphismus $f : M \to E$ von R-Moduln heißt Auslander-Prä-Hülle (von M), falls f keine zerfallende Injektion ist und die Bedingung ii. der obigen Definition erfüllt ist. f heißt Auslander-Hülle (von M), falls zusätzlich gilt: Ist $l \in \mathrm{End}_R(E)$ mit $lf = f$, so ist $l \in \mathrm{Aut}(E)$.

Ein Morphismus $g : E \to N$ heißt Auslander-Prä-Überdeckung (von N), falls er keine zerfallende Surjektion ist und die Bedingung iii. der obigen Definition erfüllt ist. g heißt Auslander-Überdeckung (von N), falls zusätzlich gilt: Ist $l \in \mathrm{End}_R(E)$ mit $gl = g$, so folgt $l \in \mathrm{Aut}(E)$.

Entsprechend definiert man den Begriff der Auslander-Hülle etc. in R-mod.

Auslander-Prä-Hüllen heißen auch left-almost-split, Auslander-Hüllen auch minimal-left-almost-split, und ganz analog Auslander-Prä-Überdeckungen auch right-almost-split, Auslander-Überdeckungen auch minimal-right-almost-split.

Wir beginnen mit einfachen Folgerungen aus den Definitionen und beschränken uns dabei zunächst auf Auslander-Reiten-Folgen in der Kategorie aller Moduln; Auslander-Reiten-Folgen in R-mod werden wir in Abschnitt 3.3 untersuchen, falls der zugrundeliegende Ring artinsch ist. Es sei aber darauf hingewiesen, daß in der Darstellungstheorie der Begriff der Auslander-Reiten-Folge in R-mod die wichtigere Rolle spielt.

Lemma 3.1.1 *Ist $f : M \to E$ Auslander-Prä-Hülle und M nicht injektiv, dann ist f injektiv. Ist $g : E \to N$ Auslander-Prä-Überdeckung und N nicht projektiv, dann ist g surjektiv.*

Beweis: Die Einbettung $M \to \mathrm{E}(M)$ von M in seine injektive Hülle zerfällt nicht, falls M nicht injektiv ist, sie faktorisiert also nach Voraussetzung über f; f muß also injektiv sein. Dual für die zweite Behauptung. ∎

Da unser Ziel eine modelltheoretische Beschreibung von Auslander-Reiten-Folgen ist, also von nicht zerfallenden Folgen, werden wir im folgenden meist annehmen, M sei nicht injektiv, N nicht projektiv.

Lemma 3.1.2 *Hat M eine Auslander-Prä-Hülle $f : M \to E$, dann ist $\mathrm{End}_R(M)$ lokal. Hat N eine Auslander-Prä-Überdeckung $g : E \to N$, so ist $\mathrm{End}_R(N)$ lokal.*

Beweis: Wir zeigen nur die zweite Aussage.

Behauptung: Ist N' ein von N verschiedener Untermodul von N, dann zerfällt der induzierte Morphismus $g^{-1}(N') \to N'$.

Beweis der Behauptung: Die Inklusion $h : N' \to N$ ist keine zerfallende Surjektion, also gibt es ein $h' : N' \to E$ mit $h = gh'$. Insbesondere ist $\mathrm{im}(h') \subseteq g^{-1}(N')$, und also zerfällt h' den induzierten Morphismus $g^{-1}(N') \to N'$. Das zeigt die Behauptung.

Demnach ist N unzerlegbar: Denn ist $N = N_1 \oplus N_2$ eine direkte Zerlegung von N in echte Untermoduln, so erhält man mit der Behauptung $h'_i : N_i \to g^{-1}(N_i)$, die die Inklusionen $g^{-1}(N_i) \to N_i$ zerfällen; $h'_1 \oplus h'_2$ zerfällt dann g, Widerspruch.

Damit folgt aber die Lokalität von $\mathrm{End}_R(N)$: Sei $\nu \in \mathrm{End}_R(N)$ kein Automorphismus. Dann ist ν keine zerfallende Surjektion (sonst erhielte man eine Zerlegung $N \simeq N \oplus \ker(\nu)$ mit $\ker(\nu) \neq 0$, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von N), nach Voraussetzung existiert also ein $h' : N \to E$ mit $gh' = \nu$. Ist auch $1 - \nu$ kein Automorphismus, so erhält man entsprechend ein h'' mit $gh'' = 1 - \nu$. Dann aber ist $g(h' + h'') = 1$, g zerfällt also, Widerspruch. ∎

Auslander-Prä-Hüllen und Auslander-Prä-Überdeckungen sind natürlich niemals eindeutig bestimmt: Addieren von direkten Summanden an E erhält die jeweilige Eigenschaft. Eindeutigkeit sichert aber der schärfere Begriff der Hülle bzw. Überdeckung, der zusätzlich eine Art Kleinheit ausdrückt:

Lemma 3.1.3 *Seien $f : M \to E$ und $f' : M \to E'$ Auslander-Hüllen des Moduls M. Dann sind E und E' isomorph; genauer: Es gibt einen Isomorphismus $l : E \to E'$ mit $lf = f'$.*

Seien $g : E \to N$ und $g' : E' \to N$ Auslander-Überdeckungen des Moduls N. Dann sind E und E' isomorph vermöge eines Isomorphismus $l : E \to E'$ mit $g'l = g$.

Beweis: Wir zeigen die erste Behauptung: Die definierende Eigenschaft von Auslander-Prä-Hüllen liefert Morphismen $\nu : E \to E'$ mit $\nu f = f'$ und $\nu' : E' \to E$ mit $\nu' f' = f$, also $\nu\nu' f' = f'$ und $\nu'\nu f = f$. Wegen der Bedingung an $\mathrm{End}_R(E)$ folglich $\nu\nu' \in \mathrm{Aut}(E)$ und $\nu'\nu \in \mathrm{Aut}(E)$. ∎

Zusammenfassend können wir also sagen:

Korollar 3.1.4 *Ist $f : M \to E$ Auslander-Hülle und M nicht injektiv, dann ist M ein unzerlegbarer Modul mit lokalem Endomorphismenring, f ist eine Einbettung, und E ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dual für Auslander-Überdeckungen.* ∎

Im folgenden interessieren wir uns meist für die Situation wie im Korollar. Den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Hülle bzw. der Überdeckung mit dem der Auslander-Reiten-Folge stellt der nächste folkloristische Satz her:

Satz 3.1.5 *Sei $f : M \to E$ Auslander-Prä-Hülle mit injektivem f, sei $N := \mathrm{coker}(f)$ und $g : E \to N$ die Projektion. Dann sind äquivalent:*

i. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *ist Auslander-Reiten-Folge (in R-*Mod*).*

ii. $\mathrm{End}_R(N)$ *ist lokal.*

iii. $f : M \to E$ *ist Auslander-Hülle.*

Dual für surjektive Auslander-Prä-Überdeckungen.

Beweis: Es gelte i. Da nach Definition $g : E \to N$ Auslander-Prä-Überdeckung von N ist, folgt ii. mit Lemma 3.1.2.

Es gelte nun ii. Zu zeigen ist, daß $g : E \to N$ Auslander-Prä-Überdeckung ist. Daß g nicht zerfällt ist klar, denn sonst zerfiele auch f. Es bleibt also die Bedingung iii. aus der Definition nachzuweisen:

Sei $h : X \to N$ gegeben, das keine zerfallende Surjektion ist. h induziert ein kommutatives Diagramm (Dabei ist Y der Pullback.):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, "1"'] & Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, "k"'] & X \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Behauptung: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g'} X \longrightarrow 0$ zerfällt.

Beweis der Behauptung: Sonst ist $f' : M \to Y$ keine zerfallende Injektion, und wegen der definierenden Eigenschaft von Auslander-Prä-Hüllen faktorisiert f' über f: Es existiert $f'' : E \to Y$ mit $f''f = f'$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift right, "f''"'] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, "1"'] & Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift right, "k"'] & X \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Aber $kf''f = kf' = f$, das heißt $(kf'' - 1)f = 0$, und also $\ker(g) = \mathrm{im}(f) \subseteq \ker(kf'' - 1)$. Folglich gibt es ein $l : N \to E$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[d, shift right, "f''"'] & N \arrow[l, shift left, "l"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, "1"'] & Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift right, "k"'] & X \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

mit $kf'' - 1 = lg$. Nun ist $g'f''f = g'f' = 0$, und daher existiert ein $l' : N \to X$ mit $g'f'' = l'g$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[d, shift right, "f''"'] & N \arrow[l, shift left, "l"] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "l'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, "1"] & Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift right, "k"'] & X \arrow[r] \arrow[u, shift right, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Insgesamt ergibt sich nun

$$(gl + 1_N)g = g(lg + 1_E) = gkf'' = hg'f'' = hl'g;$$

da g surjektiv ist, folgt

$$gl - hl' = 1_N.$$

Wegen der Lokalität von $\mathrm{End}_R(N)$ muß gl oder hl' Automorphismus von N sein; folglich ist g eine zerfallende Surjektion (Widerspruch – daß g nicht zerfällt wurde schon gezeigt) oder h zerfallende Surjektion – ebenfalls ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es gibt also ein $g'' : X \to Y$, das g' zerfällt: $g'g'' = 1_X$. Damit folgt nun

$$h = hg'g'' = gkg'',$$

und kg'' ist die gesuchte Abbildung $kg'' : X \to E$. Das beweist i.

Von iii. nach i. schließt man ganz ähnlich: Zunächst folgt – mit den Notationen aus ii. nach i. – ganz genauso $(kf'' - 1)f = 0$; da $f : M \to E$ Auslander-Hülle von M ist, folgt nun $kf'' = 1_E$. Der Beweis der Behauptung überträgt sich (formal: Setze überall $l = 0$; Lokalität von $\mathrm{End}_R(N)$ wird nicht benutzt.): Es ergibt sich, daß $hl' = 1_N$, also h zerfallende Surjektion ist, also wie eben ein Widerspruch, womit auch hier die Behauptung gezeigt ist. Nun argumentiert man weiter wie in ii. nach i.

Um den Beweis von Satz 3.1.5 zu vollenden, setzen wir nun ii. voraus und zeigen iii. Gegeben sei $l \in \mathrm{End}_R(E)$ mit $lf = f$. Die Abbildung l induziert das kommutative Diagramm (Dabei ist N' der Pushout.):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & N \arrow[r] \arrow[d, "l'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen, daß l' ein Isomorphismus ist – und somit auch l – und nehmen dazu das Gegenteil an: Dann ist l' auch keine zerfallende Surjektion, da sonst $N \simeq N' \oplus \ker(l')$, im Widerspruch zu ii. Da $N' \simeq N(= \operatorname{coker}(f))$, ist auch $\operatorname{End}_R(N')$ lokal. Wegen der schon gezeigten Richtung von ii. nach i. ist

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow 0$$

Auslander-Reiten-Folge; da l' soeben als nicht-zerfallend erkannt worden ist, gibt es ein $l'' : N \to E$ mit $l' = g'l''$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & N \arrow[r] \arrow[d, "l'"] \arrow[dl, "l''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das Homotopielemma liefert nun ein $k : E \to M$ mit $kf = 1_M$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] \arrow[dl, "k"] & N \arrow[r] \arrow[d, "l'"] \arrow[dl, "l''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f zerfällt also, Widerspruch.

(Genauer: Aus $g'(l - l''g) = g'l - l'g = 0$ erhält man $k : E \to M$ mit $fk = l - l''g$. Somit

$$fkf = (l - l''g)f = lf - l''gf = lf = f.$$

Da f injektiv ist, folgt $kf = 1_M$.) ■

Korollar 3.1.6 *Sei* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* R-Mod. *Dann sind äquivalent:*

i. *Die Folge ist eine Auslander-Reiten-Folge.*

ii. $f : M \to E$ *ist Auslander-Hülle.*

iii. $g : E \to N$ *ist Auslander-Überdeckung.*

In diesem Fall haben M und N lokale Endomorphismenringe, und die Folge ist bis auf Isomorphie (von kurzen exakten Sequenzen) durch jedes der Endglieder eindeutig bestimmt. ■

Da wir uns im Zusammenhang mit dem Ziegler-Spektrum vor allem für rein-injektive Moduln interessieren, bzw. da bei Artin-Algebren unser Ziel ein modelltheoretischer Beweis für die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen (mit endlich präsentierten Endgliedern) ist, halten wir die folgende Beobachtung (siehe [Her 92]) fest; sie lenkt unser Interesse also auf Auslander-Reiten-Folgen, die nicht rein-exakt sind:

Satz 3.1.7 *Sei* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *eine Auslander-Reiten-Folge in* R-Mod. *Dann sind äquivalent:*

i. *Die Folge ist nicht rein-exakt.*

ii. M *ist rein-injektiv.*

iii. N *ist endlich präsentiert.*

Beweis: Endlich präsentierte Moduln sind rein-projektiv (wegen Satz 1.2.6), also folgt aus ii. bzw. iii. die Aussage i., da die Folge sonst zerfallen würde.

Es gelte i. Wegen Satz 1.2.6 gibt es einen reinen Epimorphismus $h : X \to N$ mit rein-projektivem X. Wenn h nicht zerfällt, dann gibt es eine Faktorisierung, $gh' = h$ für ein geeignetes $h' : X \to E$. Dann folgt, daß g

reiner Epimorphismus ist, im Widerspruch zu i. Folglich ist h zerfallende Surjektion, N demnach direkter Summand des rein-projektiven Moduls X und somit rein-projektiv. Zusammen mit $\mathrm{End}_R(N)$ lokal (Korollar 3.1.6) liefert nun Lemma 1.2.7 die Aussage iii.

ii. zeigt man genauso. ■

3.2 Existenzsatz

Dieser Abschnitt ist der wichtigste des Kapitels. Eine zentrale Rolle spielt mein Lemma 3.2.3: Einerseits gibt es eine neue Charakterisierung der Neg-Isoliertheit; zum anderen charakterisiert es, wenn man will, rein-injektive Moduln mit Auslander-Prä-Hüllen, und außerdem ist es ein wesentliches Element im Beweis von Satz 3.2.1. Zudem läßt sich mit seiner Hilfe recht leicht Crawley-Boeveys Charakterisierung rein-injektiver Moduln mit Auslander-Prä-Hüllen herleiten (siehe nach Lemma 3.2.4), ohne daß – wie in Crawley-Boeveys Beweis – tiefe algebraische Resultate verwendet werden müßten.

Satz 3.2.1, zusammen mit der anschließenden Erläuterung, charakterisiert die rechten Endglieder nicht-rein-exakter Auslander-Reiten-Folgen. (Daß die Bedingung der Nicht-Rein-Exaktheit für unseren Kontext recht natürlich ist, verdeutlicht Satz 3.1.7: Einerseits nämlich interessieren in Zusammenhang mit dem Ziegler-Spektrum rein-injektive Unzerlegbare, andererseits ist auch die Kategorie R-mod der endlich präsentierten Moduln ein vor allem bei den Darstellungstheoretikern sehr beliebtes Gebilde. Und bei Artin-Algebren sind endlich präsentierte Moduln gar rein-injektiv!) Neu sind Satz 3.2.5 und Satz 3.2.6, die die entsprechende Charakterisierung linker Endglieder solcher Folgen erreichen; und neu sind auch Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4.

Hier zunächst ein sehr allgemeiner Existenzsatz für Auslander-Reiten-Folgen (auf einer Seite), der auf Auslander ([Aus 78, I. Theorem 3.19], [Aus 85, Theorem 4]) zurückgeht:

Satz 3.2.1 *Sei N ein endlich präsentierter nicht projektiver Modul mit lokalem Endomorphismenring. Dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge in R-Mod, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, mit rechtem Endglied N.*

Ich gebe eine verbesserte Version des Beweises von Herzog ([Her 92]), der die gleiche Grundidee verwendet wie mein Beweis, den ich unabhängig etwa zur gleichen Zeit gefunden habe. Man beachte, daß die Voraussetzungen an N

notwendig für die Existenz einer nicht rein-exakten Auslander-Reiten-Folge in R-Mod mit rechtem Endglied N sind (wegen Satz 3.1.7 und Korollar 3.1.6).

Zunächst zeigen wir ein etwas technisches Lemma (von dem wir aber nur die Richtung von i. nach ii. benötigen):

Lemma 3.2.2 *Sei $N = \langle \bar{a} \rangle$ endlich präsentierter Modul; N hat also die Form $R^n / \langle A\bar{e} \rangle$, $\bar{a}$ das Bild von $\bar{e}$ unter der Projektion $\pi : R^n \to N$, mit einer geeigneten $m \times n$-Matrix A über R (zum Beispiel wegen Lemma 1.2.3 ii.). Sei P der partielle Typ (aus pp-Formeln) $P := \{C\bar{y} = 0 \mid {}_RT \vdash A \,|\, \bar{y} \to C\bar{y} = 0\}$ (also insbesondere $l(\bar{y}) = m$); es gilt ${}_RT \vdash A \,|\, \bar{y} \to P(\bar{y})$. Dann sind äquivalent:*

i. N ist nicht projektiv.

ii. $\{\neg A \,|\, \bar{y}\} \cup P(\bar{y})$ ist konsistenter partieller Typ.

Beweis: Sei zunächst N nicht projektiv. Wäre der Typ in ii. nicht konsistent, dann gäbe es mit Kompaktheit endlich viele Matrizen $C_1, \ldots, C_k$ mit ${}_RT \vdash A \,|\, \bar{y} \leftrightarrow C_1\bar{y} = 0 \wedge \ldots \wedge C_k\bar{y} = 0$. Bildet man durch "Übereinanderschreiben" die Matrix C (mit gleicher Spaltenzahl wie die C_i), dann folgte ${}_RT \vdash A \,|\, \bar{y} \leftrightarrow C\bar{y} = 0$. Lemma 1.2.1 lieferte sofort, daß $(R^n, A\bar{e})$ freie Realisierung von $A \,|\, \bar{y}$ ist, folglich auch von $C\bar{y} = 0$. Wegen Lemma 1.2.3 wäre dann $\langle A\bar{e} \rangle = \ker(\pi)$ direkter Summand von R^n, also auch $\mathrm{im}(\pi) = N$: Der Modul N wäre also projektiv, Widerspruch.

Im Beweis von Satz 3.2.1 wird die Nicht-Projektivität von N nur in Form von Lemma 3.2.2 ii. verwandt; das heißt, gilt ii., dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge mit rechtem Endglied N. Da diese nach Definition nicht zerfällt, folgt, daß N nicht projektiv ist, also i. ∎

Lemma 3.2.3 *Sei M ein rein-injektiver unzerlegbarer Modul. Dann sind äquivalent:*

i. M ist neg-isoliert.

ii. Es gibt eine Auslander-Prä-Hülle $f : M \to E$ von M.

Dabei ist f in ii. genau dann injektiv, wenn M nicht injektiv ist. E kann man so erhalten: Ist $M = \mathrm{H}(a)$ und $\text{pp-tp}(a)$ neg-isoliert durch ψ, so sei (N_0, b) freie Realisierung von ψ und $E := M \oplus N_0 / \langle a - b \rangle$.

Eine andere Charakterisierung der Existenz von Auslander-Prä-Hüllen hat Crawley-Boevey in [Cra 92, Theorem 2.3] gegeben. Im Anschluß an den Beweis zeigen wir, wie man sie schnell aus unserer erhält. Lemmata 3.2.3 und 3.2.4 zeigen, daß der Begriff der Neg-Isoliertheit doch recht natürlich ist.

Beweis: Es gebe eine Auslander-Prä-Hülle von M; es ist $M = \mathrm{H}(a)$ mit $a \in M \setminus 0$. Zu zeigen ist, daß $p = \text{pp-tp}(a)$ neg-isoliert ist. Aber p wird durch $q := \text{pp-tp}(f(a))$ neg-isoliert: Denn zunächst ist f nicht zerfallend, wegen der Rein-Injektivität von M ist also $p < q$. Sei r ein pp-Typ mit $r > p$; r werde in dem rein-injektiven Modul X realisiert durch ein Element c. Es gibt einen Morphismus $h : (M, a) \to (X, c)$, der nicht zerfällt, nach der definierenden Eigenschaft von Auslander-Prä-Hüllen also eine Faktorisierung $h = h'f$ mit einem Morphismus $h' : E \to X$. Es ist $h'(f(a)) = h(a) = c$ und somit $q \leq r$.

Umgekehrt sei M neg-isoliert, etwa $M = \mathrm{H}(a)$, $p := \text{pp-tp}(a)$ neg-isoliert durch eine pp-Formel ψ. Sei (N_0, b) freie Realisierung von ψ. Wir definieren $E := M \oplus N_0 / \langle a - b \rangle$ und f als natürliche Abbildung von M nach E. Dann ist dies eine Auslander-Prä-Hülle: Denn da $\psi \in \mathrm{tp}^+(b) \subseteq \mathrm{tp}^+(f(a))$, aber $\psi \notin \mathrm{tp}^+(a)$, zerfällt f nicht. Und sei $h : M \to X$ ein Homomorphismus, der keine zerfallende Injektion ist. Wegen der Rein-Injektivität von M folgt, daß h nicht rein ist, also $\mathrm{tp}^+(a) \subset \mathrm{tp}^+(h(a))$, folglich $\psi \in \mathrm{tp}^+(h(a))$. Es gibt also einen Morphismus $g : (N_0, b) \to (X, h(a))$. Die Abbildung $h \oplus g : M \oplus N_0 \to X$ bildet $a - b$ auf 0 ab, induziert also einen Morphismus $h' : E \to X$ mit $h'f = h$.

Ist f injektiv, so folgt aus dem Nichtzerfallen der Auslander-Prä-Hülle, daß M nicht injektiv ist. Die Umkehrung ist Lemma 3.1.1. ■

Die im nächsten Lemma betrachteten Funktoren sind Funktoren von mod-R in die Kategorie der abelschen Gruppen. Und noch eine Bezeichnung: Seien M ein R-Linksmodul, $\bar{a} \in M$, ψ eine pp-Formel für R-Linksmoduln (mit $l(\bar{a})$-vielen freien Variablen) und X ein R-Rechtsmodul. Dann sei

$$\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}(X) := \{\bar{x} \otimes \bar{a} \mid X \models \mathrm{D}\psi(\bar{x})\}.$$

Lemma 3.2.4 *Sei M ein rein-injektiver unzerlegbarer Modul. Dann sind äquivalent:*

i. M ist neg-isoliert.

ii. $-\otimes_R M$ *ist injektive Hülle eines einfachen Funktors.*

iii. $-\otimes_R M$ *hat einen einfachen Unterfunktor.*

Zusatz: Die einfachen Unterfunktoren von $-\otimes_R M$ *sind dann genau die* $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$, $\bar{a} \in M$, $\psi = \psi_{\bar{a}}$ *eine* $\mathrm{tp}^+(\bar{a})$ *neg-isolierende Formel.*

Crawley-Boevey [Cra 92, Theorem 2.3] hat unabhängig von mir gezeigt, daß für ein M wie im Lemma äquivalent sind:

ii. $-\otimes M$ ist injektive Hülle eines einfachen Funktors.

iv. Es gibt eine Auslander-Prä-Hülle $f : M \to E$ von M.

Das folgt nun leicht aus Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.3.

Beweis: (von Lemma 3.2.4) Die Äquivalenz von ii. und iii. ist klar.

Ich zeige die Äquivalenz von i. und iii., sowie den Zusatz; Lemma 1.1.9 benutze ich, ohne explizit darauf zu verweisen.

Behauptung 1: Sei ψ beliebig, $\bar{a} \in M$. Dann ist $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$ ein Unterfunktor von $-\otimes M$.

Beweis der Behauptung: Klar.

Behauptung 2: $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}} \neq 0$ genau dann wenn $\psi \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$.

Beweis der Behauptung: Es sei $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}(X) \neq 0$, etwa $\bar{x} \in \mathrm{D}\psi(X)$ und $\bar{x}\otimes\bar{a} \neq 0$. Also gilt $M \models \neg\psi(\bar{a})$. Umgekehrt sei $(X,\bar{x})$ freie Realisierung von $\mathrm{D}\psi$. Also ist $\bar{x}\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}(X)$. Angenommen $\bar{x}\otimes\bar{a} = 0$, so gibt es $\chi \in \mathrm{tp}^+(\bar{a})$ mit $X \models \mathrm{D}\chi(\bar{x})$. Also ${}_RT \vdash \mathrm{D}\psi \to \mathrm{D}\chi$, somit ${}_RT \vdash \chi \to \psi$ und $\psi \in \mathrm{tp}^+(\bar{a})$.

Es gelte nun i. Sei also $M = \mathrm{H}(\bar{a})$ und $\mathrm{tp}^+(\bar{a})$ neg-isoliert durch $\psi = \psi_{\bar{a}}$. Dann ist wegen Behauptung 2 $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}} \neq 0$. Sei $\mathcal{S}'$ Unterfunktor von $\mathcal{S}$ ungleich Null; zu zeigen ist $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Aus $\mathcal{S}' \neq 0$ folgt zunächst für geeignetes X und $\bar{x} \in X$, daß $0 \neq \bar{x}\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}'(X)$. $(X,\bar{x})$ ist frei für ein $\mathrm{D}\nu$. Sei nun Y beliebig, zu zeigen ist $\mathcal{S}(Y) \subseteq \mathcal{S}'(Y)$. Sei dazu $\bar{y}\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}(Y)$, also $Y \models \mathrm{D}\psi(\bar{y})$. Wegen $\bar{x}\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}(X)$ folgt $X \models \mathrm{D}\psi(\bar{x})$ und somit ${}_RT \vdash \mathrm{D}\nu \to \mathrm{D}\psi$, ${}_RT \vdash \psi \to \nu$. Da $\bar{x}\otimes\bar{a} \neq 0$, ist $\nu \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$. Die Neg-Isoliertheit ergibt ${}_RT \vdash \mathrm{tp}^+(\bar{a}) \wedge \neg\psi \to \neg\nu$, also folgt für geeignetes $\varphi \in \mathrm{tp}^+(\bar{a})$, daß ${}_RT \vdash \varphi\wedge\nu \to \psi$. Daher ${}_RT \vdash \mathrm{D}\psi \to \mathrm{D}\varphi{+}\mathrm{D}\nu$, und daraus $Y \models (\mathrm{D}\varphi{+}\mathrm{D}\nu)(\bar{y})$. Es gibt also $\bar{z},\bar{z}' \in Y$ mit $\bar{y} = \bar{z}+\bar{z}'$, $Y \models \mathrm{D}\varphi(\bar{z})$, $Y \models \mathrm{D}\nu(\bar{z}')$. Somit existiert ein Morphismus $(X,\bar{x}) \to (Y,\bar{z}')$, also $\bar{z}'\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}'(Y)$. Aber $\bar{y}\otimes\bar{a} = \bar{z}\otimes\bar{a}+\bar{z}'\otimes\bar{a}$, und der erste Summand ist Null, da $\mathrm{D}\varphi(\bar{z})$ und $\varphi(\bar{a})$ gelten. Das zeigt $\bar{y}\otimes\bar{a} \in \mathcal{S}'(Y)$ und $\mathcal{S}(Y) \subseteq \mathcal{S}'(Y)$ wie gewünscht.

Es gelte iii. Sei $\mathcal{S}$ einfacher Unterfunktor ungleich Null von $-\otimes M$. Zu zeigen ist, daß $\mathcal{S}$ von der Form $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$ ist, für geeignete ψ, $\bar{a}$, so daß ψ den Typ $\mathrm{tp}^+(\bar{a})$ neg-isoliert. Nach Voraussetzung gilt für gewisse $\bar{x} \in X, \bar{a} \in M$, daß $0 \neq \bar{x} \otimes \bar{a} \in \mathcal{S}(X)$. Sei $(X, \bar{x})$ frei für $\mathrm{D}\psi$, also insbesondere $\psi \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$.

Behauptung 3: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$.

Beweis der Behauptung: Sei $\bar{y} \otimes \bar{a} \in \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}(Y)$, also $Y \models \mathrm{D}\psi(\bar{y})$. Also gibt es einen Morphismus $(X, \bar{x}) \to (Y, \bar{y})$ und folglich $\bar{y} \otimes \bar{a} \in \mathcal{S}(Y)$: $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$ ist Unterfunktor von $\mathcal{S}$. Wegen Behauptung 2 und $\psi \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$ ist $\mathcal{S}_{\psi,\bar{a}} \neq 0$. Nun liefert die Einfachheit von $\mathcal{S}$ die Behauptung.

Zu zeigen bleibt noch, daß ψ den Typ $\mathrm{tp}^+(\bar{a})$ neg-isoliert. Sei dazu $\nu \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$. Wegen der Unzerlegbarkeit von M (Zieglersches Unzerlegbarkeitskriterium) gibt es $\varphi \in \mathrm{tp}^+(\bar{a})$ mit $\psi_0 := \varphi \wedge \nu + \psi \notin \mathrm{tp}^+(\bar{a})$. Es gilt ${}_RT \vdash \psi \to \psi_0$, also ${}_RT \vdash \mathrm{D}\psi_0 \to \mathrm{D}\psi$ und folglich $\mathcal{S}_{\psi_0,\bar{a}} \leq \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}}$. Wieder wegen Behauptung 2 ist $\mathcal{S}_{\psi_0,\bar{a}} \neq 0$, somit also $\mathcal{S}_{\psi_0,\bar{a}} = \mathcal{S}_{\psi,\bar{a}} = \mathcal{S}$. Damit folgt aber ${}_RT \vdash \mathrm{D}\psi \to \mathrm{D}\psi_0$, also ${}_RT \vdash \psi_0 \to \psi$ und ${}_RT \vdash \varphi \wedge \nu \to \psi$; erst recht ${}_RT \vdash \mathrm{tp}^+(\bar{a}) \wedge \nu \to \psi$, das heißt: ${}_RT \vdash \mathrm{tp}^+(\bar{a}) \wedge \neg\psi \to \neg\nu$, was zu zeigen war. ■

Beweis: (von Satz 3.2.1) N hat die Form wie in Lemma 3.2.2, also insbesondere $N = R^n / \langle A\bar{e}\rangle$; sei auch der partielle Typ P wie dort. Lemma 3.2.2 liefert die Konsistenz von $\{\neg A \mid \bar{y}\} \cup P(\bar{y})$. Sei nun p irgendein durch $A \mid \bar{y}$ neg-isolierter Typ, der $P(\bar{y})$ enthält. (So ein p gibt es: Man wähle einen maximalen $P(\bar{y})$ enthaltenden partiellen Typ aus pp-Formeln, der mit $\neg A \mid \bar{y}$ konsistent ist, etwa p^+, und setze $p := p^+ \cup \{\neg\psi \mid \psi \notin p^+\}$.) Dann ist p unzerlegbar (siehe vor Lemma 1.1.7); sei $M = \mathrm{H}(\bar{c})$, $\bar{c}$ eine Realisierung von p. M ist also unzerlegbar rein-injektiv und neg-isoliert.

Behauptung: M ist nicht injektiv.

Beweis der Behauptung: (nach [Her 92]) Wegen [Zie 84, Lemma 5.8] gibt es eine Menge $\mathcal{B}$ von Matrizen B, so daß für jeden injektiven Modul Q und jede Wahl von Elementen $\bar{d} \in Q$ gilt: $Q \models A \mid \bar{d} \leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B} : B\bar{d} = 0$; für letzteres schreibe ich abkürzend $\mathcal{B}\bar{d} = 0$. Insbesondere gilt ${}_RT \vdash A \mid \bar{y} \to \mathcal{B}\bar{y} = 0$ (denn sei X ein beliebiger R-Modul, $\bar{d} \in X$, $\mathrm{E}(X)$ seine injektive Hülle; dann folgt aus $X \models A \mid \bar{d}$ auch $\mathrm{E}(X) \models A \mid \bar{d}$, also $\mathcal{B}\bar{d} = 0$ in $\mathrm{E}(X)$ und somit auch in X). Aber da $\mathcal{B}\bar{y} = 0$ ein partieller Typ ist, der in P enthalten ist, und $\bar{c} \in M$ gerade P aber nicht $A \mid \bar{y}$ realisiert, folgt, daß M nicht injektiv sein kann. Das beweist die Behauptung.

Um den Beweis zu vollenden, genügt es nun, eine Auslander-Prä-Hülle f :

$M \to E$ mit Kokern N zu konstruieren. Denn nach Lemma 3.2.3 und der Behauptung ist dann f injektiv, nach Satz 3.1.5 ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge. Aber die Konstruktion von Lemma 3.2.3 leistet das Gewünschte: Denn (N_0, b) kann von der Gestalt $(R^n, A\bar{e})$ gewählt werden (siehe etwa Lemma 1.2.3 oder den Beweis von Satz 1.2.2). Dann ist mit der Notation von Lemma 3.2.3 $\operatorname{coker}(f) = E/f(M) = (M \oplus R^n / \langle \bar{c} - A\bar{e} \rangle)/f(M) \simeq R^n / \langle A\bar{e} \rangle \simeq N$. ■

Was die Existenz von nicht rein-exakten Auslander-Reiten-Folgen betrifft, so ist die Situation also bezüglich des rechten Endterms so gut wie möglich: Zu jedem N, das überhaupt als ein solcher Endterm in Frage kommt, nämlich N mit lokalem Endomorphismenring, endlich präsentiert, nicht projektiv, gibt es auch tatsächlich eine entsprechende Auslander-Reiten-Folge. Für das linke Endglied gilt die analoge Behauptung nicht: Nicht zu jedem rein-injektiven unzerlegbaren M, das nicht injektiv ist, gibt es eine Auslander-Reiten-Folge mit linkem Endterm M. Wir können leider nur eine wenig befriedigende Charakterisierung der M geben, die als Endglied einer solchen Folge vorkommen:

Satz 3.2.5 *Sei M ein rein-injektiver unzerlegbarer Modul, der nicht injektiv ist. Dann sind äquivalent:*

i. Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge der Form

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

in R-Mod.

ii. Es gibt einen durch eine Formel der Gestalt $A \mid \bar{y}$ neg-isolierten pp-Typ p, so daß $M = \mathrm{H}(p)$ und $R^n / \langle A\bar{e} \rangle$ lokalen Endomorphismenring hat (wobei wieder $\bar{e}$ die kanonischen Erzeugenden von R^n sind).

Man beachte, daß jedes neg-isolierte unzerlegbare M von der Form $M = \mathrm{H}(p)$ ist, mit einem durch eine Formel der Gestalt $A \mid \bar{y}$ neg-isolierten Typ p; denn sei etwa $M = \mathrm{H}(\bar{a})$, pp-tp$(\bar{a})$ neg-isoliert durch $A \mid B\bar{x}$. Dann sieht man leicht, daß pp-tp$(B\bar{a})$ neg-isoliert ist durch $A \mid \bar{y}$. Das bedeutet, daß die entscheidende Bedingung in ii. die Lokalität des Endomorphismenringes ist.

Beweis: Es gebe eine Auslander-Reiten-Folge wie im Satz, sei N das rechte Endglied. Der Beweis von Satz 3.2.1 zeigt, daß es eine Auslander-Reiten-Folge in R-Mod gibt, mit einem linken Endterm der behaupteten Gestalt. Aus der Eindeutigkeit (Korollar 3.1.6) folgt, daß M diese Gestalt hat.

Umgekehrt habe M die angegebene Form. Lemma 3.2.3 (bzw. der Beweis von Satz 3.2.1) zeigt, daß es eine Auslander-Prä-Hülle gibt, $f : M \to E$, mit injektivem f, und so daß $N := \mathrm{coker}(f) \simeq R^n / \langle A\bar{e} \rangle$. Nach Voraussetzung hat N aber lokalen Endomorphismenring; wegen Satz 3.1.5 ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge. ■

Im artinschen Fall kann man Satz 3.2.5 eine etwas erfreulichere Form geben:

Satz 3.2.6 *Sei R artinsch und M ein rein-injektiver unzerlegbarer Modul, der nicht injektiv ist. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ in* R-Mod.

ii. *Es gibt einen durch eine Formel der Gestalt $A \,|\, \bar{y}$ neg-isolierten pp-Typ p, so daß $M = \mathrm{H}(p)$ und $A\bar{x} = 0$ $+$-irreduzibel ist.*

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 3.2.5 und Lemma 1.4.3. ■

Noch eine Bemerkung zu Herzogs Originalbeweis ([Her 92]): Er benutzt (mit den obigen Bezeichnungen) Lokalität von $\mathrm{End}_R(R^n / \langle A\bar{e} \rangle)$, um auf eine Art Eindeutigkeit des durch $A \mid \bar{y}$ neg-isolierten Typen zu schließen. Eine genauere Analyse seines Vorgehens zeigt, "wieviel" von der Lokalität von $\mathrm{End}_R(R^n / \langle A\bar{e} \rangle)$ für diese Eindeutigkeitsaussage notwendig ist; siehe Lemma 3.2.8: Sei für einen Linksmodul $N = \langle \bar{a} \rangle$, der frei für $A\bar{x} = 0$ ist, $(\mathrm{Tr}(N), \bar{b})$ freie Realisierung (als Rechtsmodul!) von $\bar{y}A = 0$. Man kann zeigen, daß dies mit dem Transponierten im Sinne von Auslander übereinstimmt. Definiert man $\underline{\mathrm{End}}_R(N)$ als

$$\mathrm{End}_R(N) / \{g \in \mathrm{End}_R(N) \mid g \text{ faktorisiert über einen freien Modul}\}$$

(äquivalent: faktorisiert über einen projektiven Modul), dann gilt:

Tatsache 3.2.7 $\underline{\mathrm{End}}_R(N) \simeq \underline{\mathrm{End}}_R(\mathrm{Tr}(N))$

Hier werden also Endomorphismenringe von Links-und Rechtsmoduln verglichen. Man kann dann zeigen:

Lemma 3.2.8 *Es sind (mit den obigen Notationen) äquivalent:*

i. *$\underline{\mathrm{End}}_R(N)$ ist lokaler Ring.*

ii. *Sei p ein beliebiger durch $A\,|\,\bar{y}$ neg-isolierter Typ, der P enthält. Dann gilt $p \supseteq \{\varphi(\bar{y}) \mid_R T \vdash A\,|\,\bar{y} \to \varphi$ und $\{\varphi\} \cup P \cup \{\neg A\,|\,\bar{y}\}$ konsistent$\}$.*

iii. *Sei p wie eben. Dann $\{\varphi \in p \mid_R T \vdash A\,|\,\bar{y} \to \varphi\} = \{\varphi(\bar{y}) \mid_R T \vdash A\,|\,\bar{y} \to \varphi$ und $\{\varphi\} \cup P \cup \{\neg A\,|\,\bar{y}\}$ konsistent$\}$.*

iv. *Sind φ_1, φ_2 pp-Formeln mit ${}_RT \vdash A\,|\,\bar{y} \to \varphi_i$, dann gilt: Ist $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ mit $P \cup \{\neg A\,|\,\bar{y}\}$ inkonsistent, so ist für ein i schon φ_i mit $P \cup \{\neg A\,|\,\bar{y}\}$ inkonsistent.*

Der Beweis benutzt Lemmata 1.2.4 und 1.2.5. Punkt iii. sagt etwa, daß der $+$-Anteil solcher Typen p "oberhalb" von $A\,|\,\bar{y}$ eindeutig bestimmt ist.

3.3 Auslander-Reiten-Folgen in R-mod

Dieser Abschnitt untersucht, meist nur für artinsche Ringe, durch welche Bedingungen die rechten bzw. linken Endglieder von Auslander-Reiten-Folgen in R-mod, der Kategorie der endlich präsentierten Moduln, charakterisiert werden. Satz 3.3.1 ist von Herzog ([Her 92, nach Corollary 2.4]). Der Rest ist von mir; man vergleiche aber auch [Her 92, Corollary 2.6]. Hauptergebnis ist wohl Satz 3.3.3, der im Falle artinscher Ringe die linken Endglieder von Auslander-Reiten-Folgen in R-mod charakterisiert. Das entsprechende Ergebnis für die rechte Seite ist der weniger befriedigende Satz 3.3.5. (Die Situation ist also hier, im Gegensatz zu R-Mod, für die *linke* Seite viel besser.) Meist werden wir, wie gesagt, einen artinschen Ring zugrundelegen; zunächst aber sei R noch beliebig.

Satz 3.3.1 *Sei N endlich präsentierter Modul mit lokalem Endomorphismenring, sei N nicht projektiv. Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ die nach Satz 3.2.1 existierende Auslander-Reiten-Folge in R-Mod. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge in R-mod, $0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} N \longrightarrow 0$.*

ii. *M enthält einen reinen Untermodul $M_0 \in R$-mod mit lokalem Endomorphismenring.*

Der Beweis ist nicht schwer; man vergleiche [Her 92]. Beweisskizze: Es gelte i.; dann findet man leicht eine reine Einbettung von M_0 in M. Umgekehrt gelte ii.; P und A seien wie in Lemma 3.2.2. Dann folgt i. mit der hier nicht bewiesenen

Behauptung: M_0 realisiert einen durch $A \mid \bar{y}$ neg-isolierten Typ, der P enthält.

Denn dann funktioniert die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 3.2.1 bzw. der dort zitierten Lemmata genau so gut in R-mod statt in R-Mod, sofern man nur beachtet, daß M_0 nicht injektiv in R-mod ist. Aber sonst wäre $M = \mathrm{H}(M_0) = \mathrm{E}(M_0)$ (Lemma 1.1.10), also injektiv, im Widerspruch zu der Behauptung im Beweis von Satz 3.2.1.

Bevor wir gegen Ende dieses Abschnitts wieder auf allgemeine Ringe zurückkommen, wenden wir uns nun dem artinschen Fall zu: Hier hat man einen guten Hüllenbegriff in R-mod (siehe Lemma 1.4.2 und die Diskussion danach). Dies ist der Schlüssel zu den folgenden Sätzen. Wir erinnern noch daran, daß im artinschen Fall endlich präsentierte Moduln genau dann unzerlegbar sind, wenn sie lokalen Endomorphismenring haben.

Lemma 3.3.2 *Sei R artinsch, $0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} N \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge in R-*mod.

i. *M_0 und N haben lokale Endomorphismenringe.*

ii. *Jedes der Endglieder bestimmt die Folge bis auf Isomorphie eindeutig.*

iii. *Die Auslander-Reiten-Folge ist nicht rein-exakt.*

iv. *$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} N \longrightarrow 0$ ist genau dann auch Auslander-Reiten-Folge in R-*Mod*, wenn M_0 rein-injektiv ist.*

v. *Es gilt das Analogon von Satz 3.1.5.*

Beweis: i. und ii. folgen sofort aus den entsprechenden Beweisen für R-Mod, da die dort konstruierten Moduln alle endlich erzeugt (und also endlich präsentiert) sind, falls M_0 und N dies sind. Da N rein-projektiv, die Folge aber nicht zerfallend ist, folgt iii. wie bei R-Mod. Ist die Folge auch Auslander-Reiten-Folge in R-Mod, dann folgt aus Satz 3.1.7, daß M_0 rein-injektiv ist. Umgekehrt sei M_0 rein-injektiv. Wegen Satz 3.1.5 genügt es zu zeigen, daß $f_0 : M_0 \to E_0$ eine Auslander-Prä-Hülle (in R-Mod) ist. Sei also $h : M_0 \to X$ eine nicht zerfallende Abbildung. Nach Voraussetzung ist h also nicht rein, folglich gibt es ein endlich erzeugtes (also endlich präsentiertes) $X_0 \leq X$, so daß schon $h : M_0 \to X_0$ nicht rein ist. Also gibt es ein $h' : E_0 \to X_0 \leq X$

mit $h'f_0 = h$, wie gewünscht. Punkt v. wird analog zum Beweis von Satz 3.1.5 gezeigt. ■

Satz 3.3.3 *Sei R artinsch. Sei M_0 endlich präsentierter unzerlegbarer Modul, nicht injektiv in R-mod (das heißt: nicht absolut rein), sei p ein in $M_0 \setminus 0$ realisierter pp-Typ. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge in R-mod, $0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} N \longrightarrow 0$.*

ii. *p ist neg-isoliert.*

iii. *p ist isoliert.*

iv. $\mathrm{H}(M_0) = \mathrm{H}(p)$ *ist isoliert im Ziegler-Spektrum.*

Es sei noch bemerkt, daß die Voraussetzungen an den Modul M_0 notwendig für die Existenz einer Folge wie in i. sind (wegen Lemma 3.3.2).

Beweis: p ist endlich erzeugt, also folgt die Äquivalenz von ii., iii. und iv. aus Lemma 1.1.8. Es gelte nun i. Man argumentiert wie im Beweis von Lemma 3.2.3: Ohne Einschränkung sei $M_0 = \langle \bar{a} \rangle$ und $p = \text{pp-tp}(\bar{a})$. (Denn, siehe vor Lemma 1.1.7, p ist genau dann neg-isoliert, wenn jeder andere in $M_0 \setminus 0$ realisierte Typ neg-isoliert ist.)

Behauptung 1: p wird neg-isoliert durch $q := \text{pp-tp}(f_0(\bar{a}))$.

Beweis der Behauptung: Wäre $p = q$, so gäbe es wegen der Bemerkung vor Lemma 1.2.3 (oder direkt mit: $(E_0, f_0(\bar{a}))$ ist frei für ein ψ, das also auch von $\bar{a} \in M$ erfüllt wird etc.) ein $h : (E_0, f_0(\bar{a})) \to (M_0, \bar{a})$, das, da M_0 von $\bar{a}$ erzeugt wird, die Abbildung f_0 zerfällt. Sei nun q_0 ein pp-Typ mit $p < q_0$; wegen Lemma 1.1.8 genügt es, endlich erzeugte q_0 zu betrachten. q_0 wird also in einem endlich präsentierten Modul realisiert, etwa in $\bar{c} \in X_0$. Es gibt einen Morphismus $h : (M_0, \bar{a}) \to (X_0, \bar{c})$; dieser ist keine zerfallende Injektion, also gibt es nach der definierenden Eigenschaft von Auslander-Reiten-Folgen in R-mod ein $h' : (E_0, f_0(\bar{a})) \to (X_0, \bar{c})$: Damit ist $q \leq q_0$, was zu zeigen war.

Umgekehrt sei nun p neg-isoliert, etwa durch ψ. Wiederum argumentiert man analog zu Lemma 3.2.3: Seien E, N und f wie im Beweis von Lemma 3.2.3 konstruiert.

Behauptung 2: Sei E_0 direkter Summand von E, der $f(\bar{a})$ enthält. Dann ist die induzierte Abbildung $f_0 : M_0 \to E_0$ eine Auslander-Prä-Hülle in R-mod.

Beweis der Behauptung: Denn zunächst ist E endlich präsentiert, somit auch jeder direkte Summand, und es genügt nun, nachzuweisen, daß $f : M_0 \to E$ Auslander-Prä-Hülle in R-mod ist, denn dann gilt dies auch für $f_0 : M_0 \to E_0$. Daß f nicht zerfällt, ist klar. Sei nun $h : M_0 \to X_0$ kein zerfallender Monomorphismus. Es folgt wieder, daß $\psi \in$ pp-tp$(h(\bar{a}))$, daß es also einen Morphismus $g : (N, \bar{b}) \to (X_0, h(\bar{a}))$ gibt, der dann die gewünschte Abbildung induziert.

Da M_0 nicht injektiv in R-mod ist, ergibt sich wie im Beweis von Lemma 3.2.3, daß f eine Injektion ist.

Es bleibt also zu zeigen, daß $f_0 : M_0 \to E_0 := \mathrm{N}(f(\bar{a}))$ nicht nur Auslander-Prä-Hülle in R-mod (wegen der Behauptung), sondern sogar Auslander-Hülle in R-mod ist. Aber das ist klar: Sei $l \in \mathrm{End}_R(E_0)$ mit $lf_0 = f_0$. Es gibt mit Lemma 1.4.1 eine natürliche Zahl k, so daß $E_0 = \ker(l^k) \oplus \mathrm{im}(l^k)$; da $f_0(\bar{a}) \in \mathrm{im}(l^k)$, folgt nach Wahl, daß $E_0 = \mathrm{im}(l^k)$, $\ker(l^k) = 0$: l ist ein Automorphismus. Nun liefert Lemma 3.3.2 v. das Ergebnis. ■

Man beachte, daß die einzige Änderung gegenüber dem rein-injektiven Fall folgendes Argument ist: Ist $f : (M, \bar{a}) \to (N, \bar{b})$ ein Morphismus von endlich präsentierten Moduln mit $M = \langle \bar{a} \rangle$, dann ist f zerfallend, genau dann wenn pp-tp$(\bar{a})$ = pp-tp$(\bar{b})$. Denn zerfällt f, dann haben $\bar{a}$ und $\bar{b}$ offenbar die gleichen pp-Typen. Und umgekehrt folgt aus der Gleichheit der pp-Typen, daß es einen Morphismus $g : (N, \bar{b}) \to (M, \bar{a})$ gibt, denn $(N, \bar{b})$ ist ja frei für eine pp-Formel ψ, die nach Voraussetzung auch von $\bar{a}$ in M erfüllt wird. g zerfällt dann f.

Satz 3.3.3 gibt also eine befriedigende Beschreibung der möglichen linken Endglieder einer Auslander-Reiten-Folge in R-mod, wenn der Ring artinsch ist. Für die rechte Seite haben wir zunächst

Satz 3.3.4 *Sei R artinsch und N ein nicht-projektiver endlich präsentierter Modul mit lokalem Endomorphismenring. Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ die nach Satz 3.2.1 existierende Auslander-Reiten-Folge in R-*Mod*. Dann sind äquivalent:*

*i. Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge in R-*mod *der Form $0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} N \longrightarrow 0$.*

*ii. M enthält einen reinen Untermodul $M_0 \in R$-*mod.

Denn das folgt sofort aus Satz 3.3.1, wenn man berücksichtigt, daß im artinschen Fall jeder endlich präsentierte Modul direkte Summe endlich präsentierter unzerlegbarer Moduln ist. ■

Eine Beschreibung, die nicht auf den in Satz 3.2.1 konstruierten Modul M in R-Mod zurückgreift, leider aber etwas technisch ist, liefert der nächste

Satz 3.3.5 *Sei R artinsch. Sei $N = \langle\bar{a}\rangle$ ein endlich präsentierter Modul mit lokalem Endomorphismenring. Sei (wie in Lemma 3.2.2) $(N, \bar{a})$ frei für die pp-Formel $A\bar{x} = 0$, sei P der partielle Typ aus Lemma 3.2.2. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine Auslander-Reiten-Folge in R-*mod *mit rechtem Endglied N.*

ii. *Es gibt eine pp-Formel $\varphi(\bar{y})$, so daß ${}_RT \vdash \varphi \to P$ und $\varphi \wedge \neg A \,|\, \bar{y}$ einen Typ isoliert.*

Beweis: Da R artinsch ist, ist P äquivalent zu einer pp-Formel (der Gestalt $C\bar{y} = 0$), wir schreiben daher ν statt P.

Wegen Lemma 3.2.2 ist der partielle Typ (die Formel) $\nu(\bar{y}) \wedge \neg A \mid \bar{y}$ konsistent, wenn i. oder ii. gilt. Wegen Satz 3.2.1 gibt es ein M in R-Mod, so daß $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge in R-Mod ist.

Es gelte nun i. Wegen Satz 3.3.4 gibt es einen endlich präsentierten Modul M_0, der rein in M ist. Wegen der Behauptung im Beweis von Satz 3.3.1 (Lokalität von M_0 wird dabei nicht benutzt.) gibt es einen ν enthaltenden durch $A \,|\, \bar{y}$ neg-isolierten Typ p, der in M_0 realisiert wird. Dieser Typ p ist also endlich erzeugt: Es gibt eine pp-Formel in p, etwa φ, mit ${}_RT \vdash \varphi \leftrightarrow p^+$, insbesondere ${}_RT \vdash \varphi \to \nu$: Wegen Lemma 1.1.8 (genauer: dessen Beweis) gilt ii.

Umgekehrt gelte nun ii. Man argumentiert wie in Satz 3.3.1 (das heißt also wie im Beweis von Satz 3.2.1), nur eben in R-mod. Oder mit einer Variante: Wie im Beweis von Satz 3.2.1 liefert ii. einen endlich präsentierten unzerlegbaren Modul M_0, der einen durch $A \,|\, \bar{y}$ neg-isolierten Typ realisiert. Wie dort sieht man, daß M_0 nicht injektiv in R-mod ist. Satz 3.3.3 zeigt, daß M_0 linker Endterm einer Auslander-Reiten-Folge in R-mod ist; verfolgt man den Beweis dieses Satzes, so sieht man, daß das rechte Endglied dieser Folge gerade isomorph zu unserem N ist. ■

Nun einige Anwendungen der bisherigen Ergebnisse auf das Ziegler-Spektrum; zunächst sei dabei R wieder ein beliebiger Ring.

Lemma 3.3.6 *Sei M rein-injektiv unzerlegbar und neg-isoliert. Enthält M als reinen Untermodul einen endlich präsentierten Modul M_0, dann ist M isoliert im Ziegler-Spektrum.*

Beweis: Denn jeder in $M_0 \setminus 0$ realisierte Typ ist einerseits endlich erzeugt, andererseits aber als Typ in M auch neg-isoliert, und wegen Lemma 1.1.8 ist damit M isoliert. ■

Korollar 3.3.7 *Sei N endlich präsentierter nicht projektiver Modul mit lokalem Endomorphismenring, und sei M das wegen Satz 3.2.1 existierende linke Endglied einer Auslander-Reiten-Folge $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ in R-Mod. Dann gilt:*

i. *Enthält M als reinen Untermodul einen endlich präsentierten Untermodul mit lokalem Endomorphismenring, dann ist M isoliert im Ziegler-Spektrum.*

ii. *Gibt es auch in R-mod eine Auslander-Reiten-Folge mit rechtem Endglied N, dann ist M isoliert im Ziegler-Spektrum.*

Beweis: Dies folgt sofort mit Lemma 3.3.6, Lemma 3.2.3 und Satz 3.3.1. ■

Sei nun R wieder als artinsch vorausgesetzt. Dann hat man Satz 3.3.3, der einen Zusammenhang zwischen dem Ziegler-Spektrum und Auslander-Reiten-Folgen herstellt. Und es gilt

Korollar 3.3.8 *Sei R artinsch, sei M_0 endlich präsentierter Modul mit lokalem Endomorphismenring und nicht injektiv in R-mod. Gibt es eine Auslander-Reiten-Folge in R-Mod mit linkem Endglied $\mathrm{H}(M_0)$, so auch eine in R-mod mit linkem Endglied M_0.*

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.3.3 und Lemma 3.2.3. ■

3.4 Artin-Algebren

Bei Artin-Algebren ist die Situation besonders einfach, da man eine gute Dualität hat, bzw. da endlich präsentierte Moduln rein-injektiv sind. (Oder, wenn man will, weil nicht rein-exakte Auslander-Reiten-Folgen in R-Mod und in R-mod das gleiche sind – siehe das nächste Korollar – und man daher mit Satz 3.2.1 und Satz 3.3.3 schöne Charakterisierungen sowohl der rechten als auch der linken Endglieder solcher Folgen hat.) – Vermutlich ist Korollar 3.4.1 bekannt, sicherlich jedenfalls Teil ii. und iii. Der Beweis hier aber ist wohl neu.

Korollar 3.4.1 *Sei R Artin-Algebra.*

*i. Auslander-Reiten-Folgen in R-*Mod*, die nicht rein-exakt sind, liegen schon in R-*mod*, und jede Auslander-Reiten-Folge in R-*mod* ist auch eine in R-*Mod*.*

ii. Sei N ein endlich präsentierter Modul. Genau dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge mit rechtem Endterm N, wenn N unzerlegbar und nicht projektiv ist.

iii. Sei M endlich präsentierter Modul. Genau dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge mit linkem Endterm M, wenn M unzerlegbar und nicht injektiv ist.

Wegen i. fallen bei Artin-Algebren die Begriffe Auslander-Reiten-Folge in R-mod und Auslander-Reiten-Folge in R-Mod im wesentlichen zusammen; außerdem werden auch die oben gegebenen Beweise (von Satz 3.3.3 und von Satz 3.2.1 bzw. Lemma 3.2.3) identisch, da für endliche Teilmengen von endlich präsentierten Moduln Hülle und endliche Hülle übereinstimmen.

Beweis: Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine nicht rein-exakte Auslander-Reiten-Folge in R-Mod. Wegen Satz 3.1.7 ist M rein-injektiv und unzerlegbar. Wegen Lemma 3.2.3 ist M neg-isoliert, und wegen der Bemerkung nach Korollar 2.1.7 muß M dann endlich präsentiert sein. Da wegen Satz 3.1.7 das rechte Endglied N ohnehin endlich präsentiert ist, liegt die ganze Folge in R-mod. Umgekehrt zeigt Lemma 3.3.2 iv., daß Auslander-Reiten-Folgen in R-mod auch Auslander-Reiten-Folgen in R-Mod sind. Das ergibt i.

Wegen der Bemerkung auf Seite 25 stimmen die Begriffe injektiv und projektiv in R-Mod und R-mod für endlich präsentierte Moduln überein. Satz 2.1.6 liefert zusammen mit Satz 3.3.3 sofort, daß es zu nicht injektivem unzerlegbaren M in R-mod eine Auslander-Reiten-Folge mit linkem Endterm M gibt; die umgekehrte Richtung von iii. ist klar (siehe Lemma 3.3.2).

ii. folgt aus iii. sofort unter Verwendung der Dualität. ■

Ein alternativer Beweis der ersten Aussage von i. ergibt sich aus iii.: Ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge mit endlich präsentiertem N, so gibt es eine Auslander-Reiten-Folge in R-mod mit rechtem Endterm N (wegen iii.); diese ist wegen der zweiten Aussage von i. Auslander-Reiten-Folge in R-Mod. Wegen der Eindeutigkeit muß also M in R-mod liegen.

Einen alternativen Beweis von iii. erhält man entweder mit Satz 3.2.1 (denn wegen i. muß die Folge in R-mod liegen) oder auch mit Satz 3.3.5.

Kapitel 4

Interpretierbarkeit (Präliminarien. Teil II)

Dies Kapitel enthält im wesentlichen abstract nonsense, wichtig für die Entscheidbarkeitsresultate in Kapitel 6 und die Beschreibung des Ziegler-Spektrums in Kapitel 8. Abschnitt 4.1 beinhaltet unter anderem die Definition der für das Folgende so wichtigen pp-Äquivalenz und das wichtigste Resultat dazu, Satz 4.1.7. In 4.2 fasse ich kurz das Notwendigste zu Coxeter-Funktoren zusammen; Satz 4.2.4 läßt ihre Bedeutung bereits erahnen und stellt den Zusammenhang mit Abschnitt 4.1 her.

Die Ergebnisse in Abschnitt 4.1 sind wohl neu. Ihre Beweise sind einfach; als wichtig für den Rest der Arbeit erweisen sich aber die, wie mir scheint, "richtigen" Definitionen der dort eingeführten Begriffe. Abschnitt 4.2 ist zu großen Teilen wahrscheinlich bekannt, zumindest für endlichdimensionale Moduln.

4.1 pp-Funktoren

Dieser Abschnitt enthält neben pp-Versionen der sich um den Begriff der Interpretierbarkeit drehenden Definitionen und Sätze aus [AZ 86] das Konzept des pp-Funktors und der pp-Äquivalenz – für die folgenden Untersuchungen zu Entscheidbarkeit bzw. Topologie des Ziegler-Spektrums zahmer Köcheralgebren in Kapitel 6 bzw. Kapitel 8 ganz grundlegend. Wichtigstes Ergebnis ist hier Satz 4.1.7; interessant ist wohl auch Satz 4.1.8. Alle Definitionen und Sätze dieses Teils stammen von mir.

Seien im folgenden A, B etc. abelsche Strukturen, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ etc. Klassen abelscher Strukturen; dabei dürfen verschiedene Klassen durchaus abelsche Strukturen zu verschiedenen Sprachen enthalten: Für eine recht ausführliche Diskussion abelscher Strukturen, insbesondere den Zusammenhang mit Moduln (der es erlaubt, für Moduln eingeführte Begriffe auch hier zu verwenden), vergleiche man etwa den Artikel [KP 92]; wie in dieser Arbeit sei eine abelsche Struktur eine mehrsortige Struktur, so daß gilt:

i. Jede Sorte trägt die Struktur einer abelschen Gruppe;

ii. jede Funktion ist ein Gruppenhomomorphismus eines endlichen Produkts von Sorten in eine Sorte;

iii. jede Relation ist eine Untergruppe eines endlichen Produkts von Sorten.

Die abelschen Strukturen zu einer festen Sprache bilden zusammen mit den naheliegenden Morphismen (die alle Relationen und Funktionen der Sprache respektieren, insbesondere also die Gruppenstrukturen der Sorten) eine Kategorie. Die für Moduln entwickelte Theorie aus [Zie 84] und [Pre 88] überträgt sich auf abelsche Strukturen (auch dafür siehe etwa [KP 92]); insbesondere ist es sinnvoll, von pp-Typen, Hüllen etc. zu reden. Davon werde ich im folgenden kommentarlos Gebrauch machen.

Um die Notation nicht übermäßig kompliziert werden zu lassen, werde ich für eine pp-Formel φ aber einfach $\varphi(A)$ schreiben, ohne die gesorteten Variablen (die Sorten) zu kennzeichnen; insbesondere verstehe ich unter einer pp-Untergruppe von A eine Untergruppe der Form $\varphi(A)$ von einem geeigneten Produkt von Sorten von A, wobei φ eine pp-Formel mit entsprechend gesorteten Variablen ist. Es sollte stets klar sein, wie man dies auch ganz präzise notieren könnte – sonst siehe [KP 92] für Hilfestellung. Man beachte, daß auch Typen gesortet sind.

Die nun folgenden Definitionen sind "pp-definierbare Versionen" der entsprechenden aus [AZ 86].

Definition 4.1 B heißt pp-interpretierbar in A, wenn es eine pp-Interpretation $f : A \rightsquigarrow B$ gibt; das heißt wenn es für jede Sorte M von B eine pp-definierbare Untergruppe U_M von A und eine Surjektion $f_M : U_M \to M$ gibt, so daß die Relation

$$=_{f_M} := \{(a, a') \in U_M^2 \mid f_M(a) = f_M(a')\}$$

pp-definierbar ist, und so daß weiter (statt f_M schreibe ich nun f) für jede (m-stellige) Relation R der Sprache von B

$$Rf := \{(a_1, \dots, a_m) \mid B \models R(f(a_1), \dots, f(a_m))\}$$

pp-definierbar ist; analog für Funktionen. Dabei soll die Addition von M von der Addition in U_M induziert werden.

Mit anderen Worten: $f_M : U_M \to M$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit pp-definierbarem Kern, so daß die "hochgezogenen Relationen" Rf pp-definierbar sind; entsprechend für Funktionen.

Die Komposition zweier pp-Interpretationen definiert man analog wie in [AZ 86]; mit $1_A = 1 : A \rightsquigarrow A$ sei die identische (pp-)Interpretation bezeichnet.

Eine pp-Interpretation einer Struktur B in A wird also gegeben durch eine Kollektion von pp-Formeln.

Definition 4.2 Zwei pp-Interpretationen $f, f' : A \rightsquigarrow B$ heißen pp-homotop, in Zeichen $f \sim f'$, falls für jede Sorte M von B die Relation

$$f_M = f'_M := \{(a, a') \mid f_M(a) = f'_M(a')\}$$

pp-definierbar (in A) ist.

A heißt pp-Retrakt von B, falls es pp-Interpretationen $f : A \rightsquigarrow B$ und $g : B \rightsquigarrow A$ gibt, so daß $gf \sim 1_A$ gilt. Ist zusätzlich noch $fg \sim 1_B$, so heißen A und B pp-bi-interpretierbar.

Eine pp-Interpretation $f : A \rightsquigarrow B$ induziert einen Morphismus $\mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(B)$, der mit $\mathrm{End}(f)$ bezeichnet werde. – pp-Interpretationen erhalten im allgemeinen weder Zerlegbarkeit noch Unzerlegbarkeit. Es gilt aber

Lemma 4.1.1 *Seien $f, f' : A \rightsquigarrow B$ pp-Interpretationen.*

i. Ist A rein-injektiv, so auch B.

ii. Aus $f \sim f'$ folgt $\mathrm{End}(f) = \mathrm{End}(f')$.

iii. Ist A pp-Retrakt von B und B unzerlegbar, so ist auch A unzerlegbar.

iv. Sind A und B pp-bi-interpretierbar, so ist A rein-injektiv (bzw. unzerlegbar) genau dann wenn B rein-injektiv (bzw. unzerlegbar) ist.

Beweis: i. folgt, weil sich pp-Formeln der Sprache von B in pp-Formeln der Sprache von A "übersetzen" lassen, so daß man "in A über B reden" kann. ii. ist klar. Zu iii.: Nach Voraussetzung gibt es eine pp-Interpretation $g : B \rightsquigarrow A$, so daß $gf \sim 1_A$ gilt, wegen ii. also $\mathrm{End}(g)\mathrm{End}(f) = 1$. Ist A zerlegbar, so gibt es in $\mathrm{End}(A)$ ein nichttriviales Idempotentes e (siehe gegen Ende von Abschnitt 1.1); $\mathrm{End}(f)(e)$ ist Idempotentes in $\mathrm{End}(B)$ und – da es unter $\mathrm{End}(g)$ auf e abgebildet wird – nichttrivial. Also ist auch B zerlegbar. iv. folgt aus i. und iii. ■

Weil im folgenden weniger einzelne Strukturen als vielmehr Klassen abelscher Strukturen interessieren werden, hier nun

Definition 4.3 Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Klassen abelscher Strukturen. Eine Familie von pp-Interpretationen $f^A, A \in \mathcal{A}$, heißt uniforme Familie von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls jedes f^A eine Interpretation $f^A : A \rightsquigarrow B$ eines Elementes $B \in \mathcal{B}$ in A ist, und die pp-Formeln, aus denen diese Interpretationen bestehen, für alle $A \in \mathcal{A}$ die gleichen sind.

Das nächste Lemma, dessen trivialen Beweis wir uns schenken, stellt den Zusammenhang zwischen Interpretationen und uniformen Familien her; für den Begriff der abgeschlossenen Klasse siehe nach Satz 1.1.5.

Lemma 4.1.2 *Sei $f : A \rightsquigarrow B$ eine pp-Interpretation. Dann gibt es abgeschlossene Klassen abelscher Strukturen $\mathcal{A} \ni A$ und $\mathcal{B} \ni B$, so daß sich f zu einer uniformen Familie von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ fortsetzen läßt.* ■

Der wichtigste Begriff für das Folgende ist der des pp-Funktors:

Lemma 4.1.3 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Klassen abelscher Strukturen. Jede uniforme Familie von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ liefert auf natürliche Weise einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*

Vor dem Beweis schnell noch

Definition 4.4 Ein Funktor wie in Lemma 4.1.3 heißt pp-Funktor.

Mit einem pp-Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei eine zugehörige (im Sinne des Lemmas eben) uniforme Familie immer mitgegeben. – Daß die Komposition geeigneter pp-Funktoren wieder ein pp-Funktor ist, ist klar. – Wegen Lemma 4.1.2 setzt sich jede pp-Interpretation $f : A \rightsquigarrow B$ zu einem pp-Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ auf geeigneten abgeschlossenen Klassen $\mathcal{A} \ni A$ und $\mathcal{B} \ni B$ fort.

Beweis: (von Lemma 4.1.3) $F(A)$ sei die durch die uniforme Familie in A interpretierte Struktur, $f^A : A \rightsquigarrow F(A)$. Sei $\Phi : A \to A'$ ein Morphismus, M eine Sorte von $F(A)$, M' die entsprechende Sorte von $F(A')$, $A, A' \in \mathcal{A}$. Die uniforme Familie liefert dann Surjektionen $f^A_M : U_M \to M$ und $f^{A'}_{M'} : U_{M'} \to M'$. Weil U_M und $U_{M'}$ durch dieselbe pp-Formel definiert sind, induziert Φ eine Abbildung, ebenfalls mit Φ bezeichnet, $\Phi : U_M \to U_{M'}$. Weil $=f^A_M$ und $=f^{A'}_{M'}$ durch dieselbe pp-Formel gegeben werden, gibt es genau eine Abbildung $F(\Phi) : M \to M'$, so daß auf U_M die Abbildungen $f^{A'}_{M'}\Phi$ und $F(\Phi)f^A_M$ übereinstimmen. $F(\Phi)$ ist Morphismus, weil für alle Relationen R der Sprache von $\mathcal{B}$ die Relationen Rf^A und $Rf^{A'}$ durch dieselbe pp-Formel bestimmt sind. ∎

Lemma 4.1.4 *Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pp-Funktor. Ist $\mathcal{A}$ entscheidbar und ist F surjektiv, dann ist auch $\mathcal{B}$ entscheidbar. (Es genügt natürlich, daß die Isomorphietypen von $\mathcal{B}$ im Bild von F vorkommen.)*

Beweis: Das folgt sofort, weil sich Formeln der Sprache von $\mathcal{B}$ in entsprechende derjenigen von $\mathcal{A}$ übersetzen lassen. ∎

Definition 4.5 Seien $f : A \rightsquigarrow B$ und $g : A \rightsquigarrow C$ pp-Interpretationen und $\Psi : B \to C$ ein Morphismus abelscher Strukturen (der gleichen Sprache). Ψ heißt pp-definierbar, falls – in der Notation von oben – für jede Sorte M von B, die entsprechende Sorte N von C und die zugehörige Abbildung $\Psi : M \to N$ gilt, daß die Relation $\{(a, a') \mid a \in U_M, a' \in U_N, \Psi(f_M(a)) = g_N(a')\}$ in A pp-definierbar ist.

Definition 4.6 Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $F' : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ pp-Funktoren (mit jeweils zugehörigen uniformen Familien). Eine natürliche Transformation $\mu : F \to F'$ heißt pp-Transformation, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt, daß $\mu_A : F(A) \to F'(A)$ pp-definierbar ist (im Sinne der vorigen Definition); dabei sollen die pp-Formeln, die die Relationen der vorigen Definition definieren, nicht von A abhängen.

Lemma 4.1.5 *Seien $f : A \rightsquigarrow B$ und $g : A \rightsquigarrow C$ pp-Interpretationen und $\mu : B \to C$ ein pp-definierbarer Morphismus, seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abgeschlossene Klassen gemäß Lemma 4.1.2, so daß $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bzw. $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ pp-Funktoren sind, die f bzw. g fortsetzen. Dann gibt es abgeschlossene Klassen $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, so daß sich μ zu einer pp-Transformation $F' \to G'$*

fortsetzt, wobei $F' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ bzw. $G' : \mathcal{A}' \to \mathcal{C}'$ die Einschränkungen von F bzw. G sind.

Zusatz: Gilt $\mu = \sigma\nu$ auf B (für gewisse pp-definierbare Morphismen σ und ν), so gilt auf geeigneten abgeschlossenen Klassen die entsprechende Gleichung für die diese Morphismen fortsetzenden pp-Transformationen.

Beweis: Klar. ■

Definition 4.7 Ein pp-Isomorphismus ist ein natürlicher Isomorphismus, der eine pp-Transformation ist. Eine pp-Äquivalenz (zwischen Klassen $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$) ist ein pp-Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, so daß es einen pp-Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt, mit FG pp-isomorph zu $1_{\mathcal{B}}$ (dem identischen Funktor auf $\mathcal{B}$) und GF pp-isomorph zu $1_{\mathcal{A}}$. Ein solches Paar von Funktoren F und G heißt Paar von pp-Äquivalenzen.

Aus Lemma 4.1.5 ergibt sich

Lemma 4.1.6 *Sind A und B vermöge $f : A \rightsquigarrow B$ und $g : B \rightsquigarrow A$ pp-biinterpretierbar, so gibt es geeignete abgeschlossene Klassen abelscher Strukturen $\mathcal{A} \ni A$ und $\mathcal{B} \ni B$, so daß sich f und g zu einem Paar von pp-Äquivalenzen $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ fortsetzen.* ■

Satz 4.1.7 *Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pp-Äquivalenz, sei $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ so, daß GF und FG pp-isomorph zu 1 sind. Dann erhalten F und G (Un-)Zerlegbarkeit und Rein-Injektivität. $\mathcal{A}$ ist genau dann entscheidbar, wenn $\mathcal{B}$ entscheidbar ist. F und G induzieren Homöomorphismen der entsprechenden Ziegler-Spektra.*

Beweis: Bis auf die letzte Behauptung folgt alles aus Lemma 4.1.1 (bzw. ganz analog dem Beweis von iii. dort) und Lemma 4.1.4. Aber daß ein Homöomorphismus induziert wird, folgt sofort aus der nächsten Überlegung, die zeigt, daß die Topologie des Ziegler-Spektrums nicht feiner wird, wenn man als basis-offene Mengen (φ/ψ) zuläßt, die auch in *einer* Sorte mehrere freie Variablen haben dürfen. Um Schreibarbeit zu sparen, hier nur das Argument für eine einsortige Struktur:

Sei $U \in (\varphi(x,y)/\psi(x,y))$, ohne Einschränkung sei $\vdash \psi \to \varphi$. Es gibt also $(a,b) \in U$ mit $U \models \varphi(a,b) \wedge \neg\psi(a,b)$. Gilt $U \models \neg\exists y\psi(a,y)$, so sei $\varphi'(x) \equiv \exists y\varphi(x,y)$, $\psi'(x) \equiv \exists y\psi(x,y)$. Dann gilt $U \in (\varphi'/\psi')$ und $(\varphi'/\psi') \subseteq (\varphi/\psi)$. Gilt aber $U \models \exists y\psi(a,y)$, etwa $U \models \psi(a,c)$, so folgt zunächst $U \models \neg\psi(0, b-c)$. Wegen $\vdash \psi \to \varphi$ ergibt sich auch $U \models \varphi(a,c)$, also $U \models \varphi(0, b-c)$. Somit bezeugt $b - c$, daß $U \in (\varphi(0,y)/\psi(0,y))$, und $(\varphi(0,y)/\psi(0,y)) \subseteq (\varphi/\psi)$ ist klar. ∎

Von dem folgenden Satz werden wir zwar keinen Gebrauch machen, er ist aber wohl mitteilenswert; außerdem hat er mit Satz 6.1.4 eine "effektive" Version.

Satz 4.1.8 *Seien R und S Morita-äquivalente Ringe. Dann sind ihre Modulkategorien pp-äquivalent. Insbesondere haben R und S homöomorphe Ziegler-Spektra.*

Beweis: Das folgt aus den Überlegungen [Pre 88, Seite 335-336], wenn man die Effektivitätsbetrachtungen außer acht läßt. Die Aussage über die Spektra folgt dann mit Satz 4.1.7. ∎

Die meisten Funktoren, die im folgenden vorkommen werden (etwa in Kapitel 5), sind (zwischen geeigneten, meist endlich axiomatisierbaren Klassen von Moduln) pp-Äquivalenzen; was Entscheidbarkeit bzw. Topologie des Ziegler-Spektrums anlangt, sind sie damit wegen Satz 4.1.7 so schön wie nur irgend möglich. – Außerdem erhalten sie sogar Endlichdimensionalität, wie aus ihren Definitionen jeweils unmittelbar ersichtlich sein wird. Alternativ hätte man auch so vorgehen können: Formuliert man die Begriffe "pp-Äquivalenz" etc. etwas anders, nämlich nur für Köcherdarstellungen bei festem Körper k (also $\mathcal{A}$ eine Klasse von Köcherdarstellungen zu einem festen Köcher, analog $\mathcal{B}$ etc.), dann würde sogar allgemein gelten, daß pp-Äquivalenzen in diesem modifizierten Sinn Endlichdimensionalität erhalten. Und für die späteren Anwendungen (in Kapitel 6 und 8 zum Beispiel) hätte dies etwas weniger allgemeine Konzept selbstverständlich auch genügt.

Für den Rest dieser Arbeit vereinbaren wir noch folgende nützliche

Sprechweise: Sind $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$ und $\mathcal{B}$ Klassen abelscher Strukturen wie eben und $\mathcal{R}$ eine Menge von rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{B}$, so bedeute

> Jedes (bzw.: Fast jedes) Unzerlegbare aus $\mathcal{R}$ ist eines aus einem der $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$.

daß $\mathcal{R}$ (bzw. $\mathcal{R}$ bis auf endlich viele Unzerlegbare) enthalten ist in der Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen des Ziegler-Spektrums von $\mathcal{B}$, so daß die jeweils zugehörige Klasse abelscher Strukturen endlich axiomatisierbar ist und pp-äquivalent zu einer endlich axiomatisierbaren Teilklasse $\mathcal{A}'_i$ eines der $\mathcal{A}_i$. Dabei sollen die die pp-Äquivalenz vermittelnden pp-Formeln effektiv gegeben sein; und die zu $\mathcal{A}_i'$ gehörende Teilmenge des Ziegler-Spektrums möge koendlich in der zu $\mathcal{A}_i$ gehörenden sein. ("Koendlichkeit" wird nicht gebraucht; für die richtige Vorstellung dieses Begriffs ist sie aber ganz nützlich.) – Gelegentlich verwende ich diese Sprechweise auch für beliebige, nicht notwendig rein-injektive, Unzerlegbare.

Mit dieser Sprechweise gilt dann etwa (wegen einer leichten Verallgemeinerung von Lemma 4.1.4): Sind die $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{R}$ wie eben, so daß jedes Unzerlegbare aus $\mathcal{R}$ eines aus einem der $\mathcal{A}_i$ ist, sind weiter die $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, entscheidbar, dann ist auch die $\mathcal{R}$ entsprechende Modultheorie entscheidbar.

4.2 Coxeter-Funktoren

Hier untersuche ich Coxeterfunktoren, wobei die Darlegung, anders als in der Literatur, nicht auf endlichdimensionale Moduln beschränkt ist. Die meisten Ergebnisse sind für endlichdimensionale Moduln bekannt; neu sind die hier gegebenen allgemeineren Versionen, und neu ist vor allem Satz 4.2.4 ii., der in Verbindung mit Satz 4.1.7 aus dem vorigen Abschnitt ein ganz wesentliches Hilfsmittel sein wird.

Einige Informationen zu Köcheralgebren finden sich bereits in Abschnitt 1.6; insbesondere sei die Notation wie dort. Sei $\alpha \in E$ eine Ecke des Köchers Δ; mit $\alpha\Delta$ sei der Köcher bezeichnet (mit der gleichen Eckenmenge E; seine Kantenmenge sei αK benannt), der aus Δ durch Umorientieren aller (gerichteten) Kanten, die in α enden oder beginnen, entsteht. (Diese Operation heiße Spiegelung an der Ecke α.) α heißt Quelle (bzw. Ziel), falls jede Kante durch α in α beginnt (bzw. endet). Es ist klar, daß es genau dann eine (nicht eindeutige) Aufzählung der Ecken von Δ gibt, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so daß α_i für alle i Ziel (bzw. für alle i Quelle) in $\alpha_{i-1} \ldots \alpha_1 \Delta$ ist, falls Δ keine orientierten Zyklen hat. Ebenso klar ist: Seien Δ und Δ' zwei endliche Köcher, deren zugrundeliegende ungerichtete Graphen gleich und ohne Zyklen (also Baum) sind. Dann gibt es eine Komposition von Spiegelungen, die Δ in Δ' überführt.

Eine Darstellung $(M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$, deren zugrundeliegender Köcher zusammenhängender Baum ist, nur ein Ziel α_0 besitzt und deren f_k alle injektiv sind, ist selbstverständlich isomorph zu der Darstellung $(M_\beta', \iota_k)_{\beta \in E, k \in K}$, wobei $M_{\alpha_0}' = M_{\alpha_0}$, M_α' das Bild von M_α in M_{α_0}' unter der eindeutig bestimmten Komposition von Abbildungen f_k sei, die von M_α nach M_{α_0} geht, und wobei die ι_k die Inklusionen sind. Eine solche Darstellung heiße Unterraumsystem. Mehr noch: Ist Δ ein Köcher wie eben, dann hat man eine pp-Äquivalenz zwischen den Darstellungen $(M_\beta, f_k)_{\beta\in E, k\in K}$ mit allen f_k injektiv und den entsprechenden Unterraumsystemen. – In den Kapiteln 5 und 8 werden fast ausschließlich Unterraumsysteme untersucht.

Definition 4.8

i. Sei α Ziel. C_α^+ sei der Funktor von $k[\Delta]$-Mod nach $k[\alpha\Delta]$-Mod, auf Objekten definiert durch

$$C_\alpha^+(M_\beta, f_k)_{\beta\in E, k\in K} := (N_\beta, g_l)_{\beta\in E, l\in\alpha K}.$$

Dabei seien $N_\beta = M_\beta$ für $\beta \neq \alpha$; seien $k_i = (\beta_i, \alpha)$ die Kanten in α, dann

$$N_\alpha := \ker(\oplus M_{\beta_i} \to M_\alpha),$$

$g_k := f_k$ für $k \notin \{k_i\}$ und g_{k_i} die Projektion auf M_{β_i}. – Auf Morphismen sei C_α^+ auf die naheliegende Weise definiert.

ii. Sei α Quelle. C_α^- sei der Funktor von $k[\Delta]$-Mod nach $k[\alpha\Delta]$-Mod, definiert durch

$$C_\alpha^-(M_\beta, f_k)_{\beta\in E, k\in K} := (N_\beta, g_l)_{\beta\in E, l\in\alpha K}.$$

Dabei seien wieder $N_\beta = M_\beta$ für $\beta \neq \alpha$; seien entsprechend $k_i = (\alpha, \beta_i)$ die Kanten in α, dann

$$N_\alpha := \oplus M_{\beta_i}/\mathrm{im}(M_\alpha \to \oplus M_{\beta_i}),$$

$g_k := f_k$ für $k \notin \{k_i\}$ und g_{k_i} die durch Inklusion in $\oplus M_{\beta_j}$ induzierte Abbildung. – Auf Morphismen sei C_α^- wieder ganz naheliegend.

C_α^+ und C_α^- heißen Spiegelungsfunktoren.

Es ist klar, daß C_α^+ und C_α^- in der Tat Funktoren sind: C_α^+ linksexakt und C_α^- rechtsexakt.

Für das nächste Lemma sei noch an noch eine Bezeichnung erinnert: Für jede Ecke α ist M^α die einfache Darstellung von Δ, mit $M_\alpha = k$ und $M_\beta = 0$ für $\beta \neq \alpha$, mit allen $f_l = 0$.

Lemma 4.2.1 Δ *sei endlicher Köcher.*

i. Sei α Ziel, M eine Darstellung beliebiger Dimension. Dann gibt es einen Monomorphismus

$$C_\alpha^- C_\alpha^+(M) \to M,$$

der genau dann nicht surjektiv ist, wenn M eine Kopie von M^α als direkten Summanden enthält. Ist M unzerlegbar, so ist entweder auch $C_\alpha^+(M)$ unzerlegbar (als Darstellung über $\alpha\Delta$) und dann $C_\alpha^- C_\alpha^+(M) \simeq M$, oder $M = M^\alpha$ (und $C_\alpha^+(M) = 0$).

ii. Sei α Quelle, M wieder eine Darstellung beliebiger Dimension. Dann gibt es einen Epimorphismus

$$M \to C_\alpha^+ C_\alpha^-(M),$$

der genau dann nicht injektiv ist, wenn M eine Kopie von M^α als direkten Summanden enthält. Ist M unzerlegbar, so ist entweder auch $C_\alpha^-(M)$ unzerlegbar und dann $C_\alpha^+ C_\alpha^-(M) \simeq M$, oder $M = M^\alpha$ (und dann $C_\alpha^-(M) = 0$).

Beweis: Die in i. bzw. ii. angegebenen Morphismen sind die ganz naheliegenden; der Monomorphismus in i. etwa ist genau dann surjektiv, wenn M_α Summe der Bilder der M_{β_i} ist, wobei die β_i die Nachbarn des Ziels α seien. Ist dies nicht der Fall, so spaltet offenbar eine Kopie von M^α ab. Der Rest ist klar (oder folgt aus den Überlegungen in Abschnitt 4.1). ∎

Lemma 4.2.1 und die Form der Morphismen im Lemma zeigen, daß die pp-Funktoren $C_\alpha^- : \mathrm{im}(C_\alpha^+) \to \mathrm{im}(C_\alpha^-)$ und $C_\alpha^+ : \mathrm{im}(C_\alpha^-) \to \mathrm{im}(C_\alpha^+)$ ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen den Klassen $\mathrm{im}(C_\alpha^-)$ und $\mathrm{im}(C_\alpha^+)$ sind. Von diesem Ergebnis machen wir direkt keinen Gebrauch; wichtig sind aber die Anwendungen in Satz 4.2.4 und im nächsten Lemma. – Man beachte für das nächste Lemma die Sprechweise von Seite 80; die Behauptung des Lemmas ist sogar für beliebige Unzerlegbare wahr.

Lemma 4.2.2 Δ *und* Δ' *seien endliche Köcher mit gleichem Baum als zugrundeliegendem Graph. Dann ist fast jedes rein-injektive Unzerlegbare über Δ auch eines über Δ'.*

Beweis: Wie auf Seite 81 ausgeführt, gibt es eine Komposition von Spiegelungen, die Δ in Δ' überführt; die entsprechende Komposition von Spiegelungsfunktoren liefert die gewünschte pp-Äquivalenz. ■

Der Beweis zeigt für die in Kapitel 5 im Detail untersuchten Euklidischen Köcher – mit Ausnahme von $\tilde{\mathrm{A}}_n$ – sogar etwas mehr:

Lemma 4.2.3 *Δ und Δ' seien Köcher der Form $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$, mit gleichem zugrundeliegenden ungerichteten Graph. Fast jedes rein-injektive Unzerlegbare über Δ ist eines über Δ'.* Jedes *reguläre oder unendlichdimensionale Unzerlegbare über Δ ist eines über Δ'.* ■

Diese beiden Lemmata sind der Grund, warum es in Kapitel 5 genügt, die Euklidischen Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit einer fest gewählten Orientierung zu betrachten.

Definition 4.9 Sei Δ endlicher Köcher ohne gerichtete Zyklen.

i. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (siehe Seite 81) eine Aufzählung der Ecken von Δ, so daß α_i Ziel in $\alpha_{i-1} \ldots \alpha_1 \Delta$ ist, $i \leq n$. Dann sei
$$C^+ := C^+_{\alpha_n} \ldots C^+_{\alpha_1}.$$

ii. Ist entsprechend $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Aufzählung der Ecken, so daß für $i \leq n$ α_i Quelle in $\alpha_{i-1} \ldots \alpha_1 \Delta$ ist, so sei
$$C^- := C^-_{\alpha_n} \ldots C^-_{\alpha_1}.$$

C^+ und C^- heißen Coxeter-Funktoren .

Man beachte, daß C^+ wohldefiniert ist: Sind nämlich $\alpha_1 \neq \alpha_2$ Ziele in Δ, so sind sie nicht benachbart, daher ist α_1 Ziel in $\alpha_2\Delta$ und umgekehrt. Somit gilt $\alpha_1\alpha_2\Delta = \alpha_2\alpha_1\Delta$ und $C^+_{\alpha_1}C^+_{\alpha_2} = C^+_{\alpha_2}C^+_{\alpha_1}$ – wie sofort aus der Definition folgt. Analog für C^-.

Satz 4.2.4 *Δ sei endlicher Köcher ohne gerichtete Zyklen.*

i. $C^- : \mathrm{im}(C^+) \to \mathrm{im}(C^-)$ und $C^+ : \mathrm{im}(C^-) \to \mathrm{im}(C^+)$ sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen den abgeschlossenen, endlich axiomatisierbaren Klassen $\mathrm{im}(C^-)$ und $\mathrm{im}(C^+)$.

ii. *Die von* C^- *und* C^+ *induzierten Homöomorphismen der Ziegler-Spektra haben koendliche, offen-abgeschlossene Bilder; das Komplement des Bildes besteht jeweils nur aus endlichdimensionalen Unzerlegbaren und hat die diskrete Topologie.*

iii. C^- *ist rechtsexakt,* C^+ *linksexakt.*

iv. C^+ *und* τ *– siehe Abschnitt 1.6 – (bzw.* C^- *und* τ^{-1}*) sind natürlich isomorph.* C^+ *und* C^- *erhalten Defekt.*

Beweis: Mit Lemma 4.2.1 (und Satz 4.1.7) folgen i. und ii.; man beachte die Überlegung unmittelbar vor dem Satz, sowie Sätze 2.1.5, 2.1.6. Punkt iii. ist klar aus der Definition. Zu Punkt iv.: Daß C^+ und τ natürlich isomorph sind, steht in [Gab 80, Section 5.5]. Da τ Defekt erhält (siehe unmittelbar vor der Behauptung von Seite 36), gilt dies auch für C^+. ■

Kapitel 5

Moduln über zahmen Köcheralgebren

Dies Kapitel ist algebraischer Natur; es stellt die wesentlichsten Informationen zu endlichdimensionalen Unzerlegbaren über $k[\Delta]$ bereit, Δ einer der Euklidischen Köcher. Dabei bediene ich mich der Vorarbeiten von Donovan/Freislich, Dlab/Ringel und Nazarova ([DF 73], [DR 76] und [Naz 73]), die die endlichdimensionalen Unzerlegbaren über diesen Algebren bestimmt haben. Ich folge, auch in der Notation – selbst wenn diese gelegentlich als recht unglücklich gewählt bezeichnet werden muß – der Arbeit [DF 73], vereinfache und berichtige aber das dortige Vorgehen; zum Beispiel komme ich mit weniger Funktoren aus. Außerdem bemühe ich mich, ähnlich wie bereits in Abschnitt 4.2, möglichst viel für *beliebige*, nicht notwendig endlichdimensionale, Unzerlegbare zu zeigen (siehe etwa Lemmata 5.3.5, 5.3.3 und ihre Entsprechungen über den anderen Euklidischen Köchern), auch wenn der entscheidende Schritt vom Endlichdimensionalen zum Unendlichdimensionalen erst später mit Hilfe von Satz 2.2.1 vollzogen werden wird; siehe Abschnitt 6.2.

Da sich mit Ausnahme des ersten alle Abschnitte sehr ähnlich sind, verzichte ich auf gesonderte abschnittsweise Inhaltsangaben; hier eine Zusammenfassung des Inhalts: 5.1 enthält eine Beschreibung der (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{A}}_n$ (Korollar 5.1.3, sowie Lemma 5.1.5 und Lemma 5.1.6); diese Ergebnisse sind nicht neu. Neu ist dagegen Lemma 5.1.8, eine Variante des wohl folkoristischen und für das weitere zwar nicht unbedingt erforderlichen, aber doch interessanten Lemmas 5.1.7. Es gibt für gewisse unendlichdimensionale Unzerlegbare U Axiomatisierungen eines zugehörigen unzerlegbaren Typs p (das heißt $U = \mathrm{H}(p)$) modulo einer geeigneten abgeschlossenen Teilmenge des Ziegler-Spektrums an. Dieses Ergebnis spielt bei der Bestimmung des Ziegler-Spektrums in Kapitel 8 eine ganz wichtige Rolle (siehe Korollare 8.4.3 bis 8.4.5 und 8.5.4). – Es sei zu diesem Abschnitt noch bemerkt, daß die Coxeter-Funktoren für $\tilde{\mathrm{A}}_n$ in [DF 73] nicht korrekt angegeben sind.

Der Rest des Kapitels, das heißt die Abschnitte 5.2 bis 5.5, betrifft – abgesehen von ein paar Bemerkungen zu $\tilde{\mathrm{D}}_n$ zu Beginn von Abschnitt 5.2 – die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, jeweils mit einer fest gewählten Orientierung, der sogenannten Standardorientierung. Diese vier Abschnitte enthalten stets zunächst konkrete Formeln für die Coxeter-Funktoren und den Defekt für die Standardorientierung (Tatsachen 5.2.2, 5.3.1, 5.4.1 und 5.5.1); daß es für das weitere genügt, nur jeweils eine Orientierung, etwa diese Standardorientierung, zu betrachten, liegt – wie sich erweisen wird – an Lemma 4.2.3. Die Formeln für die Coxeter-Funktoren (jeweils Teil i. dieser Tatsachen) rechnet man leicht aus (oder siehe [DF 73]); Teil ii. ist jeweils aus [DF 73]. (Definiert man Defekt allgemein – worauf ich in dieser Arbeit verzichte – dann sind auch die Formeln für den Defekt nicht schwer zu verifizieren; die ebenfalls jeweils in Teil ii. enthaltenen Schranken für den Defekt Unzerlegbarer folgen einfach aus den Listen der endlichdimensionalen Unzerlegbaren in [DF 73]. Siehe aber auch [Rin 84, 1.0 Two Theorems of Ovsienko].) Dann wird jeweils eine Standardnotation für Moduln über der gerade betrachteten Köcheralgebra festgelegt, nach [DF 73]. Es folgt jeweils ein für *endlichdimensionale* Unzerlegbare wahrscheinlich bekanntes Lemma (Lemmata 5.2.3, 5.3.2, 5.4.2, 5.5.2), das zeigt, daß in fast allen Unzerlegbaren gewisse Gleichungen gelten. (Rein-Injektivität der Unzerlegbaren wird in diesem Lemma nicht benutzt.) Unter anderem wird dieses Lemma es jeweils erlauben, nur Unterraumsysteme zu betrachten. Die jeweils beiden nächsten Lemmata (Lemma 5.2.4 und 5.2.7, 5.3.3 und 5.3.5 (bzw. 5.3.6), 5.4.3 und 5.4.5, sowie 5.5.3 und 5.5.6) erklären, wie sich gewisse Gleichungen unter bestimmten Funktoren (zum Beispiel den Coxeter-Funktoren) verhalten. Die Bedeutung dieser Lemmata wird erst in Kapitel 8 klar werden (siehe dort etwa Lemma 8.3.1 und die Überlegungen unmittelbar davor und danach). Diese Lemmata sind für endlichdimensionale Unzerlegbare über $\tilde{\mathrm{D}}_4$ und $\tilde{\mathrm{E}}_6$ ohne Beweis in [DF 73] zu finden, für solche über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ nur teilweise; ähnliche – aber andere – Gleichungen sind auch in [DR 76], allerdings in anderem Zusammenhang. Die Funktoren D, S, T, S_7, T_7 und S_1 sind aus [DF 73], ihre "gestrichten" Versionen D', S', T', S_7', T_7' und S_1' (mit denen sie jeweils, für geeignete Klassen von Köcherdarstellungen, ein Paar von pp-Äquivalenzen bilden) habe ich ausgerechnet. Beweise sind nicht immer ausgeführt, da die trivialen Rechnungen einander sehr ähnlich sind. Vollständige Beweise gebe ich allerdings in den Fällen $\tilde{\mathrm{A}}_n$, $\tilde{\mathrm{D}}_4$ und im kompliziertesten Fall, im Fall des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_8$.

Die meisten der (Lemmata und) Beweise dieses Kapitels haben zwei Teile: Den zweiten erhält man aus dem ersten, indem man "injektiv" durch "surjektiv", "direkt" durch "Summe" etc. ersetzt. Meist könnte man mit einem Dualitätsargument wie im Beweis von Lemma 8.3.5 die eine Hälfte auf die andere zurückführen.

Es sei noch an die Sprechweise von Seite 80 erinnert, derer wir uns im folgenden ständig bedienen werden. – Und hier noch eine Reihe von Vereinbarungen:

Vereinbarung: a. Vektorräume werden mit großen lateinischen Buchstaben, ihre k-Dimension mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet. $e \cup f$ sei die Dimension $\dim(E+F)$ (bzw. $e \cap f$ entsprechend $\dim(E \cap F)$) für Unterräume E und F eines gemeinsamen Vektorraumes.

b. Im folgenden werden mehrere pp-Funktoren definiert; dabei beschränke ich mich darauf, die Wirkung auf Objekten – Moduln bzw. Köcherdarstellungen – anzugeben: Die Wirkung auf Morphismen ist stets die naheliegende, wenn nichts anderes gesagt wird.

c. Ist $M = (M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$ eine Darstellung eines Köchers Δ, dann schreibe ich für die Darstellung C^+M von Δ meist $(M_\beta^+, f_k^+)_{\beta \in E, k \in K}$; entsprechend für C^-M. Gelegentlich lasse ich die "+" bzw. "$-$" aber auch weg, etwa in Lemma 5.3.3: Dann fasse ich die M_β als pp-Formeln auf; mit anderen Worten: $M_\beta(C^+M) = M_\beta^+$.

d. Ein $(*)$ hinter dem Wort "Lemma", "Satz" etc. bedeute, daß die folgende Behauptung für alle rein-injektiven Unzerlegbaren zutrifft (und sinnvoll ist!), bis auf endlich viele endlichdimensionale Unzerlegbare von Defekt ungleich Null, bzw. – gleichbedeutend – daß die Aussage für Moduln wahr (und sinnvoll) ist, die gewisse, endlich viele, endlichdimensionale Unzerlegbare von Defekt ungleich Null nicht als direkte Summanden enthalten. Mit anderen Worten: Es gibt eine koendliche offen-abgeschlossene Menge im Ziegler-Spektrum (wegen der Sätze 2.1.6, 2.1.5), deren Komplement nur Punkte von Defekt ungleich Null enthält, und deren zugehörige endlich axiomatisierbare Theorie stillschweigend vorausgesetzt wird. Die Ausnahme-Unzerlegbaren bzw. die Theorie werden zwar nicht näher spezifiziert – da sie für unsere Überlegungen keine Rolle spielen werden –, könnten jeweils aber leicht ermittelt werden: es wird meist nur benutzt, daß alle betrachteten Darstellungen die Bedingungen im jeweils mit $*$ (ohne Klammern!) gekennzeichneten Lemma (Lemmata 5.2.3, 5.3.2, 5.4.2 und 5.5.2) erfüllen.

Vereinbarung d. gestattet es uns zum Beispiel, wie sich zeigen wird, fast durchgängig anzunehmen, alle betrachteten Moduln seien Unterraumsysteme; auch bei der Formulierung der mit einem $*$ versehenen Lemmata wird dies übrigens schon getan. – Unter $(*)$ gilt zum Beispiel: Seien Δ und Δ' endliche Köcher mit gleichem Baum als zugrundeliegendem Graph. Dann sind rein-injektive Unzerlegbare über Δ Darstellungen über Δ' (wegen Lemma 4.2.2).

5.1 $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$, $n \geq 0$

Der Fall $n = 0$ (das heißt $k[X]$) ist nicht ausgeschlossen; mehr noch: es sind zyklische Orientierungen zugelassen. Daher sind in diesem Abschnitt Algebren zunächst nicht unbedingt endlichdimensional.

Bei Darstellungen $M = (M_\beta, f_k)_{\beta \in E, k \in K}$ des Köchers $\tilde{\mathrm{A}}_n$ (mit beliebiger Orientierung) ist die Eckenmenge E im allgemeinen $E = \{1, \ldots, n+1\}$; statt M_i schreibe ich meist W_i, später auch A_i. Die Kante von Ecke i zu Ecke j sei $e_{i,j}$.

Lemma 5.1.1 zeigt, wie sich später erweisen wird, daß es für das Weitere genügt, den Fall $n = 2m - 1$ zusammen mit einer festen Orientierung zu untersuchen; $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$, $m \geq 1$, sei, falls nichts anderes gesagt wird, stets mit dieser sogenannten alternierenden Orientierung und den folgenden Bezeichnungen versehen: Die Ecken seien (im Uhrzeigersinn) $1, 2, \ldots, 2m$, die Kanten seien: im Uhrzeigersinn $e_{2,3}, e_{4,5}, \ldots, e_{2m,1}$ und gegen den Uhrzeigersinn $e_{2,1}, e_{4,3}, \ldots, e_{2m,2m-1}$, so daß also die ungeradzahligen Ecken Ziel, die geradzahligen Quelle sind. Insbesondere werden die Fälle $m = 1, 2, 3$ eine herausragende Rolle spielen (wobei sich zeigt, daß auf $m = 2, 3$ auch hätte verzichtet werden können). Darstellungen dieser Köcher schreibe ich meist als

$$W_2 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} W_1$$

im Fall $m = 1$ (Diese Darstellungen, bzw. die ihnen entsprechenden Moduln, heißen Kronecker-Moduln.); bzw. als

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& W_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
W_3 & & W_1 \\
& W_2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

im Fall $m = 2$ und als

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& W_5 & W_6 \arrow[l] \arrow[dr] & \\
W_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & W_1 \\
& W_3 & W_2 \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

für $m = 3$.
Im Falle dieser alternierenden Orientierung gilt für den Defekt δ:

$$\delta(M) = \sum_{i \text{ gerade}} w_i - \sum_{i \text{ ungerade}} w_i.$$

Mit der Sprechweise von Seite 80 hat man

Lemma 5.1.1 *Sei $n \geq 0$ beliebig, $m > n$. $\tilde{\mathrm{A}}_n$ sei beliebig orientiert, und $k[\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}]$ sei mit der alternierenden Orientierung versehen. Dann ist jedes rein-injektive Unzerlegbare über $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ eines über $k[\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}]$.*

Weder Unzerlegbarkeit noch Rein-Injektivität werden benutzt.

Beweis: Durch Einfügen neuer gerichteter Kanten (Isomorphismen), genauer: $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$ hat – da $m > n$ – mindestens doppelt so viele Ecken wie $\tilde{\mathrm{A}}_n$. Die Ecken von $\tilde{\mathrm{A}}_n$ seien mit $1, 2, \ldots, n+1$ numeriert, $1, 2, \ldots, i-1$ seien Quellen oder Ziele, sei etwa $\tilde{\mathrm{A}}_n$ wie

$$\ldots \leftarrow i-1 \rightarrow i \rightarrow i+1 \ldots$$

orientiert, i also die erste Ecke, die nicht Quelle oder Ziel ist. Dann betrachte $\tilde{\mathrm{A}}_{n+1}$ mit der Orientierung

$$\ldots \leftarrow i-1 \rightarrow i \leftarrow i' \rightarrow i+1 \ldots$$

und den Funktor, der eine Darstellung von $\tilde{\mathrm{A}}_n$

$$\ldots \leftarrow W_{i-1} \rightarrow W_i \rightarrow W_{i+1} \ldots$$

auf die $\tilde{\mathrm{A}}_{n+1}$-Darstellung

$$\ldots \leftarrow W_{i-1} \rightarrow W_i \overset{=}{\leftarrow} W_i = W_{i'} \rightarrow W_{i+1} \ldots$$

wirft. Es ist klar, daß man so die gewünschten pp-Äquivalenzen erhält. ■

Lemma 5.1.2 *In endlichdimensionalen Unzerlegbaren über $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ sind höchstens zwei der $e_{i,j}$ keine Isomorphismen.*

Beweis: Wegen des eben gezeigten Lemmas genügt es die Behauptung für $k[\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}]$ zu zeigen; das ist in [DF 73] ausgeführt. ■

Definition 5.1 Darstellungen von $\tilde{\mathrm{A}}_{n-1}$ mit der zyklischen Orientierung heißen n-Zyklen.

Auch bei n-Zyklen M verwenden wir zunächst die obige Standardnotation, das heißt die Ecken sind $1, 2, \ldots, n$, die gerichteten Kanten $(i, i+1)$ (modulo n), die Vektorräume sind mit W_i bezeichnet, $1 \leq i \leq n$, und die Morphismen mit $e_{i,i+1}$ für $i < n$ und $e_{n,1}$, kurz mit $e_{i,i+1}$ (modulo n). Entsprechend W_i' für M' etc. Später, in Kapiteln 8 und 9, allerdings auch, um Schreibarbeit zu sparen: A_i statt W_i, mit Funktionen $f_i : A_i \to A_{i+1}$. – Mit der Definition eben können wir – wieder mit der Sprechweise von Seite 80 – wegen Lemma 5.1.2 formulieren:

Korollar 5.1.3 *Jedes endlichdimensionale Unzerlegbare über $\tilde{\mathrm{A}}_n$ ist ein Kronecker-Modul oder ein 2-Zyklus.* ■

Tatsächlich gilt das Korollar – das vorangehende Lemma ebenso – auch für unendlichdimensionale rein-injektive Unzerlegbare; siehe Korollar 6.2.3. (Außerdem gilt, falls $n \geq 1$, auch die Umkehrung des Korollars; siehe den Beweis von Lemma 5.1.1). – Insbesondere sind also endlichdimensionale $\tilde{\mathrm{A}}_3$-Unzerlegbare $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbare und umgekehrt (und auch $\tilde{\mathrm{A}}_1$-Unzerlegbare), so daß etwa in Definition 5.2 bzw. Definition 5.3 weiter unten auch Funktoren von $k[\tilde{\mathrm{A}}_1]$-Mod nach $k[\tilde{\mathrm{D}}_4]$-Mod bzw. von $k[\tilde{\mathrm{A}}_1]$-Mod nach $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$-Mod betrachtet werden könnten. Dies würde aber deutlich mehr Funktoren und daher auch mehr Fallunterscheidungen erfordern. – Korollar 5.1.3 legt jedenfalls eine genauere Analyse von Kronecker-Moduln und 2-Zyklen nahe (siehe Abschnitte 5.1.1 und 5.1.2); insbesondere wird diese dann eine leichte Verbesserung von Lemma 5.1.2 ergeben, die wir hier schon notieren wollen:

Korollar 5.1.4 *In endlichdimensionalen $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$-Unzerlegbaren sind höchstens zwei der $e_{i,j}$ keine Isomorphismen. Liegen genau zwei Nichtisomorphismen vor, dann sind diese surjektiv oder injektiv.* ■

Die naheliegenden pp-Äquivalenzen (siehe Beweis von Lemma 5.1.2), die Korollar 5.1.3 zeigen, erhalten auch Defekt, sofern dieser über beiden betrachteten Algebren definiert ist. (Davon überzeugt man sich im Falle von $k[\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}]$ mit der alternierenden Orientierung leicht mit Hilfe der vor Lemma 5.1.1 angegebenen Formel.)

5.1.1 Kronecker-Moduln

Wir betrachten jetzt Kronecker-Moduln. Schon Kronecker hat gezeigt (siehe etwa [Die 46]), daß endlichdimensionale Unzerlegbare wenigstens eine der folgenden vier Aussagen erfüllen:

f Isomorphismus;
g Isomorphismus;
f und g injektiv;
f und g surjektiv.

(Endlichdimensionale) Unzerlegbare, für die einer der ersten beiden Fälle zutrifft, sind $k[X]$-Moduln (mit der Sprechweise von Seite 80): Im Fall "f Isomorphismus" betrachte man etwa die pp-Äquivalenz F, die einen $k[X]$-Modul M wirft auf

$$M \underset{X}{\overset{1}{\rightrightarrows}} M$$

und die pp-Äquivalenz, die einen Kronecker-Modul,

$$W_2 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} W_1,$$

mit f Isomorphismus, abbildet auf W_1 mit der Operation $X := gf^{-1}$. Dementsprechend heißen Unzerlegbare, für die f ein Isomorphismus ist, $\mathfrak{p}$-adisch, bzw. Prüfer oder $\mathbf{Q}$, je nachdem, ob sie unter dem eben angegebenen Funktor F Bild eines $\mathfrak{p}$-adischen, bzw. eines Prüfers oder Bild von $k(X)$ sind; siehe Seite 19. Analog für die Unzerlegbaren mit g Isomorphismus: Sie sind Bild von $k[X]$-Unzerlegbaren unter einer analog definierten pp-Äquivalenz G. (Man überzeugt sich leicht, daß diese Definition bei Unzerlegbaren, für die sowohl f als auch g Isomorphismen sind, nicht zu Kollisionen führt; das heißt, daß ein solches Unzerlegbares Bild eines $\mathfrak{p}$-adischen U unter F genau dann ist, wenn es auch unter G Bild eines $\mathfrak{p}$-adischen, etwa U', ist. Allerdings ist im allgemeinen $U \neq U'$!). Und man sieht leicht, daß die stetigen unzerlegbaren Kronecker-Moduln gerade die der Form $F(k[X]/\mathfrak{p}^n)$ oder $G(k[X]/\mathfrak{p}^n)$ sind, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal, das heißt genau die Bilder (unter F oder G) von endlichdimensionalen unzerlegbaren $k[X]$-Moduln; insbesondere sind reguläre unzerlegbare Kronecker-Moduln auch stetig. – Ganz analog geht man bei beliebig orientiertem $\tilde{\mathrm{A}}_n$ vor: Man hat für ein festes $\{i, j\}$ ein offensichtliches Paar von pp-Äquivalenzen zwischen der Klasse der $k[X]$-Moduln und der Klasse der $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$-Moduln, für die höchstens die Abbildung $e_{i,j}$ (bzw. $e_{j,i}$) ein Nichtisomorphismus ist. Ein $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$-Modul, für den höchstens $e_{i,j}$ kein Isomorphismus ist, heißt dann wiederum $\mathfrak{p}$-adisch, bzw. Prüfer oder $\mathbf{Q}$, je nachdem, ob er unter dem entsprechenden Funktor Bild eines $\mathfrak{p}$-adischen, bzw. Prüfers oder Bild von $k(X)$ ist. Wie eben ist klar, daß dies wohldefiniert ist. Wegen Satz 4.1.7 ist ein solcher Modul als Bild eines rein-injektiven Unzerlegbaren unter einer pp-Äquivalenz jedenfalls rein-injektiv unzerlegbar. (Später wird sich zeigen, daß alle rein-injektiven Unzerlegbaren auf diese Weise erhalten werden können; siehe Abschnitt 6.2.). Und ist $\tilde{\mathrm{A}}_n$ nicht zyklisch orientiert, dann sind die stetigen endlichdimensionalen Unzerlegbaren, wie man leicht sieht, genau die, die unter einem der eben erwähnten Funktoren Bild eines endlichdimensionalen unzerlegbaren $k[X]$-Moduls sind. – Für die Bezeichnungen siehe auch Seite 172.

Die endlichdimensionalen Unzerlegbaren, in denen f und g echte Injektionen sind (die also genau die dritte Aussage von eben erfüllen), sind die Präprojektiven P_n, $n \geq 0$, gegeben durch

$$W_2^n = \langle x_1^n, \ldots, x_n^n \rangle, W_1^n = \langle y_1^n, \ldots, y_{n+1}^n \rangle$$

mit k-Basen $x_1^n, \ldots, x_n^n$ und $y_1^n, \ldots, y_{n+1}^n$, und

$$f(x_i^n) = y_i^n, g(x_i^n) = y_{i+1}^n, i \leq n.$$

Dabei sind P_0 und P_1 projektiv. Es ist $\delta(P_n) = -1$. Dual für die Präinjektiven I_n, in denen f und g echte Surjektionen sind; entsprechend $\delta(I_n) = 1$. – Zusammenfassend gilt

Lemma 5.1.5 *Die endlichdimensionalen Punkte des Ziegler-Spektrum von $k[\tilde{\mathrm{A}}_1]$ (mit alternierender Orientierung, also: Kronecker-Moduln) liegen in der Vereinigung von vier abgeschlossenen Mengen, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4$, jeweils definiert durch*

$\mathcal{A}_1$: *f Isomorphismus*
$\mathcal{A}_2$: *g Isomorphismus*
$\mathcal{A}_3$: *f und g injektiv*
$\mathcal{A}_4$: *f und g surjektiv.*

Reguläre (endlichdimensionale) Unzerlegbare sind stetig und $k[X]$-Moduln. Für endlichdimensionale Unzerlegbare U ist $\delta(U) \in \{0, -1, 1\}$. ■

5.1.2 n-Zyklen

Hier betrachten wir nun n-Zyklen. Diese spielen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Topologie zahmer Köcheralgebren in Kapitel 8.

Erinnert sei an die Standardnotation für n-Zyklen; für 2-Zyklen schreibe ich, vor allem in späteren Kapiteln, auch statt

$$W_1 \underset{e_{2,1}}{\overset{e_{1,2}}{\rightleftarrows}} W_2$$

kurz nur

$$A_1 \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} A_2.$$

Da in den oben erwähnten Arbeiten [DF 73], [DR 76], [Naz 73] und [Rin 84] nur endlichdimensionale Algebren untersucht werden, findet man dort zwar keine Listen der endlichdimensionalen unzerlegbaren 2-Zyklen, aber Abhilfe schafft hier eine direkte Analyse im Stile der Arbeit [Die 46], die sogar etwas einfacher ist als im Falle von Kronecker-Moduln, die ich aber hier nicht vorführen werde. (Alternativ: Man beruft sich auf [GP 72] oder [GP 71]: Da man leicht 2-Zyklen in Quadrupel (siehe Abschnitt 5.2) kodieren kann, gewinnt man aus diesen Arbeiten Listen der endlichdimensionalen unzerlegbaren 2-Zyklen.) Es ergibt sich, daß in einem unzerlegbaren endlichdimensionalen 2-Zyklus mit $f(= f_1)$ und $g(= f_2)$ Nichtisomorphismen f surjektiv oder injektiv sind, ebenso g. Mit Hilfe von Lemma 5.1.1 und Lemma 5.1.2 erhält man, daß in einem unzerlegbaren endlichdimensionalen n-Zyklus höchstens zwei der Abbildungen Nichtisomorphismen sind, und daß bei Vorliegen von genau zwei Nichtisomorphismen diese injektiv oder surjektiv sind. (Zusammen mit Lemma 5.1.5 folgt nun Korollar 5.1.4.) – Man bekommt aber sogar mehr (mit der auf Seite 80 vereinbarten Sprechweise):

Lemma 5.1.6 *Endlichdimensionale unzerlegbare n-Zyklen sind $k[X]$-Moduln.*

Beweis: Zwei echte Injektionen oder zwei echte Surjektionen sind (aus Dimensionsgründen) nicht möglich. Also liegt entweder nur höchstens ein Nichtisomorphismus vor (und in diesem Fall hat man Funktoren analog den bei Kronecker-Moduln verwandten) oder eine echte Injektion und eine echte Surjektion. Sei etwa (der Einfachheit halber bei $n = 2$) f injektiv, g surjektiv. Dann betrachte den Funktor, der einen entsprechenden 2-Zyklus abbildet auf A_2 mit der Operation $X = fg$ und den Funktor, der einen $k[X]$-Modul M wirft auf

$$XM \underset{X}{\overset{1}{\leftrightarrows}} M$$

Das ergibt ein Paar von pp-Äquivalenzen. ■

Man erhält also wiederum eine Überdeckung der endlichdimensionalen Punkte des Ziegler-Spektrums durch endlich viele überschaubare abgeschlossene Mengen, im Falle $n = 2$ etwa gegeben durch

f Isomorphismus;
g Isomorphismus;
f injektiv, g surjektiv;
g injektiv, f surjektiv.

Für die Beschreibung der Topologie des Ziegler-Spektrums in Kapitel 8 benötigen wir noch die folgenden Überlegungen; erinnert sei an die Bezeichnungen in Unterabschnitt 5.1.1 über Kronecker-Moduln: Wir betrachten n-Zyklen M, so daß alle $e_{i,i+1} : W_i \to W_{i+1}$, $i \leq n-1$, und $e_{n,1} : W_n \to W_1$ injektiv sind. Rein-injektive Unzerlegbare, die diese Bedingungen erfüllen, sind zum Beispiel die $\mathfrak{p}$-adischen, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $k[X]$, gegeben durch – wie man leicht sieht – $W_i = \widetilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$ für alle i, mit $e_{i,i+1}$ die Identität für alle i bis auf genau ein i_0, und e_{i_0,i_0+1} die Operation X. Es ist klar, daß es bei n-Zyklen im Gegensatz zum allgemeinen Fall $\tilde{\mathrm{A}}_n$ keine Bezeichnungsprobleme gibt: Ein Modul ist genau dann Bild des $\mathfrak{p}$-adischen U (über $k[X]$), $\mathfrak{p} \neq (X)$, unter einer der n naheliegenden pp-Äquivalenzen, wenn dies für jede dieser pp-Äquivalenzen gilt. Mit anderen Worten, es gibt für $\mathfrak{p} \neq (X)$ genau einen "$\mathfrak{p}$-adischen n-Zyklus", aber n verschiedene "(X)-adische n-Zyklen": die Bilder von $\widetilde{k[X]}_{(X)}$, des (X)-adischen $k[X]$-Unzerlegbaren, unter den n verschiedenen pp-Äquivalenzen. Für einen allgemeineren Kontext siehe wieder Seite 172 in Abschnitt 8.3.

Im Fall $n = 1$ (das heißt: $k[X]$-Moduln) ist nicht nur eine Umgebungsbasis der $\mathfrak{p}$-adischen bekannt (siehe Seite 20), sondern man kennt Axiomatisierungen eines entsprechenden unzerlegbaren pp-Typs (siehe für ähnliche Überlegungen [Zie 84, Lemma 5.1]):

Lemma 5.1.7 *Sei $\mathfrak{p} = (p)$. Es gilt $\widetilde{k[X]}_\mathfrak{p} = \mathrm{H}(r)$ mit einem unzerlegbaren pp-Typ $r = r(x)$, axiomatisiert durch*

$$\begin{aligned}&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0 \ (\text{“torsionsfrei”}),\\ &q|x, \text{ für } q \text{ (Primpotenz) mit } (q,p) = 1,\\ &p^{n+1} \nmid p^n x, n \geq 1.\end{aligned}$$

Natürlich gilt dieses Lemma allgemeiner für Hauptidealbereiche, sogar für Dedekind-Ringe. (Man benutzt dann [War 69, Corollary 5].)

Beweis: Zunächst ist klar, daß für $1 \in \widetilde{k[X]}_\mathfrak{p}$ die Axiome gelten. Umgekehrt sei nun a aus dem rein-injektiven $k[X]$-Modul M ein Element, das alle Axiome erfüllt.

Behauptung 1: Es gibt eine Kopie $N \ni a$ von $k[X]_\mathfrak{p}$, $N \subseteq M$, so daß a gerade $1 \in k[X]_\mathfrak{p}$ entspricht.

Beweis der Behauptung: Seien x_q Variable, $p \nmid q \in k[X]$, sei G das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&qx_q = a \text{ für alle } q \text{ mit } p \nmid q,\\ &x_q = rx_{q'}, \text{ falls } q' = qr.\end{aligned}$$

Dann ist G in M endlich erfüllbar: In einer endlichen Teilmenge von G kommen nur endlich viele Variable $x_{q_1}, \ldots, x_{q_l}$ vor; sei $q := q_1 \cdot \ldots \cdot q_l$. Es gibt also ein $a_q \in M$ mit $qa_q = a$. Man setzt dann $a_{q_i} = q/q_i \cdot a_q$. Also ist G erfüllbar.

Die zwischen den $1/q \in k[X]_\mathfrak{p}$, $p \nmid q$, bestehenden Gleichungen werden offenbar gerade durch G beschrieben. Daher gibt es eine Abbildung $k[X]_\mathfrak{p} \longrightarrow M$, die 1 auf a wirft. Die Ideale von $k[X]_\mathfrak{p}$ (also möglichen Kerne dieser Abbildung) sind 0 und die $\mathfrak{p}^n k[X]_\mathfrak{p}$; da $p^n a \neq 0$, handelt es sich also um eine Einbettung. Sei N deren Bild. Das zeigt die Behauptung. – Sei nun N die eben konstruierte Kopie von $k[X]_\mathfrak{p}$. Das Lemma folgt dann aus

Behauptung 2: N ist rein in M.

(Dann nämlich ist die reine Hülle $\tilde{N}$ von N, eine Kopie von $\widetilde{k[X]}_\mathfrak{p}$, auf die gewünschte Weise direkter Summand in M.)

Beweis der Behauptung: N ist genau dann rein in M, wenn für alle q gilt, daß $qM \cap N = qN$. Aber für q mit $p \nmid q$ ist $N = qN$ und somit alles klar. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $p^n M \cap N = p^n N$. Sei also etwa $b \in N$ und b in M durch p^n teilbar. Da a in M nicht durch p^n teilbar ist, ist a jedenfalls kein Vielfaches von b (in N), also muß – da N ein Bewertungsring ist – b Vielfaches von a in N sein, das heißt: Es gibt zu p teilerfremde r und s, so daß in N gilt $b = p^m r/s \cdot a$. In M gilt folglich $sb = p^m ra$. Da in M aber $p^n \mid b$, folgt $p^n \mid sb$, somit $p^n \mid p^m ra$; weil p und r teilerfremd sind, ergibt sich $p^n \mid p^m a$. Nach Wahl von a ist also $n \leq m$, und daher folgt aus $b = p^m r/s \cdot a$ (in N), daß b auch in N durch p^n teilbar ist. ■

Das nächste Lemma ist eine Variante von Lemma 5.1.7: Man hat eine offensichtliche pp-Äquivalenz zwischen $k[X]$-Mod, der Klasse aller $k[X]$-Moduln, und der Klasse derjenigen n-Zyklen, für die alle $e_{i,j}$ bis auf eventuell $e_{1,2}$ Isomorphismen sind. Sei $U = \mathrm{H}(r)$ der $\mathfrak{p}$-adische n-Zyklus aus dem folgenden Lemma 5.1.8. Da pp-Äquivalenzen offenbar erlauben, Axiomatisierungen von pp-Typen zu übertragen, beschreibt Lemma 5.1.7 – vermöge der eben erwähnten pp-Äquivalenz – also eine Axiomatisierung des zu dem $\mathfrak{p}$-adischen U gehörenden Typs r modulo $\{e_{i,i+1}$ Isomorphismus $\mid 1 < i \leq n\}$. In 5.1.8 wird eine Axiomatisierung modulo einer ähnlichen abgeschlossenen Menge angegeben. – Für die Anwendungen von Lemma 5.1.8 in Kapitel 8 spielt die konkrete Axiomatisierung des Typs r keine Rolle: Wichtig ist allein, daß das einzige gegenüber Lemma 5.1.7 "neue" Axiom gerade $x \in \mathrm{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\ldots e_{2,3})$ ist. Der Beweis von Lemma 5.1.8 zeigt auch, daß man eine Axiomatisierung des Typs r aus Lemma 5.1.8 erhält, indem man, formal, zu einer beliebigen Axiomatisierung wie im vorigen Lemma 5.1.7 das Axiom $x \in \mathrm{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\ldots e_{2,3})$ hinzufügt!

Lemma 5.1.8 *Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $k[X]$, U der $\mathfrak{p}$-adische n-Zyklus mit $e_{1,2} = X$ und $e_{i,i+1} = 1$ für $i > 1$; sei für die folgenden Axiome X gleichzeitig Abkürzung für $e_{n,1}e_{n-1,n}\ldots e_{1,2}$, so daß also W_1 ein $k[X]$-Modul wird. Dann ist $U = \mathrm{H}(r)$, wobei der unzerlegbare pp-Typ $r = r(x)$ axiomatisiert wird, modulo $\{e_{i,i+1}$ injektiv $\mid i \leq n\}$, durch*

$$\begin{aligned}
&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0 \text{ (“torsionsfrei”)},\\
&q|x, \text{ für } q \text{ (Primpotenz) mit } (q,p) = 1,\\
&p^{n+1} \nmid p^n x, n \geq 1,\\
&x \in \mathrm{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\ldots e_{2,3}).
\end{aligned}$$

Zusatz: Ist $\mathfrak{p} \neq (X)$, dann ist das letzte Axiom überflüssig.

Beweis: Sei zunächst U wie in Lemma 5.1.8 und $W_1 = \tilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$ der entsprechende Vektorraum (bzw. $k[X]$-Modul). Dann ist klar, daß auf $1 \in W_1$ die angegebenen Axiome zutreffen. Sei für die Umkehrung M ein rein-injektiver n-Zyklus, so daß in M alle $e_{i,i+1}$ injektiv sind, sei $a \in M$ ein Element, das die angegebenen Axiome erfüllt (insbesondere $a \in W_1$). W_1 ist für $X = e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{1,2}$ ein $k[X]$-Modul, mit den $k[X]$-Untermoduln $\operatorname{im}(e_{n,1})$, $\dots$, $B := \operatorname{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})$. Also wegen des letzten Axioms insbesondere $a \in B$. Die nächste Behauptung handelt von $k[X]$-Moduln:

Behauptung: Es gibt eine Kopie $N \ni a$ von $k[X]_{\mathfrak{p}}$, $\tilde{N} \subseteq B$, so daß a gerade $1 \in k[X]_{\mathfrak{p}}$ entspricht.

Beweis der Behauptung: Wir modifizieren den Beweis des letzten Lemmas, unterscheiden aber zwei Fälle: Ist $\mathfrak{p} \neq (X)$, dann findet man wie im Beweis des vorigen Lemmas eine Kopie N von $k[X]_{\mathfrak{p}}$ in W_1, so daß $a \in N$ der $1 \in k[X]_{\mathfrak{p}}$ entspricht und so daß N rein in W_1 ist. Also ist $\tilde{N}$, eine Kopie von $\tilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$, wie dort auf die gewünschte Weise direkter Summand. Zusätzlich aber gilt

$$\tilde{N} = X \cdot \tilde{N} \subseteq XW_1 \subseteq B,$$

was diesen Fall beendet. (Das letzte Axiom wurde dabei gar nicht benutzt.) Es bleibt der Fall $\mathfrak{p} = (X)$: Hier muß N etwas vorsichtiger gewählt werden; zunächst gilt die

Teilbehauptung: Für $X \nmid q$ ist $qW_1 \cap B = qB$.

Beweis der Teilbehauptung: Jedes Element in W_1/B wird von X annuliert; somit kann W_1/B keine q-Torsion haben. Und das ist die Teilbehauptung.

Wie im Beweis des vorigen Lemmas findet man nun eine Kopie $N \ni a$ von $k[X]_{(X)}$, so daß a gerade der $1 \in k[X]_{(X)}$ entspricht, und so daß – wegen der Teilbehauptung – zusätzlich $N \subseteq B$. Wieder wie im vorigen Lemma ist N rein in W_1. Nun ist also $\tilde{N}$ direkter Summand von W_1, und außerdem

$$\tilde{N} = X \cdot \tilde{N} + N \subseteq XW_1 + N \subseteq XW_1 + B = B.$$

Das ist die Behauptung.

Somit gibt es eine Zerlegung von W_1 als $k[X]$-Modul in $\tilde{N} \oplus N'$, mit $\tilde{N} \subseteq B = \operatorname{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})$, $\tilde{N}$ eine Kopie von $\tilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$. Insbesondere hat man Zerlegungen von $k[X]$-Moduln

$$\begin{aligned}
&\operatorname{im}(e_{n,1}) = \tilde{N} \oplus (N' \cap \operatorname{im}(e_{n,1})),\\
&\vdots\\
&B = \operatorname{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3}) = \tilde{N} \oplus (N' \cap B)
\end{aligned}$$

und also Zerlegungen von Vektorräumen

$$\begin{aligned}
&W_1 = \tilde{N} \oplus N',\\
&W_n = e_{n,1}^{-1}(\mathrm{im}(e_{n,1})) = e_{n,1}^{-1}(\tilde{N}) \oplus e_{n,1}^{-1}(N'),\\
&\vdots\\
&W_2 = (e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})^{-1}(\tilde{N}) \oplus (e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})^{-1}(N').
\end{aligned}$$

Diese Vektorraum-Zerlegungen sind mit den $e_{i,i+1}$ verträglich. (Man beachte insbesondere, daß $e_{1,2}(\tilde{N}) \subseteq (e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})^{-1}(\tilde{N})$, da $(e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})$ $e_{1,2}(\tilde{N}) = X\tilde{N} \subseteq \tilde{N}$.) Also ist M *als n-Zyklus* gleich $M' \oplus M''$, mit (die Vektorräume von M' seien mit W_i' bezeichnet) $W_1' = \tilde{N}$, $W_2' = (e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3})^{-1}(\tilde{N}), \dots, W_n' = e_{n,1}^{-1}(\tilde{N})$, analog M''. M' ist der gewünschte $\mathfrak{p}$-adische unzerlegbare n-Zyklus U, da die $e'_{i,i+1}$ nach Wahl surjektiv, also bijektiv, sind: Nach Identifizieren erhält man das Geforderte.

Der Zusatz ist mitbewiesen worden; oder nochmals: Ist $\mathfrak{p} \neq (X)$, dann ist eines der Teilbarkeitsaxiome

$$q|x,\ \text{für } q \text{ (Primpotenz und) mit } (q,p) = 1$$

gerade "$X|x$", mit anderen Worten: $x \in \mathrm{im}(e_{n,1}e_{n-1,n}\dots e_{2,3}e_{1,2})$. ∎

Sei U das Unzerlegbare aus Lemma 5.1.8, $\mathfrak{p} \neq (X)$; sei für ein i_0 (beliebig) U' das $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare (gleiches $\mathfrak{p}$!) mit $e_{i_0,i_0+1} = X$ und den übrigen $e_{i,i+1} = 1$, $i \neq i_0$. Weil, wie vor Lemma 5.1.7 berichtet, U und U' isomorph sind, hat U also auch die Form $U = \mathrm{H}(r')$, wobei der unzerlegbare pp-Typ $r' = r'(x')$ axiomatisiert wird, modulo $\{e_{i,i+1} \text{ injektiv } \mid i \leq n\}$, durch

$$\begin{aligned}
&qx' \neq 0, q \in k[X], q \neq 0 \text{ ("torsionsfrei")},\\
&q|x',\ \text{für } q \text{ (Primpotenz) mit } (q,p) = 1,\\
&p^{n+1} \nmid p^n x', n \geq 1,\\
&x' \in \mathrm{im}(e_{i_0-1,i_0}\dots e_{i_0+1,i_0+2}).
\end{aligned}$$

Dabei ist *hier* X auch Abkürzung für $e_{i_0-1,i_0}\dots e_{i_0+1,i_0+2}\, e_{i_0,i_0+1}$.

5.2 $k[\tilde{\mathrm{D}}_n]$, $n \geq 4$

Es sei an die Sprechweise von Seite 80 erinnert, sowie an die Vereinbarung zu Anfang dieses Kapitels, insbesondere an die Bedeutung von $(*)$. – Hier ist, wie Lemma 5.2.1 zeigt, vor allem der Fall $n = 4$ interessant, und zwar mit der Orientierung, so daß $\tilde{\mathrm{D}}_4$ ein Ziel und vier Quellen hat; diese soll im folgenden immer zugrundeliegen, wenn von $\tilde{\mathrm{D}}_4$ die Rede ist und nichts anderes gesagt wird. Darstellungen von $\tilde{\mathrm{D}}_4$ mit dieser Orientierung, der Standardorientierung, heißen Quadrupel und werden hier stets in der folgenden Standardnotation

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[dr] & & V_4 \arrow[dl] \\
& V_0 & \\
V_2 \arrow[ur] & & V_3 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

oder kurz, um Schreibarbeit zu sparen, auch als $V = (V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$ notiert. Entsprechend sei der Dimensionstyp eines endlichdimensionalen Quadrupels wie eben geschrieben als $(v_0; v_1, v_2, v_3, v_4)$ (siehe Vereinbarung a. vom Anfang des Kapitels). – Für ausführliche Information zu Quadrupeln siehe die klassische Arbeit [GP 72] oder deren Kurzversion (ohne Beweise) [GP 71]; mit der Sprechweise von Seite 80 gilt

Lemma 5.2.1 *Der Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$ sei beliebig orientiert. Fast jedes endlichdimensionale Unzerlegbare über $k[\tilde{\mathrm{D}}_n]$ ist ein Quadrupel.*

Beweis: Die Behauptung folgt in den Fällen $n = 2m + 4$ für $m \geq 1$ (mit einer speziellen Orientierung von $\tilde{\mathrm{D}}_{2m+4}$) aus Ergebnissen in [DF 73]. Mit einem "Einbettungsargument" ähnlich dem in Lemma 5.1.1 und mit Lemma 4.2.3 läßt sich der allgemeine Fall leicht darauf zurückführen. ■

Es gilt sogar, daß *jedes* endlichdimensionale Unzerlegbare über $k[\tilde{\mathrm{D}}_n]$ ein Quadrupel ist, denn trivialerweise hat man eine pp-Äquivalenz zwischen den, zum Beispiel, Quadrupeln mit $V_0 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$ und den Moduln über $k[\tilde{\mathrm{D}}_4]$ mit beliebiger Orientierung und ebenfalls $V_0 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$. Das ist aber ganz und gar irrelevant. – Im Rest dieses Abschnittes werden Quadrupel betrachtet. Für die folgende Tatsache beachte man insbesondere Vereinbarung c. vom Anfang des Kapitels.

Tatsache 5.2.2

i. Sei $V = (V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$ ein Quadrupel. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&V_0^+ = \ker(V_1 \oplus \ldots \oplus V_4 \to V_0);\\
&V_1^+ = \ker(V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \to V_0),\\
&\vdots\\
&V_4^+ = \ker(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \to V_0),\ \textit{sowie}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_0^- = (V_0/\operatorname{im}(V_1 \to V_0) \oplus \ldots \oplus V_0/\operatorname{im}(V_4 \to V_0))/\mathrm{diag};\\
&V_1^- = V_0/\operatorname{im}(V_1 \to V_0),\\
&\vdots\\
&V_4^- = V_0/\operatorname{im}(V_4 \to V_0).
\end{aligned}
$$

Die Abbildungen sind die natürlichen; diag *sei das Bild der Diagonalabbildung von* V_0 *nach* $V_0/\operatorname{im}(V_1 \to V_0) \oplus \ldots \oplus V_0/\operatorname{im}(V_4 \to V_0)$.

ii. Für endlichdimensionale Unzerlegbare V *ist* $\delta(V) = \sum v_i - 2v_0$. *Außerdem gilt* $|\delta(V)| \leq 2$. ■

Die Formulierung der zweiten und dritten Behauptung des nächsten Lemmas impliziert bereits, daß von Unterraumsystemen die Rede ist; siehe dazu Vereinbarung d. zu Beginn des Kapitels. Außerdem wird Rein-Injektivität im Beweis nicht benutzt. (Die entsprechende Bemerkung gilt auch für die Analoga von Lemma 5.2.3: Lemmata 5.3.2, 5.4.2, 5.5.2.)

Lemma 5.2.3 $*$ *Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren* V *gilt:*

$$
\begin{aligned}
&V_i \to V_0 \textit{ ist injektiv für alle } i,\\
&V_i \cap V_j \cap V_k = 0, \textit{ falls } |\{i,j,k\}| = 3,\\
&V_i + V_j + V_k = V_0, \textit{ falls } |\{i,j,k\}| = 3.
\end{aligned}
$$

Beweis: Es ist klar, daß nur vier (endlichdimensionale, injektive) Unzerlegbare nicht für alle i "$V_i \to V_0$ injektiv" erfüllen; oder: Man sieht sofort ein, daß für Unzerlegbare der Form $C^+(V)$ die erste Behauptung gilt: Wegen Satz 4.2.4 ist das genug. Zur zweiten Behauptung: Für $V \in \operatorname{im}(C^{++})$ gilt die Behauptung: $V_1^+ \cap V_2^+ \cap V_3^+ = \ker(V_4 \to V_0) = 0$, falls $V \in \operatorname{im}(C^+)$ (wie eben bemerkt). Und ganz ähnlich auch die dritte Aussage: Gegeben sei $(x_1, \ldots, x_4) \in V_0^-$ (genauer: sei dies ein Repräsentant). Dann ist $(x_1,\ldots,x_4) \equiv (x_1-x_4, x_2-x_4, x_3-x_4, 0) \in V_1^- + V_2^- + V_3^-$. Nun wieder Satz 4.2.4. ■

Wegen diesem Lemma werden wir im folgenden im allgemeinen nur noch Unterraumsysteme betrachten. – Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits erwähnt, könnte man die eine Hälfte des Beweises (das heißt den Nachweis der dritten Aussage) mit einem Dualitätsargument, ähnlich dem im Beweis von Lemma 8.3.5 verwandten, durchführen (das heißt hier: auf die zweite Aussage zurückführen). Die gleiche Bemerkung gilt für die meisten der nun folgenden Lemmata.

Lemma 5.2.4 (∗) *Sei $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Für ein Quadrupel V ist die Summe von V_i und V_j direkt (bzw. gleich V_0) genau dann, wenn in C^+V die Summe von V_k^+ und V_l^+ direkt (bzw. gleich V_0^+) ist.*

Die entsprechende Behauptung für $C^-(V)$ gilt wegen Satz 4.2.4 ebenfalls; ebenso bei den Lemmata 5.3.3, 5.4.3 und 5.5.3.

Beweis: Es ist $V_3^+ \cap V_4^+ = \ker(V_1 \oplus V_2 \to V_0)$ und damit die Äquivalenz der Direktheit (für Unterraumsysteme) klar. Sei nun $V_0 = V_1 + V_2$; wegen Lemma 5.2.3 genügt es, $V_2^+ \subseteq V_3^+ + V_4^+$ zu zeigen. Sei also $(v_1, 0, v_3, v_4) \in V_2^+$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $v_3 = w_1 + w_2$ für geeignete $w_i \in V_i$; also $(v_1, 0, v_3, v_4) = (v_1, 0, w_1 + w_2, v_4) = (v_1 + w_1, w_2, 0, v_4) + (-w_1, -w_2, w_1 + w_2, 0) \in V_3^+ + V_4^+$ wie gewünscht. Sei schließlich $V_0^+ = V_3^+ + V_4^+$; es genügt – wieder wegen Lemma 5.2.3 – zu zeigen, daß $V_3 \subseteq V_1 + V_2$. Sei also $v_3 \in V_3$; nochmals wegen Lemma 5.2.3 ist $v_3 = v_1 + v_2 + v_4$ für geeignete $v_i \in V_i$. Somit ist $(-v_1, -v_2, v_3, -v_4) \in V_0^+$ und also von der Gestalt $(w_1, w_2, 0, w_4) + (u_1, u_2, u_3, 0)$. Damit gilt $v_3 = u_3 = -u_1 - u_2 \in V_1 + V_2$ wie gewünscht. ■

Lemma 5.2.5 (∗) *Sei V ein unzerlegbares endlichdimensionales Quadrupel. Ist $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, so gilt:*

$V_i \cap V_j = 0, V_k \cap V_l = 0$ *impliziert* $\delta(V) \le 0$,
$\delta(V) < 0$ *impliziert* $V_i \cap V_j = 0$,
$V_i \cap V_j = 0, V_k \cap V_l = 0, \delta(V) \ge 0 (= 0)$ *impliziert* $V_0 = V_i \oplus V_j$.

In Lemma 8.3.3 wird dies erneut bewiesen – zusammen mit den Analoga für $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$. Zum besseren Verständnis aber hier der einfache

Beweis: Da $\delta(V) = \sum v_i - 2v_0 = (v_i + v_j - v_0) + (v_k + v_l - v_0)$, ist die erste Behauptung klar, dann auch die dritte. Zur zweiten: Das stimmt für Präprojektive kleiner Dimension (Inspektion); Lemma 5.2.4 liefert das Gewünschte. ■

Das für die zweite Behauptung gegebene Argument lautet genauer so (Auf diese präzisere Formulierung wird im folgenden verzichtet werden.): Wie der Beweis von Lemma 5.2.3 zeigt, gilt Lemma 5.2.3 für alle (rein-injektiven) Unzerlegbaren in $\mathrm{im}(C^+)^2 \cap \mathrm{im}(C^-)^2$. Also gilt die C^--Version von Lemma 5.2.4 jedenfalls für Quadrupel $V \in \mathrm{im}(C^+)^3 \cap \mathrm{im}(C^-)^2$. Es genügt somit, die zweite Behauptung von Lemma 5.2.5 für Präprojektive der Form $(C^-)^2(U)$, U ein projektives Unzerlegbares, nachzuprüfen und dann Lemma 5.2.4 anzuwenden.

Definition 5.2 $(*)$

i. Sei $D = D_{1,2}$ der Funktor von $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$-Mod nach $k[\tilde{\mathrm{D}}_4]$-Mod (mit den Standardorientierungen), der eine Darstellung

$$\begin{tikzcd} & W_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

auf das Quadrupel

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[dr] & & W_4 \arrow[dl] \\ & W_1 \oplus W_3 & \\ W_3 \arrow[ur] & & W_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

wirft, wobei $W_1 \to W_1 \oplus W_3$ bzw. $W_3 \to W_1 \oplus W_3$ die Inklusionen in die erste bzw. zweite Komponente und $W_2 \to W_1 \oplus W_3$ bzw. $W_4 \to W_1 \oplus W_3$ die Abbildungen $e_{2,1} \oplus e_{2,3}$ bzw. $e_{4,1} \oplus e_{4,3}$ sind.

ii. Sei D' der Funktor, der ein Quadrupel $V = (V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$, das $V_0 = V_1 \oplus V_2$ erfüllt, auf die $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$-Darstellung

$$\begin{tikzcd} & V_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ V_2 & & V_1 \\ & V_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

abbildet; dabei seien die Morphismen hier die Einschränkungen der Projektionen.

Aus D erhält man durch Permutation der Unterräume des Quadrupels 24 derartige Funktoren, benötigt werden aber nur zwei oder drei: $D_{3,4}$ sei der Funktor, der eine Darstellung von $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$ wie eben wirft auf $(W_1 \oplus W_3; W_2, W_4, W_1, W_3)$; $D_{1,3}$ bilde sie ab auf $(W_1 \oplus W_3; W_1, W_2, W_3, W_4)$.

Lemma 5.2.6 $(*)$

i. D und D' sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$-Mod *und Quadrupeln mit $V_0 = V_1 \oplus V_2$.*

ii. D und D' erhalten Injektionen, Surjektionen und Defekt.

Beweis: Klar. ■

Entsprechendes gilt natürlich für die Varianten $D_{1,3}$ und $D_{3,4}$ von D. – Nur aus Bequemlichkeit habe ich Definition 5.2 mit $(*)$ formuliert; Lemma 5.2.6 gilt für die entsprechenden D und D' auch ohne den Stern.

Lemma 5.2.7 $(*)$ *Sei das Bild von*

$$\begin{tikzcd} & W_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

unter D das Quadrupel $V = (V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$. Dann ist in der folgenden Liste der Morphismus links genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn die Summe der Unterräume rechts direkt (bzw. gleich V_0) ist:

$$\begin{array}{ll} e_{2,1} & V_2, V_3 \\ e_{4,3} & V_1, V_4 \\ & \\ e_{2,3} & V_1, V_3 \\ e_{4,1} & V_2, V_4 \end{array}$$

Beweis: Klar. ■

Die übliche Sprechweise gestattet, das Bisherige so zu formulieren:

Lemma 5.2.8

i. *Unzerlegbare von Defekt -1, 0 oder 1 sind Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen.*

ii. *Reguläre Unzerlegbare sind $k[X]$-Moduln.*

iii. *Die stetigen (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren sind die Unzerlegbaren mit Dimensionstyp der Form $(2l; l, l, l, l)$, $l \geq 1$. Sie sind genau die Bilder der stetigen $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$-Moduln unter $D_{1,2}$ oder $D_{3,4}$.*

Beweis: Die Analyse in [DF 73] zeigt, daß alle Unzerlegbaren von Defekt 0, -1 oder 1 im Bild eines der Funktoren $D_{1,2}$, $D_{3,4}$ oder $D_{1,3}$ sind, also nach Lemma 5.2.6 – in der "ungesternten Form" – und seinen Analoga Darstellungen von $k[\tilde{\mathrm{A}}_3]$; mit Lemma 5.1.3 folgt i. (Dabei sieht man, daß der Funktor $D_{1,3}$ nur wegen der regulären diskreten Unzerlegbaren benötigt wird.) Zusammen mit Lemmata 5.1.5 und 5.1.6 ergibt sich ii., weil diese Funktoren Defekt erhalten. Die erste Behauptung von iii. ist nicht sehr schwer (siehe etwa [DR 76]); zur zweiten: Wegen des Beweises von i. sind stetige Unzerlegbare jedenfalls im Bild von $D_{1,2}$ oder $D_{3,4}$. Die Definition der Funktoren $D_{i,j}$ bzw. $D'_{i,j}$ zeigt, wie sich der Dimensionstyp von $D_{i,j}(U)$ aus dem von U berechnet (analog für $D'_{i,j}$), U ein endlichdimensionales Unzerlegbares. Zusammen mit dem Wissen, wie die endlichdimensionalen stetigen $\tilde{\mathrm{A}}_3$-Unzerlegbaren aussehen (Seite 93) ergibt sich die zweite Behauptung von iii. ■

5.3 $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$

Dieser Abschnitt enthält keine oder nur rudimentäre Beweise (siehe Einleitung zu diesem Kapitel). Die Vereinbarungen vom Beginn des Kapitels (und die Sprechweise von Seite 80) sind weiter in Kraft; insbesondere sei an $(*)$ erinnert (Vereinbarung d.). – Wir zeichnen unter den möglichen Orientierungen von $\tilde{\mathrm{E}}_6$ die aus, bei der die Ecke mit Valenz 3 das einzige Ziel, die Ecken mit Valenz 1 die Quellen werden und nennen sie Standardorientierung. Darstellungen von $\tilde{\mathrm{E}}_6$ mit dieser Orientierung werden stets als

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & F_2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & E_2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ F_1 & \to & E_1 & \to & Q & \leftarrow & E_3 & \leftarrow & F_3 \end{array}$$

bezeichnet (Standardnotation), oder kurz auch als $(Q; E_1, F_1; E_2, F_2; E_3, F_3)$. (Daß die Morphismen nicht näher benannt werden, liegt daran, daß sie bei fast allen Unzerlegbaren injektiv sind, Lemma 5.3.2.) Entsprechend sei der Dimensionstyp einer endlichdimensionalen solchen Darstellung $(q; e_1, f_1; e_2, f_2; e_3, f_3)$. $\tilde{\mathrm{E}}_6$ sei für den Rest des Kapitels mit dieser Standardorientierung versehen. Es gilt, wieder mit der zu Beginn des Kapitels getroffenen Vereinbarung,

Tatsache 5.3.1

i. Es sei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

$$Q^+ = \ker(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \to Q);$$

$$\begin{aligned} E_i^+ &= \ker(F_i \oplus E_j \oplus E_k \to Q), \\ F_i^+ &= \ker(E_j \oplus E_k \to Q), \ \textit{und} \end{aligned}$$

$$Q^- = (Q/\operatorname{im}(F_1 \to Q) \oplus Q/\operatorname{im}(F_2 \to Q) \oplus Q/\operatorname{im}(F_3 \to Q))/\mathrm{diag};$$

$$\begin{aligned} E_i^- &= Q/\operatorname{im}(F_i \to Q), \\ F_i^- &= E_i/\operatorname{im}(F_i \to E_i), \end{aligned}$$

jeweils mit den naheliegenden Morphismen. diag *bezeichne dabei hier das Bild der Diagonalabbildung*

$$Q \to Q/\operatorname{im}(F_1 \to Q) \oplus Q/\operatorname{im}(F_2 \to Q) \oplus Q/\operatorname{im}(F_3 \to Q).$$

ii. Für endlichdimensionale Unzerlegbare U gilt

$$\delta(U) = e_1 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 - 3q$$

und $|\delta(U)| \leq 3$. ■

Lemma 5.3.2 $*$ *Es sei* $|\{i,j,k\}| = 3$. *Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren* U *gilt:*

$$\begin{array}{l} F_i \to E_i \text{ und } E_i \to Q \text{ sind injektiv für alle } i\ , \\ F_i \cap F_j = F_i \cap E_j \cap E_k = 0, \\ Q = E_i + E_j = F_i + F_j + E_k. \end{array}$$

Beweis: Ganz ähnlich dem von Lemma 5.2.3. ■

Von nun an betrachten wir wieder fast ausschließlich Unterraumsysteme.

Lemma 5.3.3 $(*)$ *Für einen Modul* $M = (Q; E_1, F_1, E_2, F_2, E_3, F_3)$ *gilt: In der folgenden Liste ist die Summe der Unterräume links genau dann direkt (bzw. gleich* Q*), wenn die Summe der Unterräume rechts in* C^+M *direkt (bzw. gleich* Q*) ist.*

$$\begin{array}{ll} E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2, E_2 \cap E_3 & F_1, F_2, F_3 \\ F_1, F_2, F_3 & E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2, E_2 \cap E_3 \\ & \\ E_i, F_j & E_j, F_k \text{ für } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \end{array}$$

Beweis: Um Schreibarbeit zu sparen weggelassen. ■

Entsprechend dem Vorgehen bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ hier nun einiges zu Funktoren, mit Hilfe derer Unzerlegbare von kleinem Defekt analysiert werden können; dabei seien Darstellungen über den jeweiligen Köchern wie üblich bezeichnet. Den Stern trägt die Definition, damit etwa Punkt iii. sinnvoll ist: man braucht, daß die E_i Unterräume von Q sind.

Definition 5.3 $(*)$

i. Sei $S : k[\tilde{\mathrm{A}}_5]\text{-Mod} \to k[\tilde{\mathrm{E}}_6]\text{-Mod}$ der Funktor, der einen Modul

$$\begin{tikzcd} & W_5 & W_6 \arrow[l] \arrow[dr] & \\ W_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & W_1 \\ & W_3 & W_2 \arrow[l] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

auf den $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$-Modul

$$\begin{tikzcd}
 & & W_4 \arrow[d] & & \\
 & & W_3 \oplus W_5 \arrow[d] & & \\
W_2 \arrow[r] & W_1 \oplus W_3 \arrow[r] & W_1 \oplus W_3 \oplus W_5 & W_1 \oplus W_5 \arrow[l] & W_6 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

abbildet.

ii. Sei $T = T_{1,2,3} : k[\tilde{\mathrm{D}}_4]\text{-Mod} \to k[\tilde{\mathrm{E}}_6]\text{-Mod}$ der Funktor, der ein Quadrupel

$$(V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$$

abbildet auf

$$\begin{tikzcd}
 & & V_4 \arrow[d] & & \\
 & & V_2 \oplus V_4 \arrow[d] & & \\
V_1 \arrow[r] & V_0 \arrow[r] & V_0 \oplus V_4 & V_3 \oplus V_4 \arrow[l, "\nabla"'] & V_4 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dabei sind alle Abbildungen die naheliegenden, bis auf die Abbildung $\nabla : V_3 \oplus V_4 \to V_0 \oplus V_4$, die definiert sei als Summe von $V_3 \to V_0$ und

$$\begin{aligned} \Delta : \quad & V_4 \to V_0 \oplus V_4 \\ & v \mapsto (v, v) \end{aligned}$$

iii. S' werfe eine $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Darstellung (in Standardnotation), die

$$Q = E_1 \cap E_3 \oplus E_1 \cap E_2 \oplus E_2 \cap E_3$$

erfüllt, auf den $k[\tilde{\mathrm{A}}_5]$-Modul mit

$$\begin{aligned} & W_1 = E_1 \cap E_3, W_3 = E_1 \cap E_2, W_5 = E_2 \cap E_3 \\ & W_2 = F_1, W_4 = F_2, W_6 = F_3; \end{aligned}$$

die Abbildungen sind die Einschränkungen der Projektionen auf die W_{2i}.

iv. T' sei der Funktor, der einen Modul über $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$ (in Standardnotation) auf das Quadrupel (Unterraumsystem)

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr] & & E_1 \cap (F_2 + F_3) \arrow[dl] \\ & E_1 & \\ E_1 \cap E_2 \arrow[ur] & & E_1 \cap E_3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

wirft.

Analog zu $T = T_{1,2,3}$ definiert man Funktoren $T_{i,j,k}$ so: $T_{i,j,k}(V)$, V ein Quadrupel, sei gleich $T(V)$, gefolgt von einer Permutation der "Arme" von $T(V)$ derart, daß nun $E_i = V_0$, $E_j = V_2 \oplus V_4$ und $E_k = V_3 \oplus V_4$. Es gibt also sechs derartige Funktoren; das nächste Lemma zeigt unter anderem, daß – interessiert man sich nur für deren Bilder – drei davon jedenfalls genügen.

Lemma 5.3.4 $(*)$

i. *S und S' sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen* $k[\tilde{\mathrm{A}}_5]$-Mod *und den $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$-Moduln, die $Q = E_1 \cap E_3 \oplus E_1 \cap E_2 \oplus E_2 \cap E_3$ erfüllen.*

ii. *T und T' sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen Quadrupeln und $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$-Moduln mit $Q = E_1 \oplus F_2 = E_1 \oplus F_3$.*

iii. *S, S', T, T' erhalten Injektionen und Defekt, S und T auch Surjektionen.*

Beweis: Einfach. ■

Entsprechend sind die $T_{i,j,k}$ pp-Äquivalenzen zwischen Quadrupeln und Moduln, die der Bedingung $Q = E_i \oplus F_k = E_i \oplus F_j$ genügen.

Lemma 5.3.5 $(*)$ *Sei M Modul über $k[\tilde{\mathrm{A}}_5]$ (in Standardnotation), sei $S(M) = (Q; E_1, F_1, E_2, F_2, E_3, F_3)$. Dann ist in der folgenden Liste die Summe der Unterräume rechts (in $S(M)$) direkt (bzw. gleich Q) genau dann, wenn der Morphismus links (in M) injektiv (bzw. surjektiv) ist.*

$$\begin{array}{ll} e_{2,1} & E_2, F_1 \\ e_{6,5} & E_1, F_3 \\ e_{4,3} & E_3, F_2 \\ & \\ e_{4,5} & E_1, F_2 \\ e_{6,1} & E_2, F_3 \\ e_{2,3} & E_3, F_1 \end{array}$$

Beweis: Klar. ∎

Lemma 5.3.6 $(*)$ *Die Summe der Unterräume links (im Quadrupel V) ist genau dann direkt (bzw. gleich V_0), wenn die Summe derjenigen rechts (in $T(V)$) direkt (bzw. gleich Q) ist:*

–	E_1, F_2
V_2, V_4	E_2, F_3
V_1, V_3	E_3, F_1
–	E_1, F_3
V_3, V_4	E_3, F_2
V_1, V_2	E_2, F_1
V_2, V_3	$E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2, E_2 \cap E_3$
V_1, V_4	F_1, F_2, F_3

Beweis: Teilweise recht mühsame Rechnungen. ∎

Lemma 5.3.7

i. *Fast alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren von Defekt gleich -1, 0 oder 1 liegen im Bild von S oder C^+S (bzw. im Bild von S oder C^-S), mit Ausnahme der $A(3k+i,0)$ (in der Notation von [DF 73]).*

ii. *Fast alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 2$ liegen im Bild eines der Funktoren $(C^+)^l T_{i,j,k}$, $l = 0, 1, 2$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (bzw. im Bild eines der Funktoren $(C^-)^l T_{i,j,k}$, $l = 0, 1, 2$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$).*

Beweis: Für die diskreten Unzerlegbaren sind i. und ii. eine leichte und langweilige Verifikation anhand der Tabellen in [DF 73]. Für die stetigen folgt im Falle des Funktors S alles ebenfalls aus der Analyse dort; damit ist i. klar. Es bleibt zu zeigen, daß jedes endlichdimensionale stetige Unzerlegbare im Bild eines der $(C^+)^l T_{i,j,k}$, $l = 0, 1, 2$ liegt (für C^- dann analog); das folgende Argument leistet dies sogar für alle regulären Unzerlegbaren: Lemma 5.3.5 zeigt nämlich, daß jedes reguläre Unzerlegbare $Q = E_i \oplus F_j$ erfüllt für alle Paare (i, j), bis auf höchstens zwei; denn reguläre Unzerlegbare haben Defekt Null (siehe zur Erinnerung Abschnitt 1.6), die betrachteten

Funktoren S und C^+S erhalten Defekt, und in Unzerlegbaren (von Defekt Null) über $\tilde{\mathrm{A}}_5$ sind bis auf höchstens zwei alle Abbildungen Isomorphismen (wegen Lemma 5.1.2). Mit Lemma 5.3.4 ii. (bzw. der Bemerkung danach) und Lemma 5.3.3 sieht man nun, daß jedes reguläre Unzerlegbare im Bild eines der in ii. angegebenen Funktoren enthalten ist. ■

Mit der Sprechweise von Seite 80 ergibt sich

Lemma 5.3.8

i. *Fast alle (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 2$ sind Quadrupel. Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 1$ sind Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen.*

ii. *Reguläre Unzerlegbare sind $k[X]$-Moduln.*

iii. *Die stetigen (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren sind die Unzerlegbaren mit Dimensionstyp der Form $(3l; 2l, l; 2l, l; 2l, l)$, $l \geq 1$. Sie sind genau die Bilder der stetigen $k[\tilde{\mathrm{A}}_5]$-Unzerlegbaren unter einem der Funktoren S oder C^+S, bzw. auch genau die Bilder der stetigen $k[\tilde{\mathrm{D}}_4]$-Unzerlegbaren unter einem von T oder C^+T (zum Beispiel).*

Beweis: i. folgt aus Lemma 5.3.7 ii. und Lemma 5.2.8; ebenso ii., da die Analyse in [DF 73] zeigt, daß *alle* regulären Unzerlegbaren Quadrupel sind. Und iii. geht wie iii. von Lemma 5.2.8. ■

5.4 $k[\tilde{\mathrm{E}}_7]$

Auch dieser Abschnitt enthält weitgehend keine Beweise; und auch hier sei wieder auf die zu Beginn des Kapitels getroffenen Vereinbarungen, insbesondere $(*)$, verwiesen. Wir fixieren für den Rest des Kapitels wieder eine Orientierung (Standardorientierung), etwa diejenige mit der Eigenschaft, daß (fast alle unzerlegbaren) Darstellungen dann als Unterraumsysteme aufgefaßt werden können (Lemma 5.4.2). Darstellungen werden also im folgenden stets als

$$\begin{array}{ccccccc} & & & W & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ G_1 \to F_1 \to E_1 \to & & & R & & & \leftarrow E_2 \leftarrow F_2 \leftarrow G_2 \end{array}$$

notiert, oder auch kurz als $(R;W;E_1,F_1,G_1;E_2,F_2,G_2)$; dies ist die Notation (Standardnotation) aus [DF 73], die hoffentlich nicht zu Verwechslungen mit der ähnlichen bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$ führt. Der Dimensionstyp einer endlichdimensionalen solchen Darstellung sei dann geschrieben als $(r;w;e_1,f_1,g_1;e_2,f_2,g_2)$.

Tatsache 5.4.1

i. Es sei $\{i,j\}=\{1,2\}$.

$$R^+ = \ker(W\oplus E_1\oplus E_2\to R);$$

$$\begin{aligned}
E_i^+ &= \ker(W\oplus F_i\oplus E_j\to R),\\
F_i^+ &= \ker(W\oplus G_i\oplus E_j\to R),\\
G_i^+ &= \ker(W\oplus E_j\to R),\\
W^+ &= \ker(E_1\oplus E_2\to R),\ \textit{sowie}
\end{aligned}$$

$$R^- = (R/\mathrm{im}(W\to R)\ \oplus\ R/\mathrm{im}(G_1\to R)\ \oplus\ R/\mathrm{im}(G_2\to R))\,/\,\mathrm{diag};$$

$$\begin{aligned}
E_i^- &= R/\mathrm{im}(G_i\to R),\\
F_i^- &= E_i/\mathrm{im}(G_i\to E_i),\\
G_i^- &= F_i/\mathrm{im}(G_i\to F_i),\\
W^- &= R/\mathrm{im}(W\to R),
\end{aligned}$$

jeweils mit den naheliegenden Abbildungen, wobei diag *hier das Bild der Diagonalabbildung*

$$R\to R/\mathrm{im}(W\to R)\oplus R/\mathrm{im}(G_1\to R)\oplus R/\mathrm{im}(G_2\to R)$$

sei.

ii. Für endlichdimensionale Unzerlegbare U *ist*

$$\delta(U) = g_1+f_1+e_1+g_2+f_2+e_2+2w-4r$$

und $|\delta(U)|\le 4$. ■

Lemma 5.4.2 ∗ *Es sei* $|\{i,j\}|=2$. *Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren* U *gilt:*

$$\begin{aligned}
&G_i\to F_i,\ F_i\to E_i\ \textit{und}\ E_i\to R\ \textit{sind injektiv};\\
&W\cap F_j\cap E_i = W\cap G_i = G_i\cap F_j = 0,\\
&R = W+E_i = E_1+E_2 = E_i+F_j = W+F_i+G_j.
\end{aligned}$$

Beweis: Wie der von Lemma 5.2.3 oder Lemma 5.5.2. ■

Lemma 5.4.3 $(*)$ *Für einen Modul M (in Standardnotation) gilt, daß in der folgenden Liste die Summe der Unterräume links genau dann direkt (bzw. gleich R) ist, wenn die Summe der Unterräume rechts in C^+M direkt (bzw. gleich R) ist.*

F_1, W	E_1, G_2
E_1, G_2	F_2, W
F_2, W	E_2, G_1
E_2, G_1	F_1, W
$E_1 \cap E_2, W$	G_1, G_2, W
G_1, G_2, W	F_1, F_2
F_1, F_2	$E_1 \cap E_2, W$
$W, E_1 \cap F_2, G_1$	$W, E_2 \cap F_1, G_2$
$W, E_2 \cap F_1, G_2$	$W, E_1 \cap F_2, G_1$

Beweis: Für ähnliche Rechnungen siehe Lemma 5.5.3. ■

Und wieder gilt es nun, mit Hilfe geeigneter Funktoren die Unzerlegbaren von kleinem Defekt schon als solche über einem "kleineren" Köcher zu erkennen:

Definition 5.4 $(*)$

i. S_7 sei der Funktor, der

$$\begin{tikzcd} & & F_2 \arrow[d] & & \\ & & E_2 \arrow[d] & & \\ F_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & Q & E_3 \arrow[l] & F_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

abbildet auf

$$\begin{tikzcd} & & & E_2 \arrow[d, "\Delta"'] & & & \\ E_2/F_2 \arrow[r] & E_2/F_2 \oplus F_1 \arrow[r] & E_2/F_2 \oplus E_1 \arrow[r] & E_2/F_2 \oplus Q & Q \arrow[l] & E_3 \arrow[l] & F_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\Delta : E_2 \to E_2/F_2 \oplus Q$ sei hierbei die Abbildung, die durch die Diagonaleinbettung von E_2 in $E_2 \oplus Q$ induziert wird.

ii. S_7' sei der Funktor, der eine Darstellung

$$\begin{tikzcd} & & & W \arrow[d] & & & \\ G_1 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & R & E_2 \arrow[l] & F_2 \arrow[l] & G_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

wirft auf

$$\begin{tikzcd} & & E_2 \cap W \arrow[d] & & \\ & & E_2 \cap (G_1 + W) \arrow[d] & & \\ E_2 \cap F_1 \arrow[r] & E_2 \cap E_1 \arrow[r] & E_2 & F_2 \arrow[l] & G_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Vertauscht man in der Definition von S_7 linken und rechten Arm des Bildes, so erhält man den Funktor T_7 (in [DF 73] als S_8 bezeichnet); aus Symmetriegründen beschränken wir uns hier auf die Untersuchung von S_7. – Der Stern steht in der Definition zum Beispiel deshalb, weil stillschweigend davon ausgegangen wird, daß es sich jeweils um Unterraumsysteme handelt – eine Einschränkung, die wie üblich nicht wesentlich ist.

Lemma 5.4.4 $(*)$

i. S_7 *und* S_7' *sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen Moduln über* $\tilde{\mathrm{E}}_6$ *und Darstellungen von* $\tilde{\mathrm{E}}_7$*, die der Bedingung* $R = E_2 \oplus G_1$ *genügen.*

ii. S_7 *(und* S_7' *auf dem entsprechenden abgeschlossenen Unterraum von i.) erhält Defekt;* S_7' *erhält Injektionen,* S_7 *Surjektionen.*

Entsprechendes gilt natürlich für T_7; insbesondere sind die Moduln der Form $T_7(M)$ diejenigen, die $((*)!)$ $R = E_1 \oplus G_2$ erfüllen.

Beweis: Einfach und daher weggelassen; es sei aber bemerkt, daß Moduln der Form $S_7(M)$ die Gleichung $R = W + E_2$ erfüllen, so daß das Lemma also nur unter $(*)$ korrekt ist (siehe Lemma 5.4.2). ∎

Lemma 5.4.5 $(*)$ *Sei* M *Modul über* $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$, $S_7(M)$ *das Bild, jeweils mit den Standardbezeichnungen. Dann ist in der folgenden Liste die Summe der Unterräume rechts (in* $S_7(M)$*) genau dann direkt (bzw. gleich* R*), wenn diejenige der Unterräume links (in* M*) direkt (bzw. gleich* Q*) ist:*

E_1, F_3	E_1, G_2
E_3, F_2	F_2, W
–	E_2, G_1
E_2, F_1	F_1, W
E_1, F_2	$E_1 \cap E_2, W$
E_2, F_3	G_1, G_2, W
E_3, F_1	F_1, F_2
$E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2, E_2 \cap E_3$	$W, E_1 \cap F_2, G_1$
F_1, F_2, F_3	$W, E_2 \cap F_1, G_2$

Beweis: Nicht schwer. ∎

Lemma 5.4.6 *Fast alle (endlichdimensionalen) diskreten Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 3$ liegen im Bild eines der Funktoren $(C^-)^l S_7$, $l \in \{0,1,2,3\}$.*

Beweis: Eine leichte Verifikation mittels der Listen von Dimensionstypen in [DF 73]. ∎

Entsprechendes gilt, ersetzt man C^- durch C^+. – Mit der üblichen Sprechweise (Seite 80):

Lemma 5.4.7

i. *Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 3$ sind Moduln über $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$. Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 2$ sind Quadrupel. Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 1$ sind Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen.*

ii. *Alle regulären endlichdimensionalen Unzerlegbaren sind $k[X]$-Moduln.*

iii. *Die stetigen (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren sind die Unzerlegbaren mit Dimensionstyp der Form $(4l; 2l; 3l, 2l, l; 3l, 2l, l)$, $l \geq 1$.Sie sind genau die Bilder stetiger Unzerlegbarer über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ unter S_7 oder T_7.*

Beweis: Wie üblich: Wie aus der Analyse in [DF 73] hervorgeht, sind stetige (endlichdimensionale) Unzerlegbare im Bild von S_7 oder T_7. Lemma 5.4.3, Lemma 5.4.4 und die Bemerkung nach Lemma 5.4.4 zeigen, daß T_7 und

$(C^-)^2 S_7$ das gleiche Bild (unter $(*)$) haben; insbesondere gilt für *jedes* reguläre Unzerlegbare, daß es genau dann im Bild von T_7 liegt, wenn es im Bild von $(C^-)^2 S_7$ ist. Das bedeutet, daß stetige (endlichdimensionale) Unzerlegbare im Bild von S_7 oder $(C^-)^2 S_7$ sind. Also sind wegen Lemma 5.4.6 fast alle (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 3$ im Bild eines der Funktoren $(C^-)^l S_7$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. (Die Ausnahmen sind Präprojektive und Präinjektive kleiner Dimension.) Da die betrachteten Funktoren Defekt erhalten, folgt die Behauptung von i. und ii. nun aus Lemma 5.3.8. Und iii. geht wieder so: Die erste Behauptung entnimmt man [DR 76]. Der erste Satz dieses Beweises zeigt dann die zweite Behauptung, denn die Definitionen von S_7 und S_7' (bzw. T_7 und T_7') zeigen, wie sich der Dimensionstyp des Bildes eines endlichdimensionalen Unzerlegbaren unter einem dieser Funktoren aus dem Dimensionstyp des Unzerlegbaren selbst berechnet. ■

5.5 $k[\tilde{\mathrm{E}}_8]$

In diesem Abschnitt führe ich Beweise meist aus, da sie doch deutlich komplizierter als im Fall der Quadrupel sind. Erinnert sei an die Bedeutung von $(*)$ und an die übrigen Vereinbarungen vom Beginn des Kapitels. – Wie immer betrachten wir nur eine feste Orientierung, für uns die Standardorientierung; dies soll auch hier diejenige sein, die es gestattet, fast alle Unzerlegbaren als Unterraumsysteme zu verstehen (Lemma 5.5.2). Darstellungen von $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit dieser Orientierung werden wie folgt (Standardnotation) bezeichnet:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & X & & & & & & & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & & & & & & & \\ Y_4 & \to & Y_3 & \to & P & \leftarrow & Z_5 & \leftarrow & Z_6 & \leftarrow & Z_7 & \leftarrow & Z_8 & \leftarrow & Z_9 \end{array}$$

(oder auch kurz als $(P; X; Y_3, Y_4; Z_5, \ldots, Z_9)$); entsprechend für den Dimensionstyp dann $(p; x; y_3, y_4; z_5, \ldots, z_9)$. – Von nun an liege stets diese Standardorientierung zugrunde. – Die nächste Tatsache entnimmt man (siehe die Einleitung zu diesem Kapitel) [DF 73]; daß die Coxeter-Funktoren sind wie angegeben, ist aber aus der Definition sofort klar.

Tatsache 5.5.1

i.

$$P^+ = \ker(X \oplus Y_3 \oplus Z_5 \to P);$$

$$\begin{aligned}
X^+ &= \ker(Y_3 \oplus Z_5 \to P),\\
Y_3^+ &= \ker(X \oplus Y_4 \oplus Z_5 \to P),\\
Y_4^+ &= \ker(X \oplus Z_5 \to P),\\
Z_5^+ &= \ker(X \oplus Y_3 \oplus Z_6 \to P),\\
&\vdots\\
Z_9^+ &= \ker(X \oplus Y_3 \to P), \ \textit{und}
\end{aligned}$$

$$P^- = (P/\mathrm{im}(X \to P) \oplus P/\mathrm{im}(Y_4 \to P) \oplus P/\mathrm{im}(Z_9 \to P))\,/\,\mathrm{diag};$$

$$\begin{aligned}
X^- &= P/\mathrm{im}(X \to P),\\
Y_3^- &= P/\mathrm{im}(Y_4 \to P),\\
Y_4^- &= Y_3/\mathrm{im}(Y_4 \to Y_3),\\
Z_5^- &= P/\mathrm{im}(Z_9 \to P),\\
Z_6^- &= Z_5/\mathrm{im}(Z_9 \to Z_5),\\
&\vdots\\
Z_9^- &= Z_8/\mathrm{im}(Z_9 \to Z_8),
\end{aligned}$$

jeweils mit den kanonischen Abbildungen; diag *sei hier das Bild der Diagonalabbildung*

$$P \to P/\mathrm{im}(X \to P) \oplus P/\mathrm{im}(Y_4 \to P) \oplus P/\mathrm{im}(Z_9 \to P).$$

ii. Für endlichdimensionale Unzerlegbare U ist

$$\delta(U) = 2y_4 + 2y_3 + 3x + z_5 + \ldots + z_9 - 6p.$$

Außerdem gilt $|\delta(U)| \leq 6$. ■

Lemma 5.5.2 ∗ *Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren gilt:*

Alle Morphismen sind injektiv.
$Y_4 \cap Z_7 = X \cap Y_4 = Y_3 \cap Z_9 = X \cap Z_8 = X \cap Y_3 \cap Z_6 = 0,$
$P = X + Y_3 = Y_3 + Z_7 = Y_4 + Z_5 = X + Z_6 = X + Y_4 + Z_8,$
$P = (Y_3 \cap Z_5) + X + Z_9 = (X \cap Y_3) + Y_4 + Z_6 = (Y_4 \cap Z_5) + X + Z_7,$
$P = (X \cap Z_6) + Y_3 + Z_8$

Beweis: Tatsache 5.5.1 zeigt sofort, daß für Moduln im Bild von C^+ die Abbildungen $X \to P$, $Y_4 \to Y_3$, $Z_9 \to Z_8$ injektiv sind, daß im Bild von $(C^+)^2$ zusätzlich $Y_3 \to P$ und $Z_8 \to Z_7$ injektiv sind etc. Das liefert zusammen mit Satz 4.2.4 die erste Zeile des Lemmas. Für den Rest des Beweises werde nun angenommen, daß alle betrachteten Darstellungen schon Unterraumsysteme sind; insbesondere bedeute "im Bild von C^+" genauer "von der Form C^+M für ein Unterraumsystem M" (also nach dem eben Gezeigten etwa "im Bild von $(C^+)^6$")

Dann ist klar, daß im Bild von C^+ gilt $X \cap Y_4 = 0$. Deshalb ist im Bild von $(C^+)^2$ zusätzlich $Y_3 \cap Z_9 = 0$, denn Elemente aus $Y_3^+ \cap Z_9^+$ sind von der Form $(x, -x, 0)$ mit $x \in X \cap Y_3 \cap Y_4 = X \cap Y_4 = 0$. Ebenso zeigt man leicht: $Y_3 \cap Z_9 = 0$ impliziert $X^+ \cap Z_8^+ = 0$; $X \cap Z_8 = 0$ impliziert $Y_4^+ \cap Z_7^+ = 0$ und schließlich: aus $Y_4 \cap Z_7 = 0$ folgt $X \cap Y_3 \cap Z_6 = 0$. Das zeigt die Behauptung über die Schnitte. (Siehe für ähnliche Rechnungen auch Lemma 5.5.3 und seinen Beweis.)

Statt mit C^+ argumentiert man im Rest des Beweises nun mit C^-; Restklassen und ihre Repräsentanten werden dabei wieder nicht konsequent unterschieden.

1. Im Bild von C^- gilt $P = X + Y_3 = X + Z_5 = Y_3 + Z_5$: Denn gegeben $(a, b, c) \in P^-$, so ist etwa $(a, b, c) = (a - c, 0, 0) + (0, b - c, 0) + (c, c, c) \equiv (a - c, 0, 0) + (0, b - c, 0)$.

2. $P = X + Y_3$ impliziert $P^- = Y_4^- + Z_5^-$: Wegen 1. gilt $P^- = Y_3^- + Z_5^-$, zu zeigen ist also nur $Y_3^- \subseteq Y_4^- + Z_5^-$; sei aber $(0, a, 0) \in Y_3^-$, sei $a = x + y$ mit $x \in X, y \in Y_3$, so $(0, a, 0) = (x, x, x) + (0, y, 0) + (0, 0, -x)$, wobei $(0, y, 0) \in Y_4^-$ und $(0, 0, -x) \in Z_5^-$.

3. $P = Y_4 + Z_5$ impliziert $P^- = X^- + Z_6^-$: Wegen 1. genügt es, $Z_5^- \subseteq X^- + Z_6^-$ zu zeigen. Sei $(0, 0, a) \in Z_5^-$, nach Voraussetzung $a = y + z$ mit $y \in Y_4$ und $z \in Z_5$. Dann $(0, 0, a) = (-y, 0, 0) + (0, 0, z) + (y, y, y)$.

4. $P = X + Z_6$ impliziert $P^- = Y_3^- + Z_7^-$: Wegen 1. genügt es zu zeigen, daß $Z_5^- \subseteq Y_3^- + Z_7^-$; sei $(0, 0, a) \in Z_5^-$. Nach Voraussetzung $a = x + z$ mit $x \in X$ und $z \in Z_6$. Also $(0, 0, a) = (0, -x, 0) + (0, 0, z) + (x, x, x)$.

5. Aus $P = Y_3 + Z_7$ folgt $P^- = X^- + Y_4^- + Z_8^-$: Denn es genügt nach Voraussetzung zu zeigen, daß $Z_5^- \subseteq X^- + Y_4^- + Z_8^-$. Sei $(0, 0, a) \in Z_5^-$, nach Voraussetzung $a = y + z$ mit $y \in Y_3$ und $z \in Z_7$; folglich $(0, 0, a) = (-y, 0, 0) + (0, -y, 0) + (0, 0, z) + (y, y, y)$.

6. $P = X + Y_4 + Z_8$ impliziert $P^- = (Y_3^- \cap Z_5^-) + X^- + Z_9^-$: Denn wegen 1. ist nur $Z_5^- \subseteq (Y_3^- \cap Z_5^-) + X^- + Z_9^-$ nachzuweisen. Sei also $(0, 0, a) \in Z_5^-$;

nach Voraussetzung $a = x + y + z$ mit $x \in X$, $y \in Y_4$ und $z \in Z_8$; somit $(0, 0, a) = (0, -(x + y), 0) + (-(x + y), 0, 0) + (0, 0, z) + (x + y, x + y, x + y)$, wobei $(0, -(x+y), 0)$ in Y_3^- (klar), aber auch in Z_5^- liegt: $(0, -(x+y), 0) = (0, -x, 0) = (0, 0, x) + (-x, -x, -x)$.

7. Aus $P = (Y_3 \cap Z_5) + X + Z_9$, $P^- = X^- + Z_6^-$ folgt $P^- = (X^- \cap Y_3^-) + Y_4^- + Z_6^-$: Denn es ist nur $X^- \subseteq (X^- \cap Y_3^-) + Y_4^- + Z_6^-$ zu zeigen. Sei $(a, 0, 0) \in X^-$; also $a = x + y + z$ mit $x \in X$, $y \in Y_3 \cap Z_5$ und $z \in Z_9$. Somit $(a, 0, 0) = (x + z, 0, 0) + (0, -y, 0) + (0, 0, -y) + (y, y, y)$, wobei $(x + z, 0, 0)$ in X^- aber wegen $(x + z, 0, 0) = (z, 0, 0) = (z, z, z) + (0, -z, 0)$ auch in Y_3^- liegt.

8. $P = (X \cap Y_3) + Y_4 + Z_6$ impliziert $P^- = (Y_4^- \cap Z_5^-) + X^- + Z_7^-$: Es genügt wieder, ein Element $(0, 0, a)$ aus Z_5^- zu betrachten; sei $a = x + y + z$ mit $x \in X \cap Y_3$, $y \in Y_4$ und $z \in Z_6$. Also $(0, 0, a) = (0, -(x + y), 0) + (-(x + y), 0, 0) + (0, 0, z) + (x + y, x + y, x + y)$, wobei hier wegen $(0, -(x + y), 0) = (0, -x, 0) = (0, 0, x) + (-x, -x, -x)$ gilt, daß $(0, -(x + y), 0) \in Y_4^- \cap Z_5^-$.

9. $P = (Y_4 \cap Z_5) + X + Z_7$ impliziert $P^- = (X^- \cap Z_6^-) + Y_3^- + Z_8^-$: Betrachte wieder $(0, 0, a) \in Z_5^-$; es gilt $a = x + y + z$ für geeignete $x \in X$, $y \in Y_4 \cap Z_5$ und $z \in Z_7$, also $(0, 0, a) = (-(x + y), 0, 0) + (0, -(x + y), 0) + (0, 0, z) + (x + y, x + y, x + y)$, wobei $(-(x + y), 0, 0)$ nicht nur in X^-, sondern wegen $(-(x + y), 0, 0) = (-y, 0, 0) = (0, 0, y) + (-y, -y, -y)$ auch in Z_6^- liegt.

Insgesamt ergibt sich nun mit Satz 4.2.4 die Behauptung. ■

Lemma 5.5.3 $(*)$ *Für einen Modul M (in Standardnotation) gilt: In der folgenden Liste ist die Summe der Unterräume links direkt (bzw. gleich P) genau dann, wenn die Summe der Unterräume rechts in C^+M direkt (bzw. gleich P) ist.*

Y_3, Z_8	X, Z_7
X, Z_7	Y_4, Z_6
Y_4, Z_6	$X \cap Y_3, X \cap Z_5, Y_3 \cap Z_5$
$X \cap Y_3, X \cap Z_5, Y_3 \cap Z_5$	X, Y_4, Z_9
X, Y_4, Z_9	Y_3, Z_8
$X \cap Y_3, Y_4, Z_7$	$Y_3 \cap Z_6, X, Z_9$
$Y_3 \cap Z_6, X, Z_9$	$X \cap Z_5, Y_4, Z_8$
$X \cap Z_5, Y_4, Z_8$	$X \cap Y_3, Y_4, Z_7$
$Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9$	$X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8$
$X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8$	$Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9$

Beweis: Nicht für jede der zehn Behauptungen gebe ich einen vollständigen Beweis.

1. $X^+ \cap Z_7^+$ sind die $(0, y, -y)$ mit $y \in Y_3 \cap Z_8$: Das zeigt die erste Entsprechung im Falle der Direktheit.

Sei nun $P = Y_3 + Z_8$, sei $(x, y, z) \in P^+$. Nach Voraussetzung ist $x = y' + z'$ für geeignete $y' \in Y_3$ und $z' \in Z_8$, somit $(x, y, z) = (y' + z', y, z) = (0, y + y', z + z') + (x, -y', -z') \in X^+ + Z_7^+$.

Sei $P^+ = X^+ + Z_7^+$; da ((*)!) $P = Y_3 + Z_5$, genügt es für $P = Y_3 + Z_8$ zu zeigen, daß $Z_5 \subseteq Y_3 + Z_8$. Sei also $z \in Z_5$; da $P = X + Y_3$, gibt es $x \in X$ und $y \in Y_3$ mit $z = x + y$. Also ist $(-x, -y, z) \in P^+$ und nach Voraussetzung von der Form $(-x, -y, z) = (0, y', -y') + (x'', y'', z'')$ mit $z'' \in Z_8$. Also ist $z = -y' + z'' \in Y_3 + Z_8$.

2. wird ganz analog bewiesen.

3. Die Entsprechung der Direktheit ist ganz klar. – Sei $P = Y_4 + Z_6$ und $(x, y, z) \in P^+$. Also ist für geeignete $y_i \in Y_4$ und $z_i \in Z_6$ $y = y_1 + z_1$ und $z = y_2 + z_2$; insbesondere gilt $y_2 \in Y_4 \cap Z_5$ und $z_1 \in Y_3 \cap Z_6$. Damit $(x, y, z) = (0, -y_2, y_2) + (0, z_1, -z_1) + (x, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in X^+ \cap Y_3^+ + X^+ \cap Z_5^+ + Y_3^+ \cap Z_5^+$.

Sei $P^+ = X^+ \cap Y_3^+ + X^+ \cap Z_5^+ + Y_3^+ \cap Z_5^+$. Da $P = Y_4 + Z_5$, ist nur $Z_5 \subseteq Y_4 + Z_6$ zu zeigen. Aber wieder gibt es zu $z \in Z_5$ Elemente $x \in X$ und $y \in Y_3$ mit $z = x + y$, und nach Voraussetzung $(-x, -y, z) = (0, -y_2, y_2) + (0, z_1, -z_1) + (-x, y_1, z_2)$ mit Elementen $y_i \in Y_4$ und $z_i \in Z_6$. Also folgt $z = y_2 - z_1 + z_2 \in Y_4 + Z_6$.

4. wird ähnlich bewiesen.

5. Man benutzt für den Schluß von $P = X + Y_4 + Z_8$ nach $P^+ = Y_3^+ + Z_8^+$, daß wegen (*) gilt $P^+ = X^+ + Y_4^+ + Z_8^+$, so daß es genügt, zu zeigen $X^+ \subseteq Y_3^+ + Z_8^+$.

6. Sei zunächst $(X \cap Y_3) + Y_4 + Z_7$ direkt; die Elemente von $Y_3^+ \cap Z_6^+$ sind genau die der Form (x, y, z) mit $x \in X$, $y \in Y_4$, $z \in Z_7$ und $x + y + z = 0$, diejenigen von $X^+ + Z_9^+$ sind die der Form $(y', y - y', -y)$ mit $y' \in X \cap Y_3$ und $y \in Y_3 \cap Z_5$. Wegen (*) dürfen wir annehmen, es sei $X^+ \cap Z_9^+ = 0$; Elemente im Schnitt von $X^+ + Z_9^+$ und $Y_3^+ \cap Z_6^+$ haben, wie eben gesehen, die Form $(y', y - y', -y)$ mit $y \in Y_3 \cap Z_5$, $y' \in X \cap Y_3$, $y - y' \in Y_4$ und $y \in Z_7$. Damit ist $y' \in (X \cap Y_3) \cap (Y_4 + Z_7) = 0$, also auch $y = 0$ und die gewünschte Direktheit gezeigt.

Sei nun umgekehrt $(Y_3^+ \cap Z_6^+) + X^+ + Z_9^+$ direkt. Wegen (*) nehmen wir an, es sei $Y_4 + Z_7$ direkt. Sei nun $y' \in (X \cap Y_3) \cap (Y_4 + Z_7) = (X \cap Y_3) \cap (Y_4 + Z_7 \cap Y_3)$; es gibt also $y \in Y_3 \cap Z_7$ mit $y' = (y' - y) + y$ und $y' - y \in Y_4$.

Also ist $Y_3^+ \cap Z_6^+ \ni (-y', y'-y, y) = (0, -y, y) + (-y', y', 0) \in X^+ + Z_9^+$ und somit $y' = 0$.

Sei $P = (X \cap Y_3) + Y_4 + Z_7$; wegen $P^+ = X^+ + Z_6^+$ genügt es, zu zeigen $Z_6^+ \subseteq (Y_3^+ \cap Z_6^+) + X^+ + Z_9^+$. Sei also $(x, y, z) \in Z_6^+$, insbesondere $z \in Z_7$. Nach Voraussetzung gibt es $y_1 \in X \cap Y_3$, $y_2 \in Y_4$ und $y_3 \in Z_7$, so daß $y = y_1 + y_2 + y_3$. Insbesondere $y_3 \in Y_3 \cap Z_7$ und $y_3 + z \in Z_7$. Also $(x, y, z) = (x + y_1, y_2, y_3 + z) + (0, y_3, -y_3) + (-y_1, y_1, 0) \in (Y_3^+ \cap Z_6^+) + X^+ + Z_9^+$.

Sei schließlich umgekehrt $P^+ = (Y_3^+ \cap Z_6^+) + X^+ + Z_9^+$. Da wegen $(*)$ gilt $P = X + Y_4 + Z_7$, genügt es zu zeigen, daß $X \subseteq (X \cap Y_3) + Y_4 + Z_7$. Sei also $x \in X$; es gibt $y \in Y_3$ und $z \in Z_5$ mit $x = y + z$. Das Element $(x, -y, -z)$ hat die Form $(x', y', z') + (0, y'', -y'') + (x'', -x'', 0)$ mit, unter anderem, $(x', y', z') \in Y_3^+ \cap Z_6^+$, also $y' \in Y_4$, $z' \in Z_7$. Nun ist $x = x'' + x' = x'' - y' - z' \in (X \cap Y_3) + Y_4 + Z_7$.

7. und 8. werden ganz ähnlich nachgerechnet.

9. $Y_4^+ + Z_8^+$ und $(X^+ \cap Y_3^+) + (X^+ \cap Z_6^+)$ sind wegen $(*)$ ohnehin direkt. Die Elemente aus $Y_4^+ + Z_8^+$ sind genau die der Form $(x, y, z) + (x', 0, -x')$ mit $z \in Z_9$ und $x' \in X \cap Z_5$; die Elemente aus $(X^+ \cap Y_3^+) + (X^+ \cap Z_6^+)$ sind die der Gestalt $(0, y', -y') + (0, z', -z')$ mit $y' \in Y_4 \cap Z_5$ und $z' \in Y_3 \cap Z_7$. Die Elemente aus dem Schnitt dieser beiden Vektorräume haben also die Form $(x+x', y, z-x') = (0, y'+z', -y'-z')$ mit $z \in Z_9$, $x' \in X \cap Z_5$, $y' \in Y_4 \cap Z_5$ und $z' \in Y_3 \cap Z_7$. Insbesondere folgt $X + Z_9 \ni z - x' = -y' - z' \in Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7$. Damit ist die eine Richtung der Direktheit erledigt; die andere geht durch Rückwärtsrechnen.

Sei nun $P = (Y_4 \cap Z_5) + (Y_3 \cap Z_7) + X + Z_9$; da $P^+ = X^+ + Y_4^+ + Z_8^+$, genügt es zu zeigen, daß $X^+ \subseteq (X^+ \cap Y_3^+) + (X^+ \cap Z_6^+) + Y_4^+ + Z_8^+$. Sei also $(0, y, -y) \in X^+$. Nach Voraussetzung gibt es $x \in X$, $z \in Z_9$, $y_1 \in Y_4 \cap Z_5$ und $y_2 \in Y_3 \cap Z_7$, so daß $y = y_1 + y_2 + x + z$. Da $y \in Y_3 \cap Z_5$, folgt insbesondere $x \in X \cap Z_5$. Damit gilt $(0, y, -y) = (0, y_1, -y_1) + (0, y_2, -y_2) + (x, 0, -x) + (-x, x + z, -z)$ wie gewünscht.

Umgekehrt sei nun $P^+ = (X^+ \cap Y_3^+) + (X^+ \cap Z_6^+) + Y_4^+ + Z_8^+$. Da $P = X + Y_3$, genügt es, zu zeigen, daß $Y_3 \subseteq (Y_4 \cap Z_5) + (Y_3 \cap Z_7) + X + Z_9$. Wieder gibt es zu $y \in Y_3$ Elemente $x \in X$ und $z \in Z_5$ mit $y = x + z$; nach Voraussetzung gibt es eine Summenzerlegung $(-x, y, -z) = (0, y_2, -y_2) + (0, y_3, -y_3) + (x_2, 0, -x_2) + (x_1, y_1, z_1)$ mit $z_1 \in Z_9$, $y_2 \in Y_4 \cap Z_5$, $y_3 \in Y_3 \cap Z_7$ usw. Insbesondere folgt $y = y_2 + y_3 + y_1 = y_2 + y_3 - x_1 - z_1$ wie gewünscht.

10. ist ganz analog. ■

Weiter geht's wie üblich:

Definition 5.5 (∗)

i. S_1 sei der Funktor, der eine $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellung

$$\begin{tikzcd}
 & & & W \arrow[d] & & & \\
G_1 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & R & E_2 \arrow[l] & F_2 \arrow[l] & G_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

auf

$$\begin{tikzcd}
 & & E_1 \arrow[d, "\Delta"] & & & & & \\
W \arrow[r] & R \arrow[r] & E_1/G_1 \oplus R & E_1/G_1 \oplus E_2 \arrow[l] & E_1/G_1 \oplus F_2 \arrow[l] & E_1/G_1 \oplus G_2 \arrow[l] & E_1/G_1 \arrow[l] & F_1/G_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

abbildet; dabei ist Δ die durch die Diagonaleinbettung induzierte Abbildung.

ii. S_1' werfe eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & & & & \\
Y_4 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & P & Z_5 \arrow[l] & Z_6 \arrow[l] & Z_7 \arrow[l] & Z_8 \arrow[l] & Z_9 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

auf

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_4 \arrow[d] & & & \\
Y_3 \cap X \arrow[r] & Y_3 \cap (X + Z_9) \arrow[r] & Y_3 \cap (X + Z_8) \arrow[r] & Y_3 & Y_3 \cap Z_5 \arrow[l] & Y_3 \cap Z_6 \arrow[l] & Y_3 \cap Z_7 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Lemma 5.5.4 (∗)

i. S_1 *und* S_1' *sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen Moduln über* $\tilde{\mathrm{E}}_7$ *und Darstellungen von* $\tilde{\mathrm{E}}_8$, *die der Bedingung* $P = Y_3 \oplus Z_8$ *genügen.*

ii. S_1 *(und* S_1' *auf dem entsprechenden abgeschlossenen Unterraum von i.) erhält Defekt;* S_1' *erhält Injektionen,* S_1 *Surjektionen.*

In [DF 73] werden vier weitere Funktoren, S_i, $i = 2,3,4,5$, von $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellungen zu $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellungen definiert; zu diesen habe ich ebenfalls Funktoren S_i' gefunden, so daß die entsprechenden Versionen von Lemma 5.5.4 (mit geeigneten Bedingungen in ii.) gelten. Für unsere Zwecke (und für die Zwecke in [DF 73] auch!) genügen aber die Funktoren $(C^-)^l(S_1)$, für $l = 0,1,2,3,4$ (siehe unten). Diese sind übrigens wesentlich verschieden von den S_i, $i = 2,3,4,5$, wie Lemma 5.5.6 (und die entsprechenden Versionen für die S_i, $i = 2,3,4,5$) und Lemma 5.5.3 zeigen; andererseits gilt jedoch, daß (unter $(*)$) S_i und $(C^-)^{6-i}S_1$ das gleiche Bild haben, für $i = 1,2,3,4,5$.

Beweis: ii. ist trivial. Und i. ist einfach; wegen $(*)$ darf man annehmen, es sei $P = Y_3 + X$ stets erfüllt. ■

Das nächste triviale Lemma wird im Beweis von Lemma 5.5.6 und später, in Kapitel 8, verwandt.

Lemma 5.5.5 $(*)$ *Für rein-injektive Unzerlegbare U sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i. $P = X \cap Y_3 + X \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_5$;

ii. $P = Y_3 + X \cap Z_5$;

iii. $Y_3 = X \cap Y_3 + Y_3 \cap Z_5$;

iv. $X = X \cap Y_3 + X \cap Z_5$;

v. $Z_5 = X \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_5$.

(analog für die Direktheit der Summen). Die entsprechende Behauptung gilt auch (für $\tilde{\mathrm{E}}_6$), ersetzt man X, Y_3, Z_5 durch E_1, E_2, E_3.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es, die Äquivalenz von i., ii. und iii. einzusehen. Die Aussage des Lemmas über die Direktheit ist ohnehin trivial, ebenso die Richtung von i. nach ii. und iii.; außerdem folgt aus ii. zusammen mit iii. sofort i. Es genügt also, die Äquivalenz von ii. und iii. zu verifizieren.

Es gelte iii. Da wegen $(*)$ $P = X + Y_3$, genügt es zu zeigen, daß $X \subseteq Y_3 + (X \cap Z_5)$. Sei also $x \in X$; da $P = Y_3 + Z_5$, gibt es $y \in Y_3$ und $z \in Z_5$ mit $x = y + z$. Nach Voraussetzung ist $y = y_1 + y_2$ für geeignete $y_1 \in X \cap Y_3$ und $y_2 \in Y_3 \cap Z_5$; somit ist $x = y_1 + (y_2 + z)$, mit $Z_5 \ni y_2 + z = x - y_1 \in X$, und also $x \in Y_3 + (X \cap Z_5)$, wie gewünscht. Es gelte nun ii. Sei $y \in Y_3$, also $y = x + z$ mit geeigneten $x \in X$ und $z \in Z_5$. Nach Voraussetzung ist

$x = y' + x'$ mit $y' \in Y_3$ und $x' \in X \cap Z_5$. Insbesondere $y' \in X \cap Y_3$. Somit $y = y' + (x' + z)$, $y' \in X \cap Y_3$ und $x' + z \in Y_3 \cap Z_5$. ■

Lemma 5.5.6 (∗) *Sei M Modul über $k[\tilde{\mathrm{E}}_7]$, $S_1(M)$ das Bild, jeweils mit der Standardnotation. Dann ist in der folgenden Liste die Summe der Unterräume rechts (in $S_1(M)$) direkt (bzw. gleich P) genau dann, wenn diejenige der Unterräume links (in M) direkt (bzw. gleich R) ist:*

–	Y_3, Z_8
E_1, G_2	X, Z_7
F_2, W	Y_4, Z_6
E_2, G_1	$X \cap Y_3, X \cap Z_5, Y_3 \cap Z_5$
F_1, W	X, Y_4, Z_9
$E_1 \cap E_2, W$	$X \cap Z_5, Y_4, Z_8$
G_1, G_2, W	$X \cap Y_3, Y_4, Z_7$
F_1, F_2	$Y_3 \cap Z_6, X, Z_9$
$W, E_1 \cap F_2, G_1$	$X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8$
$W, E_2 \cap F_1, G_2$	$Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9$

Beweis: Um Quotienten zu vermeiden, argumentiere ich hier statt mit Darstellungen M von $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und ihren Bildern unter S_1 mit Darstellungen über $\tilde{\mathrm{E}}_8$ und ihren Bildern unter S_1'; wegen Lemma 5.5.4 ist das gleichbedeutend. Die Zeilen (Behauptungen) seien wieder durchnumeriert.

1. Hier ist nichts zu zeigen.

2. E_1 entspricht $Y_3 \cap (X + Z_8)$, G_2 entspricht $Y_3 \cap Z_7$ und R schließlich Y_3, so daß zu zeigen ist, daß (für eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung im Bild von S_1) $X + Z_7$ direkt in P (bzw. gleich P) ist, genau dann wenn $Y_3 \cap (X + Z_8) + Y_3 \cap Z_7$ direkt in Y_3 (bzw. gleich Y_3) ist.

Ist $X \cap Z_7 = 0$, so folgt $Y_3 \cap Z_7 \cap (X + Z_8) = Y_3 \cap (X \cap Z_7 + Z_8) = Y_3 \cap Z_8 = 0$ nach Voraussetzung. Umgekehrt sei $Y_3 \cap Z_7 \cap (X + Z_8) = 0$; sei $x \in X \cap Z_7$. Nach Voraussetzung ist $x = y + z$ für geeignete $y \in Y_3$ und $z \in Z_8$, also $y \in Y_3 \cap Z_7 \cap (X + Z_8) = 0$ und $z = x \in X \cap Z_8 = 0$ (wegen (∗)).

Sei $P = X + Z_7$ und $y \in Y_3$. Somit $y = x + z$ für $x \in X$ und $z \in Z_7$. Nach Voraussetzung gibt es $y' \in Y_3$ und $z' \in Z_8$, so daß $z = y' + z'$. Insbesondere $y' \in Y_3 \cap Z_7$. Also $y = x + y' + z' = (x + z') + y'$, wobei $x + z' \in X + Z_8$ und automatisch $\in Y_3$, wie gewünscht.

Sei nun $Y_3 = Y_3 \cap (X + Z_8) + Y_3 \cap Z_7$. Wegen $(*)$ ist $P = Y_3 + Z_7 = Y_3 \cap (X + Z_8) + Y_3 \cap Z_7 + Z_7 \subseteq (X + Z_8) + Z_7 = X + Z_7$, wie verlangt.

3. Hier ist zu zeigen, daß (im Bild von S_1) $Y_4 + Z_6$ genau dann direkt (bzw. gleich P) ist, wenn $Y_3 \cap Z_6 + Y_4$ direkt (bzw. gleich Y_3) ist. Das ist aber klar.

4. Zu zeigen ist, daß $X \cap Y_3 + X \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_5$ genau dann direkt (bzw. gleich P) ist, wenn $X \cap Y_3 + Y_3 \cap Z_5$ direkt (bzw. gleich Y_3) ist. Das liefert gerade Lemma 5.5.5.

5. Zu zeigen ist hier, daß $X + Y_4 + Z_9$ genau dann direkt (bzw. gleich P) ist, wenn $Y_3 \cap (X + Z_9) + Y_4$ direkt (bzw. gleich Y_3) ist. Das ist alles klar, bis auf evtl.: Sei $Y_3 = Y_3 \cap (X + Z_9) + Y_4$. Dann ist wegen $P = X + Y_3$ aber $P = X + Y_3 \cap (X + Z_9) + Y_4 \subseteq X + Y_4 + Z_9$.

6. Nachzuweisen ist, daß $(X \cap Z_5) + Y_4 + Z_8$ direkt (bzw. gleich P) genau dann ist, wenn $Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) + Y_4$ direkt (bzw. gleich Y_3) ist. Die Direktheit ist einfach.

Sei nun $Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) + Y_4 = Y_3$; da wegen $(*)$ $P = (X \cap Z_5) + Y_3 + Z_8$ gilt (ja sogar $P = (X \cap Z_6) + Y_3 + Z_8$), genügt es zu zeigen, daß $Y_3 \subseteq (X \cap Z_5) + Y_4 + Z_8$. Zu $y \in Y_3$ gibt es $x \in X$, $z \in Z_8$ und $y' \in Y_4$, so daß $y = x + z + y'$ und $x + z \in Y_3 \cap Z_5$. Folglich gilt $x \in X \cap Z_5$ und $y \in (X \cap Z_5) + Y_4 + Z_8$.

Sei umgekehrt $P = (X \cap Z_5) + Y_4 + Z_8$, sei $y \in Y_3$. Also $y = x + y' + z$ mit $x \in X \cap Z_5$, $y' \in Y_4$ und $z \in Z_8$. Damit $Y_3 \ni y - y' = x + z \in Z_5 \cap (X + Z_8)$ und $y = y' + (x + z)$ wie gewünscht.

7. Ganz ähnlich den vorhergehenden Rechnungen; man benutzt, daß $P = Y_3 + Z_7$ angenommen werden kann.

8. ist noch einfacher; man verwendet zum Beispiel, daß $P = X + Y_3$.

9. Hier ist zu prüfen, daß $(X \cap Y_3) + (X \cap Z_6) + Y_4 + Z_8$ genau dann direkt (bzw. gleich P) ist, wenn $(X \cap Y_3) + (X + Z_8) \cap Y_3 \cap Z_6 + Y_4$ direkt (bzw. gleich Y_3) ist. Für die Direktheit ist das nicht schwer.

Sei $Y_3 = (X \cap Y_3) + (X + Z_8) \cap Y_3 \cap Z_6 + Y_4$; da wieder wegen Lemma 5.5.2 gilt, daß $P = (X \cap Z_6) + Y_3 + Z_8$, genügt der Nachweis von $Y_3 \subseteq (X \cap Y_3) + (X \cap Z_6) + Y_4 + Z_8$. Das ist aber klar.

Umgekehrt gelte $P = (X \cap Y_3) + (X \cap Z_6) + Y_4 + Z_8$; sei $y \in Y_3$ entsprechend zerlegt als $y = x_1 + x_2 + y' + z$. Da $y, y', x_1 \in Y_3$ folgt $x_2 + z \in Y_3$; da $x_2 + z \in (X + Z_8) \cap Z_6$, liegen nicht nur y', x_1 in $(X \cap Y_3) + (X + Z_8) \cap Y_3 \cap Z_6 + Y_4$ sondern auch $x_2 + z$, somit auch y.

10. Diese Rechnung ist ähnlich, benutzt zum Beispiel, daß wegen Lemma 5.5.2 gilt $P = (Y_3 \cap Z_5) + X + Z_9$ und $P = Y_4 + Z_5$. ■

Lemma 5.5.7 *Fast alle (endlichdimensionalen) diskreten Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 4$ liegen im Bild eines der Funktoren $(C^-)^l S_1$, $l \in \{0,1,2,3,4\}$. Entsprechendes gilt, ersetzt man C^- durch C^+.*

Beweis: Die Tabellen von Dimensionstypen in [DF 73] zeigen, daß fast alle diskreten Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 4$ im Bild eines der Funktoren S_i, $i = 1, \ldots, 5$, liegen; wie oben bemerkt, folgt daraus die Behauptung. ∎

Mit der üblichen Sprechweise:

Lemma 5.5.8

i. *Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 4$ sind Moduln über $k[\tilde{\mathrm{E}}_7]$, fast alle mit $|\delta(U)| \leq 3$ schon Moduln über $k[\tilde{\mathrm{E}}_6]$. Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 2$ sind Quadrupel. Fast alle Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \leq 1$ sind Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen.*

ii. *Alle regulären endlichdimensionalen Unzerlegbaren sind $k[X]$-Moduln.*

iii. *Die stetigen (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren sind genau die Unzerlegbaren mit Dimensionstyp der Form $(6l; 3l; 4l, 2l; 5l, 4l, 3l, 2l, l)$, $l \geq 1$. Sie sind genau die Bilder der stetigen $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren unter einem der Funktoren S_1 oder C^+S_1 (zum Beispiel).*

Beweis: Der Beweis ist analog dem von Lemma 5.4.7: Zu untersuchen sind nur noch stetige endlichdimensionale Unzerlegbare; diese sind aber (siehe [DF 73]) im Bild eines der Funktoren S_i, $i = 1, \ldots, 5$, und somit – mit dem gleichen Argument wie eben im Beweis von Lemma 5.5.7 – im Bild eines der $(C^-)^l S_1$, $l \in \{0,1,2,3,4\}$. Nun folgen i. und ii. aus Lemma 5.4.7. Und iii. ergibt sich wie immer so: Die erste Behauptung hat man mit [DR 76]; der Rest ist genaueres Hinsehen. ∎

Kapitel 6

Entscheidbarkeit

In diesem Kapitel zeigen wir, daß die Theorie aller Linksmoduln über einer zahmen Köcheralgebra entscheidbar ist, falls der Körper gewisse Voraussetzungen erfüllt. (Zur Erinnerung: Eine Köcheralgebra ist eine Köcheralgebra ohne Relationen.)

Abschnitt 6.1 enthält einige Grundlagen zur Entscheidbarkeit von Modultheorien. Der zweite Teil, Abschnitt 6.2, beinhaltet wichtige Folgerungen aus der in Kapitel 5 durchgeführten Analyse der endlichdimensionalen Unzerlegbaren über einer zahmen Köcheralgebra; diese Folgerungen werden nicht nur für den Beweis der Entscheidbarkeit sondern auch in Kapitel 8 für die Beschreibung der Topologie des Ziegler-Spektrums benötigt. In Abschnitt 6.3 gebe ich den angekündigten Beweis der Entscheidbarkeit der Modultheorie über einer Algebra der Form $k[\Delta]$, Δ einer der Euklidischen Köcher, k geeigneter Körper; außerdem leite ich noch einige verwandte Resultate her. Genauere Inhaltsangaben finden sich zu Anfang jedes Abschnitts.

6.1 Vorbereitung

Dieser Abschnitt enthält weitgehend bekannte Resultate zur Frage der Entscheidbarkeit von ${}_RT$, der Theorie aller Linksmoduln über einem Ring R. (Teilweise gelten diese auch für allgemeinere Modultheorien; wir benötigen für die Anwendungen in Abschnitt 6.3 aber nur diese spezielleren Versionen.) Die ersten drei Lemmata sind wohl im wesentlichen von Ziegler (siehe [Zie 84]): Neu, aber einfach, ist allenfalls Lemma 6.1.1, das eine zur Entscheidbarkeit der Modultheorie äquivalente Bedingung angibt. Lemma 6.1.4

ist von Prest; neu ist hier lediglich die Sicht des Beweises. Und Lemma 6.1.5 sowie Korollar 6.1.6 sind im wesentlichen schon von Eklof und Fisher ([EF 72, 5.4 Theorem und anschließende Beispiele]); man vergleiche die Bemerkung nach Lemma 6.1.5.

Damit die Frage nach der Entscheidbarkeit von $_RT$ sinnvoll ist, muß der Ring R eine Mindestvoraussetzung erfüllen: Wir nehmen stets an, R sei ein rekursiver Ring, das heißt R sei so durchnumeriert (das heißt habe eine Aufzählung ohne Wiederholungen), daß Addition und Multiplikation rekursive Funktionen sind; insbesondere ist R also abzählbar. In [Pre 88] werden weitere Annahmen *an den Ring* R diskutiert, die aus der Entscheidbarkeit von $_RT$ folgen (etwa die Prestsche Bedingung (D)); ihre Bedeutung gewinnen sie allerdings erst bei Unentscheidbarkeitsresultaten: Erfüllt ein Ring, zum Beispiel, Bedingung (D) und ist $_RT$ unentscheidbar, dann kann man dies mit einer gewissen Berechtigung auf die Kompliziertheit der Modulkategorie R-Mod zurückführen. Ist dagegen bereits (D) nicht wahr, dann ist schon der Ring zu unübersichtlich (gegeben). Da unser Interesse allein Entscheidbarkeitsresultaten gilt, verzichten wir auf eine weitere Erörterung.

Ausgangspunkt ist das folgende Lemma (siehe die Bemerkung nach [Zie 84, Theorem 9.4]):

Lemma 6.1.1 *R sei rekursiv. Dann sind äquivalent:*

i. *$_RT$ ist entscheidbar.*

ii. *Es gibt eine Aufzählung φ_i/ψ_i, so daß die (φ_i/ψ_i) eine Basis von $_RI$ bilden und die Relation "Es gibt eine endliche direkte Summe M reininjektiver Unzerlegbarer mit*

$$\varphi_1/\psi_1(M) \in [n_1, m_1] \wedge \ldots \wedge \varphi_l/\psi_l(M) \in [n_l, m_l]\text{''},$$

$n_i \in \mathbf{N}, m_i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, rekursiv aufzählbar ist.

Beweis: Da R rekursiv ist, ist $_RT$ rekursiv axiomatisierbar; also ist $_RT$ genau dann entscheidbar, wenn die mit $_RT$ konsistenten Sätze aufzählbar sind. Wegen des Satzes von Baur (Satz 1.1.3) ist dies genau dann der Fall, wenn die erfüllbaren booleschen Kombinationen von Invariantenbedingungen, das heißt von Formeln der Gestalt $\varphi/\psi \in [n, m]$ mit $n \in \mathbf{N}$ und $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, aufzählbar sind; dabei genügt es, solche boolesche Kombinationen aufzuzählen, so daß die (φ/ψ) aus einer fest gewählten Basis von $_RI$

sind (wegen [Zie 84, Corollary 6.13]). Wegen Satz 1.1.6 ist eine solche erfüllbare boolesche Kombination aber in einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer – und dann in einer endlichen solchen – erfüllbar. ■

Lemma 6.1.2 *R sei rekursiv. ${}_RT$ ist entscheidbar, falls es eine Aufzählung φ_i/ψ_i gibt, so daß die (φ_i/ψ_i) eine Basis von ${}_RI$ bilden und die Relation "Es gibt ein rein-injektives Unzerlegbares U mit*

$$\varphi_1/\psi_1(U) \in [n_1, m_1] \wedge \ldots \wedge \varphi_l/\psi_l(U) \in [n_l, m_l]\text{"},$$

$n_i \in \mathbf{N}, m_i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, rekursiv aufzählbar ist.

Beweis: Aus einer solchen Aufzählung erhält man sofort eine wie in ii. des vorigen Lemmas. ■

Lemma 6.1.3 *R sei rekursiv. Es gebe eine Aufzählung $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ von ${}_RI$ und eine Aufzählung $\{\varphi_i/\psi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, so daß die (φ_i/ψ_i) eine Basis von ${}_RI$ bilden, derart daß die Relation "$\varphi_i/\psi_i(U_j) = l$", $i, j, l \in \mathbf{N}$, rekursiv ist. Dann ist ${}_RT$ entscheidbar.*
Das Lemma gilt genauso, wenn man $= l$ durch $\geq l$ ersetzt.

Beweis: Klar mit Lemma 6.1.2. ■

Das nächste Lemma ist eine "effektive" Version von Satz 4.1.8; siehe auch [Pre 88, Theorem 17.2]:

Lemma 6.1.4 *R und S seien rekursive Ringe und "effektiv" (siehe [Pre 88, Seite 335]) Morita-äquivalent. Dann folgt aus der Entscheidbarkeit der Theorie der R-Moduln die der S-Moduln.*

Beweis: Satz 4.1.8 zeigt, daß die Modulkategorien von R und S pp-äquivalent sind; weil "alles effektiv gegeben ist", überträgt sich Entscheidbarkeit. (Für Einzelheiten der Rechnungen siehe [Pre 88, Seite 335-336].) ■

Als letztes in diesem ersten Abschnitt nun noch einige Ergebnisse, im wesentlichen wohlbekannt, zur Entscheidbarkeit von Dedekind-Ringen: Um auf Entscheidbarkeit der Modultheorie ${}_RT$ eines Dedekind-Ringes R hoffen zu können, muß man natürlich voraussetzen, daß er rekursiv ist; es scheint, daß alle Resultate zusätzlich mindestens benötigen, daß es eine Aufzählung der maximalen Ideale von R (in Form von Erzeugenden) gibt. Das ist aber in manchen Fällen schon ausreichend für Entscheidbarkeit. Genauer gilt

Lemma 6.1.5 *Sei R ein rekursiver Dedekind-Ring mit einer Aufzählung $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ (durch Erzeugende) der maximalen Ideale. Dann sind äquivalent:*

i. ${}_RT$ ist entscheidbar.

ii. Die Relation $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| = l$, $i, l \in \mathbf{N}$, ist rekursiv (bzw. rekursiv aufzählbar).

iii. Die Relation $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| \leq l$, $i, l \in \mathbf{N}$, ist rekursiv (bzw. rekursiv aufzählbar).

Dies ist gegenüber [Zie 84, Corollary 9.7], [Pre 88, Theorem 17.13] und [EF 72, 5.4 Theorem] eine infinitesimal verbesserte Version: Denn dort wird Entscheidbarkeit von R nur unter der Vorauusetzung behauptet, daß $|\,R/\mathfrak{p}_i\,|$ in Abhängigkeit von i ausgerechnet werden kann, daß also ii. des Lemmas für $l \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ gilt. Und neu ist offenbar auch die Formulierung des Lemmas als Äquivalenz.

Beweis: Ist R ein Körper, dann ist das Lemma trivial: ${}_RT$ ist entscheidbar; zum Beispiel weil ${}_RT$ abzählbare ω_1-kategorische, also vollständige Theorie ist. R sei also ohne Einschränkung kein Körper.

Ist $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| = l$, $i, l \in \mathbf{N}$ rekursiv aufzählbar, dann auch $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| \leq l$, $i, l \in \mathbf{N}$; und ist $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| \leq l$, $i, l \in \mathbf{N}$ rekursiv, dann auch $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| = l$, $i, l \in \mathbf{N}$. Es genügt also, die Äquivalenz von i. und der beiden Versionen von iii. zu zeigen. – Unter den Voraussetzungen an R gilt zunächst

Behauptung: Die Relation "$b \in (a_1, \ldots, a_n)$" ist rekursiv.

Beweis der Behauptung: Diese Relation ist rekursiv aufzählbar, da der Ring R rekursiv ist. Es genügt also einzusehen, daß "$b \notin (a_1, \ldots, a_n)$" rekursiv aufzählbar ist. Aber $b \notin (a_1, \ldots, a_n)$ gilt genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_n) \subsetneq (b, a_1, \ldots, a_n)$, also genau dann, wenn es ein i gibt, so daß $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (b, a_1, \ldots, a_n)$, und dies ist offenbar rekursiv aufzählbar, weil die $\mathfrak{p}_i$ durch Erzeugende gegeben sind und die Produkte der Erzeugenden zweier Ideale das Produkt der Ideale erzeugen. Das zeigt die Behauptung.

Folglich ist die Relation $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| \geq l$, $i, l \in \mathbf{N}$, rekursiv aufzählbar, und die beiden Versionen von iii. sind äquivalent.

Es gelte i. Weil jeder Modul elementar äquivalent zu einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer ist (Satz 1.1.6), folgt aus der Beschreibung der rein-injektiven Unzerlegbaren über Dedekind-Ringen (Abschnitt 1.3), daß $|\,R/\mathfrak{p}_i\,| \leq l$ genau dann gilt, wenn es einen Modul M mit $1 < |\,M/\mathfrak{p}_i M\,| \leq l$ gibt. Das aber ist durch einen Satz in ${}_RL$ ausdrückbar. Somit gilt iii.

Umgekehrt gelte nun iii. Dann liefert Lemma 1.3.4, daß die Voraussetzungen von Lemma 6.1.3 erfüllt sind: ${}_RT$ ist entscheidbar. ∎

Ein Körper k habe einen Zerfällungsalgorithmus, wenn es einen Algorithmus gibt, der zu einem gegebenen Polynom aus $k[X]$ seine irreduziblen Faktoren bestimmt.

Korollar 6.1.6 *Sei k ein rekursiver Körper mit einem Zerfällungsalgorithmus. Dann ist die Theorie ${}_{k[X]}T$ der $k[X]$-Moduln entscheidbar.*

Beweis: Das folgt aus Lemma 6.1.5: Man kann nämlich die $|\,k[X]/(p)\,|$, p irreduzibel, ausrechnen. Denn ist k endlich, dann ist $|\,k[X]/(p)\,| = |\,k\,|^{\deg(p)}$, und ist k unendlich, dann sind alle diese Werte ebenfalls unendlich. Und mit k ist natürlich auch $k[X]$ rekursiv (auf naheliegende Weise). ∎

Man beachte, daß ein endlicher Körper automatisch alle Voraussetzungen des Korollars erfüllt, das heißt rekursiv mit Zerfällungsalgorithmus ist. Weitere Beispiele von Körpern mit Zerfällungsalgorithmus sind etwa $\mathbf{Q}$ und abzählbare algebraisch abgeschlossene Körper (siehe [Pre 88, Seite 344]).

6.2 Vom Endlichen zum Unendlichen

Hier stehen einige für alles Weitere wichtige Folgerungen aus der in Kapitel 5 durchgeführten Analyse der endlichdimensionalen Unzerlegbaren über einer zahmen Köcheralgebra. Mit ihnen wird der Schritt vom Endlichdimensionalen zum Unendlichdimensionalen getan. Inwieweit diese Ergebnisse neu sind, ist mir nicht klar; sie sind jedenfalls explizit noch nicht so formuliert worden, und zumindest Korollar 6.2.4 sowie Korollar 6.2.5 scheinen neu zu sein. – Erinnert sei wiederum an die Sprechweise von Seite 80.

Satz 6.2.1 *Δ sei einer der Euklidischen Köcher ohne gerichtete Zyklen. Reguläre Unzerlegbare sind $k[X]$-Moduln.*

Beweis: Explizite Formeln für den Defekt habe ich in Kapitel 5 nur für jeweils eine ausgewählte Orientierung angegeben; es zeigt sich aber, daß alle dort betrachteten pp-Äquivalenzen auch den Defekt endlichdimensionaler Moduln erhalten (jeweils eine vollkommen triviale Rechnung), sofern Defekt überhaupt über beiden Algebren definiert ist. Daher genügt es, die Behauptung für die Köcher $\tilde{A}_{2n+1}$ (mit alternierender Orientierung), $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ mit den Standardorientierungen zu beweisen. Für $\tilde{A}_{2n+1}$ (sogar für $\tilde{A}_n$ mit beliebiger Orientierung ohne gerichtete Zyklen) folgt sie dann aus Lemma 5.1.5 und Korollar 5.1.3; für die übrigen Köcher aus den Lemmata 5.2.8, 5.3.8, 5.4.7 und 5.5.8. ■

Aus diesem und dem zentralen Satz 2.2.1 ziehen wir nun einige Folgerungen; dabei wird nicht immer die volle Stärke von Satz 2.2.1 verwandt: gelegentlich genügte auch Korollar 2.1.4.

Korollar 6.2.2 *Die Menge der endlichdimensionalen Unzerlegbaren über $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$, $\tilde{\mathrm{A}}_n$ mit beliebiger Orientierung, ist dicht im Ziegler-Spektrum. Endlichdimensionale Unzerlegbare über $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ sind isoliert und abgeschlossen; es gibt keine anderen isolierten rein-injektiven Unzerlegbaren.*

Korollar 6.2.3 *Lemma 5.1.2, Korollar 5.1.3, Lemmata 5.1.5, 5.1.6 und 5.2.1 gelten auch dann, wenn man (wo es sinnvoll ist) "endlichdimensional" durch "rein-injektiv" ersetzt. Lemma 4.2.3 gilt, wenn man "regulär" durch "regulär oder unendlichdimensional rein-injektiv" ersetzt.*

Und hier die wohl wichtigste Folgerung (in der üblichen Sprechweise):

Korollar 6.2.4 *Δ sei ein Euklidischer Köcher (mit beliebiger Orientierung). Unendlichdimensionale rein-injektive Unzerlegbare sind $k[X]$-Moduln.*

Beweis: (der letzten drei Korollare) Korollar 6.2.2 und Korollar 6.2.3 folgen, falls nicht $\tilde{\mathrm{A}}_n$ mit zyklischer Orientierung betrachtet wird, aus den Ergebnissen über Artin-Algebren, insbesondere Korollar 2.1.4. Korollar 6.2.4 folgt aus Satz 2.2.1 und Satz 6.2.1, wiederum allerdings zunächst nur, falls nicht $\tilde{\mathrm{A}}_n$ mit zyklischer Orientierung vorliegt.

Es bleibt also, $\tilde{\mathrm{A}}_n$ mit zyklischer Orientierung zu betrachten: Das "Einbettungsargument" von Lemma 5.1.1 zeigt, daß endlichdimensionale Unzerlegbare abgeschlossen sind. Das gleiche Argument liefert auch, daß unendlichdimensionale rein-injektive Unzerlegbare $k[X]$-Moduln sind. Nachdem die rein-injektiven Unzerlegbaren nun identifiziert sind, folgt leicht der Rest von Korollar 6.2.2 und Korollar 6.2.3. ■

Insbesondere erhält man eine – angesichts des aber viel nützlicheren Korollars 6.2.4 nicht sehr wertvolle – Verschärfung von Satz 2.2.1:

Korollar 6.2.5 *Δ sei einer der Euklidischen Köcher, ohne gerichtete Zyklen. Dann enthält der Abschluß der* stetigen *regulären Unzerlegbaren alle rein-injektiven unendlichdimensionalen Unzerlegbaren.*

Beweis: Korollar 6.2.4 liefert die unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren; Inspektion der einzelnen Fälle zeigt sofort die Behauptung; dabei genügt es natürlich, die in Kapitel 5 betrachteten Orientierungen zu untersuchen. ■

Als weitere unmittelbare Folgerung der bisherigen Analyse ergibt sich das – ebenfalls nur kuriose und unnütze –

Korollar 6.2.6 *Δ sei ein Euklidischer Köcher, beliebig orientiert. Dann sind fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren Unzerlegbare über $\tilde{\mathrm{E}}_8$.*

Beweis: Das folgt sofort aus den in Kapitel 5 angegebenen Funktoren; weder Unzerlegbarkeit noch Rein-Injektivität werden übrigens benutzt, um Darstellungen von Δ in Darstellungen von $\tilde{\mathrm{E}}_8$ zu kodieren. ■

Das letzte Korollar bringt zwar nichts Neues, gießt es aber in eine für später nützliche Form:

Korollar 6.2.7

i. *Δ sei ein beliebig orientierter Euklidischer Köcher. Dann ist das Ziegler-Spektrum von $k[\Delta]$ von der Form $A_1 \cup \ldots \cup A_l \cup 0$. O ist dabei eine Menge endlichdimensionaler (offen-abgeschlossener) Punkte von Defekt ungleich Null. Die A_i sind abgeschlossene Mengen der Gestalt $\cap_j (\varphi_j/\psi_j)^c$, so daß die zu A_i gehörige Modulklasse pp-äquivalent ist zur Klasse der $k[X]$-Moduln.*

ii. *Δ sei einer der Euklidischen Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $n \geq 4$, oder $\tilde{\mathrm{E}}_n$, $6 \leq n \leq 8$, mit beliebiger Orientierung; Δ' sei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (im Falle $\tilde{\mathrm{D}}_n$) oder $\tilde{\mathrm{E}}_n$ (im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_n$), aber mit der Standardorientierung. Dann gibt es offen-abgeschlossene koendliche Teilmengen A bzw. A' des Ziegler-Spektrums von $k[\Delta]$ bzw. von $k[\Delta']$, in deren Komplement jeweils nur endlichdimensionale Punkte von Defekt ungleich Null liegen und deren zugehörige Modulklassen pp-äquivalent und endlich axiomatisierbar sind.*

iii. *Δ sei der standardorientierte Euklidische Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_8$). Dann ist das Ziegler-Spektrum von $k[\Delta]$ von der Form $A_1 \cup \ldots \cup A_l \cup O$ mit abgeschlossenen Mengen A_i; es gibt koendliche offen-abgeschlossenen Teilmengen $A'_1, \ldots, A'_l$ des Ziegler-Spektrums der Kronecker-Moduln (bzw. von $\tilde{\mathrm{D}}_4$, bzw. von $\tilde{\mathrm{E}}_6$, bzw. von $\tilde{\mathrm{E}}_7$, jeweils mit* *der Standardorientierung), in deren Komplement jeweils nur endlichdimensionale Punkte von Defekt ungleich Null liegen, so daß die Modulklassen von A_i und A_i' endlich axiomatisierbar und pp-äquivalent sind. O ist, bis auf endlich viele endlichdimensionale Unzerlegbare, eine Menge von (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren U mit $|\delta(U)| \in \{-2,2\}$ (bzw. $|\delta(U)| \in \{-3,3\}$, bzw. $|\delta(U)| \in \{-4,4\}$, bzw. $|\delta(U)| \in \{-6,-5,5,6\}$).*

Zusatz: Die pp-Äquivalenzen sind Kompositionen geeigneter Funktoren aus Kapitel 5 (einschließlich der im Beweis von Lemma 5.1.1 und Lemma 5.2.1 verwandten) und von Spiegelungsfunktoren. Im Fall iii. sind die pp-Äquivalenzen (in einer Richtung) von der Form $(C^-)^l D_{i,j}$ (bzw. $(C^-)^l T_{i,j,k}$, bzw. $(C^-)^l S_7$, bzw. $(C^-)^l S_1$).

Beweis: Das folgt alles aus den Resultaten dieses Abschnitts, zusammen mit Lemma 4.2.3, nach Auflösen der ständig benutzten Sprechweise von Seite 80 – jedenfalls, wenn man etwas schummelt: Denn die Sprechweise liefert für i. zunächst nur, daß die Modulklasse zu A_i pp-äquivalent ist zu einer *Teilklasse* der Klasse der $k[X]$-Moduln, deren zugehörige Teilmenge des Ziegler-Spektrums *koendlich* in $\mathrm{I}(k[X])$ ist. Aber eine Analyse der Funktoren zeigt die etwas stärkere Aussage i.

Der Zusatz ergibt sich aus den jeweiligen Beweisen. ■

Und für späteren Gebrauch (siehe in Abschnitt 8.2 vor Satz 8.2.1) halten wir hier noch das folgende Lemma fest, das sich mit Hilfe von Satz 2.2.1 sofort aus Lemma 5.1.5 ergibt:

Lemma 6.2.8 *Die rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}_3$ (siehe Lemma 5.1.5) sind:*

i. rein-injektive Unzerlegbare aus $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$;

ii. die beiden "(X)-adischen", $\tilde{k[X]}_{(X),f=1} \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3$:

$$\tilde{k[X]}_{(X)} \underset{g=X}{\overset{f=1}{\rightrightarrows}} \tilde{k[X]}_{(X)}$$

und $\tilde{k[X]}_{(X),g=1} \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$:

$$k[\tilde{X}]_{(X)} \underset{g=1}{\overset{f=X}{\rightrightarrows}} k[\tilde{X}]_{(X)}$$

iii. die Präprojektiven P_n. ∎

6.3 Entscheidbarkeit zahmer Köcheralgebren

Dieser Abschnitt enthält den verblüffend einfachen Beweis für die Entscheidbarkeit der Theorie aller Linksmoduln über einer zahmen Köcheralgebra, das heißt einer Algebra der Form $k[\Delta]$, Δ einer der Euklidischen Köcher und k ein kommutativer Körper, der gewissen Bedingungen genügt. Dieses Resultat, das den bekannten Beweis von Baur ([Bau 80]) für die Entscheidbarkeit der Quadrupel von Vektorräumen verallgemeinert (und drastisch vereinfacht!), hatte Prest vermutet; Prest hat auch eine mögliche Beweisskizze angedeutet, allerdings nicht ausgeführt: Er hatte vorgeschlagen, das Ziegler-Spektrum der jeweiligen Algebra zu beschreiben und dann Lemma 6.1.3 von Ziegler anzuwenden, das die Entscheidbarkeit liefert ([Pre 92], [Pre 88], [Pre 85]). Dieses Programm ist tatsächlich durchführbar: Kapitel 8 beinhaltet gerade die gewünschte Beschreibung des Ziegler-Spektrums, und somit ergibt sich dann ein weiterer Beweis für die Entscheidbarkeit; siehe die Bemerkung nach dem Beweis von Satz 6.3.1. Allerdings geht es auch viel einfacher: Entscheidbarkeit folgt bereits jetzt ohne weiteres aus den Ergebnissen von Abschnitt 6.2 (und damit im wesentlichen aus Kapitel 5 und Satz 2.2.1).

Der zentrale Satz über die Entscheidbarkeit ist Satz 6.3.1; dann werden weitere Folgerungen gezogen. – Korollar 6.3.2 scheint noch nicht bemerkt worden zu sein. – Siehe auch [Pre 88, Section 17.3], insbesondere [Pre 88, Theorem 17.16].

Satz 6.3.1 *k sei rekursiv. Δ sei ein Euklidischer Köcher mit beliebiger Orientierung. Aus der Entscheidbarkeit der Theorie der $k[X]$-Moduln folgt die Entscheidbarkeit der Theorie der $k[\Delta]$-Moduln.*

Beweis: Wegen Lemma 6.1.1 genügt es zum Beweis der Entscheidbarkeit, die in endlichen direkten Summen rein-injektiver Unzerlegbarer erfüllbaren pp-Formeln aufzuzählen, das heißt, in der Notation von Korollar 6.2.7 i., die in Summen der Form

$$U_1 \oplus \ldots \oplus U_m \oplus M_1 \oplus \ldots \oplus M_l$$

erfüllbaren, wobei die $M_i \in A_i$ liegen (und endliche direkte Summen rein-injektiver Unzerlegbarer sind; aber das wird gar nicht gebraucht), und die U_j von Defekt $\neq 0$ endlichdimensional und unzerlegbar sind. Dazu genügt es,

1. die pp-Formeln aufzuzählen, die in einem geeigneten endlichdimensionalen Unzerlegbaren von Defekt $\neq 0$ erfüllbar sind, und
2. diejenigen pp-Formeln aufzuzählen, die in einem geeigneten Modul $M_i \in A_i$ erfüllbar sind.

Die Unzerlegbaren von Defekt $\neq 0$ sind aber wohlbekannt und können leicht aufgelistet werden: Zum Beispiel wegen [Rin 84, Lemma 3, Seite 63]; oder weil man sofort die projektiven und injektiven Unzerlegbaren angeben kann, um dann mit Hilfe der Coxeter-Funktoren alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren von Defekt ungleich Null zu erzeugen. (Dies gilt wegen Lemma 5.1.1 auch im Falle einer Orientierung mit orientiertem Zyklus.) Und für ein festes endlichdimensionales Unzerlegbares U (von Defekt $\neq 0$) und eine feste pp-Formel φ ist die Frage nach der Erfüllbarkeit von φ in U entscheidbar: Es geht nur um das Lösen eines Gleichungssystems! Also hat man die in 1. gewünschte Aufzählung. Die in 2. verlangte erhält man aus der Voraussetzung: Es gibt eine – explizit berechenbare – pp-Formel φ_i, so daß φ genau dann in einem $M_i \in A_i$ erfüllbar ist, wenn φ_i in einem geeigneten $k[X]$-Modul erfüllbar ist. ■

In Kapitel 8 werden – jedenfalls im Prinzip – Umgebungsbasen für die rein-injektiven Unzerlegbaren über einer zahmen Köcheralgebra $k[\Delta]$ bestimmt. Deshalb ergibt sich mit Lemma 6.1.3 ein weiterer Beweis für die Entscheidbarkeit.

Der eben gegebene Beweis für die Entscheidbarkeit der zahmen Köcheralgebren (bei geeignetem Körper) verwendet also in der Tat kaum etwas: Kapitel 5 (und das heißt im wesentlichen die Arbeit [DF 73]) liefert Satz 6.2.1; Satz 2.2.1 ergibt damit Korollar 6.2.4 und Korollar 6.2.7– das sind schon alle Ingredienzien für den Beweis! – Es sei noch bemerkt, daß die Voraussetzung der Zahmheit nur bei Satz 6.2.1 eingeht: Die präprojektiven und präinjektiven Unzerlegbaren kann man stets gut überblicken; daß man aber auch die regulären Unzerlegbaren versteht, ist der Zahmheit zu verdanken. Die

Kompliziertheit der Modulkategorie von wilden Köcheralgebren rührt also von den regulären Unzerlegbaren her. – Als Folgerung aus dem Beweis erhält man noch:

Korollar 6.3.2 *Δ sei ein Euklidischer Köcher, k rekursiv. Aus der uniformen Entscheidbarkeit der $k[X]$-Moduln folgt die uniforme Entscheidbarkeit der $k[\Delta]$-Moduln.* ∎

Da – in der bekannten Sprechweise – jedes rein-injektive Unzerlegbare über $k[X]$ auch eines über $k[\Delta]$ ist (für gegebenes Δ), wie die Überlegungen in Kapitel 5 zeigen, gilt natürlich auch die Umkehrung von Satz 6.3.1 und Korollar 6.3.2. – Das gleiche Argument (siehe auch Korollar 6.2.6) liefert auch, daß die Behauptung von Satz 6.3.1 (bzw. Korollar 6.3.2) äquivalent zur Entscheidbarkeit (bzw. uniformen Entscheidbarkeit) der Theorie der Moduln über $k[\tilde{\mathrm{E}}_8]$ ist. – In den meisten Fällen, in denen man die Entscheidbarkeit der Theorie der $k[X]$-Moduln zur Verfügung hat, wird man die rein-injektiven unzerlegbaren $k[X]$-Moduln aufzählen können (zum Beispiel im Falle eines rekursiven Körpers k mit Zerfällungsalgorithmus): Dann erhält man auch eine Aufzählung der rein-injektiven $k[\Delta]$-Unzerlegbaren (wieder in der Notation von Korollar 6.2.7 i.): Die Unzerlegbaren von Defekt ungleich Null kann man wie im Beweis von Satz 6.3.1 aufzählen. Die anderen rein-injektiven Unzerlegbaren liegen in der Vereinigung der A_i; da die pp-Äquivalenzen, etwa F_i mit Bild A_i, ganz explizit gegeben sind, erhält man ohne weiteres aus den $k[X]$-Unzerlegbaren alle Unzerlegbaren, die in einem der A_i liegen. In den so erzeugten Listen der rein-injektiven Unzerlegbaren gibt es Wiederholungen (durch die nichtleeren Durchschnitte der A_i), die sich allerdings eliminieren lassen: Denn dazu genügt es, von einem rein-injektiven Unzerlegbaren der Form $F_i(U)$, U ein $k[X]$-Modul, zu entscheiden, ob es auch die Form $F_j(V)$ für ein geeignetes V hat, und gegebenenfalls dies V auszurechnen. Dies ist aber kein Problem.

Korollar 6.3.3 *k sei rekursiver Körper mit Zerfällungsalgorithmus, Δ sei ein beliebig orientierter Dynkin- oder Euklidischer Köcher. Dann ist die Theorie ${}_{k[\Delta]}T$ der $k[\Delta]$-Moduln entscheidbar.*

Beweis: Ist Δ Euklidischer Köcher, so folgt die Behauptung aus Satz 6.3.1 und Korollar 6.1.6. Im Falle eines Dynkin-Köchers Δ ist $k[\Delta]$ von endlichem Darstellungstyp (Satz 1.6.8), das Ziegler-Spektrum daher eine endliche Menge endlichdimensionaler Unzerlegbarer, die die diskrete Topologie trägt (Satz 2.1.9). Nun liefert Lemma 6.1.3 (zum Beispiel) die Behauptung. ∎

Korollar 6.3.4 *k sei rekursiver algebraisch abgeschlossener Körper, A sei eine hereditäre endlichdimensionale k-Algebra, die zahm oder von endlichem Darstellungstyp ist. Dann ist die Theorie der A-Moduln entscheidbar.*

Beweis: k hat, wie im Anschluß an den Beweis von Korollar 6.1.6 bemerkt, einen Zerfällungsalgorithmus; wegen des Korollars eben ist also die Theorie ${}_{k[\Delta]}T$ der $k[\Delta]$-Moduln entscheidbar, wenn Δ ein Dynkin- oder Euklidischer Köcher ist. Wegen Korollar 1.6.9 ist A aber Morita-äquivalent zu einer Algebra eben dieser Gestalt $k[\Delta]$; da der diese "Morita-Äquivalenz vermittelnde" endlichdimensionale projektive Modul effektiv gefunden werden kann (siehe [Gab 80, Section 4.3] – auch für eine Erklärung dessen, was "Morita-Äquivalenz vermittelnd" bedeuten soll), folgt nun die Behauptung aus Lemma 6.1.4. ■

Es gilt auch die Umkehrung von Korollar 6.3.3 und 6.3.4; siehe [Pre 88, Section 17.2]. – Auf die Formulierung eines weiteren Korollars ([Pre 88, Theorem 17.17]), verzichte ich hier: Es folgt, da Lemma 6.1.4 etwas allgemeiner gilt, nämlich auch für "kipp-äquivalente" Moduln (mit gleichem Beweis).

Kapitel 7

Axiomatisierbarkeit

Dieses Kapitel ist Axiomatisierbarkeitsfragen gewidmet. Die wichtigsten Ergebnisse betreffen das Problem, für welche Ringe R es eine vollständige Theorie von unendlichen R-(Links-)Moduln gibt, die modulo der Theorie aller R-(Links-)Moduln endlich axiomatisierbar ist (siehe Abschnitt 7.1 für Einzelheiten). Alle Resultate dieses Kapitels, mit Ausnahme von Lemma 7.1.1, sind neu (teilweise aber recht trivial); und Satz 7.5.1 ist nur eine deutlich bessere Version eines Ergebnisses von Peretjatkin.

In Abschnitt 7.1 wird die Problemstellung präzisiert und in einen größeren Zusammenhang eingebettet, so daß ersichtlich wird, warum es sich um Fragen handelt, die zu studieren sich lohnt. Abschnitt 7.2 enthält allgemeine Lemmata vorbereitender Natur; in Abschnitt 7.3 finden sie erste Anwendung. Wichtigste Ergebnisse dort sind Satz 7.3.1 und Satz 7.3.3. Und Abschnitt 7.4 löst die eingangs erwähnte Frage für einige Klassen von Ringen: für kommutative (von Neumann-) reguläre Ringe, für Dedekind-Ringe, und für zahme Köcheralgebren. Im letzten Abschnitt, 7.5, findet sich ein einfaches Beispiel einer vollständigen, ω_1-kategorischen Theorie mit unendlichen Modellen: Dort geht es also nicht um Moduln.

7.1 Problemstellung

Dieser einleitende Abschnitt enthält neben einigen Definitionen eine Schilderung des Zusammenhangs, in den das Problem der endlichen Axiomatisierbarkeit von Modultheorien eingebettet ist. Schöne Worte also. R-Moduln sind stets R-Linksmoduln. Theorien sind nicht unbedingt vollständig.

Definition 7.1 Zwei Theorien T und T' (in Sprachen L bzw. L') heißen interdefinierbar, falls sie – bis auf eine Bijektion der Sprachen L und L' – eine gemeinsame definitorische Erweiterung besitzen.

Ein bekanntes Beispiel für interdefinierbare Theorien sind etwa die Theorie der partiellen Ordnungen mit Supremum und Infimum und die Theorie der Verbände. – Man sieht leicht ein, daß gilt:

Lemma 7.1.1 *Zwei vollständige Theorien T und T' sind genau dann interdefinierbar, wenn es Modelle $A \models T$ und $A' \models T'$ mit gleichem Universum gibt, so daß in A und A' die gleichen Relationen definierbar sind.*
(Man findet dann zu jedem A ein solches A', und umgekehrt.)

Ebenso klar ist: Eine vollständige Theorie in einer unendlichen Sprache ist genau dann durch endlich viele Axiome axiomatisierbar, wenn die Sprache nur endlich viele Relationssymbole enthält und sie ein einelementiges Modell besitzt – das dann automatisch das einzige ist. Daher führen wir einen verallgemeinerten Begriff ein:

Definition 7.2 Die Theorie T heißt endlich axiomatisierbar, falls sie interdefinierbar ist mit einer Theorie T', die durch endlich viele Axiome axiomatisierbar ist.

Mit T ist natürlich jede mit T interdefinierbare Theorie endlich axiomatisierbar. – Für den Moment wollen wir sagen, ein T' wie in der Definition sei endlich axiomatisierbar im engeren Sinn. Man überzeugt sich sofort, daß eine Theorie in einer endlichen Sprache genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn sie endlich axiomatisierbar im engeren Sinn ist; die Definition ist also vernünftig. Und ebenso leicht sieht man, daß eine endlich axiomatisierbare Theorie T definitorische Erweiterung einer endlich axiomatisierbaren (im engeren Sinn) Teiltheorie T' in einer endlichen Sprache ist. Von diesen Bemerkungen werden wir kommentarlos Gebrauch machen.

Strukturen heißen interdefinierbar bzw. endlich axiomatisierbar, wenn dies für ihre (vollständigen) Theorien gilt. (Das stimmt wegen Lemma 7.1.1 mit dem bekannten Begriff der Interdefinierbarkeit überein, wie er sich etwa in [AZ 86] findet.)

Neben der in der Modelltheorie üblichen Sprache für Moduln (mit einem einstelligen Funktionssymbol für jedes Ringelement), in Abschnitt 1.1 als $_RL$ bezeichnet, benötigen wir eine weitere, für Axiomatisierbarkeitsbetrachtungen oft geeignetere: Der Ring R habe eine Präsentierung P mit Erzeugenden

r_i und Relationen w_j; die P-Sprache zur Präsentierung P von R hat für jedes r_i ein einstelliges Funktionssymbol, ebenfalls r_i genannt, außerdem 0, $-$ und $+$ wie üblich. Diese Sprache sei mit ${}_RL^P$ bezeichnet. Mit ${}_RT$ war in Abschnitt 1.1 die Theorie aller R-Linksmoduln benannt worden; wie Axiome für ${}_RT$ aussehen ist klar. ${}_RT^P$ sei die Theorie in der Sprache ${}_RL^P$, die sagt, daß die r_i als Endomorphismen operieren, zusammen mit Axiomen $\forall x\, w_j x = 0$. Dann ist klar, daß ${}_RT$ und ${}_RT^P$ interdefinierbar sind.

Definition 7.3 Eine Theorie T von Moduln in der Sprache ${}_RL$ heißt modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar, falls es eine endliche Teilmenge T_0 von T gibt, so daß ${}_RT \cup T_0 \vdash T$.

Betrachtet man statt ${}_RL$ für eine Präsentierung P von R die zugehörige Sprache ${}_RL^P$, so kann man entsprechend einen Begriff "modulo ${}_RT^P$ endlich axiomatisierbar" definieren. Es ist aber klar, daß ein R-Modul M genau dann eine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie in der Sprache ${}_RL$ hat, wenn er in der Sprache ${}_RL^P$ eine modulo ${}_RT^P$ endlich axiomatisierbare Theorie besitzt. Daher genügt es, den Begriff der Definition zu studieren; insbesondere impliziere die Verwendung von "modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar" stets, daß ${}_RL$ betrachtet wird. – Man beachte, daß "modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar" nicht unter Interdefinierbarkeit invariant ist; genauer, daß ja gar nicht klar ist, was das bedeuten sollte.

Lemma 7.1.2

i. *Ist M ein endlich axiomatisierbarer R-Modul, dann gibt es einen endlich erzeugten (also abzählbaren) Unterring R' von R und eine Präsentation P' von R' mit endlich vielen Erzeugenden, so daß M als ${}_{R'}L$-Struktur, M als ${}_RL$-Struktur und M als ${}_{R'}L^{P'}$-Struktur jeweils interdefinierbar sind. Insbesondere ist M als ${}_{R'}L$-Struktur endlich axiomatisierbar (und die Theorie von M als ${}_{R'}L^{P'}$-Struktur endlich axiomatisierbar im engeren Sinn).*

ii. *M sei ein endlich axiomatisierbarer Modul über einem endlich erzeugten Ring R. Dann hat M eine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie.*

iii. *R sei endlich präsentiert, M ein R-Modul. Dann ist M genau dann endlich axiomatisierbar, wenn M eine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie besitzt.*

Beweis: Zu i.: Es gibt eine endliche Teilmenge E von R, so daß M als ${}_RL$-Struktur und M als Struktur in der Teilsprache von ${}_RL$, die "Skalare" nur für die Elemente von E besitzt, interdefinierbar sind. Sei nun R' das Ringerzeugnis von E und P' eine beliebige Präsentation von R' mit Erzeugenden E. Dann folgt die Behauptung, weil "endlich axiomatisierbar" ja invariant unter Interdefinierbarkeit ist. Der Beweis von Punkt ii. ist eine Hälfte des Beweises von iii. Und für iii. sei P eine endliche Präsentation. Die Überlegung vor dem Lemma zeigt, daß M genau dann in ${}_RL$ modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar ist, wenn es in ${}_RL^P$ modulo ${}_RT^P$ endlich axiomatisierbar ist; Teil i. dieses Lemmas (bzw. sein Beweis) ergibt die Äquivalenz von "endlich axiomatisierbar als ${}_RL$-Struktur" und "endlich axiomatisierbar als ${}_RL^P$-Struktur". Daher genügt es zu zeigen, daß M in ${}_RL^P$ genau dann endlich axiomatisierbar (im üblichen Sinn) ist, wenn M in ${}_RL^P$ endlich axiomatisierbar ist modulo ${}_RT^P$. Das ist aber klar, da ${}_RT^P$ endlich axiomatisierbar ist. ■

Und die letzte Definition:

Definition 7.4 Eine Peretjatkin-Theorie ist eine vollständige endlich axiomatisierbare ω_1-kategorische Theorie mit unendlichen Modellen.

Eine Peretjatkin-Struktur sei dann wieder eine Struktur, deren Theorie eine Peretjatkin-Theorie ist; ein Peretjatkin-Modul ist also ein Modul, dessen Theorie eine Peretjatkin-Theorie ist. – Man überzeugt sich leicht, daß eine mit einer Peretjatkin-Struktur interdefinierbare Struktur wieder Peretjatkin-Struktur ist.

Lemma 7.1.3 *Gibt es einen Peretjatkin-Modul über dem Ring R, dann gibt es auch einen (mit diesem interdefinierbaren) Peretjatkin-Modul über einem geeigneten endlich erzeugten abzählbaren Ring (einem Unterring von R) .*

Beweis: Das folgt aus Lemma 7.1.2 i. und weil ein mit einem Peretjatkin-Modul interdefinierbarer Modul wieder Peretjatkin-Modul ist. ■

Von Morley ([Mor 65]) stammt die Frage, ob es eine endlich axiomatisierbare vollständige ω_1-kategorische Theorie mit unendlichen Modellen gibt, also eine Peretjatkin-Theorie. Von Zilber und Peretjatkin kommt jeweils eine Hälfte der Antwort: Zilber hat gezeigt, daß es eine ω-kategorische, also total-kategorische Peretjatkin-Theorie nicht geben kann; siehe [Zil 80], [Zil 80a], [Zil 81]: [Zil 80a] ist eine ausführliche Version der russischen Originalarbeit [Zil 80], und [Zil 81] korrigiert einen in beiden Arbeiten enthaltenen Fehler. Das erste Beispiel einer Peretjatkin-Theorie – notwendig nicht ω-kategorisch – hat Peretjatkin geliefert ([Per 80]). Dieses sehr komplizierte Beispiel ist in der Folge immer weiter vereinfacht worden (unter anderem [Per 91], [Gei 90]), vor allem mit dem Ziel, den Morley-Rang zu drücken; siehe die im wesentlichen mit der in [Gei 90] identische Version in Abschnitt 7.5, Satz 7.5.1. Diese hat Morley-Rang 2, so daß sich als naheliegende Frage ergibt:

Frage 1: Gibt es eine streng minimale Peretjatkin-Theorie?

(Dazu gibt es eine Reihe von Arbeiten; sie untersuchen die Frage, ob es einen streng minimalen Peretjatkin-Graph gibt, das heißt also einen Graph, dessen Theorie eine streng minimale Peretjatkin-Theorie ist, siehe zum Beispiel [Iva 89], [Iva 89a].)

Alle bekannten Peretjatkin-Theorien sind im Sinne der Stabilitätstheorie trivial, das heißt die zugrundeliegende streng minimale Menge hat triviale Geometrie. Somit ergibt sich

Frage 2: Gibt es eine nicht-triviale Peretjatkin-Theorie?

Hrushovski hat gezeigt, daß eine Peretjatkin-Theorie notwendig lokal-modular ist (siehe [Hru 92]); insbesondere ist eine nicht-triviale Peretjatkin-Theorie also lokal-modular nicht-trivial, und somit ist in ihr ein Modul interpretierbar (wegen [Hru 86]). Wiederum recht naheliegend ist also

Frage 3: Gibt es einen Peretjatkin-Modul?

Übrigens ist selbst die Kombination von Frage 1 und Frage 3, Frage 4, noch offen:

Frage 4: Gibt es einen streng minimalen Peretjatkin-Modul?

In eine etwas andere Richtung geht

Frage 5: Gibt es eine Peretjatkin-Theorie, die Horn-Theorie ist?

Nach [Пал 82, 7.3 Теорема] gibt es eine solche Theorie genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i. Es gibt eine unendliche endlich präsentierte Gruppe G und endlich viele nichttriviale (das heißt $\neq 1$) Konjugationsklassen in G, so daß jede nichttriviale zyklische Untergruppe von G eine dieser Klassen schneidet.

ii. Es gibt einen endlich präsentierten unendlichen Divisionsring D.

Man überzeugt sich leicht davon, daß der Gruppengraph einer Gruppe G wie in i. ein endlich axiomatisierbarer streng minimaler (unendlicher) Graph ist, also insbesondere ein Peretjatkin-Graph. (Seine Theorie ist eine streng minimale Peretjatkin-Theorie; siehe Frage 1.) Ebenso leicht sieht man ein, daß ein Divisionsring wie in ii. Frage 4 (und damit Fragen 1 bis 5) positiv beantwortet: Sei P eine endliche Präsentation von D. Dann ist die Theorie der D-Links-Vektorräume, also ${}_DT^P$, endlich axiomatisiert, vollständig und streng minimal (mit unendlichen Modellen). – Ob es Gruppen G wie in i. bzw. Ringe D wie in ii. gibt, sind bekannte offene Probleme der Algebra. Zum Problem der Existenz eines Ringes wie in ii. weiß ich gar nichts; Ivanov ([Оль 89, Теорема 41.2]) hat eine endlich *erzeugte* unendliche Gruppe mit endlich vielen Konjugationsklassen konstruiert. – Noch eine Bemerkung zum Status des eben zitierten Satzes von Paljutin: Meines Wissens gibt es keinen publizierten Beweis; die Literaturangaben in [Пал 82, Seite 369] betreffen nur einen Spezialfall.

All diese Probleme sind wohl sehr schwierig; erstaunlicherweise scheint aber selbst die auf den ersten Blick ganz unschuldig wirkende Abschwächung von Frage 3 noch der Antwort zu harren:

Frage 6: Gibt es einen endlich axiomatisierbaren unendlichen Modul?

(ω_1-Kategorizität wird also nicht verlangt.) Frage 6 führt jedenfalls schnell zu unübersichtlichen algebraischen Problemen: Denn zwar ergibt sich mit Lemma 7.1.2 i., daß aus der Existenz eines Moduls wie in Frage 6 folgt, daß es auch einen endlich axiomatisierbaren unendlichen Modul über einem endlich erzeugten (abzählbaren) Ring gibt. Ob es so ein Beispiel dann aber auch über einem endlich präsentierten Ring geben muß, ist dagegen nicht klar. (Ist der ursprüngliche Ring kommutativ, dann folgt mit Lemma 7.1.2 i. natürlich, daß es auch ein Beispiel über einem endlich präsentierten Ring gibt, da im Kommutativen ja "endlich präsentiert" und "endlich erzeugt" zusammenfallen.) Umgekehrt aber gilt wegen Lemma 7.1.2 iii., daß es über einem endlich präsentierten Ring einen endlich axiomatisierbaren (unendlichen) Modul genau dann gibt, wenn es einen (unendlichen) Modul gibt, dessen Theorie modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar ist. Darin liegt also die Bedeutung der Fragestellung, der wir uns in diesem Kapitel hauptsächlich widmen:

Problemstellung: Charakterisierung der (endlich präsentierten) Ringe R, so daß es einen unendlichen R-Modul mit modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbarer Theorie gibt.

Mehr als eine Lösung nur für gewisse Klassen von Ringen wird man nicht erwarten dürfen; in Satz 7.2.4 und Abschnitt 7.4 finden sich solche.

Man beachte noch, daß es einfach ist, Beispiele für unendliche ω_1-kategorische Moduln mit modulo $_RT$ endlich axiomatisierbarer Theorie anzugeben: Vektorräume über unendlichen Divisionsringen etwa (siehe den Kommentar nach Frage 5). Allerdings ist in allen mir bekannten Beispielen der zugrundeliegende Ring nicht endlich präsentiert: Im eben erwähnten Vektorraum-Beispiel ist die Existenz eines endlich präsentierten unendlichen Divisionsringes ja ein offenes Problem (siehe nach Frage 5); einen endlich präsentierten unendlichen (kommutativen!) Körper kann es wegen Lemma 1.3.1 nicht geben. Man erhält jedenfalls mit dieser naiven Methode keinen unendlichen endlich axiomatisierbaren Modul, erst recht keinen Peretjatkin-Modul.

7.2 Allgemeines

Wir stellen hier einige leichte Überlegungen zusammen, derer wir uns in den folgenden Abschnitten bedienen wollen. Zunächst folgen einige Betrachtungen zum Vorgehen, dann allgemeine Lemmata, die den Zusammenhang zwischen dem Ziegler-Spektrum und der Problemstellung von Abschnitt 7.1 herstellen.

R sei zunächst ein beliebiger Ring; Theorien T nehme ich im allgemeinen als konsistent an, ohne dies aber jedesmal explizit zu betonen.

Wie eben angedeutet, werden wir versuchen, das Ziegler-Spektrum zu benutzen. Ohne geeignete Voraussetzungen kann man aber noch keine Sätze erwarten, die zum Beispiel die Ringe R, für die es einen unendlichen R-Modul mit modulo $_RT$ endlich axiomatisierbarer Theorie gibt, anhand des Ziegler-Spektrums charakterisieren. Das liegt daran, daß es "endliche pp-Indizes" φ/ψ geben kann: Denn sei zum Beispiel U ein unzerlegbarer rein-injektiver unendlicher Modul mit einem endlichen Index $\varphi/\psi(U)$, dessen Theorie $\mathrm{Th}(U)$ modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar ist (für Beispiele siehe etwa nach Korollar 7.3.4); dann ist $\mathrm{I}(U) = \mathrm{I}(U^{\oplus\omega})$, topologisch sind also U und $U^{\oplus\omega}$ in gewissem Sinn nicht unterscheidbar, aber im allgemeinen wird $\mathrm{Th}(U^{\oplus\omega})$ nicht modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar sein.

Man beachte, daß für Axiomatisierbarkeitsfragen gar nicht eine vollständige Kenntnis von $\mathrm{I}(R)$, des Ziegler-Spektrums, von Nöten ist: Es kommt eigentlich nur auf die Quotiententopologie des Raumes $\mathrm{I}(R)/\equiv$ (man identifiziert elementar äquivalente rein-injektive Unzerlegbare) an.

Konkrete Ergebnisse darf man für Ringe erwarten, für die das Ziegler-

Spektrum, wenigstens bis auf $\equiv$, bekannt ist; ich beschränke mich in den nächsten Abschnitten jedoch auf einige Beispiele, für die sogar die Topologie von $\mathrm{I}(R)$ selbst ausgerechnet werden kann.

Wie Ergebnisse von Burris und McKenzie (siehe [BM 81]) zeigen, kann man leider selbst bei endlichen Ringen im allgemeinen keine Beschreibung des Ziegler-Spektrums erwarten; das ist ja etwa bei endlichen Ringen von wildem Darstellungstyp ohnehin hoffnungslos, wo man nicht einmal Listen der rein-injektiven Unzerlegbaren erwarten kann. Daher scheint die Problemstellung von Abschnitt 7.1 durch Betrachtung des Ziegler-Spektrums nicht einmal im Falle endlicher Ringe befriedigend lösbar.

In diesem vorbereitenden Abschnitt werden wir bisweilen annehmen, daß alle pp-Indizes in R-Moduln 1 oder ∞ sind; dies ist etwa bei den uns besonders interessierenden Algebren über unendlichen Körpern der Fall.

Lemma 7.2.1 *T sei eine Theorie von R-Moduln.*

i. T wird modulo ${}_RT$ axiomatisiert durch Axiome der Form $\varphi/\psi \geq n$, $\varphi/\psi \leq n$ und $\varphi/\psi = n$, wobei die (φ/ψ) aus einer fest gewählten Basis des Ziegler-Spektrums sind.

ii. Ist T zusätzlich vollständig (und modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar), so wird T schon durch (endlich viele) Axiome der Form $\varphi/\psi \geq n$ und $\varphi/\psi = n$ axiomatisiert, wobei die (φ/ψ) wieder aus einer fest gewählten Basis des Ziegler-Spektrums sind.

iii. Eine vollständige und modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie T erfüllt stets $\mathrm{I}(T) = \overline{\{U_1, \ldots, U_k\}}$ mit endlich vielen geeigneten rein-injektiven Unzerlegbaren $U_1, \ldots, U_k$; mehr noch: Eine solche Theorie hat ein Modell der Form

$$U_1^{n_1} \oplus \ldots U_k^{n_k}$$

mit rein-injektiven U_i und natürlichen Zahlen n_i. Insbesondere gilt für solche Theorien T, die zusätzlich ein unendliches Modell haben, daß $\mathrm{I}(T)$ Abschluß endlich vieler rein-injektiver Unzerlegbarer ist, von denen wenigstens eines unendlich ist.

Beweis: i. ist einfach (mit [Zie 84, Corollary 6.13]); ii. folgt dann, denn Axiome der Form $\varphi/\psi \leq n$ kann man für geeignetes m durch $\varphi/\psi = m$ ersetzen. Zu iii.: T hat ein Modell, das wegen Satz 1.1.6 elementar äquivalent ist zu einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer. Die endlich vielen Axiome (der Form wie in i.) lassen sich aber schon durch endlich viele dieser Unzerlegbaren erfüllen; wegen der Vollständigkeit von T ist das die Behauptung. ∎

Auch die nächsten Lemmata sind ganz einfach; das folgende faßt einige Beobachtungen zusammen, die helfen werden, aus der Existenz einer modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbaren Theorie auf die Existenz einer solchen von der Form $\mathrm{Th}(U)$, U ein rein-injektives Unzerlegbares, zu schließen:

Lemma 7.2.2 *R sei ein beliebiger Ring.*

i. Sei T eine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln mit einem unendlichen Modell, sei außerdem noch $\mathrm{I}(T) = \{U_1, \ldots, U_k\}$ endlich und U_1 unendlich und abgeschlossen. Dann ist auch $\mathrm{Th}(U_1)$ modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar (und vollständig mit einem unendlichen Modell).

ii. Sind alle Elemente des Ziegler-Spektrums endlich, dann gibt es keine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln mit einem unendlichen Modell.

iii. Sei T eine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln mit einem Modell der Form $M \oplus E$, wobei E ein endlicher Modul ist. Dann ist auch $\mathrm{Th}(M)$ eine (vollständige) modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie.

iv. Sei U ein rein-injektives Unzerlegbares, das offen-abgeschlossen im Ziegler-Spektrum ist. Dann ist $\mathrm{Th}(U)$ modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar.

Man beachte, daß in i. verlangt wird, $\mathrm{I}(T)$ sei endlich – nicht nur Abschluß einer endlichen Menge (siehe Lemma 7.2.1 iii.). Wegen Lemma 7.2.1 gibt es in dieser Situation ein unendliches U_1.

Beweis: Zu i.: T hat ein Modell der Form $U_1 \oplus X$, das durch endlich viele Axiome der Form wie in 7.2.1 vollständig beschrieben wird. Wir modifizieren diese Axiomatisierung, um eine von $\mathrm{Th}(U_1)$ zu erhalten: Axiome $\varphi/\psi = n$ werden ersetzt durch $\varphi/\psi = m$, wobei $\varphi/\psi(U_1) = m$ (da $\varphi/\psi(U_1) \mid n$, ist m endlich). Axiome der Form $\varphi/\psi \geq n$ werden ersetzt durch $\varphi/\psi = m$, falls $\varphi/\psi(U_1) = m < \infty$, und bleiben unverändert sonst. Das Komplement von U_1 in $\mathrm{I}(T)$ ist relativ-offen und endlich, also endliche Vereinigung von Schnitten standardbasis-offener Mengen mit $\mathrm{I}(T)$, etwa von der Form $((\varphi_1/\psi_1) \cup \ldots \cup$

$(\varphi_l/\psi_l)) \cap \mathrm{I}(T)$. $\varphi_i/\psi_i = 1, 1 \leq i \leq l$, werden als Axiome hinzugefügt. Falls es ein pp-Paar φ_0/ψ_0 gibt, mit $\varphi_0/\psi_0(U_1) = m$, falls also U_1 einen endlichen pp-Index hat, wird noch ein Axiom $\varphi_0/\psi_0 = m$ hinzugefügt. i. folgt nun aus der

Behauptung: $\mathrm{Th}(U_1)$ wird durch diese endlich vielen Axiome modulo der Theorie aller R-Moduln axiomatisiert.

Beweis der Behauptung: U_1 erfüllt offenbar diese Axiome. Sei nun M ein beliebiges Modell dieser Axiome. Dann ist $M \oplus X$ Modell von T. Folglich ist $M \oplus X$ (und damit auch M) elementar äquivalent zu einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer aus $\mathrm{I}(T)$. Nach Wahl der Axiome müssen diese alle gleich U_1 sein, das heißt M ist elementar äquivalent zu einer direkten Summe von Kopien von U_1. Entweder ist aber $U_1 \equiv U_1^{\oplus\kappa}$ für beliebiges (endliches oder unendliches) κ und damit M Modell von $\mathrm{Th}(U_1)$, was zu zeigen war; oder es gibt einen endlichen pp-Index $\varphi/\psi(U_1)$, und dann stellt das in diesem Fall hinzugenommene Axiom $\varphi_0/\psi_0 = m$ sicher, daß $M \equiv U_1$ und somit Modell von $\mathrm{Th}(U_1)$ ist. Das beweist i.

ii. folgt sofort aus Lemma 7.2.1 iii.

iii. wird ganz ähnlich wie i. bewiesen: Man ändert wieder die endlich vielen Axiome der Form wie in 7.2.1 einer $M \oplus E$ modulo der Theorie aller R-Moduln beschreibenden Axiomatisierung geeignet ab: Alle pp-Indizes $\varphi/\psi(E)$ sind endlich; man ersetze nun ein Axiom $\varphi/\psi = n$ durch $\varphi/\psi = n/(\varphi/\psi(E)(= \varphi/\psi(M))$, entsprechend für $\geq$. Dann gilt für jedes Modell M' dieser neuen Axiome, daß $M' \oplus E$ Modell der alten ist. Somit folgt $M \oplus E \equiv M' \oplus E$; da alle $\varphi/\psi(E)$ endlich sind, ergibt sich $M \equiv M'$.

iv.: Das Komplement von $\{U\}$ im Ziegler-Spektrum ist offen, also Vereinigung basis-offener Mengen; es ist aber auch abgeschlossen, somit endliche Vereinigung solcher und damit von der Gestalt

$$\{U\}^{\mathrm{c}} = \bigcup_{i \leq n} (\varphi_i/\psi_i).$$

U werde isoliert durch (φ/ψ). Betrachte die Axiome

$$\varphi/\psi > 1; \varphi_i/\psi_i = 1, i \leq n.$$

Jeder Modul ist elementar äquivalent zu einer direkten Summe rein-injektiver Unzerlegbarer (Satz 1.1.6); jedes Modell dieser Axiome ist also notwendig zu einem Modul $U^{\oplus\kappa}$, κ geeignet, elementar äquivalent. Ist nun $U \equiv U^2$, dann hat man die gewünschte Axiomatisierung von $\mathrm{Th}(U)$ gefunden; sonst gibt es einen endlichen pp-Index $\varphi_0/\psi_0(U) = m$, und dann sind die obigen Axiome, zusammen mit dem zusätzlichen $\varphi_0/\psi_0 = m$, wie gewünscht. ■

Für später halten wir noch fest:

Lemma 7.2.3 *Sei R ein beliebiger Ring. Jede endliche Teilmenge A endlicher rein-injektiver Unzerlegbarer des Ziegler-Spektrums ist abgeschlossen und hat als induzierte Topologie die diskrete.*

Beweis: Sei U Häufungspunkt von A, also auch Häufungspunkt eines $V \in A$. Dann kommt aber wegen [Zie 84] U in Modellen von $\mathrm{Th}(V)$ beliebig oft vor. Da das einzige Modell von $\mathrm{Th}(V)$ aber V ist, muß $U \simeq V$ sein. ■

Nun wenden wir uns der Frage einer topologischen Charakterisierung modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbarer Theorien zu; wegen der eingangs dieses Abschnitts gemachten Bemerkungen nehmen wir an, alle Indizes seien gleich 1 oder ∞.

Satz 7.2.4 *Sei R ein Ring, so daß alle pp-Indizes in R-Moduln gleich* 1 *oder ∞ sind. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie des Ziegler-Spektrums.*

i. Seien I, I' endliche Teilmengen von $\mathcal{B}$, und sei zu jeder offenen Menge O aus $I \cup I'$ ein festes pp-Paar φ/ψ mit $O = (\varphi/\psi)$ ausgewählt. T sei die (endliche) Menge von Axiomen

$$\varphi/\psi > 1, \text{ falls } (\varphi/\psi) \in I,$$

$$\varphi'/\psi' = 1, \text{ falls } (\varphi/\psi) \in I'.$$

Sei $O := \bigcup_{I'}(\varphi'/\psi')$. Dann sind äquivalent:

(a) T ist konsistent und vollständig (und modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar).

(b) Alle $(\varphi/\psi) \cap O^c$ sind nicht-leer, $\varphi/\psi \in I$; und für jede Wahl von rein-injektiven Unzerlegbaren $U_{\varphi/\psi} \in (\varphi/\psi) \cap O^c \neq \emptyset, \varphi/\psi \in I$, gilt: $O^c = \bigcup_I \overline{\{U_{\varphi/\psi}\}}$.

ii. Es sind äquivalent:

(a) Es gibt keine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare vollständige Theorie.

(b) *Seien I, I' endliche Teilmengen von $\mathcal{B}$, so daß für alle $\varphi/\psi \in I$ gilt: $(\varphi/\psi) \setminus \bigcup_{I'}(\varphi'/\psi') \neq \emptyset$. Dann gibt es eine basis-offene Menge $(\varphi_0/\psi_0) \in \mathcal{B}$ so daß gilt:*
- $(\varphi_0/\psi_0) \setminus \bigcup_{I'}(\varphi'/\psi') \neq \emptyset$.
- *Für alle $\varphi/\psi \in I$: $(\varphi/\psi) \setminus [\bigcup_{I'}(\varphi'/\psi') \cup (\varphi_0/\psi_0)] \neq \emptyset$.*

Beweis: Nicht schwer, daher weggelassen. ■

7.3 Kategorische Theorien

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus den bisherigen Überlegungen und [Zie 84, Theorem 10.6]:

Satz 7.3.1 *Sei R ein abzählbarer Ring. Dann gibt es keine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Modultheorie mit unendlichen Modellen, die ω-kategorisch ist.*

Beweis: Wie [Zie 84, Theorem 10.6 (1)] zeigt, ist für eine ω-kategorische vollständige Theorie T, die ein unendliches Modell hat, $\mathrm{I}(T)$ eine endliche Menge endlicher rein-injektiver Unzerlegbarer. Wegen Lemma 7.2.1 iii. kann T dann nicht modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar sein. ■

Man sieht leicht, daß eine Theorie wie im Satz ω-stabil ist ([Zie 84, Theorem 2.1 (2)]); wegen [CHL 85, Corollary 7.4] – dies verbessert das auf Seite 143 erwähnte Resultat von Zilber – ist sie damit als ω-stabile ω-kategorische vollständige Theorie jedenfalls nicht endlich axiomatisierbar.

Korollar 7.3.2 *Es gibt keinen ω-kategorischen Peretjatkin-Modul.*

(Das folgt natürlich auch sofort aus dem in Abschnitt 7.1 erwähnten Resultat von Zilber. – Und die Bemerkung nach dem Satz eben zeigt, daß es nicht einmal einen ω-stabilen ω-kategorischen endlich axiomatisierbaren Modul geben kann.)

Beweis: Ein solcher wäre wegen Lemma 7.1.3 interdefinierbar mit einem Peretjatkin-Modul über einem abzählbaren endlich erzeugten Ring. Und dieser hätte wegen Lemma 7.1.2 ii. eine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie. – Alternativ kann man so argumentieren: ■

Satz 7.3.3 *R sei abzählbar. Wenn es eine vollständige ω_1-kategorische modulo $_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln mit einem unendlichen Modell gibt, dann auch eine solche der Form* $\mathrm{Th}(U)$ *für ein rein-injektives unendliches Unzerlegbares U.*

Korollar 7.3.4 *Sei R endlich präsentiert oder kommutativ. Gibt es über R einen Peretjatkin-Modul, dann gibt es auch einen Peretjatkin-Modul U für ein geeignetes rein-injektives Unzerlegbares U; ist R endlich präsentiert, dann ist U sogar wieder R-Modul.*

Beweis: (des Korollars) Sei M der Peretjatkin-Modul, R zunächst endlich präsentiert. Wegen Lemma 7.1.2 iii. ist M modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar; nach dem Satz gibt es über dem Ring R ein unendliches rein-injektives Unzerlegbares U über dem Ring R mit ω_1-kategorischer modulo $_RT$ endlich axiomatisierbarer Theorie. Wieder wegen Lemma 7.1.2 iii. ist U endlich axiomatisierbar: U ist also Peretjatkin-Modul. Ist R kommutativ, dann gibt es wegen Lemma 7.1.3 (bzw. dessen Beweis) einen Peretjatkin-Modul über einem geeigneten endlich erzeugten, also endlich präsentierten, Unterring R' von R. Nun weiter wie eben. ■

Beweis: (des Satzes) T sei eine Theorie wie im Satz, wegen Satz 7.3.1 also nicht ω-kategorisch. Wegen Lemma 7.2.1 ist $\mathrm{I}(T)$ Abschluß einer endlichen Menge von rein-injektiven Unzerlegbaren; wie [Zie 84, Theorem 10.6 (3)] zeigt, ist $\mathrm{I}(T)$ damit selbst endlich. Wegen [Zie 84, Corollary 3.11] sind rein-injektive Unzerlegbare höchstens abzählbar.

In [Zie 84, Theorem 10.6] werden zwei Fälle unterschieden; wir halten uns an die dortige Notation.

1. Fall: Die Modelle von T haben die Form $E \oplus U^{\oplus\kappa}$ mit $\kappa \geq 1$, einem festen rein-injektiven (abzählbar) unendlichen Unzerlegbaren U und endlichem E. Wegen Lemma 7.2.2 iii. ist somit $\mathrm{Th}(U^{\oplus\kappa})$ modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar; und [Zie 84, Seite 208, (+)] zeigt, daß $U \equiv U^2$. Somit ist $\mathrm{Th}(U) = \mathrm{Th}(U^{\oplus\kappa})$ schon als modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar (und vollständig mit unendlichen Modellen) erkannt. Die Beschreibung der Modelle von T in [Zie 84, Theorem 10.6] zeigt, daß $\mathrm{Th}(U)$ auch ω_1-kategorisch ist. Das beendet Fall 1.

2. Fall: Die Modelle von T haben die Form $E \oplus W^{\oplus\kappa}$ – wobei E ein fester unendlicher R-Modul und direkte Summe von rein-injektiven Unzerlegbaren mit endlicher Vielfachheit ist ([Zie 84, Theorem 10.6 (3)]); da $\mathrm{I}(T)$ endlich ist, muß E Summe endlich vieler Unzerlegbarer sein – wobei weiter

$\kappa \geq 0$ und W einziger Häufungspunkt der Menge $\mathrm{I}(T)$ ist. W ist also sogar Häufungspunkt eines einzigen der in der Zerlegung von E auftretenden Unzerlegbaren, etwa von U; wegen Lemma 7.2.3 muß U unendlich sein. (Wüßte man, daß W auch unendlich ist, so könnte man mit Lemma 7.2.2 i. schließen, daß $\mathrm{Th}(W)$ modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar ist und unendliche Modelle hat.) Modelle von T haben also die Form $E' \oplus U \oplus W^{\oplus\kappa}$, wobei $\kappa \geq 0$ und E' eine feste direkte Summe endlich vieler rein-injektiver Unzerlegbarer ist.

Behauptung: $\mathrm{Th}(U)$ ist modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar.

Beweis der Behauptung: Ähnlich wie im Beweis von Lemma 7.2.2 werden die endlich vielen Axiome (modulo der Theorie aller Moduln) von T so modifiziert, daß sich eine Axiomatisierung von $\mathrm{Th}(U)$ ergibt: Axiome $\varphi/\psi = n$ ersetze man durch $\varphi/\psi = \varphi/\psi(U)$; Axiome $\varphi/\psi \geq n$ ersetze man durch $\varphi/\psi = m$, falls $\varphi/\psi(U) = m < \infty$ und lasse man unverändert sonst. Dann ist U Modell der neuen Axiome, und für jedes Modell X der neuen Axiome gilt, daß die $X \oplus E' \oplus W^{\oplus\kappa}$, $\kappa \geq 0$, Modelle der alten Axiome sind, also von T. Die Beschreibung der Modelle von T in [Zie 84, Theorem 10.6] zeigt, daß X also die Gestalt $U \oplus W^{\oplus\kappa}$ mit $\kappa \geq 0$ haben muß; diese sind, da W Häufungspunkt von U ist, Modelle von $\mathrm{Th}(U)$. Außerdem folgt die ω_1-Kategorizität von $\mathrm{Th}(U)$. ■

Beide Fälle aus dem Beweis von Satz 7.3.3 kommen tatsächlich vor:

Fall 1: Sei etwa k ein abzählbar unendlicher Körper, $R := k[X]$, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von R, und $U := R/\mathfrak{p}$. Dann ist U unendliches rein-injektives Unzerlegbares, isoliert und abgeschlossen, und die Theorie $\mathrm{Th}(U)$ ist ω_1-kategorisch und modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar. (Siehe die Beschreibung des Spektrums von Dedekind-Ringen in Abschnitt 1.3 und Lemma 7.2.2 iv.). Die Modelle von $\mathrm{Th}(U)$ sind die $(R/\mathfrak{p})^{\oplus\kappa}$, $\kappa \geq 1$.

Für Fall 2 betrachte man den abzählbaren Ring $R := \mathbf{Z}_{(p)}$, p eine Primzahl, und $U := \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(p)}$, also die entsprechende Prüfergruppe. [Zie 84, Lemma 5.1] zeigt, daß U ein rein-injektives Unzerlegbares ist und die Modelle der Theorie von U gerade die Moduln der Form $U \oplus \mathbf{Q}^{\oplus\kappa}$ sind, mit $\kappa \geq 0$. Die Theorie $\mathrm{Th}(U)$ ist also ω_1-kategorisch; eine modulo der Theorie aller R-Moduln endliche Axiomatisierung erhält man durch die Axiome $(px = 0)/(x = 0) = p$ und $(x = x)/(p \mid x) = 1$.

Diese Theorien sind zwar modulo $_RT$ endlich axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisiert; das liegt daran, daß in beiden Beispielen die Ringe nicht endlich erzeugt sind.

7.4 Anwendungen auf spezielle Ringe

In diesem Abschnitt untersuchen wir unter dem Gesichtspunkt der endlichen Axiomatisierbarkeit einige Klassen von Ringen, deren Ziegler-Spektrum genau genug bestimmt werden kann, um die Ergebnisse des ersten Abschnittes anwenden zu können.

Satz 7.4.1 *R sei ein kommutativer (von Neumann-) regulärer Ring. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine modulo $_RT$ endlich axiomatisierbare vollständige Theorie von unendlichen R-Moduln.*

ii. *Es gibt ein endlich erzeugtes maximales Ideal $\mathfrak{m}$, so daß $R/\mathfrak{m}$ unendlich ist. In diesem Fall ist $\mathrm{Th}(R/\mathfrak{m})$ ein Beispiel für eine Theorie wie in i. Die Modelle dieser Theorie sind genau die $(R/\mathfrak{m})^{\oplus\kappa}$, $\kappa \geq 1$.*

Beweis: Sei zunächst T eine Theorie wie in i. Wegen der Abgeschlossenheit von Unzerlegbaren (Korollar 2.3.3) und Lemma 7.2.1 ist $\mathrm{I}(T)$ eine endliche Menge von Unzerlegbaren, von denen wenigstens eines – etwa U – unendlich ist. Wiederum wegen der Abgeschlossenheit von Unzerlegbaren (Korollar 2.3.3), und wegen Lemma 7.2.2, folgt, daß dann auch $\mathrm{Th}(U)$ eine Theorie wie in i. ist. Sei $U = R/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Wegen Tatsache 2.3.1 vi. (bzw. deren Beweis: Die möglichen $\varphi/\psi(U)$ sind nur 1 und ∞.) wird $\mathrm{Th}(U)$ modulo $_RT$ axiomatisiert durch (endlich viele) Axiome der Gestalt $(ex = 0)/(x = 0) > 1$ bzw. $(ex = 0)/(x = 0) = 1$ mit Idempotenten e. Wieder wegen 2.3.1 vi. wird $\mathrm{Th}(U)$ axiomatisiert durch endlich viele Axiome der Form $(ex = 0)/(x = 0) > 1$, etwa durch die Axiome $(e_1x = 0)/(x = 0) > 1, \ldots, (e_nx = 0)/(x = 0) > 1$ mit Idempotenten e_i. Äquivalent dazu ist aber ein einziges Axiom dieser Form, nämlich $(e_0x = 0)/(x = 0) > 1$, mit $e_0 := e_1 \vee \ldots \vee e_n$ (boolesche Summe). Sei nun $R/\mathfrak{n}$ irgendein Unzerlegbares, das dieses Axiom erfüllt; dann folgt nach Voraussetzung also $R/\mathfrak{n} \equiv R/\mathfrak{m}$, also sogar $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ (denn betrachte die Axiome $(fx = 0)/(x = 0) > 1$ mit Idempotenten f und Tatsache 2.3.1 ii.). Folglich isoliert die basis-offene Menge $(ex = 0/x = 0)$ das Unzerlegbare $R/\mathfrak{m}$, und wegen Lemma 2.3.2 (bzw. Korollar 2.3.3) ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt.

Die Umkehrung von ii. nach i. ist klar: Wegen Korollar 2.3.3 ist $R/\mathfrak{m}$ offen-abgeschlossen und unendlich; Lemma 7.2.2 ergibt i. Klar ist auch die Beschreibung der Modelle. ■

Wie in Abschnitt 7.1 gesehen, ist ein Modul M über einem endlich präsentierten Ring R genau dann endlich axiomatisierbar, wenn er modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar ist. Insbesondere trifft dies also für endlich erzeugte kommutative Ringe zu. Sei R nun ein kommutativer von Neumann-regulärer Ring; ist R zusätzlich endlich erzeugt, dann ist R endliches Produkt von (endlichen!) Körpern (und umgekehrt): Denn ein solcher Ring ist noethersch, also wird *jedes* Ideal von einem Idempotent erzeugt (Tatsache 2.3.1 i. bzw. die Definition von regulär) und ist damit direkter Summand: der Ring ist halbeinfach und damit auch artinsch. Nun liefert Wedderburn, daß es sich um ein endliches Produkt von Körpern handelt; weil R endlich erzeugt ist, sind diese Körper endlich. – Sei R solch ein endliches Produkt von endlichen Körpern. Dann überzeugt man sich leicht davon, daß es keine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare vollständige Theorie von unendlichen R-Moduln geben kann (Verallgemeinerung des Arguments für einen endlichen Körper). Dies folgt natürlich auch aus dem eben gezeigten Satz 7.4.1: Sonst gäbe es einen endlich erzeugten unendlichen Körper der Form $R/\mathfrak{m}$, im Widerspruch zu Lemma 1.3.1. – Insbesondere gibt es über einem solchen R also keinen endlich axiomatisierbaren unendlichen Modul.

Ohne die Voraussetzung der Kommutativität ist die Situation möglicherweise ganz anders: Gibt es nämlich einen endlich präsentierten unendlichen (notwendig nicht kommutativen) Divisionsring D (automatisch regulär), dann ist das einzige Unzerlegbare der Ring D selbst. Dies D ist dann sogar ein Peretjatkin-Modul (Siehe auch die Überlegungen nach Frage 5 in Abschnitt 7.1.)

Satz 7.4.2 *R sei ein unendlicher Dedekind-Ring. Dann sind äquivalent:*

i. *Es gibt eine modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare vollständige Theorie von unendlichen R-Moduln.*

ii. *Einer der folgenden beiden (sich nicht ausschließenden) Fälle tritt ein:*

   (a) *Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$, so daß $R/\mathfrak{p}$ unendlich ist.*

   (b) *Es gibt nur endlich viele maximale Ideale.*

Ist R ein endlicher Dedekind-Ring, dann ist R schon ein Körper. Aber für einen Körper k (beliebiger Kardinalität) ist die Frage nach der Existenz einer Theorie wie im Satz unter Punkt i. ohnehin klar: Es gibt dann nur ein Unzerlegbares, nämlich k selbst. Eine Theorie wie im Satz unter i. gibt es daher in dieser Situation wegen Lemma 7.2.2 ii. genau dann, wenn k unendlich ist; beide Bedingungen aus ii. sind dann erfüllt. Das heißt: Für einen (unendlichen) Körper stimmt der Satz.

Beweis: Wegen der Bemerkungen eben sei also R ohne Einschränkung kein Körper.

Sei zunächst $R/\mathfrak{p}$ unendlich für ein geeignetes maximales Ideal $\mathfrak{p}$. Dann ist $R/\mathfrak{p}$ ein offen-abgeschlossenes rein-injektives Unzerlegbares (siehe Seite 21), und Lemma 7.2.2 iv. ergibt, daß $\mathrm{Th}(R/\mathfrak{p})$ modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar (und vollständig mit unendlichen Modellen) ist.

Es gebe in R nur endlich viele maximale Ideale. (Dann ist R Hauptidealring, siehe Lemma 1.3.2. Das wird aber eigentlich gar nicht gebraucht.) Sei $\mathfrak{p} = (p)$ eines dieser endlich vielen maximalen Ideale; dann ist $\mathrm{Th}(R_{\mathfrak{p}^\infty})$ wie gewünscht: Denn im Beweis von Lemma 1.3.4 wurde gezeigt, daß $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ unendlich ist; daß $\mathrm{Th}(R_{\mathfrak{p}^\infty})$ auch modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbar ist, zeigen die folgenden Axiome:

- "Der Modul ist divisibel." (Nach Voraussetzung muß man nur Teilbarkeit durch endlich viele Primideale, bzw. Primelemente, ausdrücken.)
- $(px = 0/x = 0) \begin{cases} > 1 & \text{falls } \mid R/\mathfrak{p} \mid = \infty \\ = \mid R/\mathfrak{p} \mid & \text{sonst.} \end{cases}$
- $(qx = 0/x = 0) = 1$, $\mathfrak{q} = (q) \neq \mathfrak{p}$.

Denn das erste Axiom stellt sicher, daß in Modellen dieser Theorie nur Prüfer-Moduln und K vorkomen können; wegen der letzten Axiome (keine $\mathfrak{q}$-Torsion, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$) kommen höchstens $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ und K vor, und das zweite Axiom sorgt dafür, daß auch mindestens eine Kopie von $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ auftaucht – bzw. genau eine, falls $R_{\mathfrak{p}^\infty} \not\equiv R^2_{\mathfrak{p}^\infty}$.

Sei nun R ein (unendlicher) Dedekind-Ring mit unendlich vielen maximalen Idealen, so daß alle $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ maximales Ideal, endlich sind. Um den Beweis des Satzes zu vollenden, genügt es zu zeigen, daß es keine Theorie wie in i. gibt. Sei also T eine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln; zu zeigen ist, daß T ein endliches Modell hat. Wegen 7.2.1 iii. ist $\mathrm{I}(T)$ Abschluß einer endlichen Menge rein-injektiver Unzerlegbarer, etwa $\mathrm{I}(T) = \overline{\{U_1, \ldots, U_k\}}$, und T hat ein Modell der Gestalt $M := U_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus U_k^{n_k}$ mit natürlichen Zahlen n_i. (Aus der Beschreibung des Ziegler-Spektrums in Abschnitt 1.3 folgt sogar, daß $\mathrm{I}(T)$ als Abschluß einer endlichen Menge selbst endlich sein muß.) Wir werden die Annahme, eines der U_i sei unendlich, zum Widerspruch führen: Sei also eines der U_i unendlich. Aus Lemma 1.3.3 folgt, daß mit den $R/\mathfrak{p}$ überhaupt alle (offen-abgeschlossenen) rein-injektiven Unzerlegbaren $R/\mathfrak{p}^n$ endlich sind. Damit enthält $\mathrm{I}(T)$ ein $R_{\mathfrak{p}^\infty}$ oder ein $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}$ oder K; aus der Beschreibung der Topologie (siehe Seite 21 nach Lemma 1.3.4) folgt, daß $\mathrm{I}(T)$ auf jeden Fall K als Häufungspunkt enthalten muß. Wegen Lemma 7.2.1 wird T modulo der R-Modul-Axiome durch Axiome der Form $\varphi/\psi = n$ und $\varphi/\psi \geq n$ axiomatisiert, wobei die φ/ψ pp-Paare der Form wie vor Lemma 1.3.4 sind. Da K Häufungspunkt von $\mathrm{I}(T)$ ist, können Axiome der Form $O_K^r = n$ nicht vorkommen. Sei nun $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal, so daß unter den U_i kein $R/\mathfrak{q}^m$, $R_{\mathfrak{q}^\infty}$ oder $\tilde{R}_{\mathfrak{q}}$ vorkommt, und so daß unter den endlich vielen Axiomen, die T modulo der Theorie aller R-Moduln axiomatisieren, keines ist, das die Form $\varphi/\psi = n$ oder $\varphi/\psi \geq n$ hat, mit $\varphi/\psi \in \{O_{R/\mathfrak{q}^m}, O^m_{R_{\mathfrak{q}^\infty}}, O^m_{\tilde{R}_{\mathfrak{q}}} \mid m \geq 1\}$.

Behauptung: Dann ist auch $M \oplus R_{\mathfrak{q}^\infty}$ Modell von T.

Beweis der Behauptung: Denn nach Wahl von $\mathfrak{q}$ und Lemma 1.3.4 gilt für die endlich vielen pp-Paare φ/ψ, die in den Axiomen vorkommen, daß $\varphi/\psi(R_{\mathfrak{q}^\infty}) = 1$. Also gilt für diese φ/ψ, daß $\varphi/\psi(M) = \varphi/\psi(M \oplus R_{\mathfrak{q}^\infty})$, was die Behauptung beweist.

Aber $M \oplus R_{\mathfrak{q}^\infty} \not\equiv M$, denn – wiederum nach Wahl von $\mathfrak{q}$ – $O^1_{R_{\mathfrak{q}^\infty}}(M) = 1 \neq \mid R/\mathfrak{q} \mid = O^1_{R_{\mathfrak{q}^\infty}}(M \oplus R_{\mathfrak{q}^\infty})$. ∎

Es gibt sowohl Beispiele für Dedekind-Ringe, die (a) bzw. (b) erfüllen, als auch für solche, die weder (a) noch (b) erfüllen:

Ist k ein unendlicher Körper, dann ist $k[X]$ ein Dedekind-Ring mit unendlichen isolierten Unzerlegbaren der Form $R/\mathfrak{p}^n$ wie in Fall (a); es gibt unendlich viele maximale Ideale: Es gilt (a), aber nicht (b).

$\mathbf{Z}_p$ (p eine Primzahl) ist ein Dedekind-Ring mit nur einem maximalen Ideal wie in Fall (b); die endlich erzeugten (offenen) Unzerlegbaren sind endlich: Also (b), nicht (a).

Sei k wieder unendlicher Körper, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Dann ist $k[X]_{\mathfrak{p}}$ ein Dedekind-Ring mit unendlichen rein-injektiven offenen Unzerlegbaren (nämlich den $k[X]/\mathfrak{p}^n$) und nur einem maximalen Ideal (nämlich $\mathfrak{p}$): Es treffen also Fall (a) und (b) zu.

Und $\mathbf{Z}$ (oder $k[X]$ mit einem endlichen Körper k) ist ein Dedekind-Ring, der weder (a) noch (b) erfüllt.

Korollar 7.4.3 *Sei R ein endlich erzeugter unendlicher Dedekind-Ring (zum Beispiel $\mathbf{Z}$). Dann gibt es keine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomati-*

sierbare Theorie von unendlichen R-Moduln. Insbesondere gibt es keinen Peretjatkin-Modul über R.

Beweis: Denn für maximale Ideale $\mathfrak{p}$ ist $R/\mathfrak{p}$ ein endlich erzeugter Körper, also endlich (Lemma 1.3.1); wegen Lemma 1.3.3 sind alle Unzerlegbaren der Form $R/\mathfrak{p}^n$ endlich.

Gäbe es nur endlich viele maximale Ideale, dann wäre K, der Quotientenkörper von R, endlich erzeugt (als Ring) über R (durch die Inversen von Erzeugenden der maximalen Ideale), also endlich erzeugt, also endlich; folglich wäre auch R endlich, Widerspruch. Also liefert Satz 7.4.2 die Behauptung. ■

Die Spektra von zahmen Köcheralgebren und Dedekind-Ringen sind sich so ähnlich (siehe für bereits bewiesene partielle Information etwa Korollar 6.2.7, für eine komplette Beschreibung des Spektrums zahmer Köcheralgebren Kapitel 8), daß auch der Satz 7.4.2 entsprechende Satz 7.4.4, mit ganz ähnlichem Beweis, gilt:

Satz 7.4.4 *Sei $R = k[\Delta]$ Köcheralgebra über einem Euklidischen oder einem Dynkin-Köcher Δ, k ein kommutativer Körper. Dann sind äquivalent:*

i. Es gibt eine vollständige modulo ${}_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von unendlichen R-Moduln.

ii. k ist unendlich.

Beweis: Ist k unendlich, dann sind die (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren (als k-Vektorräume) unendlich; sei U ein solches endlichdimensionales Unzerlegbares. Wegen Korollar 2.1.5 und Korollar 2.1.6 (bzw. Korollar 6.2.2, falls der Köcher orientierte Zyklen hat) ist U offen-abgeschlossen, und nun liefert Lemma 7.2.2 iv. die Existenz einer Theorie wie in i.

Sei k endlich. Ist Δ ein Dynkin-Köcher, dann ist R von endlichem Darstellungstyp; wegen Satz 2.1.9 sind dann alle Elemente des Ziegler-Spektrums endlich erzeugt, also endlich. Damit ergibt Lemma 7.2.2 ii., daß es keine Theorie wie in i. des Satzes geben kann.

Sei k endlich und Δ ein Euklidischer Köcher. Zu zeigen ist, daß es keine Theorie wie in Punkt i. des Satzes gibt. Im wesentlichen das gleiche Argument wie im Beweis von Satz 7.4.2 funktioniert; wenn man möchte, kann man dazu die genaue Beschreibung des Ziegler-Spektrums aus Kapitel 8 benutzen. Ein etwas knapperes Argument geht so:

Wie Korollar 6.2.7 i. zeigt, gibt es endlich viele abgeschlossene Mengen, etwa $A_1, \ldots, A_l$, die mit der induzierten Topologie jeweils homöomorph zu $\mathrm{I}(k[X])$ sind, und daneben noch offen-abgeschlossene Unzerlegbare (endliche Unzerlegbare in unserem Fall). Sei T eine vollständige modulo $_RT$ endlich axiomatisierbare Theorie von R-Moduln; angenommen, T habe ein unendliches Modell. Wie im Beweis von Satz 7.4.2 folgt, daß die – auch hier endliche – Menge $\mathrm{I}(T)$ das rein-injektive Unzerlegbare von Rang 2, nämlich $\mathbf{Q}$ (siehe Seite 172 und in Abschnitt 5.1.1; analog für beliebig orientierte $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$), enthält, daß also in der betrachteten Axiomatisierung von T Axiome $\varphi/\psi = n$, wobei (φ/ψ) eine Umgebung von $\mathbf{Q}$ ist, nicht vorkommen. Wieder ist klar, daß T ein Modell M hat, das direkte Summe endlich vieler rein-injektiver Unzerlegbarer ist (Lemma 7.2.1 iii.). Man findet also leicht ein rein-injektives Unzerlegbares U, etwa einen "gewöhnlichen Prüfer" (siehe die gleich folgende Erläuterung), so daß M und $M \oplus U$ nicht elementar äquivalent sind, so daß aber $M \oplus U$ dennoch den endlich vielen Axiomen von T genügt. – Was ein gewöhnlicher Prüfer ist, ist in Kapitel 8 für die standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ erklärt; eine Erweiterung auf beliebige Euklidische Köcher sollte dem Leser keine Probleme bereiten. ∎

Ähnlich wie bei Dedekind-Ringen hat man also genügend vollständige modulo $_RT$ endlich axiomatisierbare Theorien von unendlichen R-Moduln; da der Körper aber unendlich sein muß, erhält man so natürlich keinen Peretjatkin-Modul.

7.5 Exkurs: Eine Peretjatkin-Theorie

In diesem Abschnitt – der als einziger dieser Arbeit keine Moduln behandelt – gebe ich ein Beispiel einer Peretjatkin-Theorie an; es ist im wesentlichen die Version aus [Gei 90], die mit dem von Peretjatkin konstruierten – aber weitaus komplizierteren – Beispiel ([Per 91]) interdefinierbar ist.

P sei die zweisortige Struktur mit erster Sorte $D = \mathbf{Z}$ und zweiter Sorte $F = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \{-1, +1\}$, den Projektionen $\pi_1, \pi_2 : F \longrightarrow D$ auf erste bzw. zweite Koordinate von F, sowie den weiteren Funktionen

$$\begin{array}{lll}
s : D \longrightarrow D, & x \mapsto x+1; & \\
h : D \longrightarrow F, & x \mapsto (x,x,1); & \\
g : F \longrightarrow F, & (x,y,\epsilon) \mapsto (x,y+1,\epsilon) \text{ und} & \\
i : F \longrightarrow F, & (x,y,\epsilon) \mapsto \begin{cases} (y,x,\epsilon) & \text{falls } x < y \\ (y,x,-\epsilon) & \text{falls } x \geq y. \end{cases}
\end{array}$$

Die π_i vergessen wir sofort und betrachten stattdessen die Fasern $F_{(x,y)} = \{(x,y,-1),(x,y,1)\}$, $x,y \in \mathbf{Z}$ (F also etwa als dreistelliges Prädikat): Man erhält so offenbar eine interdefinierbare Struktur.

Satz 7.5.1 *$T = \mathrm{Th}(P)$ ist Peretjatkin-Theorie (mit Primmodell P).*

Beweis: Sei L die zweisortige Sprache, die aus Symbolen (von ihren Realisierungen notationell nicht unterschieden) für F (als dreistelliges Prädikat), s, g, h und i besteht. Die folgenden Axiome T_0 gelten offenbar in P:

i. Es gebe zwei Sorten D und F, wobei $F = \bigcup_{x,y \in D} F_{(x,y)}$ die Vereinigung zweielementiger "Fasern" $F_{(x,y)}$ sei. Für $u \in F_{(x,y)}$ sei mit $-u$ das andere Element aus dieser Faser bezeichnet; die Abbildung $F \to F$ bzw. $F_{(x,y)} \to F_{(x,y)}$, $u \mapsto -u$ soll im folgenden als Multiplikation mit -1 geschrieben werden.

ii. $s : D \to D$ ist fixpunktfreie Bijektion;
$h : D \to \bigcup_{x \in D} F_{(x,x)}$ mit $h(x) \in F_{(x,x)}$;
$g : F \to F$ ist Bijektion, mit $g(F_{(x,y)}) \subseteq F_{(x,s(y))}$ und
$i : F \to F$ ist Bijektion mit $i(F_{(x,y)}) \subseteq F_{(y,x)}$.

iii. $i \restriction F_{(x,x)} = -1$; $i^2 \restriction F_{(x,y)} = -1$, falls $x \neq y$.

iv. $gigi = igig$.

v. Für $x \in D$ ist $-gigih(x) = h(s(x))$.

f sei im folgenden eine Abkürzung für $-igi$, so daß aus den Axiomen T_0 folgt:

vi. $f : F \to F$ ist bijektiv, mit $f(F_{(x,y)}) \subseteq F_{(s(x),y)}$; und

vii. $gf = fg$, sowie $gfh(x) = h(s(x))$.

Außerdem ergibt sich aus iii. und iv. induktiv leicht

viii. Sei $m \geq 1$ und $y \notin \{s(x), \ldots, s^{m-1}(x)\}$. Dann gilt für $a \in F_{(x,y)}$, daß $f^m(a) = -ig^m i(a)$.

Wir werden zeigen, daß je zwei Modelle von T_0 der Kardinalität ω_1 isomorph sind: T_0 ist dann eine vollständige, ω_1-kategorische Theorie (und gleich T). Daß P das Primmodell von T_0 ist, ergibt sich im Verlauf des Beweises automatisch. – Der Witz der Konstruktion ist die folgende

Behauptung: In Modellen von T_0 ist s zyklenfrei.

Beweis der Behauptung: Sonst gibt es einen Zyklus minimaler Länge, also $x \in D$ und $m \geq 1$ (da s fixpunktfrei) mit $s^m(x) = x$. Wegen vii. folgt

$$g^m f^m h(x) = (gf)^m h(x) = h(s^m(x)) = h(x).$$

Da wegen ii. und vi. sowohl f^m als auch g^m die Faser $F_{(x,x)}$ auf sich selbst abbilden, bedeutet dies, daß

$$g^m \restriction F_{(x,x)} = f^m \restriction F_{(x,x)}.$$

Aber andererseits folgt aus iii. und viii.

$$f^m h(x) = -ig^m ih(x) = -g^m h(x),$$

Widerspruch (da $h(x) \in F_{(x,x)}$). Das beweist die Behauptung.

Sei nun (D, F) ein – zunächst beliebiges – Modell der Axiome T_0. Da s keine Zyklen hat, ist $D = \bigcup_{i \in I} D_i$, wobei die D_i (mit $s \restriction D_i$) Kopien von $\mathbf{Z}$ mit der üblichen Nachfolgerfunktion sind. $<$ sei eine Anordnung von I; für jedes $i \in I$ sei ein $d_i \in D_i$ und für jedes Paar $i < j$ ein $a_{(i,j)} \in F_{(d_i,d_j)}$ gewählt. Dann ist jedes Element $a \in F$ eindeutig ausdrückbar als

$$\begin{array}{ll} a = \pm g^m f^n h(d_i) & (1)\text{, oder} \\ a = \pm g^m f^n(a_{(i,j)}) & (2)\text{, oder als} \\ a = \pm g^m f^n i(a_{(i,j)}) & (3). \end{array}$$

Seien nun (D, F) und (D', F') zwei Modelle der Kardinalität ω_1. Da $\mathbf{Z}$ mit der Nachfolgerfunktion ω_1-kategorisch ist, ist ohne Einschränkung $(D, s) = (D', s')$. Seien die d_i und $a_{(i,j)}$ wie eben; eine beliebige Auswahl von $a'_{(i,j)} \in F'_{(d_i,d_j)}$ bestimmt zusammen mit (1), (2) und (3) eine Bijektion $(D, F) \to (D', F')$, wobei $a_{(i,j)} \mapsto a'_{(i,j)}$. Diese ist ein Isomorphismus, denn man prüft leicht nach, daß es explizite Formeln gibt (die nur von T_0 abhängen), die zeigen, wie f, g und i auf den Ausdrücken (1), (2), (3) operieren. ■

Man sieht leicht ein, daß T im Sinne der Stabilitätstheorie trivial ist und Morley-Rang 2 hat.

Kapitel 8

Das Ziegler-Spektrum. Teil II

Dieses lange Kapitel enthält die Beschreibung des Ziegler-Spektrums von Köcheralgebren der Form $k[\Delta]$, wobei Δ ein Euklidischer Köcher (mit beliebiger Orientierung) und k, wie immer, ein kommutativer Körper ist. Hier eine kurze

Beschreibung der Topologie: Man überzeugt sich leicht, daß es genügt, die Topologie des Abschlusses der Menge der präprojektiven Unzerlegbaren zu bestimmen, und zwar sogar nur im Falle von Kronecker-Moduln oder im Falle eines der standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$ (siehe die Behauptung am Ende von Abschnitt 8.5 und den Anfang von Abschnitt 8.2). Es zeigt sich, daß man bei *Kronecker-Moduln* sozusagen "maximales Häufungsverhalten" hat: Der Abschluß jeder unendlichen Menge präprojektiver Unzerlegbarer enthält alle $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren (Satz 8.2.1). Bei den anderen vier Köchern, ja schon bei $\tilde{\mathrm{A}}_n$ mit größerem n, ist das falsch (Beispiel zu Beginn von Abschnitt 8.7); das läßt sich auf mindestens zwei Arten verstehen:

1. Es gibt nämlich endlich viele sogenannte "sporadische" $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare (die anderen mögen "gewöhnlich" heißen) $\tilde{U}_\Phi$ und zu jedem solchen eine *feste* offene Umgebung $O(\tilde{U}_\Phi)$, so daß für den Abschluß $\overline{\mathcal{U}}$ einer unendlichen Menge $\mathcal{U}$ präprojektiver Unzerlegbarer gilt (etwa im Falle von $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$, siehe Satz 8.8.13):

   i. $\overline{\mathcal{U}}$ enthält alle gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.

   ii. $\tilde{U}_\Phi$ liegt in $\overline{\mathcal{U}}$ genau dann, wenn der Durchschnitt $\mathcal{U} \cap O(\tilde{U}_\Phi)$ unendlich ist.

(Dies gilt in der Tat auch für einen beliebig orientierten der Euklidischen Köcher mit Ausnahme von $\tilde{\mathrm{A}}_1$, das heißt mit Ausnahme der Kronecker-Moduln und der 2-Zyklen: Bei Kronecker-Moduln hat man nicht genug Präprojektive, um dieses Phänomen beobachten zu können, bei 2-Zyklen gibt es gar keine Präprojektiven.)

2. Und eine alternative Sicht der Situation bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$ (mit der Standardorientierung zum Beispiel), wie sie Satz 8.8.12 ausdrückt; sie beruht auf Korollar 6.2.7 iii.: Die unendlichdimensionalen Unzerlegbaren, insbesondere die $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren, kann man stets (auf geeignete Weise) als Moduln über einem "kleineren" Köcher auffassen, also etwa die unendlichdimensionalen $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren als Quadrupel. Für manche der Präprojektiven gilt das auch, für manche nicht: Letztere sollen "neu" heißen. Dann folgt die Beschreibung der Topologie "induktiv" aus der Topologie über dem "kleineren" Köcher (mit "Induktionsanfang" bei Kronecker-Moduln und 2-Zyklen) und aus der Tatsache, daß im Abschluß einer unendlichen Menge "neuer" Präprojektiver alle $\mathfrak{p}$-adischen liegen (Satz 8.8.12).

Nun eine genauere Aufschlüsselung des Inhalts der einzelnen Abschnitte: Abschnitt 8.1 besteht aus einigen vorbereitenden Lemmata, sowie einer ersten Reduktion des Problems (auf die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, jeweils mit der Standardorientierung, und auf $\tilde{\mathrm{A}}_n$) . Im zweiten Teil, Abschnitt 8.2, findet man die Topologie des Ziegler-Spektrums für Köcher der Form $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ (mit beliebiger Orientierung); wie auch etwa in Kapitel 5 wird diesen Köchern eine gesonderte Betrachtung zuteil. (Das wäre nicht unbedingt notwendig, ist aber aus zwei Gründen zweckmäßig: Unzerlegbare über $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ lassen sich nicht im allgemeinen als Unterraumsysteme auffassen; und die Kenntnis der Topologie des Ziegler-Spektrums von $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ – es genügt: Kronecker-Moduln – ist wesentlich für den Beweis des allgemeinen Falles.) Der Rest des Kapitels ist dann den verbleibenden Köchern $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ gewidmet. Abschnitt 8.3 beinhaltet eine weitere Reduktion des Problems: Es genügt, jeweils die Topologie einer gewissen abgeschlossenen Menge $\mathcal{A}$ des Ziegler-Spektrums zu bestimmen. (Diese Menge $\mathcal{A}$ entspricht genau der Menge $\mathcal{A}_3$ aus Lemma 5.1.5, deren Topologie in Abschnitt 8.2 bestimmt wird.) Im nächsten Teil, Abschnitt 8.4, werden gewisse kleine, abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{A}_{b,b'}$ von $\mathcal{A}$ definiert; das zentrale Lemma – und eines der wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels – ist Lemma 8.4.2: Es beschreibt die $\mathcal{A}_{b,b'}$ so genau, daß sich anschließend Axiomatisierungen (modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$) für die den rein-injektiven

Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechenden unzerlegbaren Typen angeben lassen (Lemma 8.4.4). Nun bilden diese $\mathcal{A}_{b,b'}$ zwar keine Überdeckung von $\mathcal{A}$, ihre Topologie zu beschreiben genügt also nicht. Deshalb werden in Abschnitt 8.5 die Baur-Funktoren eingeführt, ein wesentliches Hilfsmittel: Das wichtigste Lemma dort, Lemma 8.5.2, erlaubt es nämlich, aus den in Abschnitt 8.4 gewonnenen Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$ solche modulo $\mathcal{A}$ zu gewinnen. (Man bekommt also deutlich mehr Information als nur die Topologie von $\mathcal{A}$!) Insbesondere erhält man so Umgebungsbasen (in $\mathcal{A}$) für die rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$. In den letzten drei Abschnitten werden diese zunächst als Mengen von pp-Paaren gegebenen Umgebungsbasen dann tatsächlich "in $\mathcal{A}$ ausgerechnet": In 8.6 behandle ich gewöhnliche $\mathfrak{p}$-adische und Prüfer, in den letzten beiden dann – und dies ist ein recht aufwendiges Unterfangen – die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen. Satz 8.8.12 und Satz 8.8.13 sind – zusammen mit Lemma 8.4.2 – die Hauptresultate dieses Kapitels.

Nicht immer gehe ich auf dem schnellsten Wege vor; dies vor allem, um die Vielfalt der möglichen Methoden aufzuzeigen, teilweise auch aus "didaktischen" Gründen. Deshalb erkläre ich nach Satz 8.8.12 auf Seite **??**, wie dieser Hauptsatz auf direktem Weg gezeigt werden kann.

Nahezu alle Ergebnisse dieses Kapitels sind neu, glaube ich jedenfalls.

Erinnert sei gleich hier zu Beginn an die Bedeutung von $(*)$ – auch in diesem Kapitel tragen die meisten Aussagen diese Markierung (Unter anderem werden dann, wenn die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit ihrer Standardorientierung untersucht werden, nur Unterraumsysteme betrachtet werden.) – und an die übrigen zu Beginn von Kapitel 5 getroffenen Vereinbarungen, sowie an die Sprechweise von Seite 80. – Und weil in diesem und dem folgenden Kapitel die Funktoren aus Kapitel 5 ständig verwendet werden, hier eine kurze Zusammenstellung; dabei stehe Δ für $k[\Delta]$-Mod:

$$\begin{array}{l} D, D_{i,j} : \tilde{\mathrm{A}}_3 \longrightarrow \tilde{\mathrm{D}}_4 \\ S : \tilde{\mathrm{A}}_5 \longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}_6 \\ T, T_{i,j,k} : \tilde{\mathrm{D}}_4 \longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}_6 \\ S_7, T_7 : \tilde{\mathrm{E}}_6 \longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}_7 \\ S_1 : \tilde{\mathrm{E}}_7 \longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}_8 \end{array}$$

(Siehe Definitionen 5.2, 5.3, 5.4 und 5.5.)

8.1 Vorbereitungen

Dieser kurze Abschnitt enthält zunächst ein Lemma, das Prest in [Pre 88] ohne Beweis anführt. Lemma 8.1.2 ist offenbar von Okoh ([Oko 80a]); allerdings ist der Beweis dort recht mysteriös. Lemma 8.1.3 schließlich wird im Beweis von Lemma 8.5.2 benutzt. Außerdem enthält dieser Teil noch eine Präzisierung des Problems “Beschreibung der Topologie” und eine erste Vereinfachung dieses Projekts.

Lemma 8.1.1 *Δ sei ein Euklidischer Köcher. Dann ist der Cantor-Bendixon-Rang des Ziegler-Spektrums von $k[\Delta]$ gleich 2.*

Beweis: Der Cantor-Bendixon-Rang des Ziegler-Spektrums $\mathrm{I}(k[X])$ von $k[X]$ ist 2 (siehe Seite 20); das Ziegler-Spektrum $\mathrm{I}(k[\Delta])$ von $k[\Delta]$ ist wegen Satz 4.1.7 und Korollar 6.2.7 i. Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen A_i homöomorph zu $\mathrm{I}(k[X])$ und einer Menge, die nur aus isolierten Punkten besteht. Da die in der Relativtopologie eines der A_i isolierten Punkte gerade die endlichdimensionalen Punkte aus A_i sind, sind diese auch in $\mathrm{I}(k[\Delta])s$ isoliert. Damit ist alles klar. ■

Lemma 8.1.2 *Δ sei ein Euklidischer Köcher, beliebig orientiert. Jeder rein-injektive Modul über $k[\Delta]$ ist reine Hülle einer direkten Summe von rein-injektiven Unzerlegbaren.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jeder (rein-injektive) Modul elementare Krull-Dimension hat; siehe dafür [Zie 84, Section 7]. Andernfalls aber gibt es einen Modul M mit einer dichten Kette von pp-Untergruppen. Es gibt dann einen abzählbaren Teilring von $k[\Delta]$, ohne Einschränkung von der Form $k_0[\Delta]$ für einen abzählbaren Unterkörper k_0 von k, so daß M schon als $k_0[\Delta]$-Modul eine dichte Kette von pp-Untergruppen hat. Zusammen mit Lemma 8.1.1 widerspricht dies aber [Zie 84, Corollary 8.8.(1)]. ■

Der Witz hier ist, daß der abzählbare Teilring wieder Köcheralgebra zu Δ ist. – Der gleiche Beweis zeigt, daß die größte elementare Krull-Dimension eines Moduls über $k[\Delta]$ gleich der größten solchen eines Moduls über $k_0[\Delta]$ ist, k_0 ein geeigneter abzählbarer Unterkörper von k. Wegen [Zie 84, Corollary 8.8 (1)] und Lemma 8.1.1 ist also das Maximum der elementaren Krull-Dimensionen von Moduln über $k[\Delta]$ gleich 2.

Lemma 8.1.3 *R sei ein beliebiger Ring. Sei $B = B(x)$ ein partieller pp-Typ, A eine abgeschlossene Menge im Ziegler-Spektrum, so daß für alle $U \in A$ gilt $B(U) \in \{0, U\}$. Dann folgt für alle Moduln M der Form $M = \overline{\oplus U_i}$, wobei $U_i \in A$, daß $B(M) \subseteq M$ direkter Summand von M ist.*

Beweis: M läßt sich schreiben als $\overline{N \oplus N'} \simeq \overline{N} \oplus \overline{N'}$ mit $N = \oplus U_i$, $N' = \oplus U'_j$, $B(U_i) = 0$ und $B(U'_j) = U'_j$ für alle i, j. Da $B(M) = B(\overline{N}) \oplus B(\overline{N'})$, genügt es zu zeigen, daß $B(\overline{N}) = 0$ und $B(\overline{N'}) = \overline{N'}$; das heißt, es genügt zu zeigen, daß für rein-injektive Unzerlegbare $V_k \in A$ die beiden folgenden Aussagen i. und ii. äquivalent sind:

i. $B(\overline{\oplus V_k}) = 0$ (bzw. $B(\overline{\oplus V_k}) = \overline{\oplus V_k}$);

ii. Für alle k gilt: $B(V_k) = 0$ (bzw. für alle k ist $B(V_k) = V_k$).

Da V_k direkter Summand in $\overline{\oplus V_l}$ ist, ist die Richtung von i. nach ii. klar. Umgekehrt: $\oplus V_l$ ist rein im rein-injektiven $\prod V_l$, somit ist $\overline{\oplus V_l}$ direkter Summand von $\prod V_l$. ■

Nun noch eine Präzisierung des Ziels dieser Untersuchungen: In diesem Kapitel wollen wir ja eine Beschreibung des Ziegler-Spektrums $\mathrm{I}(k[\Delta])$ von $k[\Delta]$, Δ ein Euklidischer Köcher, als topologischer Raum gewinnen; das soll bedeuten, daß wir an einer Liste der Punkte dieses Raumes (ohne Wiederholungen) interessiert sind und an Umgebungsbasen der Punkte. Dies Ziel soll als erreicht gelten, wenn es gelingt, eine Überdeckung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ durch endlich viele abgeschlossene Mengen anzugeben, die im eben erläuterten Sinne als topologische Räume bekannt sind, und so daß man explizit angeben kann, in welchen dieser abgeschlossenen Mengen ein gegebener Punkt liegt: Es ist nämlich klar, daß man aus Umgebungsbasen eines Punktes für die (endlich vielen) abgeschlossenen Mengen, in denen er liegt, leicht eine Umgebungsbasis für $\mathrm{I}(k[\Delta])$ erhält. (Ebenso gut ist eine Überdeckung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ bis auf endlich viele offen-abgeschlossene Punkte: Diese sind dann, wenn man will, selbst abgeschlossene Mengen mit bekannter Topologie. Deshalb ist es kein Schaden, wenn viele der folgenden Lemmata einen $(*)$ tragen.)

Behauptung: Zur Beschreibung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ als topologischer Raum (im eben präzisierten Sinne), Δ einer der Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ *mit beliebiger Orientierung*, genügt es, $\mathrm{I}(k[\Delta])$ zu bestimmen, wobei Δ einer von $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit der *Standardorientierung* ist.

Beweis der Behauptung: Das folgt aus Korollar 6.2.7 ii. und Satz 4.1.7.

Zunächst aber gilt es, den Fall des Köchers $\tilde{\mathrm{A}}_n$ zu behandeln.

8.2 Der Fall $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$

In diesem Abschnitt soll das Spektrum von $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ ausgerechnet werden. Rein-injektive Unzerlegbare über $\tilde{\mathrm{A}}_n$ sind Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen (Korollar 5.1.3 in Verbindung mit Korollar 6.2.3). Deshalb genügt es (nach den Ausführungen im letzten Abschnitt), das Ziegler-Spektrum für Kronecker-Moduln und das für 2-Zyklen zu berechnen. Rein-injektive unzerlegbare 2-Zyklen wiederum sind $k[X]$-Moduln (Lemma 5.1.6 und Korollar 6.2.3); also ist das Ziegler-Spektrum von 2-Zyklen schon bekannt. Und wegen Lemma 5.1.5 und Korollar 6.2.3 reduziert sich das Problem für Kronecker-Moduln auf die vier abgeschlossenen Teilmengen $\mathcal{A}_1$ bis $\mathcal{A}_4$ aus Lemma 5.1.5. Wie die Überlegung vor Lemma 5.1.5 zeigt, sind aber die zu $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ gehörigen Modulklassen pp-äquivalent zur Klasse der $k[X]$-Moduln und damit die Topologie von $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ bekannt (Satz 4.1.7): Es genügt also, $\mathcal{A}_3$ und $\mathcal{A}_4$ zu untersuchen. Zum Beispiel mit einer Dualitätsüberlegung wie im weiter unten folgenden Lemma 8.3.5 sieht man, daß hierfür bereits die Bestimmung (der Topologie) von $\mathcal{A}_3$ ausreicht. (Oder – für Bedenkenträger angesichts des Verweises auf das noch zu zeigende Lemma 8.3.5: Im letzten Absatz dieses Abschnitts wird – wenn man will – die Topologie von $\mathcal{A}_4$ direkt bestimmt; dort wird das Analogon von Satz 8.2.1 i. für Präinjektive und Prüfer gezeigt.)

Zur Bestimmung von $\mathcal{A}_3$: Lemma 6.2.8 ergibt, daß bis auf die Präprojektiven P_n (siehe vor Lemma 5.1.5 in Abschnitt 5.1.1) alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}_3$ bereits in $\mathcal{A}_1$ oder $\mathcal{A}_2$ (sogar in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$!) liegen; daher genügt es zu zeigen:

Satz 8.2.1 *Für Kronecker-Moduln gilt:*

i. *Der Abschluß $\overline{\mathcal{U}}$ jeder unendlichen Teilmenge $\mathcal{U}$ der Präprojektiven enthält alle $\mathfrak{p}$-adischen.*

ii. *Der Abschluß der Menge der Präprojektiven besteht aus den Präprojektiven, den $\mathfrak{p}$-adischen und* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Potentielle Häufungspunkte sind wegen Satz 2.1.6 nur die unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren, also Prüfer, $\mathfrak{p}$-adische und $\mathbf{Q}$. Da sich der Beweis von Korollar 8.6.4 bzw. von Lemma 8.6.3 – diese beziehen sich auf die standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ und werden weiter unten gezeigt – leicht auf den Fall von Kronecker-Moduln überträgt, folgt, daß im Abschluß der Menge der Präprojektiven kein Prüfer liegt. (Man betrachtet etwa, in der Notation von Abschnitt 5.1.1, die (partielle) Operation $X := gf^{-1}$ auf einem Präprojektiven. Hat X auf einem der P_i Torsion, dann folgt wie in Lemma 8.6.3 – oder eigentlich Lemma 8.6.1 i. –, daß es zunächst ein Element $0 \neq a \in P_i$ gibt, auf das X unendlich oft anwendbar ist, und dann einen a enthaltenden Untermodul von Defekt Null – der also $= 0$ sein muß, Widerspruch.) $k(X)$ ist im Abschluß jedes $\mathfrak{p}$-adischen rein-injektiven Unzerlegbaren über $k[X]$; wegen Satz 4.1.7 ist somit $\mathbf{Q}$ im Abschluß jedes $\mathfrak{p}$-adischen Kronecker-Moduls. Daher genügt es, i. zu zeigen. Ich gebe drei Argumente:

1. Vollkommen analog zu Definition 8.4 weiter unten kann man Baur-Funktoren definieren, etwa einen Funktor $\mathcal{B}$, so daß für einen rein-injektiven Modul $M \in \mathcal{A}_3$ (Zur Erinnerung: Das heißt, daß in M die Abbildungen f und g injektiv sind.) der Untermodul $\mathcal{B}(M)$ größter Untermodul ist, in dem f ein Isomorphismus ist; $\mathcal{B}(M)$ ist dann direkter Summand von M (analog zu Lemma 8.5.2 weiter unten). Dann argumentiert man weiter wie dort. Man beachte dabei, daß die hier betrachtete Menge $\mathcal{A}_3$ das genaue Analogon der weiter unten, in den Fällen $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ (mit der Standardorientierung), definierten Menge $\mathcal{A}$ ist.

2. Mit $\iota_i : P_i \to P_{i+1}$ sei die durch

$$x_j^i \mapsto x_j^{i+1}, y_k^i \mapsto y_k^{i+1},$$

$j \leq n$ und $k \leq n+1$, gegebene Einbettung bezeichnet (siehe Definition der P_i vor Lemma 5.1.5). Dann ist im direkten Limes M des gerichteten Systems der ι_i die Abbildung f ein Isomorphismus, mit anderen Worten, $M \in \mathcal{A}_1$. pp-Äquivalenzen erhalten offenbar elementare Äquivalenz; die vor Lemma 5.1.5 angegebene naheliegende pp-Äquivalenz zwischen Kronecker-Moduln, für die f bijektiv ist, und $k[X]$-Moduln bildet M auf den $k[X]$-Modul $k[X]$ ab. Dieser ist elementar äquivalent zu (siehe [Zie 84, Theorem 5.6])

$$\prod_{\mathfrak{p} \text{ maximal}} \widetilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}.$$

Somit ist M elementar äquivalent zu dem Kronecker-Modul, der unter der pp-Äquivalenz $\prod_{\mathfrak{p} \text{ maximal}} \widetilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$ entspricht, also zu dem direkten Produkt aller $\mathfrak{p}$-adischen Kronecker-Moduln, mit Ausnahme von $\widetilde{k[X]}_{(X),g=1}$ (definiert in Lemma 6.2.8). Ist nun (φ/ψ) eine offene Umgebung eines dieser $\mathfrak{p}$-adischen Kronecker-Moduln (also eines $\mathfrak{p}$-adischen aus $\mathcal{A}_1$), so gibt es ein $a \in \varphi/\psi(M)$, und folglich gibt es ein entsprechendes Element in allen P_i mit

i groß genug: Alle bis auf endlich viele P_i liegen in (φ/ψ). Das beweist, daß im Abschluß jeder unendlichen Menge von Präprojektiven alle $\mathfrak{p}$-adischen aus $\mathcal{A}_1$ liegen; aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes auch für $\mathcal{A}_2$. Das war zu zeigen.

3. Sei U ein gegebener $\mathfrak{p}$-adischer Kronecker-Modul, sei $\mathcal{U}$ eine unendliche Menge von Präprojektiven und $\mathcal{U}'$ die Menge der direkten Summen endlich vieler Kopien von Präprojektiven aus $\mathcal{U}$. Es genügt zu zeigen, daß U Vereinigung von Moduln aus $\mathcal{U}'$ ist – dann schließt man wie eben. Zu zeigen ist also, daß jeder endlichdimensionale Untermodul W von U enthalten ist in einem Modul aus $\mathcal{U}'$. U ist in $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ (Abschnitte 5.1.1 und 6.2), ohne Einschränkung aus $\mathcal{A}_1$. Sei $U^{k[X]}$ der U vermöge der durch $X := gf^{-1}$ gegebenen pp-Äquivalenz entsprechende $k[X]$-Modul, also $U^{k[X]} = \tilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$ für ein geeignetes $\mathfrak{p}$. Sei W' der kleinste (Kronecker-) Untermodul mit $W \leq W' \leq U$, so daß f in W' Isomorphismus ist; man beachte, daß – weil ja $U \in \mathcal{A}_1$ – die Abbildung f in U Isomorphismus ist. Sei dann $W'^{k[X]}$ ($\leq U^{k[X]}$ ohne Einschränkung, da die Funktoren hier Injektionen erhalten) der W' entsprechende $k[X]$-Untermodul von $U^{k[X]}$. Dieser ist endlich erzeugt, also direkte Summe endlich vieler zyklischer $k[X]$-Untermoduln von $U^{k[X]}$, die als solche k-Basen der Form $a, Xa, X^2a, \ldots$ haben. Das heißt, $W'^{k[X]}$ hat die Gestalt

$$W'^{k[X]} = \oplus_{j=1}^{l} \oplus_{i=0}^{\infty} kX^i a_j$$

für geeignetes l und geeignete $a_j \in U^{k[X]}$. Somit ist W' von der Gestalt

$$\oplus_{j=1}^{l} \oplus_{i=0}^{\infty} kf^{-1}X^i a_j \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \oplus_{j=1}^{l} \oplus_{i=0}^{\infty} kX^i a_j$$

(in der Tat eine direkte Summe). Also ist für m groß genug W Untermodul von

$$\oplus_{j=1}^{l} \oplus_{i=0}^{m} kf^{-1}X^i a_j \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \oplus_{j=1}^{l} \oplus_{i=0}^{m+1} kX^i a_j$$

und bei geeigneter Wahl von m ist dies wie gewünscht. ∎

Die Dualitätsüberlegung, die erlaubt, sich auf die Untersuchung von $\mathcal{A}_3$ zu beschränken (siehe den Verweis auf Lemma 8.3.5 vor Satz 8.2.1), kann man auch anders verpacken: Man sieht mit einer Variante des Satzes von Okoh (bzw. seines Beweises), daß ein gegebener Prüfer (ein Kronecker-Modul!)

im Abschluß jeder unendlichen Menge von Präinjektiven I_n liegt; natürlich zeigt dies eigentlich nur, daß Dualität eine wesentliche Zutat zum Satz von Okoh ist. Sei nämlich $\mathcal{U}_1$ eine solche Menge von Präinjektiven, sei $\mathcal{U}_1'$ zu $\mathcal{U}_1$ wie eben $\mathcal{U}'$ zu $\mathcal{U}$ gebildet, bestehe also aus direkten Summen endlich vieler Kopien Präinjektiver aus $\mathcal{U}_1$. Wie die Beweisvariante von Satz 2.1.3 nach Korollar 2.1.4 zeigt, genügt es zu zeigen, daß die Familie $\mathcal{U}_2' = \{N^\star \mid N \in \mathcal{U}_1'\}$ der k-Dualen von Moduln aus $\mathcal{U}_1'$ (die zu $\mathcal{U}_2 = \{U^\star \mid U \in \mathcal{U}_1\}$, der Menge der k-Dualen von Unzerlegbaren aus $\mathcal{U}_1$, gebildet wird, wie $\mathcal{U}'$ zu $\mathcal{U}$; $\mathcal{U}_2$ ist eine Menge von Präprojektiven) kofinal im Dualen des gegebenen Prüfers ist. Aber dieser Prüfer ist ohne Einschränkung in $\mathcal{A}_1$ (wie eben in der dritten Version des Beweises), entspricht somit unter einer geeigneten pp-Äquivalenz einem $k[X]_{\mathfrak{p}^\infty}$. Man verifiziert leicht, daß sein Duales (als Kronecker-Modul) dann gerade dem Dualen (als $k[X]$-Modul) von $k[X]_{\mathfrak{p}^\infty}$ entspricht, also $\tilde{k[X]}_{\mathfrak{p}}$. Dieses Duale (als Kronecker-Modul) ist also ein $\mathfrak{p}$-adischer Kronecker-Modul U. Und daß $\mathcal{U}_2'$ kofinal in U ist, ist in der eben wiedergegebenen dritten Version des Beweises von Satz 8.2.1 gerade nachgewiesen worden.

8.3 Unzerlegbare in $\mathcal{A}$

Wegen der Behauptung am Ende von Abschnitt 8.1 werden im weiteren nur die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit den in Kapitel 5 eingeführten Standardorientierungen betrachtet; alles von nun an Gesagte beziehe sich auf diese vier Köcher. Außerdem sollen ohne Einschränkung stets Unterraumsysteme vorliegen: Mit C bzw. "Universum" sei in den vier Fällen dann jeweils der "größte Vektorraum", das heißt der Vektorraum V_0 (bzw. Q, R, P) bezeichnet. (Nicht nur deshalb tragen die meisten der folgenden Lemmata und Sätze einen $(*)$: Wie üblich werden nämlich die Gleichungen aus Lemmata 5.2.3, 5.3.2, 5.4.2 und 5.5.2 meist kommentarlos benutzt werden.)

Große Teile des Rests dieses Kapitels könnte man – mit Mühe – auch für $\tilde{\mathrm{A}}_n$ formulieren; dadurch würde die Darstellung aber komplizierter, weniger einheitlich, da nicht fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren als Unterraumsysteme aufgefaßt werden könnten. Deshalb war $\tilde{\mathrm{A}}_n$ bereits im vorigen Abschnitt untersucht worden.

Eine kurze Inhaltsangabe: Dieser Abschnitt dient im wesentlichen zwei Zielen.

i. Zunächst werden eine Reihe von Bezeichnungen eingeführt, Bezeichnungen, die im folgenden ständig benutzt werden. Dazu erhalten gewisse bereits in Kapitel 5 untersuchte Gleichungen Namen (Seite 172); außerdem wird endlich die Bedeutung dieser Gleichungen klar. Die Gleichungen bzw. ihre Bezeichnungen dienen dann ihrerseits dazu, den rein-injektiven Unzerlegbaren, soweit erforderlich, Namen zu verleihen (Seite 172). Eine grobe Beschreibung des Ziegler-Spektrums $\mathrm{I}(k[\Delta])$, Δ einer der vier standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$, die sich dieser neuen Namen schon bedient, wird auf Seite 173 gegeben.

ii. Und außerdem findet sich an Schluß dieses Abschnitts eine wesentliche Reduktion des in Teil 8.1 formulierten Problems der Bestimmung der Topologie des Ziegler-Spek-trums der $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit ihren Standardorientierungen. Zu diesem Behufe wird ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ eingeführt, Δ wie eben (und von nun an fast immer) einer von $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit der Standardorientierung. Dieses $\mathcal{A}$ entspricht genau dem in Abschnitt 8.2 untersuchten $\mathcal{A}_3$ bei Kronecker-Moduln. Lemma 8.3.4 beschreibt $\mathcal{A}$ als Menge von rein-injektiven Unzerlegbaren; und Lemma 8.3.5 zeigt (siehe Beweis der Behauptung vom Ende dieses Abschnitts), daß es genügt, die Topologie von $\mathcal{A}$ zu beschreiben.

Es sei nochmals daran erinnert, daß nur Unterraumsysteme betrachtet werden; man beachte den Stern $(*)$ (siehe Vereinbarung zu Beginn von Kapitel 5). Nach Lemma 8.1.3 wurde schon begründet, warum bei der Untersuchung der Topologie die Verwendung von $(*)$ nicht schadet.

Mit b_i bezeichne ich in den vier Fällen $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$ – ohne durch die Bezeichnung den Köcher kenntlich zu machen – die folgenden Mengen von Mengen von (pp-definierbaren) Untervektorräumen; man beachte, daß sich die Definitionen von b_3 im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$ und von b_1 im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_8$ von den, etwa wegen Lemma 5.3.3 bzw. Lemma 5.5.3, zu erwartenden unterscheiden. (Im Anschluß an Lemma 8.3.2 wird erklärt warum.) Wegen Lemma 5.5.5 gelten aber alle im folgenden unter Bezug auf Kapitel 5 gemachten Aussagen.

$\tilde{\mathrm{D}}_4$ $b_1 = \{\{V_1, V_2\}, \{V_3, V_4\}\}$
$b_2 = \{\{V_1, V_3\}, \{V_2, V_4\}\}$
$b_3 = \{\{V_1, V_4\}, \{V_2, V_3\}\}$

$\tilde{\mathrm{E}}_6$ $b_1 = \{\{E_1, F_3\}, \{E_3, F_2\}, \{E_2, F_1\}\}$
$b_2 = \{\{E_1, F_2\}, \{E_2, F_3\}, \{E_3, F_1\}\}$
$b_3 = \{\{E_1, E_2 \cap E_3\}, \{F_1, F_2, F_3\}\}$

$\tilde{\mathrm{E}}_7$ $b_1 = \{\{E_1, G_2\}, \{F_2, W\}, \{E_2, G_1\}, \{F_1, W\}\}$
$b_2 = \{\{E_1 \cap E_2, W\}, \{G_1, G_2, W\}, \{F_1, F_2\}\}$
$b_3 = \{\{W, E_1 \cap F_2, G_1\}, \{W, E_2 \cap F_1, G_2\}\}$

$\tilde{\mathrm{E}}_8$ $b_1 = \{\{Y_3, Z_8\}, \{X, Z_7\}, \{Y_4, Z_6\}, \{X, Y_3 \cap Z_5\}, \{X, Y_4, Z_9\}\}$
$b_2 = \{\{X \cap Z_5, Y_4, Z_8\}, \{X \cap Y_3, Y_4, Z_7\}, \{Y_3 \cap Z_6, X, Z_9\}\}$
$b_3 = \{\{X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8\}, \{Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9\}\}$

Für $\Phi \in b_i$ seien die folgenden pp-Aussagen definiert:

$$\gamma_\Phi^\cap \equiv \text{“}(\textstyle\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi) \text{ ist direkt in } C\text{”},$$

$$\gamma_\Phi^\Sigma \equiv \textstyle\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi = C; \text{ weiter}$$

$$\gamma_{b_i}^\cap \equiv \textstyle\bigwedge_{\Phi \in b_i} \gamma_\Phi^\cap,$$

$$\gamma_{b_i}^\Sigma \equiv \textstyle\bigwedge_{\Phi \in b_i} \gamma_\Phi^\Sigma, \text{ sowie}$$

$$\gamma^\cap \equiv \gamma_{b_1}^\cap \wedge \gamma_{b_2}^\cap \wedge \gamma_{b_3}^\cap \text{ und}$$

$$\gamma^\Sigma \equiv \gamma_{b_1}^\Sigma \wedge \gamma_{b_2}^\Sigma \wedge \gamma_{b_3}^\Sigma.$$

Zum Beispiel ist im Falle $\tilde{\mathrm{D}}_4$ etwa $\gamma_{\{V_1,V_2\}}^\cap \equiv V_1 \cap V_2 = 0$ und $\gamma_{b_1}^\Sigma \equiv V_1 + V_2 = V_3 + V_4 = V_0$.

Die Analyse in Kapitel 5 (bzw. die dortigen Beweise) und Abschnitt 6.2 haben gezeigt, daß jedes stetige endlichdimensionale und jedes rein-injektive unendlichdimensionale Unzerlegbare U von der Form $F(U')$ ist, F eine geeignete pp-Äquivalenz (und Komposition von pp-Äquivalenzen aus Kapitel 5),

U' ein unzerlegbarer rein-injektiver $k[X]$-Modul (siehe auch Korollar 6.2.7). Ist U' $\mathfrak{p}$-adisch (bzw. Prüfer), so heiße U $\mathfrak{p}$-adisch (bzw. Prüfer); mit $\mathbf{Q}$ sei das Bild des rein-injektiven Unzerlegbaren $k(X)$ bezeichnet: wie man leicht sieht, ist dies jeweils wohldefiniert. Man beachte auch die entsprechenden Definitionen für $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$ in Abschnitt 5.1. – Die stetigen (das heißt: regulären; siehe Lemma 5.1.5) $k[\tilde{\mathrm{A}}_n]$-Unzerlegbaren sind genau bekannt (siehe vor Lemma 5.1.5), wegen Abschnitt 6.2 also auch die unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren. Außerdem zeigt Kapitel 5, daß die dort benutzten Funktoren (siehe die Zusammenstellung unmittelbar vor Abschnitt 8.1) die Aussagen $\gamma_\Phi^\cap$ bzw. γ_Φ^Σ ineinander übersetzen und daß stetige Unzerlegbare Bilder bzw. Urbilder stetiger Unzerlegbarer sind (genauer: mit Lemmata 5.2.8 iii. für $\tilde{\mathrm{D}}_4$, 5.3.8 iii., 5.3.5 und 5.3.6 für den Fall $\tilde{\mathrm{E}}_6$, 5.4.7 iii. und 5.4.5 im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$, sowie 5.5.8 iii. und 5.5.6 im Fall $\tilde{\mathrm{E}}_8$). Man erhält deshalb sofort

Lemma 8.3.1

i. *U sei ein stetiges (endlichdimensionales) Unzerlegbares. Dann gilt für alle bis auf höchstens ein $\Phi \in b_1 \cup b_2 \cup b_3$, daß $U \models \gamma_\Phi^\cap \wedge \gamma_\Phi^\Sigma$. Gilt $U \models \neg(\gamma_\Phi^\cap \wedge \gamma_\Phi^\Sigma)$, so folgt $U \models \neg\gamma_\Phi^\cap \wedge \neg\gamma_\Phi^\Sigma$, und U ist das einzige stetige Unzerlegbare der Dimension* $\dim(U)$ *mit dieser Eigenschaft.*

ii. *U sei ein rein-injektives unendlichdimensionales Unzerlegbares. Dann gilt für alle $\Phi \in b_1 \cup b_2 \cup b_3$ bis auf höchstens eines, daß $U \models \gamma_\Phi^\cap \wedge \gamma_\Phi^\Sigma$. Ist $U \models \neg\gamma_\Phi^\cap$, so folgt $U \models \gamma_\Phi^\Sigma$, also auch $U \models \gamma^\Sigma$, und U ist Prüfer; U ist dann der einzige Prüfer mit dieser Eigenschaft. Und dual dazu: Gilt $U \models \neg\gamma_\Phi^\Sigma$, so ist $U \models \gamma_\Phi^\cap$, also $U \models \gamma^\cap$; U ist $\mathfrak{p}$-adisch und das einzige $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare mit dieser Eigenschaft.* ■

Die gleiche Argumentation liefert auch: Zu jedem $\Phi \in b_1 \cup b_2 \cup b_3$ und zu jedem Dimensionstyp, zu dem es überhaupt stetige Unzerlegbare gibt (siehe jeweils Teil iii. der Lemmata 5.2.8, 5.3.8, 5.4.7, 5.5.8), gibt es genau ein U mit diesem Dimensionstyp, weiter genau ein $\mathfrak{p}$-adisches U' und genau einen Prüfer U'' mit $U, U', U'' \models \neg(\gamma_\Phi^\cap \wedge \gamma_\Phi^\Sigma)$.

Definition 8.1 Stetige bzw. unendlichdimensionale rein-injektive Unzerlegbare, die *nicht* $\gamma^\cap \wedge \gamma^\Sigma$ erfüllen, heißen sporadisch, die übrigen gewöhnlich.

Das sporadische $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare, das *nicht* γ_Φ^Σ erfüllt, heiße $\tilde{U}_\Phi$; der Prüfer, der *nicht* $\gamma_\Phi^\cap$ erfüllt, sei mit U_Φ^∞ bezeichnet.

Da $\sum_{i=1,2,3} \mid b_i \mid = 6$ (bzw. $= 8, 9, 10$), folgt: Es gibt bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$) für jedes n genau sechs (bzw. acht, neun, zehn) sporadische stetige Unzerlegbare mit $\dim(C) = 2n$ (bzw. mit $\dim(C) = 3n, 4n, 6n$); es gibt genau sechs (bzw. acht, neun, zehn) sporadische $\mathfrak{p}$-adische und sechs (bzw. acht, neun, zehn) sporadische Prüfer. (Siehe wieder jeweils Teil iii. der Lemmata 5.2.8, 5.3.8, 5.4.7, 5.5.8 für eine Beschreibung der Dimensionstypen stetiger Unzerlegbarer.)

Mit der Behauptung von Seite 36 ergibt sich für die vier betrachteten Köcher insbesondere folgende

Zusammenfassung: (für $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit Standardorientierung)
i. Die Menge der *endlichdimensionalen* (rein-injektiven) Unzerlegbaren ist disjunkte Vereinigung von $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ und $\mathcal{I}$. Endlichdimensionale Unzerlegbare sind entweder stetig oder diskret. Stetige (endlichdimensionale) Unzerlegbare sind regulär; folglich sind Präprojektive und Präinjektive diskret. Ein stetiges Unzerlegbares ist entweder gewöhnlich oder sporadisch. Zu jedem Dimensionstyp, zu dem es überhaupt stetige Unzerlegbare gibt, gibt es genau sechs (bzw. acht, neun, zehn) sporadische stetige und unendlich viele gewöhnliche stetige Unzerlegbare mit diesem Dimensionstyp.
ii. Die Menge der *unendlichdimensionalen* rein-injektiven Unzerlegbaren besteht aus den Prüfern, den $\mathfrak{p}$-adischen, und $\mathbf{Q}$. Prüfer und $\mathfrak{p}$-adische sind jeweils entweder gewöhnlich oder sporadisch. Es gibt genau sechs (bzw. acht, neun, zehn) sporadische Prüfer und ebenso viele sporadische $\mathfrak{p}$-adische, aber unendlich viele gewöhnliche Prüfer und unendlich viele gewöhnliche $\mathfrak{p}$-adische.

(Es ist klar, daß dies bei geeigneter Ausdehnung der benutzten Begriffe auch für die anderen Euklidischen Köcher – ohne zyklische Orientierung – gilt.)

Noch einige Bemerkungen: i. Es zeigt sich, daß die sporadischen stetigen (bzw. Prüfer, $\mathfrak{p}$-adischen) gerade von der Gestalt (F wie eben eine geeignete pp-Äquivalenz)

$$F(k[X]/\mathfrak{p}^n) \text{ (bzw. } F(k[X]_{\mathfrak{p}^\infty}, F(\widetilde{k[X]_{\mathfrak{p}}})$$

sind, für $\mathfrak{p} \in \{(X), (X+1), (X-1)\}$. (Das liegt natürlich an der Wahl der pp-Äquivalenzen; insbesondere wird sich aus dem Beweis von Lemma 8.4.2 ergeben, daß, bei anderer Auswahl von pp-Äquivalenzen F, die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen auch als $F(\widetilde{k[X]_{(X)}})$ geschrieben werden können.)

ii. Wegen Lemmata 5.2.4, 5.3.3, 5.4.3 und 5.5.3 und der Eindeutigkeit der sporadischen Unzerlegbaren (Lemma 8.3.1) läßt sich auf jedem der b_i eine Operation von C^+ (entsprechend auch von C^-) definieren, so daß

$$C^+(\tilde{U}_\Phi) = \tilde{U}_{C^+(\Phi)} \text{ und}$$
$$C^+(U_\Phi^\infty) = U_{C^+(\Phi)}^\infty \text{ gilt,}$$

also zum Beispiel $C^+(\{V_1, V_2\}) = \{V_3, V_4\}$.

iii. Die sporadischen Unzerlegbaren sind genau die stetigen bzw. unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren mit endlicher nichttrivialer C^+-Bahn, das heißt die, deren C^+-Bahn endliche Länge ungleich 1 hat (leichte Rechnung). – Wegen der Eindeutigkeit (Lemma 8.3.1) läßt sich an den Lemmata 5.3.6, 5.4.5, 5.5.6 sofort ablesen, welche sporadischen Unzerlegbaren sich unter den Funktoren T, S_7 und S_1 entsprechen; das wurde eben schon im Beweis von Lemma 8.3.1, das heißt der Überlegung vor diesem Lemma, benutzt. (Definiert man den Begriff des sporadischen Unzerlegbaren auch für $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$ mit der alternierenden Orientierung, dann leisten Lemmata 5.2.7, 5.3.5 das Entsprechende; allerdings ist dann das Urbild eines sporadischen Unzerlegbaren unter D bzw. S nicht immer sporadisch – das liegt daran, daß es für $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$ nur zwei b_i gibt.)

iv. Die Paare von pp-Äquivalenzen (aus Kapitel 5) T, T' bzw. S_7, S_7' bzw. S_1, S_1' erhalten Bahnen von (zum Beispiel) unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren: Insbesondere ist etwa das Bild einer Bahn sporadischer $\mathfrak{p}$-adischer Unzerlegbarer unter T bzw. S_7 bzw. S_1 enthalten in einer Bahn sporadischer $\mathfrak{p}$-adischer Unzerlegbarer: Die Bezeichnungen der b_i von Seite 171 sind gerade so gewählt, daß $T(\{\tilde{U}_\Phi | \Phi \in b_i\}) \subseteq \{\tilde{U}_\Phi | \Phi \in b_i\}$; siehe Lemma 5.3.6. (Achtung: Hier stehen links und rechts natürlich b_i von verschiedenen Köchern.) Analog für S_7 bzw. S_1 und deren Kompositionen mit Coxeter-Funktoren (Lemmata 5.4.5 und 5.5.6). Bei den $T_{i,j,k}$ stimmt die Wahl der b_i natürlich nicht mehr; auch sie erhalten aber Bahnen.

Es ist wegen des folgenden Lemmas 8.3.2, daß ich b_1 bei $\tilde{\mathrm{E}}_8$ und b_3 bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$ auf Seite 171 anders definiert habe als Kapitel 5 hätte erwarten lassen. Erinnert sei hier auch an die Vereinbarung zu Beginn von Kapitel 5: Allein die Formulierung des nächsten Lemmas impliziert ja bereits wieder, daß Unterraumsysteme betrachtet werden.

Lemma 8.3.2 (∗) *Für alle i und für fast alle endlichdimensionalen Unzerlegbaren U gilt*

$$\delta(U) = \sum_{\Phi \in b_i} [(\sum_{\varphi \in \Phi} \dim \varphi(U)) - \dim(C)].$$

Beweis: Beweis durch Nachrechnen für die vier Fälle:
1. $\tilde{\mathrm{D}}_4$: Die rechte Seite ergibt zum Beispiel für $i = 1$ gerade $v_1 + v_2 - v_0 + v_3 + v_4 - v_0$, also das Gewünschte. – Die Rechnungen für $\tilde{\mathrm{E}}_6$ und $\tilde{\mathrm{E}}_7$ schenke ich mir.
2. $\tilde{\mathrm{E}}_8$: Für $i = 1$ ergibt die rechte Seite zum Beispiel $(y_3 + z_8 - p) + (x + z_7 - p) + (y_4 + z_6 - p) + (x + y_3 \cap z_5 - p) + (x + y_4 + z_9 - p)$; der vierte Summand läßt sich schreiben als $x + (y_3 + z_5 - y_3 \cup z_5) - p = x + y_3 + z_5 - 2p$ (wegen Lemma 5.5.2), insgesamt hat man also für die rechte Seite das Verlangte. Für $i = 2, 3$ rechnet man genauso. ∎

Lemma 8.3.3 $(*)$ *Sei $b \in \{b_1, b_2, b_3\}$, U ein endlichdimensionales Unzerlegbares.*

i. Aus $U \models \gamma_b^\cap$ folgt $\delta(U) \leq 0$.

ii. Es gelte $U \models \gamma_b^\cap$. Dann sind äquivalent:

   (a) $\delta(U) \geq 0$;
   (b) $\delta(U) = 0$;
   (c) $U \models \gamma_b^\Sigma$.

iii. Ist $\delta(U) < 0$, so folgt $U \models \gamma^\cap$.

iv. Es gelte $U \models \gamma^\cap$. Dann sind äquivalent:

   (a) $\delta(U) \geq 0$;
   (b) $\delta(U) = 0$;
   (c) $U \models \gamma^\Sigma$.

Beweis: (Unzerlegbarkeit von U wird in diesem Lemma gar nicht verwandt.) iii. folgt durch Inspektion präprojektiver Unzerlegbarer kleiner Dimension und dann durch "Induktion nach C^-" unter Verwendung der Lemmata, die zeigen, wie C^+ bzw. C^- auf einem gegebenen b_i operieren (im eben definierten Sinn), das heißt unter Verwendung von Lemmata 5.2.4, 5.3.3, 5.4.3, 5.5.3: Es genügt sogar, die Projektiven zu betrachten, denn die Aussage der eben zitierten ("gesternten"!) Lemmata über Direktheit gilt für *alle* Präprojektiven, die auch allesamt Unterraumsysteme sind. – Punkt iv. folgt aus ii. Die Punkte i. und ii. sieht man so ein: $U \models \gamma_b^\cap$ bedeutet, daß $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(U)$ direkt ist in C für alle $\Phi \in b$; nun folgt alles aus Lemma 8.3.2. ∎

(Für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ ist Lemma 8.3.3 im wesentlichen Lemma 5.2.5.)

Definition 8.2 $(*)$ $\mathcal{A}$ sei der durch $\gamma^\cap$ definierte abgeschlossene Teilraum des Ziegler-Spektrums.

Der $(*)$ bedeutet natürlich, daß die Bedingungen aus den mit $*$ versehenen Lemmata jeweils stillschweigend ebenfalls gelten sollen; insbesondere sollen Unterraumsysteme vorliegen.

Lemma 8.3.4 *$\mathcal{A}$ enthält fast alle Präprojektiven, alle gewöhnlichen stetigen Unzerlegbaren und gewöhnlichen Prüfer, alle $\mathfrak{p}$-adischen und $\mathbf{Q}$; nicht jedoch die sporadischen stetigen, die sporadischen Prüfer und fast keine diskreten Unzerlegbaren von Defekt ≥ 0 (das heißt fast keine Präinjektiven und fast keine diskreten regulären).* ■

Beweis: Für die unendlichdimensionalen und die stetigen Unzerlegbaren ist das klar.Es bleiben die diskreten Unzerlegbaren zu betrachten: Daß $\mathcal{A}$ die Präprojektiven enthält, ist iii. von Lemma 8.3.3; daß Präinjektive nicht in $\mathcal{A}$ sind, ist Lemma 8.3.3 i. Und daß $\mathcal{A}$ reguläre diskrete Unzerlegbare nicht enthält, folgt einfach aus den Dimensionstypen in [DF 73]. ■

D bezeichne nun wieder die Dualität aus Abschnitt 1.5, die wegen Lemma 8.1.1 und [Her 93, nach Problem 4.11] einen Homöomorphismus zwischen den Ziegler-Spektra der Linksmoduln über $k[\Delta]$ und der Linksmoduln über $k[\Delta']$ liefert, wobei Δ' aus Δ durch Umorientieren aller Kanten entsteht. (Δ' heiße für den Augenblick die duale Orientierung.) Das Argument von Seite 81 liefert eine Folge von Ecken, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, so daß α_i Ziel in $\alpha_{i-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_1\Delta'$ ist und $\alpha_l \cdot \ldots \cdot \alpha_1\Delta' = \Delta$. Sei l minimal so und $\tilde{\mathrm{D}}$ definiert als $C^+_{\alpha_l} \cdot \ldots \cdot C^+_{\alpha_1}\mathrm{D}$. Dann ist $\tilde{\mathrm{D}}$ wohldefiniert (siehe Kapitel 4 vor Satz 4.2.4 für eine ähnliche Überlegung) und ein Homöomorphismus zwischen zwei koendlichen Teilmengen (in deren Komplement nur offen-abgeschlossene Punkte liegen) des Ziegler-Spektrums der $k[\Delta]$-Linksmoduln (wie Beweis von Satz 4.2.4).

Sei $\mathcal{A}^{\tilde{\mathrm{D}}}$ der ($(*)$!) durch γ^Σ definierte abgeschlossene Teilraum des Spektrums.

Lemma 8.3.5 $(*)$ *Es gilt* $\tilde{\mathrm{D}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\tilde{\mathrm{D}}}$.

Beweis: Durch Nachprüfen in den vier Fällen; ich beschränke mich auf $\tilde{\mathrm{D}}_4$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$.

1. $\tilde{\mathrm{D}}_4$: Bei Quadrupeln sei die Abbildung $V_i \to V_0$ (für diesen Beweis) mit e_i bezeichnet; um Konfusion zu vermeiden notiere ich Darstellungen von $\tilde{\mathrm{D}}_4$ mit der dualen Orientierung als

$$\begin{array}{ccc} V_1' & & V_4' \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & V_0' & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ V_2' & & V_3' \end{array}$$

und die Abbildungen als $e_i' : V_0' \to V_i'$. Dann zeigt [PRZ 94], daß $\mathrm{D}(\mathrm{im}(e_1) \cap \mathrm{im}(e_2) = 0)$ die Formel $V_0' = \ker(e_1') + \ker(e_2')$ ist. Anwenden von $C^+_{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot C^+_{\alpha_1}$ (wobei α_i die i-te Ecke mit Valenz 1 bezeichne; wie vor dem Beweis bemerkt, kommt es auf die Reihenfolge nicht an) macht aus der Darstellung des dual orientierten Köchers das Quadrupel

$$\begin{array}{ccc} \ker(e_1') & & \ker(e_4') \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & V_0' & \\ & \nearrow \quad \nwarrow & \\ \ker(e_2') & & \ker(e_3') \end{array}$$

so daß also in $\tilde{\mathrm{D}}(V) = C^+_{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot C^+_{\alpha_1} \mathrm{D}(V)$ die Gleichung $V_0 = \mathrm{im}(e_1) + \mathrm{im}(e_2)$ genau dann gilt, wenn in V gilt $\mathrm{im}(e_1) \cap \mathrm{im}(e_2) = 0$.

2. $\tilde{\mathrm{E}}_8$: Bezeichnungen analog 1., das heißt "gestricht" in einer Darstellung des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit der zur Standardorientierung dualen Orientierung; außerdem seien die Abbildungen in einer $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung $f_4 : Y_4 \to Y_3$, $f_3 : Y_3 \to P$, $g : X \to P$, $h_5 : Z_5 \to P$, $h_i : Z_i \to Z_{i-1}$ für $i = 6, 7, 8, 9$. Darstellungen von $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit der dualen Orientierung haben dann die Form

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & X' & & & & & & & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & & & & & & & \\ Y_4' & \leftarrow & Y_3' & \leftarrow & P' & \to & Z_5' & \to & Z_6' & \to & Z_7' & \to & Z_8' & \to & Z_9' \end{array}$$

und $-\,l$ ist hier gleich $8 - C^+_{\alpha_8} \cdot \ldots \cdot C^+_{\alpha_1}$ darauf angewandt liefert für ein $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Unzerlegbares U als $C^+_{\alpha_8} \cdot \ldots \cdot C^+_{\alpha_1} \mathrm{D}(U)$ also

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & X'' \arrow[d] & & & & & \\
Y_4'' \arrow[r] & Y_3'' \arrow[r] & P'' & Z_5'' \arrow[l] & Z_6'' \arrow[l] & Z_7'' \arrow[l] & Z_8'' \arrow[l] & Z_9'' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

wobei $X'' = \ker(g')$, $Y_3'' = \ker(f_4' f_3')$, $Y_4'' = \ker(f_3')$, $Z_5'' = \ker(h_9' \cdot \ldots \cdot h_5')$, ...und schließlich $Z_9'' = \ker(h_5')$. Die Regeln in [PRZ 94] ergeben zum Beispiel, daß $\mathrm{D}(Y_3 \cap Z_8 = 0)$ die Formel $P' = \ker(f_3') + \ker(h_8' \cdot \ldots \cdot h_5')$ ist, so daß in U die Gleichung $Y_3 \cap Z_8 = 0$ genau dann gilt, wenn $\tilde{\mathrm{D}}(U)$ die Gleichung $Y_4 + Z_6 = P$ erfüllt.

Analoge Rechnungen ergeben die folgende Tabelle; die Summe der Unterräume links in U ist direkt genau dann, wenn die derjenigen rechts in $\tilde{\mathrm{D}}(U)$ gleich P ist (und umgekehrt):

Y_3, Z_8	Y_4, Z_6
Y_4, Z_6	Y_3, Z_8
X, Z_7	X, Z_7
$X \cap Y_3, X \cap Z_5, Y_3 \cap Z_5$	X, Y_4, Z_9
X, Y_4, Z_9	$X \cap Y_3, X \cap Z_5, Y_3 \cap Z_5$
$X \cap Y_3, Y_4, Z_7$	$X \cap Y_3, Y_4, Z_7$
$Y_3 \cap Z_6, X, Z_9$	$X \cap Z_5, Y_4, Z_8$
$X \cap Z_5, Y_4, Z_8$	$Y_3 \cap Z_6, X, Z_9$
$Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9$	$Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9$
$X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8$	$X \cap Y_3, X \cap Z_6, Y_4, Z_8$

Dabei bedarf es einiger Nebenrechnungen; zum Beispiel ergibt sich mit [PRZ 94], daß in U die Summe $Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7 + X + Z_9$ genau dann direkt ist, wenn in $\mathrm{D}(U)$ gilt $P' = (\ker(f_3') + \ker(h_7' h_6' h_5')) \cap \ker(g') \cap \ker(h_9' \cdots h_5') + \ker(h_5') + \ker(f_4' f_3')$, also genau dann, wenn in $\tilde{\mathrm{D}}(U)$ gilt $P = (Y_4 + Z_7) \cap X \cap Z_5 + Z_9 + Y_3 = (Y_4 \cap Z_5 + Z_7) \cap X + Z_9 + Y_3$. Aber dies gilt genau dann, wenn $P = (Y_4 \cap Z_5) + (Y_3 \cap Z_7) + X + Z_9$, wie in der Tabelle behauptet, denn: Sei etwa $P = (Y_4 \cap Z_5) + (Y_3 \cap Z_7) + X + Z_9$. Wegen $P = Y_3 + Z_7$ genügt es für $P = (Y_4 \cap Z_5 + Z_7) \cap X + Z_9 + Y_3$ zu zeigen, daß $Z_7 \subseteq (Y_4 \cap Z_5 + Z_7) \cap X + Z_9 + Y_3$. Aber $z \in Z_7$ hat nach Voraussetzung die Form $z = y_1 + y_2 + x + z'$ mit $y_1 \in Y_4 \cap Z_5$, $y_2 \in Y_3 \cap Z_7$, $x \in X$ und $z' \in Z_9$. Also ist $x = -y_1 + (z - y_2 - z') \in Y_4 \cap Z_5 + Z_7$ und somit $z = x + z' + (y_1 + y_2) \in (Y_4 \cap Z_5 + Z_7) \cap X + Z_9 + Y_3$ wie verlangt. Umgekehrt genauso. – Ähnlich für die anderen Gleichungen. ■

Behauptung: Zur Beschreibung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ als topologischer Raum, Δ einer der Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ *mit beliebiger Orientierung*, genügt es, die Topologie von $\mathcal{A}$ in den vier Fällen $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, jeweils mit der *Standardorientierung*, zu bestimmen.

Beweis der Behauptung: Wegen der Behauptung am Ende von Abschnitt 8.1 genügt es, die Ziegler-Spektra der erwähnten vier Köcher (jeweils mit der Standardorientierung) auszurechnen. Wie vor jener Behauptung gesehen, braucht man dazu nur eine Überdeckung des jeweiligen Ziegler-Spektrums aus endlich vielen abgeschlossenen Mengen mit bekannter Topologie. Wegen Korollar 6.2.7 i. sind fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren, die regulär oder unendlichdimensional sind (also fast alle, mit Ausnahme der endlichdimensionalen von Defekt ungleich Null) in einer von endlich vielen abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_l$ mit bekannter Topologie. Fast alle Präprojektiven aber liegen in $\mathcal{A}$ (Lemma 8.3.4); mit genau dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 8.3.3 iii. sieht man, daß fast alle Präinjektiven in $\mathcal{A}^{\tilde{\mathrm{D}}}$ liegen, also in $\tilde{\mathrm{D}}(\mathcal{A})$ (Lemma 8.3.5). Das heißt: Fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren liegen in $\mathcal{A} \cup \tilde{\mathrm{D}}(\mathcal{A}) \cup A_1 \cup \ldots \cup A_l$. Da $\tilde{\mathrm{D}}$ ein Homöomorphismus ist (siehe nach Lemma 8.3.4), kennt man mit der Topologie von $\mathcal{A}$ diejenige von $\tilde{\mathrm{D}}(\mathcal{A})$. Das zeigt die Behauptung.

Es sei hier nochmals erwähnt, daß im weiteren nicht nur die Topologie von $\mathcal{A}$ bestimmt werden wird, sondern sogar Axiomatisierungen (modulo $\mathcal{A}$) für zu rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$ gehörende unzerlegbare Typen.

8.4 Die $\mathcal{A}_{b,b'}$

Seien $b, b' \in \{b_1, b_2, b_3\}$, die b_i wie auf Seite 171 und der zugrundeliegende Köcher einer der vier standardorientierten $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$. Erinnert sei an die Definition von $(*)$ (siehe zu Beginn von Kapitel 5).

Dieser Abschnitt enthält zunächst die Definition der abgeschlossenen Mengen $\mathcal{A}_{b,b'}$, anschließend ihre Beschreibung als Mengen von rein-injektiven Unzerlegbaren. Es zeigt sich, daß diese $\mathcal{A}_{b,b'}$ recht klein sind: zu klein einerseits, um $\mathcal{A}$ zu überdecken – daher genügt es *nicht*, die Topologie der $\mathcal{A}_{b,b'}$ zu bestimmen. Aber andererseits zeigt das wichtigste Lemma dieses Abschnitts, Lemma 8.4.2, daß sie klein genug sind, so daß nicht nur ihre Topologie berechnet werden kann, sondern daß man sogar Axiomatisierungen (modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$) für den rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechende unzerlegbare Typen angeben kann: Korollare 8.4.3, 8.4.4, 8.4.5. (Im nächsten Abschnitt wird dann vorgeführt, wie sich daraus Axiomatisierungen sogar modulo $\mathcal{A}$ ergeben (Korollar 8.5.4).) Da jedes unendlichdimensionale Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$ in einem geeigneten $\mathcal{A}_{b,b'}$ enthalten ist (siehe Anmerkung nach Lemma 8.4.1), erhält man so für alle potentiellen Häufungspunkte von $\mathcal{A}$ – denn die endlichdimensionalen Unzerlegbaren sind ja isoliert – Axiomatisierungen (modulo $\mathcal{A}$) von zugehörigen unzerlegbaren Typen. – Den Beweis des zentralen Lemmas 8.4.2 habe ich wegen seiner großen Länge in Abschnitt 9.1 verbannt.

Definition 8.3 (*) $\mathcal{A}_{b,b'}$ sei die abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{A}$ definiert durch $\gamma^{\cap} \wedge \gamma_b^{\Sigma} \wedge \gamma_{b'}^{\Sigma}$.

Lemma 8.4.1 *$\mathcal{A}_{b,b'}$ enthält genau die gewöhnlichen stetigen Unzerlegbaren, die gewöhnlichen Prüfer und gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen, $\mathbf{Q}$, und die $\tilde{U}_\Phi$ mit $\Phi \in b''$, $b'' \notin \{b, b'\}$.*

Damit ist insbesondere jedes unendlichdimensionale Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$ (siehe Lemma 8.3.4) in einem geeigneten $\mathcal{A}_{b,b'}$ enthalten (Lemma 8.3.1). Nicht in der Vereinigung der $\mathcal{A}_{b,b'}$ sind jedoch die Präprojektiven.

Beweis: Lemma 8.3.3 und Lemma 8.3.4. ∎

Es ist weniger das folgende Lemma als vielmehr sein noch weitere Informationen enthaltender Beweis (siehe in Abschnitt 9.1 Seite 230 bis Seite 237), der für uns wichtig ist: Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt (nämlich vor Korollar 5.1.3 und zu Anfang von Abschnitt 5.1.2) werden von nun an, für den Rest dieser Arbeit, m-Zyklen meist mit Vektorräumen A_i (statt W_i), $1 \leq i \leq m$, und Abbildungen $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$, sowie $f_m : A_m \to A_1$ geschrieben. $X_i : A_i \to A_i$ sei bei einem solchen m-Zyklus die Abbildung $X_i := f_{i-1} \cdot \ldots \cdot f_i$, durch die A_i zu einem $k[X_i]$-Modul wird. Man überzeugt sich sofort, daß für $\epsilon \in k$ und m-Zyklen, für die alle f_i injektiv sind, die Abbildung $X_i + \epsilon$ genau dann bijektiv (das heißt: surjektiv) ist für ein i, wenn sie bijektiv ist für alle i. Sei noch für $m \in \{3, 5\}$ definiert $\epsilon := 1$; bei 2- und 4-Zyklen (das heißt für $m \in \{2, 4\}$) sei $\epsilon := -1$. – Mit dieser Notation hat man nun

Lemma 8.4.2 *Sei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, sei $|b''| = m$. Dann ist die $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechende Klasse von Moduln pp-äquivalent zu einer abgeschlossenen*

Klasse von m-Zyklen. Dabei entsprechen die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ gerade den (X)-adischen m-Zyklen.

Zusatz: Die Klasse von m-Zyklen besteht genau aus denjenigen Zyklen, für die alle f_i injektiv und ein (alle) $X_i + \epsilon$ bijektiv sind.

Beweis: Siehe Abschnitt 9.1. ∎

(Die Definition der b_i auf Seite 171 zeigt, daß in der Tat $2 \leq m = \mid b'' \mid \leq 5$, so daß also ϵ wenigstens in jedem der Fälle definiert ist.)
Eine kurze Zusammenfassung des Beweises mit den für das Folgende wesentlichsten Informationen ist hier am Platze; es ist weniger die spezielle Gestalt der pp-Äquivalenzen, deren Existenz im Lemma behauptet wird, die wichtig ist, als vielmehr die Form gewisser (uniform) pp-definierbarer partieller (injektiver) Funktionen auf Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$, die sich aus diesen pp-Äquivalenzen ergibt: Sei zunächst eines der (zwölf verschiedenen: drei für jeden der vier Köcher) $\mathcal{A}_{b,b'}$ fixiert. Die Klasse von m-Zyklen, von der in Lemma 8.4.2 die Rede ist, besteht aus m-Zyklen, für die insbesondere alle der m Funktionen f_i injektiv sind. Diesen f_i entsprechen vermöge der pp-Äquivalenz von Lemma 8.4.2 in Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ injektive (uniform) pp-definierbare Funktionen, wieder mit f_i, $1 \leq i \leq m = \mid b'' \mid$, bezeichnet. In Unzerlegbaren aus der wesentlich größeren Menge $\mathcal{A}$ liefern die pp-Definitionen dieser Funktionen immerhin noch *partielle* injektive Funktionen. Insgesamt erhält man so in jedem der vier Fälle (das heißt Köcher) $\sum_{i=1,2,3} \mid b_i \mid$-viele solche (partielle) Funktionen (auf Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$), also 6 (bzw. 8, 9, 10) für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$). Die Definitionen dieser insgesamt 33 partiellen Funktionen (für Moduln aus $\mathcal{A}$) sind für die weiteren Überlegungen wichtig! Sie finden sich – mit einigen kleinen Auslassungen – auf den Seiten 231 bis 237, durchnumeriert von (1) bis (33). Wir vereinbaren bzw. wiederholen noch folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
&f := f_{m-1} \cdot \ldots \cdot f_1 : A_1 \to A_m,\\
&g := f_m : A_m \to A_1, \text{ und}\\
&X_i := f_{i-1} \cdot \ldots \cdot f_i : A_i \to A_i,\\
&Y := X_1 = gf : A_1 \to A_1, \text{ sowie}\\
&\epsilon := +1, \text{ falls } m \in \{3,5\} \text{ und } \epsilon := -1 \text{ für } m \in \{2,4\}.
\end{aligned}$$

Für Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$ sind f_i, f, g, X_i und Y also partielle (uniform) pp-definierbare, injektive Funktionen, das heißt partielle Bijektionen. Und zu jedem Paar $\{b, b'\}$ sind dadurch (auf Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$) $m = \mid b'' \mid$-viele partielle (uniform) pp-definierbare Operationen $X_i : A_i \to A_i$ definiert,

das heißt also sechs (bzw. acht, neun , zehn) für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$), 33 insgesamt. Wenn im folgenden eine beliebige dieser 33 partiellen Operationen gemeint ist, schreibe ich dafür kurz X; bei konkreten Rechnungen werden meist die partiellen Operationen $Y = X_1$ und X_m benutzt. Die Ergebnisse hängen aber von der Auswahl gerade dieser Operationen aus 33 zur Verfügung stehenden nicht ab. – Übrigens gelten die Äquivalenzen im Beweis von Lemma 8.4.2, die angeben, wann die f_i surjektiv sind (siehe jeweils nach den numerierten Definitionen der f_i), nicht nur für Unzerlegbare aus dem je betrachteten $\mathcal{A}_{b,b'}$, sondern sogar für solche aus $\mathcal{A}$; dann sind die f_i natürlich nur partiell definierte Funktionen.
Für später notieren wir, mit den eben vereinbarten Bezeichnungen, noch zwei unmittelbare Folgerungen aus Lemma 5.1.8 und Lemma 8.4.2:

Korollar 8.4.3 *Sei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, sei $U \in \mathcal{A}_{b,b'}$ ein* gewöhnliches *$\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares über einem der vier betrachteten Köcher. Dann hat U für ein geeignetes $p \in k[X]$ (mit $(p, X) = 1$) die Form $U = \mathrm{H}(r)$, mit einem unzerlegbaren Typ $r = r(x)$, der modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$ eine Axiomatisierung der folgenden Gestalt hat:*

$$\begin{array}{l} qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0, \\ p'|x, \text{ für } p' \text{ (Primpotenz) mit } (p', p) = 1, \\ p^{n+1} \nmid p^n x, n \in \omega. \end{array}$$

Dabei ist $X = X_i$ eine beliebige der $m =| b'' |$-vielen eben definierten (partiellen) Operationen, $1 \leq i \leq m$; p hängt von der Wahl von i nicht ab.

Da ein gewöhnliches $\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares U ja in allen $\mathcal{A}_{b,b'}$ liegt, kann man Axiome für U mit jeder der sechs (bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$) bzw. acht, neun, zehn (bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$) Operationen X_i formulieren. – Ein entsprechendes Korollar hat man natürlich zum Beispiel auch für $\mathbf{Q}$.
Beweis: pp-Äquivalenzen erlauben offenbar, Axiomatisierungen zu übertragen. Nun beachte man noch die Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 5.1.8: Da U ein *gewöhnliches* $\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares ist, lassen sich Axiome für den entsprechenden Typ r in dem gewählten X_i formulieren, wobei p von der Wahl von i nicht abhängt. ■

Bei sporadischen Unzerlegbaren – die wegen Lemma 8.4.2 ja vermöge der pp-Äquivalenz gerade einem (X)-adischen m-Zyklus entsprechen – hat man die Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 5.1.8 nicht zur Verfügung; daher kommt man bei einer Axiomatisierung hier nicht mit einem beliebig gewählten X_i (aus $m =| b'' |$-vielen) aus:

Korollar 8.4.4 *Sei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, sei $U \in \mathcal{A}_{b,b'}$ ein* sporadisches *$\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares über einem der vier betrachteten Köcher. Dann hat U die Form $U = \mathrm{H}(r)$ mit einem unzerlegbaren Typ $r = r(x)$, der modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$ eine Axiomatisierung der folgenden Gestalt hat, wobei $X = X_i$ eine geeignete der $m =\mid b'' \mid$-vielen (partiellen) Operationen von eben ist:*

$$\begin{aligned}
&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0,\\
&p|x, \text{ für } p \text{ (Primpotenz) mit } (p, X) = 1,\\
&X^{n+1} \nmid X^n x, n \in \omega,\\
&x \in \mathrm{im}(f_{i-1} \cdot \ldots \cdot f_{i+1}).
\end{aligned}$$

■

Man beachte, daß dieses Korollar nur endlich viele (33 insgesamt) Unzerlegbare betrifft. – Welches die "geeignete" Operation X_i (im Sinne des Korollars) zu einem gegebenen sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren ist, läßt sich mit Hilfe der im Beweis von Lemma 8.4.2 zu findenden Entsprechungen – wann die f_i surjektiv sind – leicht ermitteln (im Stil der nun folgenden Überlegung). – Sei wie immer $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Dann gibt es genau ein (sporadisches) $\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares aus $\mathcal{A}_{b,b'}$, so daß $g = f_m : A_m \to A_1$, $m =\mid b'' \mid$, keine Bijektion (das heißt: nicht surjektiv) ist: Denn die Entsprechungen im Beweis von Lemma 8.4.2 zeigen, daß die Surjektivität von g jeweils äquivalent ist zu einem der γ^{Σ}_{Φ}, $\Phi \in b''$ geeignet. Das Unzerlegbare $\tilde{U}_{\Phi}$ ist also das eindeutig bestimmte $\mathfrak{p}$-adische, in dem g keine Bijektion ist. Es sei mit $\tilde{U}_{b''}$ bezeichnet. (Es gibt für jeden der vier Köcher also genau drei solche, nämlich $\tilde{U}_{b_i}$, $i = 1, 2, 3$.) Zum Beispiel ist im Fall $\tilde{\mathrm{D}}_4$ wegen der Äquivalenz auf Seite 231 $\tilde{U}_{b_3} = \tilde{U}_{V_1,V_4}$. Wegen Korollar 8.4.4 kann man nun umformulieren:

Korollar 8.4.5 *Sei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Dann hat $\tilde{U}_{b''}$ die Form $\tilde{U}_{b''} = \mathrm{H}(r)$ mit einem unzerlegbaren Typ $r = r(x)$, der modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$ eine Axiomatisierung der folgenden Gestalt hat, wobei hier $X = X_m = fg : A_m \to A_m$ ist:*

$$\begin{aligned}
&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0,\\
&p|x, \text{ für } p \text{ (Primpotenz) mit } (p, X) = 1,\\
&X^{n+1} \nmid X^n x, n \in \omega,\\
&x \in \mathrm{im}(f).
\end{aligned}$$

■

Dabei kommt es, wie sich bei der Bestimmung der Topologie zeigen wird, in diesen Korollaren auf die (gemäß Lemma 5.1.8) zugrundeliegende Axiomatisierung des zu einem $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren über $k[X]$ gehörenden Typs gar nicht an; wesentlich ist allein, daß es sich in Korollar 8.4.3 um Axiome eines $\mathfrak{p}$-adischen handelt und daß in Korollar 8.4.4 und Korollar 8.4.5 nur genau ein zusätzliches Axiom auftritt, nämlich "$x \in \mathrm{im}(f_{i-1} \cdot \ldots \cdot f_{i+1})$" (bzw. "$x \in \mathrm{im}(f)$"). – Übrigens zeigen die eben benutzten Entsprechungen (aus dem Beweis von Lemma 8.4.2), zusammen mit den Lemmata, die sagen, wie sich die $\gamma_\Phi^\cap$ bzw. γ_Φ^Σ unter C^+ entsprechen (Lemmata 5.2.4, 5.3.3, 5.4.3 und 5.5.3), auch sofort, daß man die entsprechende Axiomatisierung für einen zu $(C^+)^i(\tilde{U}_{b''})$ gehörenden Typ erhält, indem man in Korollar 8.4.5 die Operation $X = X_m$ durch $X = X_{m+i}$ und $f = f_{m-1} \cdot \ldots \cdot f_1$ durch $f_{m+i-1} \cdot \ldots \cdot f_{i+1}$ ersetzt (alle Indizes natürlich modulo m). – Die im wesentlichen gleiche Tatsache kann man auch so verstehen: Wie Lemma 8.4.1 zeigt, sind C^+ und C^- (totale!) Bijektionen auf $\mathcal{A}_{b,b'}$; denn auf Null abgebildet werden von C^+ nur einige Präprojektive, von C^- nur einige Präinjektive, und diese sind ja nicht in $\mathcal{A}_{b,b'}$. Wegen Satz 4.2.4 sind C^+ und C^- also totale Homöomorphismen auf $\mathcal{A}_{b,b'}$. Bei m-Zyklen sind zwar keine Coxeter-Funktoren definiert, es gibt ja keine Quellen oder Ziele; aber faßt man die m-Zyklen als abgeschlossene Modulklasse in der Klasse der $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$-Moduln auf (mit alternierender Orientierung), gegeben durch, zum Beispiel, "$e_{2,1}, e_{4,3}, \ldots, e_{2m,2m-1}$ bijektiv" (siehe auch den Beweis von Lemma 5.1.1 für eine ähnliche Überlegung), dann bildet der Coxeter-Funktor C^+ zu $\tilde{\mathrm{A}}_{2m-1}$ die Klasse der m-Zyklen und die Teilklasse der m-Zyklen aus Lemma 8.4.2 jeweils auf sich ab (leichte Rechnung) und induziert so eine, ebenfalls mit C^+ bezeichnete, Operation auf den m-Zyklen bzw. der Teilklasse der m-Zyklen aus Lemma 8.4.2. Es gilt dann, wie wieder eine leichte Rechnung zeigt, für die im Moment F_1 genannte pp-Äquivalenz (gemäß Lemma 8.4.2) zwischen der Klasse von m-Zyklen aus Lemma 8.4.2 und der Modulklasse zu $\mathcal{A}_{b,b'}$:

$$C^+F_1 = F_1C^+.$$

In Wirklichkeit ist die Operation von C^+ natürlich sowohl auf der Klasse von m-Zyklen aus Lemma 8.4.2, als auch auf $\mathcal{A}_{b,b'}$ (bzw. der zugehörigen Modulklasse) fast trivial: Die rein-injektiven Unzerlegbaren, die von C^+ bewegt werden, sind genau die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen in $\mathcal{A}_{b,b'}$ und die (X)-adischen m-Zyklen; und zwar wirft C^+ den (X)-adischen m-Zyklus mit "f_i kein Isomorphismus" (das heißt "$f_i = X$") auf denjenigen mit "f_{i+1} kein Isomorphismus". Alle anderen rein-injektiven Unzerlegbaren aus den betrachteten Klassen werden auf sich selbst abgebildet.

Mit der Definition von ϵ von seite 181 gilt das folgende Lemma, dessen Bedeutung erst in den nächsten beiden Abschnitten (und zwar im Zusammenhang mit Korollar 8.5.4 und Lemma 8.6.3) klar werden wird:

Lemma 8.4.6 (∗) *Seien $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, X eine der $m =| b'' |$-vielen durch die pp-Äquivalenz von Lemma 8.4.2 induzierten partiellen Operationen (für rein-injektive Moduln aus $\mathcal{A}$), $M \in \mathcal{A}$ rein-injektiv und X beliebig oft auf $a \in M$ anwendbar.*

i. Ist a durch $X + \epsilon$ beliebig oft teilbar, so liegt a in einem Untermodul von M, in dem $\gamma_b^{\Sigma} \wedge \gamma_{b'}^{\Sigma}$ gilt.

ii. $\delta(M) < 0$ impliziert $a = 0$.

Beweis: Es genügt, wie man sich leicht überlegt, für jede der zwölf Mengen $\mathcal{A}_{b,b'}$ nur jeweils eine der $m = |b''|$-vielen Operationen zu untersuchen, zum Beispiel $Y = X_1 : A_1 \to A_1$. Die Rechnungen sind trivial und einander sehr ähnlich, daher hier nur eine Auswahl (Notation wie im Beweis von Lemma 8.4.2, siehe Abschnitt 9.1):

1. $\tilde{\mathrm{D}}_4$. Aus Symmetriegründen genügt es, etwa $b'' = \{\{V_1, V_4\}, \{V_2, V_3\}\}$, $Y = X_1 = gf$ zu betrachten; es ist $\epsilon = -1$. Die Voraussetzung, daß Y auf a beliebig oft anwendbar ist, ergibt (siehe (1) und (2) auf Seite 231) Elemente a_i und b_i, $0 \leq i$, mit

$$a = a_0, a_i \in V_2, b_i \in V_1, a_i + b_i \in V_3 \text{ und } b_i + a_{i+1} \in V_4$$

für $i \geq 0$. Die Teilbarkeitsvoraussetzung aus i. liefert Elemente a_i und b_i, $i < 0$, mit

$$a_i \in V_2, b_i \in V_1, a_i + b_i \in V_3 \text{ und } b_i + a_{i+1} + a_i \in V_4$$

für $i < 0$.

$M' = (V_0'; V_1', V_2', V_3', V_4')$ und $M'' = (V_0''; V_1'', V_2'', V_3'', V_4'') \leq M'$ seien die Untermoduln von M mit den folgenden V_i' bzw. V_i'':

$$\begin{aligned}
V_0' &= \langle a_i, b_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,; \\
V_1' &= \langle b_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,, \\
V_2' &= \langle a_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,, \\
V_3' &= \langle a_i + b_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,, \\
V_4' &= \langle b_i + a_{i+1} \mid i \geq 0 \rangle + \langle b_i + a_{i+1} + a_i \mid i < 0 \rangle\,. \text{ Und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0'' &= \langle a_i, b_i \mid i \geq 0 \rangle\,; \\
V_1'' &= \langle b_i \mid i \geq 0 \rangle\,, \\
V_2'' &= \langle a_i \mid i \geq 0 \rangle\,, \\
V_3'' &= \langle a_i + b_i \mid i \geq 0 \rangle \text{ und} \\
V_4'' &= \langle b_i + a_{i+1} \mid i \geq 0 \rangle\,.
\end{aligned}$$

Dann ist sofort klar, daß $V_0'' = V_1'' + V_3'' = V_2'' + V_4''$ $(= V_1'' + V_2'' = V_2'' + V_3'')$; wegen Lemma 8.3.3 folgt im Falle der Endlichdimensionalität von M (bzw. M'') also $\delta(M'') = 0$, da mit dem endlichdimensionalen M auch jeder Untermodul von M in $\mathcal{A}$ liegt. Falls $\delta(M) < 0$, so folgt also wegen Lemma 2.2.2 (Untermoduln präprojektiver Moduln sind wieder präprojektiv.) $M'' = 0$, also $a = 0$: Das ist ii.

In M' gelten die entsprechenden Gleichungen wie eben, zusätzlich aber auch $V_0' = V_3' + V_4'$, also folgt $M' \models \gamma_b^\Sigma \wedge \gamma_{b'}^\Sigma$.

2. und 3. $\tilde{\mathrm{E}}_6$ und $\tilde{\mathrm{E}}_7$ schenke ich mir.

4. $\tilde{\mathrm{E}}_8$ i. Hier sei $b'' = b_3$, also $\mid b'' \mid = 2$ und $\epsilon = -1$. Man betrachtet etwa $Y := gf$. Ähnlich wie bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ erhält man – wegen (24) und (25) auf Seite 236 – Elemente

$$a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, l_i, m_i,$$

für $i \geq 0$, und unter den Voraussetzungen von i. des Lemmas sogar für $i \in \mathbf{Z}$, so daß $a = a_0$ und

$$\begin{aligned}
& a_i \in Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4), \\
& b_i \in Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9), \\
& a_i + b_i \in Z_6, \\
& b_i + a_{i+1} \in Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7 \text{ falls } i \geq 0 \text{ und} \\
& b_i + a_{i+1} + a_i \in Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7 \text{ falls } i < 0; \text{ sowie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_i = e_i + f_i, e_i \in X, f_i \in Y_4, \\
& a_i + b_i = c_i + d_i, c_i \in X, d_i \in Z_8, \\
& b_i + a_{i+1}(+a_i) = g_i + h_i, g_i \in Y_4 \cap Z_5, h_i \in Y_3 \cap Z_7 \text{ und} \\
& b_i = l_i + m_i, l_i \in X, m_i \in Z_9.
\end{aligned}$$

Dann sei M' der Untermodul mit den Unterräumen

$$\begin{aligned}
P' &= \langle a_i, b_i, c_i, e_i, g_i, l_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,; \\
Y_3' &= \langle a_i, b_i, e_i, h_i \mid i \rangle \ni f_i, g_i, \\
Y_4' &= \langle g_i, f_i \mid i \rangle\,, \\
X' &= \langle l_i, c_i, e_i \mid i \rangle\,, \\
Z_5' &= \langle a_i, b_i, m_i, d_i, h_i \mid i \rangle \ni c_i, g_i, l_i, \\
Z_6' &= \langle m_i, d_i, h_i, a_i + b_i \mid i \rangle \ni c_i, \\
Z_7' &= \langle m_i, d_i, h_i \mid i \rangle\,, \\
Z_8' &= \langle m_i, d_i \mid i \rangle \text{ und} \\
Z_9' &= \langle m_i \mid i \rangle\,.
\end{aligned}$$

Und sei M'' entsprechend wie eben gebildet, das heißt der Modul mit den Unterräumen, die man erhält, indem man diejenigen von M' mit $\langle a_i, b_i, c_i, e_i, g_i, l_i \mid i \geq 0 \rangle$ schneidet. Dann verifiziert man leicht, daß $M'' \models \gamma_{b_2}^{\Sigma}$ und $M' \models \gamma_{b_2}^{\Sigma} \wedge \gamma_{b_1}^{\Sigma}$ und schließt weiter wie eben.

ii. (das heißt $b'' = b_2$) ist ganz ähnlich.

iii. Sei nun $b'' = b_1$, also $|b''| = 5$ und $\epsilon = -1$. Betrachte wieder $Y = X_1 = gf$, also hier $Y = f_5 f_4 f_3 f_2 f_1$. Die Voraussetzungen ergeben (siehe (29) bis (33) auf Seite 237)

$$\begin{aligned}
a_i &\in Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9), \\
b_i &\in (Y_4 + Y_3 \cap Z_7) \cap (X + Z_9), \\
c_i &\in Y_3 \cap Z_7, \\
d_i &\in Z_7 \cap (X \cap Z_6 + Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)), \\
e_i &\in Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)
\end{aligned}$$

für $i \in \mathbf{Z}$, mit

$$\begin{aligned}
a_i + b_i &\in X, \\
b_i + c_i &\in Y_4, \\
c_i + d_i &\in Z_8, \\
d_i + e_i &\in X \cap Z_6, \\
e_i + a_{i+1} &\in Y_4 \cap Z_5 \text{ (falls } i \geq 0), \\
e_i + a_{i+1} - a_i &\in Y_4 \cap Z_5 \text{ (falls } i < 0)
\end{aligned}$$

und schließlich $a_i = f_i + g_i$ mit $f_i \in X$ und $g_i \in Z_9$. Dann sei M' der Untermodul mit den Unterräumen

$$\begin{aligned}
P' &= \langle a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \mid i \in \mathbf{Z} \rangle\,; \\
Y'_3 &= \langle a_i, b_i, c_i, e_i \mid i \rangle\,, \\
Y'_4 &= \langle b_i + c_i \mid i \rangle + \langle e_i + a_{i+1} \mid i \geq 0 \rangle + \langle e_i + a_{i+1} - a_i \mid i < 0 \rangle\,, \\
X' &= \langle a_i + b_i, d_i + e_i, f_i \mid i \rangle\,, \\
Z'_5 &= \langle a_i, c_i, d_i, e_i, g_i \mid i \rangle \ni f_i, \\
Z'_6 &= \langle c_i, d_i, e_i, g_i \mid i \rangle\,, \\
Z'_7 &= \langle c_i, d_i, g_i \mid i \rangle\,, \\
Z'_8 &= \langle c_i + d_i, g_i \mid i \rangle \text{ und} \\
Z'_9 &= \langle g_i \mid i \rangle\,.
\end{aligned}$$

Und sei wieder M'' analog definiert, nur mit $i \geq 0$ anstelle von $i \in \mathbf{Z}$, insbesondere also $Y''_4 = \langle b_i + c_i, e_i + a_{i+1} \mid i \geq 0 \rangle$.

Dann gilt $M'' \models \gamma^{\Sigma}_{b_2}$ und $M' \models \gamma^{\Sigma}_{b_2} \wedge \gamma^{\Sigma}_{b_3}$; weiter wie eben. ■

8.5 Die Baur-Funktoren

Seien wieder $b, b' \in \{b_1, b_2, b_3\}$, der zugrundeliegende Köcher wiederum einer der vier standardorientierten $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$.

In diesem Abschnitt werden zunächst die Baur-Funktoren definiert; das entscheidende Lemma dazu ist Lemma 8.5.2: Mit seiner Hilfe ergeben sich aus den im letzten Abschnitt gewonnenen Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$ sogar Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}$. Damit erhält man dann sofort Umgebungsbasen für die rein-injektiven Unzerlegbaren in $\mathcal{A}$, zunächst als Mengen von pp-Paaren. – Was $(*)$ bedeutet, steht am Anfang von Kapitel 5.

Definition 8.4 $\mathcal{B}_b(M)$ sei der größte Untermodul N von M mit $N \models \gamma^{\Sigma}_b$. $\mathcal{B}_b$ heißt Baur-Funktor.

$\mathcal{B}_b(M)$ existiert (klar oder siehe im Beweis des nächsten Lemmas); $\mathcal{B}_b$ ist ein Funktor von $k[\Delta]$-Mod nach $k[\Delta]$-Mod. Baur hat in [Bau 80] die $\mathcal{B}_b$ im Falle von Quadrupeln betrachtet.

Lemma 8.5.1 $(*)$ *M sei ein rein-injektiver Modul aus $\mathcal{A}$ (das heißt mit $M \models \gamma^{\cap}$). Dann ist $\mathcal{B}_b(M)$ pp-typ-definierbar, also rein-injektiv, und der größte Untermodul N von M mit $N \models \gamma^{\Sigma}_b \wedge \gamma^{\cap}_b$.*

Beweis: $\mathcal{B}_b(M)$ ist pp-typ-definierbar: Denn sei $b = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$; sei $M_0 := M$ und

$$M_{lm+i} := \sum_{\varphi \in \Phi_i} \varphi(M_{lm+i-1}),$$

für $1 \leq i \leq m$ und $l \geq 0$. Dann ist $\mathcal{B}_b(M)$ Durchschnitt der M_j, $j \geq 0$. – Der Rest ist klar. ■

Lemma 8.5.2 $(*)$ *M sei rein-injektiv aus $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{B}_b(M)$ direkter Summand von M.*

Beweis: Wegen der Lemmata 8.1.2 und 8.1.3 genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{B}_b(U) \in \{0, U\}$ für rein-injektive Unzerlegbare $U \in \mathcal{A}$. Sei also $U \in \mathcal{A}$; man beachte Lemma 8.3.4.

i. Ist $\delta(U) < 0$, so ist mit U auch $\mathcal{B}_b(U)$ endlichdimensional, wegen Lemma 8.3.3 ii. und Lemma 8.5.1 also $\delta(\mathcal{B}_b(U)) = 0$; da (Lemma 2.2.2) Untermoduln Präprojektiver aber wieder präprojektiv sind, folgt $\mathcal{B}_b(U) = 0$.

ii. Ist U gewöhnliches stetiges Unzerlegbares, gewöhnliches $\mathfrak{p}$-adisches oder gewöhnlicher Prüfer, so gilt γ^Σ in U, also erst recht γ_b^Σ, und so folgt trivialerweise $\mathcal{B}_b(U) = U$.

iii. Ist $U = \tilde{U}_\Phi$, mit $\Phi \notin b$, so gilt wieder trivialerweise $\mathcal{B}_b(U) = U$.

iv. Es bleibt nun zu zeigen, daß $\mathcal{B}_b(U) = 0$, falls $U = \tilde{U}_\Phi$, $\Phi \in b$. Wegen Lemma 8.5.1 ist $\mathcal{B}_b(U)$ rein-injektiv. Angenommen $\mathcal{B}_b(U) \neq 0$; dann hat $\mathcal{B}_b(U)$ also (Lemma 8.1.2) einen rein-injektiven unzerlegbaren direkten Summanden U'. U' liegt als Untermodul von U wieder in $\mathcal{A}$, und als direkter Summand von $\mathcal{B}_b(U)$ erfüllt U' die Gleichung γ_b^Σ. Nun folgt die Behauptung aus dem nächsten Lemma. ■

Lemma 8.5.3 $(*)$ *Sei $U = \tilde{U}_\Phi$, $\Phi \in b$, sei U' rein-injektiv unzerlegbar und $U' \leq U$ (also $U' \in \mathcal{A}$) mit $U' \models \gamma_b^\Sigma$. Dann ist $U' = 0$.*

Da U und U' nach dem schon Gezeigten ganz konkret gegeben sind, ebenso wie γ_b^Σ, liegt es nahe zu sagen: Nachrechnen! Ich will dennoch einen vollständigen Beweis geben. Dabei sind die Fälle $\tilde{\mathrm{D}}_4$ und $\tilde{\mathrm{E}}_6$ mühsamer als $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, da hier wirklich gerechnet werden muß; $\tilde{\mathrm{E}}_7$ bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_8$ dagegen führt man "induktiv" leicht auf $\tilde{\mathrm{E}}_6$ bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$ zurück. (Hätte man Baur-Funktoren auch für $\tilde{\mathrm{A}}_n$ definiert, dann würde sich die Mühsal des "Induktionsanfangs" von $\tilde{\mathrm{D}}_4$ und $\tilde{\mathrm{E}}_6$ auf $\tilde{\mathrm{A}}_n$ verlagern.)

Beweis: U erfüllt alle γ_Ψ^Σ bis auf $\Psi = \Phi$; U' erfüllt alle γ_Ψ^Σ bis auf eventuell ein $\Psi \notin b$. Jedenfalls gibt es ein $b' \neq b$, so daß $U, U' \models \gamma_{b'}^\Sigma$.

i. $\tilde{\mathrm{D}}_4$: Aus Symmetriegründen genügt es, die folgende Situation zu untersuchen: $b = \{\{V_1, V_4\}, \{V_2, V_3\}\}$, $U = \tilde{U}_{\{V_2,V_3\}}$, und U' erfüllt alle γ_Ψ^Σ bis auf eventuell $\Psi = \{V_1, V_3\}$. Insbesondere sind U und U' im Bild des Funktors $D = D_{1,2}$, und U hat wegen Lemma 5.2.7 und der Diskussion in Abschnitt 8.3 die Form

$$D_{1,2}\left(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & W_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul] \arrow[ur, "X"'] & \end{tikzcd}\right)$$

mit $W = W_i = k\tilde{[X]}_{(X)}$, $e_{2,1} = X$ und $e_{2,3} = e_{4,3} = e_{4,1} = 1$; da $D'_{1,2}$ Injektionen erhält, hat (wieder mit Lemma 5.2.7) U' ohne Einschränkung die Gestalt

$$D_{1,2}\left(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & W'' \arrow[dl, "="] \arrow[dr, "="'] & \\ W'' & & W'' \\ & W' \arrow[ul] \arrow[ur, "\simeq", "X"'] & \end{tikzcd}\right)$$

mit Untervektorräumen $W' \leq W'' \leq W = k\tilde{[X]}_{(X)}$. Weil $X : W' \to W''$ Isomorphismus ist, folgt aber, daß Elemente aus W'' von X-Höhe ∞ sind (das heißt beliebig oft durch X teilbar); also ist $W'' = 0$, also $W' = 0$ und $U' = 0$.

ii. $\tilde{\mathrm{E}}_6$: Wegen Lemma 5.3.4 und Lemma 5.3.3 gilt, daß $U, U' \in \operatorname{im} S$ oder $U, U' \in \operatorname{im} C^- S$. Ohne Einschränkung seien $U, U' \in \operatorname{im} S$. (Das ist eine zulässige Annahme: Im folgenden wird benutzt, daß der "Umkehrfunktor" S' zu S Injektionen erhält; aber das tut auch der entsprechende "Umkehrfunktor" zu $C^- S$, nämlich $S' C^+$.)

Ist $b = b_1$ oder $b = b_2$, so argumentiert man ganz analog wie eben. Sei also $\Phi \in b = b_3$, das heißt also nach der eben gemachten Annahme $\Phi = \{F_1, F_2, F_3\}$ und entsprechend $U = \tilde{U}_{\{F_1,F_2,F_3\}}$. U' erfüllt alle γ_Ψ^Σ bis auf eventuell ein $\Psi \notin b_3$, etwa bis auf eventuell $\Psi = \{E_2, F_1\}$. Da S' Injektionen erhält, kann man annehmen, daß $U = S(M)$ und $U' = S(M')$ mit reininjektiven Unzerlegbaren (über $\tilde{\mathrm{A}}_5$) $M' \leq M$. Dabei sind wegen Lemma 5.3.5 in M' alle $e_{i,j}$ Isomorphismen bis auf eventuell $e_{2,1}$.

Behauptung: M hat die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& W & W \arrow[l] \arrow[dr] & \\
W \arrow[ur] \arrow[dr] & & & W \\
& W & W \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

mit $W = k\widetilde{[X]}_{(X+1)}$.
Beweis der Behauptung: Wieder wegen Lemma 5.3.5 ist klar, daß M die angegebene Form hat, mit einem geeigneten $k[X]$-Modul W. Dieses W muß natürlich ein $\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares $k\widetilde{[X]}_{\mathfrak{p}}$ sein; es gilt, $\mathfrak{p}$ zu identifizieren. Eine leichte Rechnung im Stile von Lemma 5.3.5 zeigt aber, daß $S(M) = U \not\models \gamma^{\Sigma}_{\{F_1,F_2,F_3\}}$ gerade bedeutet, daß nicht alle Elemente von W die $(X+1)$-Höhe ∞ haben: Es ist also $\mathfrak{p} = (X+1)$. Außerdem sind ohne Einschränkung alle $e_{i,j} = 1$, bis auf $e_{2,1} = X$ – denn die Unzerlegbaren mit $W_i = W = k\widetilde{[X]}_{(X+1)}$ für alle i und $e_{i,j} = X$ für ein anderes Paar (i,j) sind isomorph zu M. Das beweist die Behauptung.

M' ist damit von der Form

$$\begin{tikzcd}
& W' & W' \arrow[l] \arrow[dr] & \\
W' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & W' \\
& W' & W' \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

mit einem Untervektorraum $W' \leq W$, der $XW' \leq W'$ erfüllt, also $k[X]$-Untermodul ist. Außerdem ergibt die Gültigkeit von $\gamma^{\Sigma}_{\{F_1,F_2,F_3\}}$ in $S(M') = U'$, daß Elemente von W' die $(X+1)$-Höhe ∞ haben, somit $W' = 0$ und $U' = 0$.

iii. $\tilde{\mathrm{E}}_7$: Wie eben sind ohne Einschränkung U und U' im Bild des Funktors S_7 (sonst betrachte $C^- S_7$ oder T_7). Weil S_7' Injektionen erhält, sind $U = S_7(M)$ und $U' = S_7(M')$ mit rein-injektiven Unzerlegbaren $M \geq M'$ über $\tilde{\mathrm{E}}_6$; Lemma 5.4.5 zeigt, daß aus $U = \tilde{U}_\Phi$ mit $\Phi \in b$ folgt, daß dann $M = \tilde{U}_{\Phi'}$ mit $\Phi' \in b$ (Vorsicht: b's über verschiedenen Köchern!). Ebenso übersetzt sich die Bedingung γ^{Σ}_{Ψ}, die von U' eventuell nicht erfüllt wird, in eine entsprechende für M'. Nach der Analyse von eben folgt $M' = 0$ und also $U' = 0$.

iv. $\tilde{\mathrm{E}}_8$: Vollkommen analog zu iii. Die Bezeichnungen für die b_i sind gerade so gewählt, daß diesmal Lemma 5.5.6 – statt wie eben Lemma 5.4.5 – alles liefert. ■

Nun kann man leicht Axiomatisierungen wie in Korollar 8.4.3, Korollar 8.4.4 oder Korollar 8.4.5 angeben, nun aber *sogar modulo $\mathcal{A}$, nicht nur modulo*

$\mathcal{A}_{b,b'}$: Sei etwa U ein $\mathfrak{p}$-adisches Unzerlegbares über einem der vier betrachteten Köcher. Dann liegt U in einem geeigneten $\mathcal{A}_{b,b'}$ (wie nach Lemma 8.4.1 bemerkt); mit Korollar 8.4.3 bzw. Korollar 8.4.4 erhält man so eine Axiomatisierung Ξ_1 (modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$!) eines unzerlegbaren Typs r, so daß $U = \mathrm{H}(r)$. Lemma 8.5.1 liefert die Existenz eines partiellen Typs, der $\mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$ in M (uniform) typ-definiert, etwa Ξ_2. Die Vereinigung Ξ von Ξ_1 und Ξ_2 ist dann eine Axiomatisierung von r modulo $\mathcal{A}$: Denn sei a eine Realisierung von Ξ in einem rein-injektiven Modul M aus $\mathcal{A}$. Wegen Ξ_2 liegt a schon in $\mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$, das ein rein-injektiver Modul aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ (Lemma 8.5.1) ist. Wegen Ξ_1 enthält $\mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$ auf die gewünschte Weise eine Kopie von U als direkten Summanden; da wegen Lemma 8.5.2 $\mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$ wiederum direkter Summand in M ist, hat man also in der Tat die gesuchte Kopie von U als direkten Summanden in M. – Aus dieser Axiomatisierung des irreduziblen Typs r von U (in $\mathcal{A}$) erhält man nun sofort eine Umgebungsbasis (als Menge von pp-Paaren) von U in $\mathcal{A}$.

Auf Ξ_2 kann man aber sogar verzichten, denn es gilt das sehr erfreuliche

Korollar 8.5.4 *Die Axiomatisierungen für sporadische $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare in Korollar 8.4.3 (bzw. Korollar 8.4.4, bzw. Korollar 8.4.5) sind Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}$, nicht nur modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$.*

Beweis: Daß die angegebenen Axiome sogar eine Axiomatisierung modulo $\mathcal{A}$ und nicht nur für ein geeignetes $\mathcal{A}_{b,b'}$ wie dort ergeben, liegt an Lemma 8.4.6 i.: Denn sei a eine Realisierung dieser Axiome in einem rein-injektiven M aus $\mathcal{A}$; sei X wie in Korollar 8.4.3 (bzw. Korollar 8.4.4, bzw. Korollar 8.4.5). Zu zeigen ist nur, daß a in $\mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$ liegt: Dann nämlich schließt man weiter wie in der Überlegung eben, vor dem Korollar. Aber wegen der Axiome ist X insbesondere beliebig oft auf a anwendbar und a beliebig oft durch $X + \epsilon$ teilbar; letzteres, weil ϵ gerade so definiert wurde, daß die zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ gehörende Modulklasse pp-äquivalent ist zu m-Zyklen, die unter anderem "$X + \epsilon$ bijektiv" erfüllen (siehe den Zusatz in Lemma 8.4.2). Mit Lemma 8.4.6 i. folgt, daß a in einem geeigneten Untermodul von M liegt, der $\gamma_b^\Sigma \wedge \gamma_{b'}^\Sigma$ erfüllt. Wegen Lemma 8.5.1 ist $a \in \mathcal{B}_b\mathcal{B}_{b'}(M)$. ■

Interessiert man sich lediglich für Umgebungsbasen der *gewöhnlichen* $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren, dann kann man viel einfacher vorgehen: Die gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen liegen in allen $\mathcal{A}_{b,b'}$ und damit in der durch $\gamma^\cap \wedge \gamma^\Sigma$ definierten abgeschlossenen Menge; sie sei für den Moment mit $\mathcal{A}_{b,b',b''}$ bezeichnet; das sporadische $\tilde{U}_\Phi$ mit $\Phi \in b''$ ist dagegen zum Beispiel nur in

$\mathcal{A}_{b,b'}$, wobei wieder $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Die $\mathcal{A}_{b,b',b''}$ entsprechende Modulklasse ist aber pp-äquivalent zu einer geeigneten Klasse von $k[X]$-Moduln: Jede der jeweils drei pp-Äquivalenzen aus dem Beweis von Lemma 8.4.2 induziert zum Beispiel eine solche pp-Äquivalenz, aber Lemma 8.4.2 (ebenso wie Lemma 5.1.8) ist dafür in Wirklichkeit gar nicht nötig, denn die Funktoren aus Kapitel 5 zeigen dies direkt. Man erhält dann sofort Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}_{b,b',b''}$, mit dem Argument von eben also auch modulo $\mathcal{A}$ und somit Umgebungsbasen der gewöhlichen $\mathfrak{p}$-adischen in $\mathcal{A}$.

In den verbleibenden Abschnitten werden die Umgebungsbasen nun als Teilmengen von $\mathcal{A}$ genauer bestimmt:

Behauptung: Zur Beschreibung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ als topologischer Raum, Δ einer der Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ *mit beliebiger Orientierung* genügt es, in den vier Fällen der *standardorientierten* $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ die Topologie des Abschlusses der Menge der präprojektiven Unzerlegbaren zu bestimmen.

Beweis der Behauptung: Wegen der Behauptung am Ende von Abschnitt 8.3 genügt die Beschreibung der Topologie von $\mathcal{A}$. Und wegen Korollar 6.2.7 i. und Lemma 8.3.4 ist $\mathcal{A} \setminus \{U \in \mathcal{A} \,|\, U \text{ präprojektiv}\}$ bereits von endlich vielen abgeschlossenen Mengen überdeckt, deren zugehörige Modulklassen pp-äquivalent zu $k[X]$-Moduln sind, deren Topologie also bekannt ist. Das zeigt die Behauptung.

Das heißt, daß im Rest dieses Kapitels lediglich noch das Häufungsverhalten der präprojektiven Unzerlegbaren bezüglich der unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$ ermittelt werden muß. (Die endlichdimensionalen Unzerlegbaren sind isoliert, also nur dann im Abschluß der Menge aller Präprojektiven, wenn sie selbst schon präprojektiv sind.)

8.6 Prüfer und gewöhnliche $\mathfrak{p}$-adische

In diesem Abschnitt wird das Häufungsverhalten der Präprojektiven bezüglich der gewöhnlichen Prüfer und der gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen ermittelt (Lemma 8.6.4 und Lemma 8.6.5). Dies ist der relativ einfache Teil des Projekts, aus den im letzten Abschnitt gewonnenen Axiomatisierungen genauere Informationen zum tatsächlichen Häufungsverhalten zu gewinnen. Dazu zunächst zwei Lemmata; hier ist X noch eine beliebige partielle Operation.

Lemma 8.6.1 *Sei V ein k-Vektorraum; X sei eine auf V pp-definierbare partielle (k-lineare) Operation. Sei*

$$V_l := \{v \in V \mid X \text{ ist } l\text{-mal auf } v \text{ anwendbar}\},$$

sei $0 \neq f \in k[X]$ *von Grad* n *und* $a \in V$.

i. $f \cdot a \in V_l$ *impliziert* $a \in V_{l+n} \subseteq V_l$.

ii. $f \cdot a = 0$ *impliziert* $a \in \bigcap_l V_l$.

Beweis: ii. folgt sogleich aus i. Zu i.: V_l ist Untervektorraum von V; sei $f = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0$. Durch Induktion nach $i \leq l$ zeigt man, daß $a \in V_{i+n}$: Da $f \cdot a$ wohldefiniert ist, hat man $a \in V_n$. Sei $a \in V_{i+n}$ schon für $i < l$ gezeigt; somit $\alpha_0 \cdot a, \ldots, (\alpha_{n-1}X^{n-1}) \cdot a \in V_{i+1}$, folglich $(\alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0) \cdot a \in V_{i+1}$. Wegen $l \geq i+1$ ist auch $f \cdot a \in V_{i+1}$, also $X^n \cdot a = (f - (\alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0)) \cdot a \in V_{i+1}$, und das impliziert $a \in V_{i+1+n}$. ■

Lemma 8.6.2 *Sei* $\mathcal{M}$ *eine Familie endlichdimensionaler* k*-Vektorräume,* X *eine (uniform) pp-definierbare partielle Operation auf den* $M \in \mathcal{M}$*.* X *sei auf allen* $M \in \mathcal{M}$ *torsionsfrei; und für jedes* l *gebe es* $M \in \mathcal{M}$ *mit* $M_l \neq 0$*. (*M_l *ist im vorigen Lemma definiert.) Dann gibt es zu jeder offenen Umgebung* $O = (\varphi/\psi)$ *eines* $\mathfrak{p}$*-adischen* $k[X]$*-Unzerlegbaren Moduln* $M \in \mathcal{M}$*, so daß* $M \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$.

Beweis: Sei F der (pp)-Funktor, der einem $M \in \mathcal{M}$ den (endlichdimensionalen) Kronecker-Modul

$$\mathrm{dom}(X) \overset{1}{\underset{X}{\rightrightarrows}} M$$

zuordnet. Die Torsionsfreiheit bedeutet unter anderem, daß $X : \mathrm{dom}(X) \to M$ injektiv ist; $F(M)$ ist also direkte Summe von präprojektiven Unzerlegbaren und von Unzerlegbaren aus $A_1 \cup A_2$ (definiert in Lemma 5.1.5). Letztere “sind” aber endlichdimensionale $k[X]$-Moduln (genauer: sind pp-bi-interpretierbar mit $k[X]$-Moduln; man beachte die Sprechweise von Seite 80), haben also Torsion, können also nach Voraussetzung in der Zerlegung von $F(M)$ nicht auftreten: $F(M)$ ist direkte Summe präprojektiver Unzerlegbarer P_i (definiert vor Lemma 5.1.5).

Sei $l \geq 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung $M \in \mathcal{M}$ mit $M_l \neq 0$; wie man leicht sieht, folgt dann, daß in der Zerlegung von $F(M)$ in unzerlegbare Präprojektive ein P_i mit $i \geq l$ (siehe vor Lemma 5.1.5) vorkommt. Das heißt: In den Zerlegungen der $F(M)$, $M \in \mathcal{M}$, in Unzerlegbare treten Präprojektive beliebig großer Dimension auf. Da im Abschluß jeder unendlichen Menge von präprojektiven Kronecker-Moduln jedes $\mathfrak{p}$-adische liegt (Satz 8.2.1), folgt nun die Behauptung. ■

X sei von nun wieder eine der 33 partiellen Operationen X_i wie auf Seite 181; auch die sonstigen Notationen seien wie bisher.

Lemma 8.6.3 *Ist M präprojektiv, dann ist X auf M torsionsfrei.*

Beweis: Sei $a \in M$, $0 \neq f \in k[X]$ und $f \cdot a = 0$. Wegen Lemma 8.6.1 ii. ist dann X beliebig oft auf a anwendbar; nach Lemma 8.4.6 ii. folgt $a = 0$. Das ist die Torsionsfreiheit für die Präprojektiven aus $\mathcal{A}$. (Für die endlich vielen Präprojektiven nicht in $\mathcal{A}$ gilt Lemma 8.6.3 trivialerweise, wie eine direkte Verifikation zeigt; insbesondere ist X auf Präprojektiven nämlich stets eine partielle Operation.) ■

Daß dies Lemma also in der Tat ohne Stern $(*)$ gilt, ist natürlich ganz belanglos.

Aus dem Bisherigen erhält man nun leicht, jedenfalls im Prinzip, Umgebungsbasen (als Teilmengen von $\mathcal{A}$) der (gewöhnlichen) Prüfer aus $\mathcal{A}$ (Zur Erinnerung: Die Prüfer in $\mathcal{A}$ sind genau die gewöhnlichen Prüfer, siehe Lemma 8.3.4.), sowie genauere Informationen zum Häufungsverhalten der Präprojektiven bezüglich der *gewöhnlichen* $\mathfrak{p}$-adischen:

Sei U zunächst gewöhnlicher Prüfer. U ist dann sogar in allen $\mathcal{A}_{b,b'}$ – ein geeignetes genügte –, und via der pp-Äquivalenz von Lemma 8.4.2 entspricht U einem geeigneten Prüfer-m-Zyklus; siehe Abschnitt 5.1.1 und vor Lemma 5.1.7. Die Torsionsaussage, die für diesen m-Zyklus gilt, übersetzt sich vermöge der pp-Äquivalenz in eine entsprechende Torsionsaussage für eine geeignete der betrachteten 33 partiellen Operationen. (Da U gewöhnlicher Prüfer ist, handelt es sich jedenfalls nicht um X-Torsion, aber das ist hier ohne Belang. – Und wie nach Lemma 5.1.8 sieht man, daß sich diese Torsionsaussage zum Beispiel in X_m formulieren läßt: das ist ebenfalls aber nicht wichtig.) Wegen Lemma 8.6.3 definiert diese Torsionsaussage also eine offene Umgebung von U ohne Präprojektive. Ist U sporadisch, etwa $U = U_\Phi^\infty$, dann liefert die Gleichung $\gamma_\Phi^\cap$ eine solche Umgebung (wegen Lemma 8.3.3 iii.); es folgt also

Korollar 8.6.4 *Jeder Prüfer hat eine offene Umgebung ohne Präprojektive.* ■

Es ist klar, daß man nun leicht Umgebungsbasen (in $\mathcal{A}$) für die Prüfer in $\mathcal{A}$, also die gewöhnlichen Prüfer, angeben kann: Denn, wie schon im

Beweis der Behauptung am Ende von Abschnitt 8.5 benutzt, $\mathcal{A} \setminus \{U \in \mathcal{A} \,|\, U$ präprojektiv$\}$ ist in einer endlichen Vereinigung abgeschlossener Mengen mit bekannter Topologie enthalten.

Und zum Häufungsverhalten bezüglich der gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren hat man

Lemma 8.6.5 *Der Abschluß $\overline{\mathcal{U}}$ jeder unendlichen Menge $\mathcal{U}$ von Präprojektiven enthält alle gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen und* $\mathbf{Q}$.

Dieses Lemma und sein gleich folgender Beweis werden im nächsten Abschnitt verallgemeinert: Satz 8.7.2

Beweis: X sei wieder eine der auf Seite pagerefzusabb definierten partiellen Operationen X_i (auf Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$). Man verifiziert mittels [DF 73] leicht, daß $\mathcal{U}$ für jedes l Präprojektive U mit $U_l \neq 0$ enthält. Damit folgt die Behauptung über die gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen nun so: Die Axiome (modulo $\mathcal{A}$) für einen zu einem gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren gehörenden unzerlegbaren Typ sind gerade die eines zu $k\tilde{[X]}_{\mathfrak{p}}$ gehörenden unzerlegbaren Typs, $\mathfrak{p} \neq (X)$ geeignet (Lemma 5.1.7, Korollar 8.4.3 und Korollar 8.5.4). Da wegen Lemma 8.6.3 die Operation X torsionsfrei auf Präprojektiven ist, liefert nun Lemma 8.6.2 die Behauptung. – Die Aussage über $\mathbf{Q}$ ist klar, da $\mathbf{Q}$ im Abschluß jedes unendlichdimensionalen Punktes ist. ∎

Wie schon mehrfach bemerkt, kommt es also wegen Lemma 8.6.2 auf die spezielle Axiomatisierung der $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren über $k[X]$ (Lemma 5.1.7) gar nicht an.

8.7 Die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen. Teil I

Wegen der Behauptung (sowie der sich anschließenden Bemerkung) am Ende von Abschnitt 8.5 genügt es ja, das Häufungsverhalten der Präprojektiven bezüglich der unendlichdimensionalen rein-injektiven Unzerlegbaren aus $\mathcal{A}$ zu untersuchen. Im vorigen Abschnitt wurde dies für die gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen, die gewöhnlichen Prüfer und $\mathbf{Q}$ erledigt. Wegen Lemma 8.3.4 bleibt somit nur noch das Häufungsverhalten der Präprojektiven bezüglich sporadischer $\mathfrak{p}$-adischer zu studieren: Die Schwierigkeit besteht dabei schlicht darin, daß die Axiomatisierung (modulo $\mathcal{A}$) eines zu einem sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren gehörenden Typs nicht nur aus Axiomen von $k\tilde{[X]}_{(X)}$ (für geeignetes $X = X_i$) besteht, sondern noch ein zusätzliches Axiom aufweist, nämlich $x \in \mathrm{im}(f_{i-1} \cdot \ldots \cdot f_{i+1})$ (Korollar 8.4.4 und 8.5.4). Und in der Tat enthält für eine unendliche Menge $\mathcal{U}$ präprojektiver Unzerlegbarer der Abschluß $\overline{\mathcal{U}}$ im allgemeinen nicht alle sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen, wie das gleich folgende Beispiel zeigen wird, das ich Herrn Ringel ([Rin 93]) verdanke. Man vergleiche dies mit Lemma 8.6.5. – Nun zum weiteren Inhalt: Dieser Abschnitt enthält mit Satz 8.7.2, seinem Hauptergebnis, eine Verschärfung von Satz 8.6.5, löst das Problem der Topologie im Fall $\tilde{\mathrm{D}}_4$ vollständig (Satz 8.7.3) und in den übrigen Fällen teilweise. Am Schluß wird dann noch gezeigt, wie man die Ergebnisse dieses Abschnitts sämtlich aus Satz 8.8.12 erhalten kann. Wenn man will, ist dieser Abschnitt somit überflüssig; denn nach Satz 8.8.12 wird erklärt, warum dessen Beweis die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht wirklich verwendet.

Δ sei wieder einer der vier standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$; auch die übrigen Bezeichnungen seien wie bisher; siehe unter anderem Seite 181. – Erinnert sei auch an die Bedeutung von $(*)$; siehe gleich zu Beginn von Kapitel 5.

Beispiel: ([Rin 93]) $\mathcal{U}$ sei die Menge der präprojektiven Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{A}}_3$ mit Dimensionstyp (in suggestiver Notation)

$$\begin{tikzcd} & l \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ l+1 & & l. \\ & l \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Bei diesen Unzerlegbaren sind stets $e_{2,1}$ und $e_{4,1}$ bijektiv; nach Identifikation via $e_{2,1}$, $e_{4,1}$, das heißt vermöge einer geeigneten pp-Äquivalenz, “sind” dies gerade die präprojektiven unzerlegbaren Kronecker-Moduln, siehe die Sprechweise von Seite 80.Insbesondere liegt das (“sporadische”) $\mathfrak{p}$-adische

$$\begin{tikzcd} & W_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul] \arrow[ur, "X"'] & \end{tikzcd}$$

mit $W_i = k[\tilde{X}]_{(X)}$ nicht in $\overline{\mathcal{U}}$, anders als etwa

$$\begin{tikzcd} & W_4 \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(wie die Analyse bei Kronecker-Moduln zeigt, Satz 8.2.1).

Eigentlich werden hier ja nur $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ untersucht. Aber das eben beschriebene Phänomen ist natürlich nicht auf $\tilde{\mathrm{A}}_3$ beschränkt: Mittels des Funktors $D_{1,2} = D$ in die Sprache von Quadrupeln übersetzt, hat man nämlich eine unendliche Menge $\mathcal{U}$ von Präprojektiven mit Dimensionstyp

$$\begin{tikzcd} l \arrow[dr] & & l \arrow[dl] \\ & 2l+1 & \\ l+1 \arrow[ur] & & l \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

die sämtlich $V_0 = V_2 \oplus V_3$ erfüllen (Lemma 5.2.7), so daß zwar $\tilde{U}_{\{V_1,V_4\}} \in \overline{\mathcal{U}}$, aber $\tilde{U}_{\{V_2,V_3\}} \notin \overline{\mathcal{U}}$; man beachte, daß bei Quadrupeln $b_3 = \{\{V_1, V_4\}, \{V_2, V_3\}\}$. Das ist kein Zufall, denn es gilt:

Satz 8.7.1 *Sei $\mathcal{U}$ eine unendliche Menge präprojektiver Unzerlegbarer. Für jedes $b'' \in \{b_1, b_2, b_3\}$ ist $\overline{\mathcal{U}} \cap \{\tilde{U}_\Phi \mid \Phi \in b''\} \neq \emptyset$.*

Man kann dies als Verallgemeinerung von Lemma 8.6.5 auffassen: Die Menge $o = \{\tilde{U}_\Phi \mid \Phi \in b''\}$ ist eine Bahn unter der Operation von C^- (bzw. C^+); für gewöhnliche $\mathfrak{p}$-adische U ist $\{U\}$ selbst eine solche Bahn unter C^-. Auch der Beweis von Satz 8.7.1 verallgemeinert denjenigen von 8.6.5: Tatsächlich wird im Beweis von Satz 8.7.1 nämlich eigentlich gar nicht wirklich verwandt, daß es sich um eine Bahn von *sporadischen* handelt. Man erhält deshalb mit dem gleichen Beweis – oder Satz 8.7.1 und Lemma 8.6.5 zusammenfassend:

Satz 8.7.2 *Sei $\mathcal{U}$ eine unendliche Menge präprojektiver Unzerlegbarer und o eine Bahn (bzgl. C^-) von $\mathfrak{p}$-adischen. Dann ist $\overline{\mathcal{U}} \cap o \neq \emptyset$.* ■

Beweis: (von Satz 8.7.1) Es sei etwa die Länge der Bahn $o = \{\tilde{U}_\Phi \mid \Phi \in b''\}$, also $|b''| = |\, o \,|$, gleich zwei (sonst vollkommen analog) und $o = \{U = \mathrm{H}(r) = \tilde{U}_{b''}, U' = \mathrm{H}(r') = C^+(\tilde{U}_{b''})\}$; für die Definition von $\tilde{U}_{b''}$ siehe vor Korollar 8.4.5. Dann hat $r = r(x)$ modulo $\mathcal{A}$ die Axiomatisierung

$$\begin{aligned}
&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0,\\
&p|x, \text{ für } p \text{ (Primpotenz) mit } (p, X) = 1,\\
&X^{n+1} \nmid X^n x, n \in \omega,\\
&x \in \mathrm{im}(f),
\end{aligned}$$

wobei hier, in der üblichen Notation (Seite 181), $X = X_2 = fg : A_2 \to A_2$; und $r' = r'(y)$ hat modulo $\mathcal{A}$ Axiome

$qy \neq 0, q \in k[Y], q \neq 0,$
$p|y,$ für p (Primpotenz) mit $(p, Y) = 1,$
$Y^{n+1} \nmid Y^n y, n \in \omega,$
$x \in \mathrm{im}(g),$

mit $Y = gf = X_1 : A_1 \to A_1$ (Korollar 8.4.5 und die Bemerkung danach, sowie Korollar 8.5.4). Da diese Axiome nur in Präprojektiven ausgewertet werden sollen und diese torsionsfrei sind (Lemma 8.6.3), kann man die Axiome $X^{n+1} \nmid X^n x, n \in \omega$, ersetzen durch $X \nmid x$; entsprechend für Y. Seien also endlich viele Axiome für r gegeben, ohne Einschränkung eine disjunkte Vereinigung der Form

$$\Theta \mathbin{\dot\cup} \{x \in \mathrm{im}(f)\} \mathbin{\dot\cup} \{X \nmid x\}.$$

Θ' werde aus Θ durch Ersetzen von X durch Y und von x durch y gebildet; Θ' sind dann endlich viele Axiome für r'. Sei noch n das Maximum der Grade von Polynomen, die in Θ vorkommen. Man argumentiert nun zunächst wie im Beweis von Lemma 8.6.5 – benutzt also im wesentlichen nur Lemma 8.6.2 – und erhält so $a \in U \in \mathcal{U}$, das $\Theta \mathbin{\dot\cup} \{X \nmid x\}$ erfüllt und so daß außerdem X mindestens $n+1$-mal auf a anwendbar ist (das heißt $a \in U_{n+1}$). Man überlegt sich leicht, daß nun $a' := g(a) \in U \in \mathcal{U}$ (wohldefiniert!) gerade Θ' erfüllt. Und es gilt, daß a die endlich vielen Axiome

$$\Theta \mathbin{\dot\cup} \{x \in \mathrm{im}(f)\} \mathbin{\dot\cup} \{X \nmid x\}$$

genau dann nicht erfüllt, wenn $a \notin \mathrm{im}(f)$, genau dann wenn $a' \notin \mathrm{im}(Y)$, genau dann wenn $Y \nmid a'$, genau dann wenn also a' die Axiome

$$\Theta' \mathbin{\dot\cup} \{y \in \mathrm{im}(g)\} \mathbin{\dot\cup} \{Y \nmid y\}$$

erfüllt. Das genügt. ∎

Satz 8.7.2 liefert nun die Topologie im Falle von $\tilde{\mathrm{D}}_4$: Es bleibt ja, wie eingangs dieses Kapitels bemerkt, nur noch das Häufungsverhalten der Präprojektiven bezüglich sporadischer $\mathfrak{p}$-adischer zu untersuchen. Korollar 6.2.7 iii. und Satz 8.2.1 – oder die Behauptung am Ende dieses Abschnitts – zeigen, daß sogar lediglich noch das Häufungsverhalten der präprojektiven Unzerlegbaren mit Defekt $\delta = -2$ zu bestimmen ist. Aus [GP 72] (oder [GP 71], der Kurzversion von [GP 72] ohne Beweise) liest man ab, daß dies genau die

$$\{(C^-)^l V = (V_0^{-l}; V_1^{-l}, \ldots, V_4^{-l}) \mid l = 0, 1, 2 \ldots\}$$

sind, wobei V das Quadrupel

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ & k & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ist. (k bezeichnet hier den Körper, keine Zahl!) Insbesondere ist – wie Tatsache 5.2.2 zeigt – jedes $(C^-)^l V$ invariant unter Permutationen der Unterräume V_i^{-l}. Andererseits ist klar, daß die $\tilde{U}_\Phi$ durch geeignete Permutationen der Unterräume ineinander übergehen (denn dadurch werden Unzerlegbarkeit, Rein-Injektivität etc. erhalten, und somit folgt alles aus der Eindeutigkeit der $\tilde{U}_\Phi$ im Sinne von Lemma 8.3.1). Man erhält also mit Satz 8.7.2

Satz 8.7.3 *Für jede unendliche Teilmenge $\mathcal{U}$ von unzerlegbaren Quadrupeln mit Defekt $\delta = -2$ gilt, daß $\overline{\mathcal{U}}$ alle $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren enthält.* ■

Alternativ kann man auch so argumentieren: In [GP 72] sind die $(C^-)^l V = (V_0^{-l}; V_1^{-l}, \dots, V_4^{-l})$ ganz explizit angegeben:

$$V_0^{-l} = \langle x_1, \dots, x_{l+1}, y_1, \dots, y_l \rangle\,;$$

$$\begin{aligned} V_1^{-l} &= \langle x_1, \dots, x_l \rangle\,, \\ V_2^{-l} &= \langle y_1, \dots, y_l \rangle\,, \\ V_3^{-l} &= \langle x_2 + y_1, \dots, x_{l+1} + y_l \rangle\,, \\ V_4^{-l} &= \langle x_1 + y_2, \dots, x_{l-1} + y_l, x_l + x_{l+1} \rangle\,, \end{aligned}$$

mit einer Basis $\{x_1, \dots, x_{l+1}, y_1, \dots, y_l\}$ von V_0^{-l}. Man erhält aus Korollar 8.4.5, daß etwa das sporadische $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare $\tilde{U}_{\{V_1,V_4\}} = \tilde{U}_{b_3}$ die Form H(r) hat, mit Axiomen (modulo $\mathcal{A}$) für $r = r(x)$

$$\begin{aligned} & qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0 \text{ (“torsionsfrei”)}, \\ & q | x, \text{ für } q \text{ (Primpotenz) mit } (q, X) = 1, \\ & X^{n+1} \nmid X^n x, n \geq 1, \\ & x \in \mathrm{im}(f), \end{aligned}$$

wobei $X = X_2 = fg$, und wobei die Funktionen $f : A_1 = V_2 \to A_2 = V_1$ und $g : V_1 \to V_2$ gegeben werden durch die Gleichungen (1) und (2) aus dem Beweis von Lemma 8.4.2 (siehe Seite 231), das heißt also durch

$$f(v_2) = v_1, \text{ falls } v_1 + v_2 \in V_3 \text{ und}$$
$$g(v_1) = v_2, \text{ falls } v_1 + v_2 \in V_4,$$

$v_1 \in A_2 = V_1$ und $v_2 \in A_1 = V_2$. Ausgewertet auf $(C^-)^l V$ zeigt sich also, daß

$$f(y_i) = x_{i+1} \text{ und}$$
$$g(x_i) = y_{i+1}.$$

Insbesondere ergibt sich somit für die partielle Operation $X = X_2 = fg$, daß

$$X(x_i) = x_{i+2}.$$

Wie eben im Beweis von Satz 8.7.1 sieht man, daß es zu vorgegebenen endlich vielen der obigen Axiome ohne das letzte (also ohne "$x \in \mathrm{im}(f)$") für genügend großes l ein Element $a \in (C^-)^l V$ gibt, das diese Axiome erfüllt. $a \in V_1^{-l}$ ist Linearkombination der x_i, also $a = \sum_{i \le N} \alpha_i x_i$, für ein $N \le l$; ohne Einschränkung sei l groß verglichen mit N. (Man betrachte das formal gleich gebildete $a = \sum_{i \le N} \alpha_i x_i$ in $(C^-)^{l'}$, $l' \ge l$ groß genug – wobei hier die x_i natürlich eine Basis von $V_1^{-l'}$ sind.) Dann genügt entweder a bereits auch dem letzten Axiom, das heißt $a \in \mathrm{im}(f)$; oder, andernfalls, $a' := \sum \alpha_i x_{i+1}$ ist definiert (nach Wahl von l), erfüllt die Axiome über Torsionsfreiheit (automatisch, wegen Lemma 8.6.3), die positiven Teilbarkeitsaxiome (nach Wahl von l), außerdem aber sowohl $X \nmid a'$ (da sonst $a \in \mathrm{im}(f)$) – und damit wegen der Torsionsfreiheit der Präprojektiven (Lemma 8.6.3) auch $X^{n+1} \nmid X^n a'$ für alle $n \ge 1$ – als auch $a' \in \mathrm{im}(f)$, nach Konstruktion. Das genügt.

Ein weiteres Argument findet sich ganz am Ende dieses Abschnitts, nach Satz 8.8.12.

Lemma 8.7.4

i. *Der Abschluß jeder unendlichen Teilmenge $\mathcal{U}$ von Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ mit Defekt $\delta = -3$ enthält alle $\tilde{U}_\Phi$, $\Phi \in b_1 \cup b_2$.*

ii. *Der Abschluß jeder unendlichen Teilmenge $\mathcal{U}$ von Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ mit Defekt $\delta = -4$ enthält alle $\tilde{U}_\Phi$, $\Phi \in b_3$.*

Beweis: Folgt mit entsprechendem Symmetrieargument wie vor Satz 8.7.3. ■

Das ist leider nur partielle Information, aber das Symmetrieargument liefert in diesen Fällen nicht mehr; da mir eine Beschreibung der Unzerlegbaren von Defekt $\delta = -3$ über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ (bzw. der Unzerlegbaren von Defekt $\delta = -4$ über $\tilde{\mathrm{E}}_7$) nicht bekannt ist, die ähnlich explizit wäre wie die eben benutzte für Quadrupel von Defekt $\delta = -2$, läßt sich das alternative Argument nach Satz 8.7.3 leider auch nicht übertragen. Die Satz 8.7.3 entsprechende Verallgemeinerung auf die Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, Satz 8.8.12, bleibt aber richtig; sie erfordert allerdings deutlich mehr Mühe. Dazu zunächst eine

Definition 8.5 Ein (präprojektives) Unzerlegbares U über $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$) heißt neu, falls $\delta(U) = -2$ (bzw. $\delta(U) = -3$, $\delta(U) = -4$, $\delta(U) \in \{-5, -6\}$).

Bis auf endlich viele Ausnahmen sind dies über $\tilde{\mathrm{D}}_4$ (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_8$) genau die Präprojektiven, die nicht als Kronecker-Moduln oder 2-Zyklen (bzw. Quadrupel, bzw. Moduln über $\tilde{\mathrm{E}}_6$, bzw. Moduln über $\tilde{\mathrm{E}}_7$) aufgefaßt werden können. (Man vergleiche Lemmata 5.2.8, 5.3.8, 5.4.7 und 5.5.8.)

Behauptung: Zur Beschreibung von $\mathrm{I}(k[\Delta])$ als topologischer Raum, Δ einer der Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ *mit beliebiger Orientierung* genügt es, in den vier Fällen der standardorientierten $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ die Topologie des Abschlusses der Menge der *neuen* präprojektiven Unzerlegbaren zu bestimmen.

Beweis der Behauptung: Wegen der Behauptung am Schluß von Abschnitt 8.5 ist allein das Häufungsverhalten der präprojektiven Unzerlegbaren bezüglich der unendlichdimensionalen Punkte aus $\mathcal{A}$ zu bestimmen. Wegen Korollar 6.2.7 iii. folgt die Behauptung nun durch "Induktion nach der Eckenzahl des Köchers"; der "Induktionsanfang" bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ benutzt Satz 8.2.1. Das beendet den Beweis der Behauptung.

Aus dem im nächsten Abschnitt zu beweisenden Satz 8.8.12 lassen sich alle Resultate dieses Abschnitts recht leicht herleiten: Lemma 8.7.4 und Satz 8.7.3 sind nur Spezialfälle von Satz 8.8.12; und Satz 8.7.2 ergibt sich mit dem eben im Beweis der Behauptung benutzten "Induktionsargument" (in der Notation von Korollar 6.2.7 iii.) so: Gegeben sei eine Bahn o (unter der Operation von C^- bzw. – gleichbedeutend – von C^+) von $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren; weiter sei $\mathcal{U}$ eine unendliche Menge präprojektiver Unzerlegbarer. Dann enthält $\mathcal{U}$ entweder unendliche viele neue Unzerlegbare – und dann folgt die Behauptung von Satz 8.7.2 unmittelbar aus Satz 8.8.12. Oder in $\mathcal{U}$ liegen unendlich viele präprojektive Unzerlegbare aus einem geeigneten der A_i von Korollar 6.2.7 iii.; sei dann $\mathcal{U}'$ die unendliche Menge präprojektiver Unzerlegbarer aus A_i' (also über dem "kleineren Köcher", im Sinn von Korollar 6.2.7 iii.), die $\mathcal{U} \cap A_i$ unter der pp-Äquivalenz von Korollar 6.2.7 iii.

entspricht. Zu zeigen ist nun lediglich noch, daß $o \cap A_i \neq \emptyset$. Dann nämlich sei etwa $U \in o \cap A_i$, sei $U' \in A_i'$ das U entsprechende $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare über dem kleineren Köcher. Nach Induktionsannahme hat die Bahn o' von U', also die (endliche) Menge von $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren (über dem kleineren Köcher) $o' = \{(C^-)^l U' | l \geq 0\}$, nichtleeren Schnitt mit dem Abschluß $\overline{\mathcal{U}'}$ von $\mathcal{U}'$ (Induktionsanfang mit Satz 8.2.1). Unter der pp-Äquivalenz entspricht aber o' einer Teilmenge von o (Zusatz zu Korollar 6.2.7 und iv. von Seite 174). Weil die pp-Äquivalenz einen Homöomorphismus zwischen A_i und A_i' induziert, folgt, daß o nichtleeren Schnitt mit $\overline{\mathcal{U} \cap A_i} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$ hat, wie gewünscht. Und daß $o \cap A_i \neq \emptyset$, sieht man so: Sei o zunächst eine einelementige Bahn, also $o = \{U\}$ mit einem gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren U. Dann erfüllt U die Gleichung $\gamma^\cap \wedge \gamma^\Sigma$; wegen des Zusatzes zu Korollar 6.2.7 und der Beschreibung der A_i (als Bilder von Funktoren) in Kapitel 5 (siehe Lemmata 5.2.6, 5.3.4, 5.4.4 und 5.5.4) folgt, daß U in allen A_j, insbesondere also in A_i liegt. Und im sporadischen Fall argumentiert man ganz ähnlich: Der Zusatz zu Korollar 6.2.7 zeigt, daß A_i durch eine Gleichung der Form $\gamma_\Phi^\Sigma \wedge \gamma_\Phi^\cap$ bzw. durch eine der Form $\gamma_\Phi^\Sigma \wedge \gamma_\Phi^\cap \wedge \gamma_{\Phi'}^\Sigma \wedge \gamma_{\Phi'}^\cap$ definiert wird ((∗)!), mit $\Phi \in b$, $\Phi' \in b'$ für geeignete $b \neq b'$ mit $|b| = |b'| = 3$ (letzteres nur im Falle von $A_i = \mathrm{im} T_{i,j,k}$). Somit folgt für ein sporadisches Unzerlegbares $U \in o$, daß U oder $C^- U$ oder $(C^-)^2 U$ in A_i liegt. Das beendet den Nachweis von Satz 8.7.2 aus Satz 8.8.12.

8.8 Die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen. Teil II

Dieser Abschnitt ist dem Beweis von Satz 8.8.12 gewidmet, der endlich die vollständige Beschreibung der Topologie liefert; von einem etwas anderen Standpunkt aus beleuchtet Satz 8.8.13 dieses Problem. Diese beiden Sätze sind die Hauptergebnisse dieses Abschnittes, ja wohl des ganzen Kapitels. Nach Satz 8.8.12 (auf Seite **??**) wird erklärt, wie man diesen Satz ohne Umwege am schnellsten beweist. Den überlangen rechnerischen Beweis von Lemma 8.8.11 habe ich in Kapitel 9 ausgelagert, um die Darstellung nicht zu unübersichtlich werden zu lassen. – Sicherheitshalber sind einige Lemmata wieder mit dem bekannten (∗) markiert (siehe die Vereinbarung am Anfang von Kapitel 5); bei geeigneter Interpretation bleiben die meisten dieser Lemmata aber auch ohne (∗) richtig.

Die Bezeichnungen nach Lemma 8.4.2 (in der Zusammenfassung seines Beweises) sind weiter in Kraft; siehe Seite 181.

Den Beweis von Satz 8.8.12 bereiten wir durch eine Serie von Lemmata vor;

hier eine Skizze des Beweisganges:

Beweisskizze:

i. Zuerst zeigen wir, daß es genügt, die Gültigkeit gewisser Gleichungen, der $\mathrm{III}^n_{b''}$ (siehe Definition 8.6), für die neuen (genauer: fast alle neuen) Präprojektiven nachzuweisen (Lemma 8.8.5). Dieser Nachweis beansprucht dann den Rest der Arbeit.

ii. Als zweiten Schritt beweisen wir, daß auch die – wesentlich einfachere – Verifikation der $\mathrm{III}^n_{b''}$ für die Unzerlegbaren von Defekt -1 ausreicht (Lemma 8.8.10): Dazu führen wir zuerst vor, daß fast jedes neue Unzerlegbare Bild einer direkten Summe von Unzerlegbaren mit Defekt -1 ist (Lemma 8.8.6). Dann beginnt der rechenintensive Teil des Beweises: Wir zeigen, daß sich die Gleichungen $\mathrm{III}^n_{b''}$ unter Epimorphismen vererben (Lemma 8.8.9); das ist trotz Tatsache 1.6.1 nicht klar, denn (in der Notation von 1.6.1) es gilt im allgemeinen *nicht*, daß bei einem Unterraumsystem etwa auch $M_\alpha \cap M_\beta \to N_\alpha \cap N_\beta$ surjektiv ist.

iii. Und der dritte Teil des Beweises von Satz 8.8.12 ist dann gerade der Nachweis der $\mathrm{III}^n_{b''}$ für Unzerlegbare von Defekt -1 (Lemma 8.8.11).

Zunächst ein Lemma, das man einfach aus den Tabellen der Dimensionstypen der endlichdimensionalen Unzerlegbaren von Defekt ungleich Null in [DF 73] gewinnt; für iii. beachte man, daß, wie im Beweis von Lemma 5.4.7 bemerkt, T_7 und $(C^+)^2 S_7$ das gleiche Bild haben, und für i., daß $D_{3,4}$ und $C^+D_{1,2}$ das gleiche Bild haben (jeweils mit $(*)$):

Lemma 8.8.1 $(*)$ *Fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1 sind im Bild der Funktoren*

i. $D_{1,2}$ *oder* $C^+D_{1,2}$ *im Fall* $\tilde{\mathrm{D}}_4$*;*

ii. S *oder* C^+S *im Falle von* $\tilde{\mathrm{E}}_6$*;*

iii. S_7, T_7, C^+S_7 *oder* C^+T_7 *im Fall* $\tilde{\mathrm{E}}_7$*;*

iv. S_1 *oder* C^+S_1 *im Fall* $\tilde{\mathrm{E}}_8$. ■

Lemma 8.8.2 $(*)$ *Neue Unzerlegbare erfüllen keine Bedingung der Form* γ^Σ_Φ *(wohl aber* $\gamma^\cap$*).*

Beweis: Das zeigen die Dimensionstypen aus [DF 73] (für die γ^Σ_Φ) und Lemma 8.3.4. Oder: Unmittelbar klar für die kleiner Dimension; nun Induktion nach C^- mit Hilfe der Lemmata 5.2.4, 5.3.3, 5.4.3 und 5.5.3. ■

Es wird sich gleich zeigen (Lemma 8.8.4 bzw. 8.8.5), daß es für das Folgende genügt, für jeden der vier betrachteten Köcher aus jeder der jeweils drei Bahnen (bezüglich der Operation von C^-) von $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren nur ein Unzerlegbares zu untersuchen, zum Beispiel gerade $\tilde{U}_{b''}$ aus der Bahn $\{U_\Phi \mid \Phi \in b''\}$. (Das erleichtert vor allem die Bezeichnungsarbeit, wird aber bei den ersten allgemeinen Überlegungen gar nicht benutzt.)

Sei also $\tilde{U}_{b''} = \mathrm{H}(r)$ das zu b'' gehörende sporadische $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare. Zur Erinnerung: Korollar 8.4.5 (mit Korollar 8.5.4) zeigt, wie eine mögliche Axiomatisierung von $r = r(x)$ (modulo $\mathcal{A}$) aussieht:

$$\begin{aligned}
&qx \neq 0, q \in k[X], q \neq 0,\\
&p|x, \text{ für } p \text{ (Primpotenz) mit } (p, X) = 1,\\
&X^{n+1} \nmid X^n x, n \in \omega,\\
&x \in \mathrm{im}(f).
\end{aligned}$$

Dabei ist $X = X_m = fg : A_m \to A_m$, $m =\mid b'' \mid$. – $\tilde{U}_{b''}$ sei – mit diesen Bezeichnungen – für die nächste Zeit fixiert.

Definition 8.6 (∗) Mit

$$\mathrm{III}^n_{b''}$$

sei die Gleichung

$$A_1 = \mathrm{dom}\, X^n f + \mathrm{im}\, g$$

bezeichnet, wobei $X = X_m = fg$, A_1, A_m, $f = f_{m-1} \cdot \ldots \cdot f_1 : A_1 \to A_m$, $g : A_m \to A_1$ und $m =\mid b'' \mid$ wie auf Seite 181 sind (und das heißt: wie im Beweis von Lemma 8.4.2 auf den Seiten 230 bis 237), induziert also durch die pp-Äquivalenz der Modulklasse zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ – wobei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ – mit gewissen m-Zyklen.

Man hat also zwölf, jeweils mit den natürlichen Zahlen induzierte, Serien von Gleichungen definiert (ohne allerdings den Köcher in der Bezeichnung $\mathrm{III}^n_{b''}$ deutlich zu machen). Zum Beispiel ist also im Falle des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_6$ die Gleichung $\mathrm{III}^n_{b_3}$ gerade $E_1 \cap E_2 = \mathrm{dom}\, X^n f + \mathrm{im}\, g$, wobei $f : E_1 \cap E_2 \to F_1$ und $g : F_1 \to E_1 \cap E_2$ durch (7) und (8) auf Seite 232 gegeben werden und $X = fg$.

Das nächste Lemma könnte man, wie der Beweis zeigt, auf ein geeignetes Lemma über Darstellungen von $\tilde{\mathrm{A}}_2$ zurückführen.

Lemma 8.8.3 $(*)$ *Die Bezeichnungen seien wie eben. $\mathcal{U}$ sei eine unendliche Menge von Präprojektiven; für jedes n sei für fast alle $U \in \mathcal{U}$ die Bedingung $\mathrm{III}^n_{b''}$ erfüllt, das heißt es gelte für jedes n für fast alle $U \in \mathcal{U}$, daß*

$$A_1 = \operatorname{dom} X^n f + \operatorname{im} g.$$

Dann ist $\tilde{U}_{b''} \in \overline{\mathcal{U}}$ oder aber für fast alle $U \in \mathcal{U}$ ist g surjektiv.

Siehe dazu das Beispiel auf Seite 197; ist g surjektiv in einem U, dann folgt für $a \in U$ aus $a \in \operatorname{im}(f)$ natürlich $a \in \operatorname{im}(fg)$, das heißt $X \mid a$, so daß es kein Element in U gibt, das "$X \nmid x$" und "$x \in \operatorname{im}(f)$" simultan erfüllt. Das Lemma zeigt nun, daß – modulo der Voraussetzung $A_1 = \operatorname{dom} X^n f + \operatorname{im} g$ – die Surjektivität von g der einzig mögliche Grund für $\tilde{U}_{b''} \notin \overline{\mathcal{U}}$ ist.

Beweis: In gewisser Weise verallgemeinert das folgende Argument das aus dem Beweis von Lemma 8.6.2: Dort reduziert man ein Unzerlegbares U auf die in ihm definierte partielle Operation X, genauer auf einen gewissen $k[\tilde{\mathrm{A}}_1]$-Modul; hier ist wegen des Axioma "$x \in \operatorname{im}(f)$" nur eine Reduktion auf einen $k[\tilde{\mathrm{A}}_2]$-Modul möglich. – F sei also der Funktor, der $U \in \mathcal{U}$ wirft auf

$$\begin{tikzcd} & A_m & \\ \operatorname{im}(f) \arrow[ur] & & \operatorname{dom}(X) \arrow[ul] \arrow[ll, "X"'] \end{tikzcd}$$

(mit den Inklusionen von $\operatorname{im}(f)$ bzw. $\operatorname{dom}(X)$ nach A_m und der Injektion X). $F(U)$ ist direkte Summe von (endlichdimensionalen) Unzerlegbaren Z der Form

$$\begin{tikzcd} & W_1 & \\ W_3 \arrow[ur, "\gamma"] & & W_2 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

mit injektiven α, β und γ. (Was nun folgt, ließe sich mit einigen neuen Bezeichnungen leicht als Aussage über Darstellungen von $\tilde{\mathrm{A}}_2$ – mit der Orientierung wie eben – formulieren.) Zum Beispiel wegen Lemma 5.1.2 oder Korollar 5.1.3 muß wenigstens eine der Abbildungen α, β oder γ ein Isomorphismus sein. α kann aber kein Isomorphismus sein, da sonst aus

Dimensionsgründen alle drei bijektiv wären, Z also ein (endlichdimensionaler) $k[X]$-Modul, genauer: pp-bi-interpretierbar mit einem solchen – im Widerspruch zur Torsionsfreiheit von X (Lemma 8.6.3). Also ist in jedem dieser Unzerlegbaren Z genau einer der Morphismen β oder γ ein Isomorphismus; identifiziert man vermöge dieses Isomorphismus, so erhält man: $F(U)$ ist direkte Summe von zwei Typen "präprojektiver Kronecker-Moduln", genauer: von Unzerlegbaren, die mittels einer geeigneten (von zwei möglichen) pp-Äquivalenzen als Kronecker-Moduln aufgefaßt werden können.

Gibt es zu jedem n ein $a \in U \in \mathcal{U}$, mit $a \in \mathrm{im}(f) \cap \mathrm{dom}(X^n) \setminus \mathrm{im}(X)$, dann ist unter den unzerlegbaren "Kronecker-Moduln" Z, in die $F(U)$ zerfällt, wenigstens einer, etwa Z_0, so daß die Z_0-Komponente a_0 von a ungleich Null ist und γ ein Isomorphismus in Z_0 ist (da sonst doch $a \in \mathrm{im}(X)$ wäre). a_0 liegt wieder in $\mathrm{dom}(X^n)$, das heißt Z_0 ist "von großer Dimension". Nach dem bekannten Häufungsverhalten von präprojektiven Kronecker-Moduln (siehe Satz 8.2.1) ist dann $\tilde{U}_{b''} \in \overline{\mathcal{U}}$.

Andernfalls gilt für ein n und alle $U \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{dom}(X^n) \subseteq \mathrm{im}(X), \text{ also}\\
&\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(X^n f) \subseteq \mathrm{im}(g), \text{ und daher}\\
&\mathrm{dom}(X^n f) \subseteq \mathrm{im}(g),
\end{aligned}$$

somit nach Voraussetzung in fast allen $U \in \mathcal{U}$: $\mathrm{im}(g) = A_1$, das heißt g surjektiv. ■

Wir halten $\tilde{U}_{b''}$ und die Bezeichnungen von eben weiter fest.

Lemma 8.8.4 $(*)$

i. $\mathcal{U}$ sei eine unendliche Menge neuer Präprojektiver. Für jedes n gelte für fast alle $U \in \mathcal{U}$ die Bedingung $\mathrm{III}^n_{b''}$. Dann ist $\tilde{U}_{b''} \in \overline{\mathcal{U}}$.

ii. Gilt für jedes n für fast alle neuen Präprojektiven die Gleichung $\mathrm{III}^n_{b''}$, dann liegen im Abschluß $\overline{\mathcal{U}}$ jeder unendlichen Menge $\mathcal{U}$ neuer Präprojektiver alle (sporadischen) $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren der Form $(C^-)^i\tilde{U}_{b''}$ für $i \geq 0$. Mit anderen Worten: $\{\tilde{U}_\Phi \mid \Phi \in b''\} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$.

Beweis: i. Zu zeigen ist wegen Lemma 8.8.3 nur, daß g in neuen Präprojektiven nicht surjektiv ist. Das folgt aber aus Lemma 8.8.2 und den im Beweis von Lemma 8.4.2 gegebenen Entsprechungen, denn g ist jeweils genau dann surjektiv, wenn eine geeignete Bedingung γ^Σ_Φ erfüllt ist; wie bereits bemerkt (siehe auch nach dem Beweis von Lemma 8.4.2 in Abschnitt 9.1) gelten diese

Äquivalenzen für Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$, nicht nur für solche aus $\mathcal{A}_{b,b'}$. ii. ist klar mit i., da C^- neue Präprojektive in neue überführt. ■

Wegen Satz 8.7.3 ist es eigentlich unnötig, die $\mathrm{III}^n_{b''}$ für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ zu untersuchen; ebenso die $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $i = 1, 2$, für $\tilde{\mathrm{E}}_6$ und $\mathrm{III}^n_{b_3}$ für $\tilde{\mathrm{E}}_7$ – dies wegen Lemma 8.7.4. Allerdings soll in diesem Abschnitt ein von Abschnitt 8.7 unabhängiger Beweis von Satz 8.8.12 gegeben werden, so daß ich Hinweise geben werde, wie auch diese $\mathrm{III}^n_{b''}$ behandelt werden können.

Lemma 8.8.5 (∗)

i. Gilt jedes $\mathrm{III}^n_{b_3}$, $n \geq 0$, für fast alle neuen Präprojektiven über $\tilde{\mathrm{E}}_6$, dann enthält der Abschluß jeder unendlichen Menge neuer Präprojektiver alle (sporadischen) $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.

ii. Gilt jedes $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $n \geq 0$, $i = 1, 2$, für fast alle neuen Präprojektiven über $\tilde{\mathrm{E}}_7$, dann enthält der Abschluß jeder unendlichen Menge neuer Präprojektiver alle (sporadischen) $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.

iii. Gilt jedes $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $n \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, für fast alle neuen Präprojektiven über $\tilde{\mathrm{E}}_8$, dann enthält der Abschluß jeder unendlichen Menge neuer Präprojektiver alle (sporadischen) $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.

Beweis: Lemma 8.8.4 und Lemma 8.7.4. ■

Damit ist der erste Schritt (Teil i. der Beweisskizze) in Richtung Satz 8.8.12 getan: Es genügt, gewisse Gleichungen für die neuen Präprojektiven zu bestätigen; das erweist sich als recht mühsam (aber machbar: Lemma 8.8.11): Zwar sind die (neuen) Präprojektiven in gewisser Weise wohlbekannt (siehe [Rin 84, Seite 63, Lemma 3]), andererseits (mir) nicht gut genug, um die Gültigkeit der $\mathrm{III}^n_{b_i}$ sofort einsehen zu können. Zum Glück genügt es aber, Unzerlegbare von Defekt -1 zu betrachten (Lemma 8.8.10); dazu zunächst ein Lemma, das nicht nur für die vier standardorientierten Köcher gilt, die normalerweise in diesem Abschnitt betrachtet werden:

Lemma 8.8.6 *Δ sei einer der Euklidischen Köcher. Es gibt natürliche Zahlen N_0 und N_1, so daß gilt: Fast jedes präprojektive Unzerlegbare U ist surjektives Bild einer direkten Summe von höchstens N_0 vielen Unzerlegbaren U' von Defekt -1 und Rang $\mathrm{r}(U') \geq \mathrm{r}(U) - N_1$ (siehe Definition 2.1 auf Seite 44).*

Einige Bemerkungen: Die Aussage über N_0 wird im folgenden gar nicht benutzt. – Es ist klar, daß in der Situation des Lemmas $\mathrm{r}(U') \leq \mathrm{r}(U)$, falls U' in der direkten Summe nicht weggelassen werden kann (Lemma 2.2.2).

Beweis: (von Lemma 8.8.6) Im folgenden bezeichne k wie üblich den Grundkörper.

Behauptung 1: Es genügt, die standardorientierten $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ zu betrachten.

Beweis der Behauptung: Man überzeugt sich leicht, daß das Lemma für $\tilde{\mathrm{D}}_n$ aus dem Lemma für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ folgt (Lemma 5.2.1 und sein – allerdings nur angedeuteter – Beweis). Der Defekt präprojektiver Unzerlegbarer über $\tilde{\mathrm{A}}_n$ ist ohnehin stets -1. Daher genügt es, das Lemma für $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit beliebiger Orientierung zu zeigen. Aber, wie gewohnt, wegen Lemma 4.2.3 (oder Lemma 4.2.2) genügt es, die mit der Standardorientierung versehenen Köcher zu untersuchen. (Defekt wird von den benutzten pp-Äquivalenzen ja erhalten: Lemmata 5.2.6, 5.3.4, 5.4.4 und 5.5.4) Das beweist Behauptung 1. Ohne Einschränkung seien wie stets alles Unterraumsysteme. Um Schreibarbeit und Platz zu sparen, seien, wie in Kapitel 5 vereinbart, Quadrupel notiert als $(V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$ und $\tilde{\mathrm{E}}_n$-Moduln (mit der Standardnotation aus Kapitel 5) im Fall $n = 6$ als $(Q; E_1, F_1; E_2, F_2; E_3, F_3)$, bzw. als $(R; W; E_1, F_1, G_1; E_2, F_2, G_2)$ im Falle $n = 7$ bzw. als $(P; X; Y_3, Y_4; Z_5, \ldots, Z_9)$ für $n = 8$.

Behauptung 2: Es genügt, das Lemma für neue Unzerlegbare zu zeigen.

Beweis der Behauptung: Das sieht man induktiv (nach der Anzahl der Ecken des Köchers) ein: Der Induktionsanfang bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$ ist klar, da präprojektive Unzerlegbare neu oder von Defekt -1 sind. Zu $\tilde{\mathrm{E}}_6$: Wegen Korollar 6.2.7 iii. sind – in der bekannten Sprechweise – fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren Quadrupel oder neu. Die Funktoren $(C^-)^l T_{i,j,k}$, die dies zeigen (siehe den Beweis von Lemma 5.3.8), erhalten Surjektionen, und sie erhalten Defekt (Lemma 5.3.4, Satz 4.2.4); damit folgt die Behauptung des Lemmas dann aus der Behauptung für neue Unzerlegbare und derjenigen für Quadrupel. Bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$ argumentiert man ganz analog mit den $(C^-)^l S_7$, bei $\tilde{\mathrm{E}}_8$ mit den $(C^-)^l S_1$. Das beweist Behauptung 2.

$\tilde{\mathrm{D}}_4$: Die neuen Präprojektiven sind genau die $(C^-)^l(k; 0000)$, $l \geq 0$ (siehe auch vor und nach Satz 8.7.3). Es ist – in hoffentlich suggestiver Notation; insbesondere ist die gleich benutzte Schreibweise so zu verstehen, daß x, y, z linear unabhängig sind – $C^-(k; 0000) = (\langle x, y, z\rangle ; \langle x\rangle , \langle z\rangle , \langle x + y\rangle , \langle y + z\rangle)$, und dies ist Bild der direkten Summe der folgenden vier Präprojektiven von

Defekt -1:

$$\begin{aligned}&(\langle x\rangle;\langle x\rangle,000),\\&(\langle z\rangle;0,\langle z\rangle,00),\\&(\langle x+y\rangle;00,\langle x+y\rangle,0)\text{ und}\\&(\langle y+z\rangle;000,\langle y+z\rangle).\end{aligned}$$

C^- ist rechtsexakt und erhält Defekt (wieder Satz 4.2.4); Anwenden von $(C^-)^i$, $i \geq 0$, auf diese Surjektion liefert dann die gewünschte Surjektion für die übrigen neuen Präprojektiven. Die Aussage über N_0 und N_1 ergibt sich automatisch.

$\tilde{\mathrm{E}}_6$: Die neuen Präprojektiven sind die $(C^-)^l(k;00;00;00)$, wobei $C^-(k;00;00;00) = (\langle x,y\rangle;\langle x\rangle,0;\langle y\rangle,0;\langle x+y\rangle,0)$, und dies ist Bild der direkten Summe der präprojektiven Unzerlegbaren

$$\begin{aligned}&(\langle x\rangle;\langle x\rangle,0;00;00),\\&(\langle y\rangle;00;\langle y\rangle,0;00)\text{ und}\\&(\langle x+y\rangle;00;00;\langle x+y\rangle,0)\end{aligned}$$

von Defekt -2. Nach dem schon Bewiesenen für $\tilde{\mathrm{D}}_4$, und weil die Funktoren $(C^-)^lT_{i,j,k}$ Surjektionen und Defekt erhalten (Lemma 5.3.4 und Satz 4.2.4), bekommt man die gesuchte Surjektion für ein geeignetes $(C^-)^n(k;00;00;00)$. Anwenden von $(C^-)^i$, $i \geq 0$, auf diese Surjektion liefert die gesuchte Surjektion für die übrigen neuen Präprojektiven.

$\tilde{\mathrm{E}}_7$: Ganz analog $\tilde{\mathrm{E}}_6$; die neuen Präprojektiven sind die $(C^-)^l(k;0;000;000)$, mit $C^-(k;0;000;000) = (\langle x,y\rangle;\langle x+y\rangle;\langle x\rangle\,00;\langle y\rangle\,00)$, und dies ist Bild der direkten Summe der präprojektiven Unzerlegbaren

$$\begin{aligned}&(\langle x\rangle;0;\langle x\rangle\,00;000),\\&(\langle y\rangle;0;000;\langle y\rangle\,00)\text{ und}\\&(\langle x+y\rangle;\langle x+y\rangle;000;000),\end{aligned}$$

deren Defekt jeweils -3, -3 bzw. -2 beträgt. Man schließt nun weiter wie bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$ (und benutzt, daß die Behauptung für $\tilde{\mathrm{E}}_6$ schon gezeigt ist).

$\tilde{\mathrm{E}}_8$: Hier gibt es zwei Bahnen (unter C^-) neuer Präprojektiver; die eine mit den Unzerlegbaren von Defekt -5, die andere mit denjenigen von Defekt -6. Erstere besteht aus den $(C^-)^l(k;0;00;k,0000)$, mit $C^-(k;0;00;k,0000) = (\langle x,y\rangle;\langle x+y\rangle;\langle x\rangle,0;\langle y\rangle,\langle y\rangle,000)$, das Bild der direkten Summe der Unzerlegbaren

$$\begin{aligned}&(\langle x+y\rangle;\langle x+y\rangle;00;00000),\\&(\langle x\rangle;0;\langle x\rangle\,0;00000)\text{ und}\\&(\langle y\rangle;0;00;\langle y\rangle,\langle y\rangle,000)\end{aligned}$$

von Defekt -3, -4 bzw. -4 ist. Nun weiter wie üblich.

Die neuen Präprojektiven von Defekt -6 sind die $(C^-)^l(k;0;00;00000)$, mit $C^-(k;0;00;00000) = (\langle x,y\rangle\,;\langle x+y\rangle\,;\langle x\rangle\,,0;\langle y\rangle\,,0000)$. Dies ist Bild der direkten Summe der Unzerlegbaren

$$\begin{array}{l}(\langle x+y\rangle\,;\langle x+y\rangle\,;00;00000),\\ (\langle x\rangle\,;0;\langle x\rangle\,0;00000) \text{ und}\\ (\langle y\rangle\,;0;00;\langle y\rangle\,,0000)\end{array}$$

von Defekt -3, -4, bzw. -5. Nach dem schon Bewiesenen folgt die Behauptung wieder für ein $(C^-)^n(k;0;00;00000)$ – da $(C^-)^lS_1$ Surjektionen und Defekt erhält (Lemma 5.5.4 und Satz 4.2.4); wegen der Rechtsexaktheit von C^- folgt sie dann für $(C^-)^m(k;0;00;00000)$, $m \geq n$. ∎

(Dieses Lemma wird zum Beweis von Lemma 8.8.9 – und damit des Satzes 8.8.12 – nur für neue Unzerlegbare über den standardorientierten Köchern $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$, $\tilde{\mathrm{E}}_8$ benötigt; insofern genügte es, es nur für neue Unzerlegbare zu formulieren: So könnte man sich Behauptung 1 und 2 des Beweises schenken.)

Waren die bisherigen Lemmata, die zum Beweis von Satz 8.8.12 hinführen werden, noch halbwegs konzeptioneller Natur, so beginnt nun der eher unerfreuliche, weil rechenaufwendige, Teil.

Die nächsten beiden Lemmata werden zum Beweis von Lemma 8.8.9 gebraucht; Lemma 8.8.7 könnte auch in Kapitel 5 stehen.

Lemma 8.8.7 $(*)$ *Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren gilt über dem jeweiligen Köcher:*

$$\begin{array}{ll}\tilde{\mathrm{E}}_6: & Q = E_1\cap E_2 + F_1 + F_2 + F_3;\\ \tilde{\mathrm{E}}_7: & R = F_2\cap E_1 + G_1 + G_2 + W,\\ & R = E_2\cap F_1 + F_2 + W;\\ \tilde{\mathrm{E}}_8: & P = Y_3\cap Z_5\cap (X+Z_8)\cap(X+Y_4) + X + Z_9 + Y_4\cap Z_5 + Y_3\cap Z_7,\\ & P = Y_3\cap Z_6\cap(X+Z_8) + X\cap Y_3 + Y_4 + Z_7,\\ & P = Y_3\cap Z_5\cap(X+Z_9) + Y_4 + Z_6.\end{array}$$

Beweis: Erste Variante: Wie in Lemmata 5.3.2, 5.4.2 und 5.5.2 durch lange und mühsame Rechnungen.

Zweite Variante: Dies Lemma wird später nur auf Unzerlegbare von Defekt -1 angewandt werden, und für diese läßt sich ein etwas einfacherer Beweis führen; zum Beispiel für $R = F_2\cap E_1 + G_1 + G_2 + W$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$:

Behauptung 1: Um $R = F_2 \cap E_1 + G_1 + G_2 + W$ für fast alle Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ von Defekt -1 zu zeigen, genügt der Nachweis von

$$\begin{array}{ll} R = F_2 \cap E_1 + G_1 + G_2 + W & (1) \text{ und} \\ E_1 \cap (W + G_2) \subseteq F_1 \cap (W + G_2) + E_1 \cap W + E_1 \cap E_2 & (2) \end{array}$$

für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild von S_7 oder T_7 liegen.

Beweis der Behauptung: Wegen Lemma 8.8.1 genügt es zu zeigen, daß für fast alle Präprojektiven U aus der Gleichung (2) die Bedingung (1) für C^+U folgt. Es gelte also (2) für U. Mit Tatsache 5.4.1 erhält man $F_2^+ \cap E_1^+ = \ker(W \oplus F_1 \oplus G_2 \to R)$, $G_1^+ = \ker(W \oplus E_2 \to R)$ etc. Wegen Lemma 5.4.2 genügt es zum Nachweis von (1) für C^+U zu zeigen, daß

$$F_2^+ \subseteq F_2^+ \cap E_1^+ + G_1^+ + G_2^+ + W^+.$$

Sei also nun $(x, y, z) \in F_2^+$ gegeben, das heißt $x \in W, y \in E_1, z \in G_2$ und $x + y + z = 0$. Somit $y \in E_1 \cap (W + G_2)$, und folglich gibt es wegen (2) $y' \in F_1 \cap (W + G_2)$, $w' \in W \cap E_1$ und $e \in E_1 \cap E_2$, so daß $y = y' + w' + e$; außerdem gibt es $x' \in W$ und $z' \in G_2$ mit $y' = x' + z'$. Dann ist mit $W \ni w := x + x' + w' = -z - z' - e \in E_2$

$$(x, y, z) = (-x', y', -z') + (w, 0, -w) + (-w', w', 0) + (0, e, -e)$$

wie gewünscht.

Behauptung 2: Um $R = F_2 \cap E_1 + G_1 + G_2 + W$ für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1 zu zeigen, genügt es, für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1 nachzuweisen:

$$\begin{array}{ll} Q = E_1 \cap E_3 + E_2 + F_3 & (3) \\ Q = F_1 + F_3 + E_2 & (4) \\ Q = F_1 + F_2 + F_3 + E_1 \cap E_2 & (5) \\ Q = E_2 \cap E_3 + E_1 + F_2 & (6) \end{array}$$

Beweis der Behauptung: (3) und (4) sind die "Übersetzungen" (vermöge S_7 bzw. T_7) von (1) aus Behauptung 1, (5) und (6) die von (2):

Um nämlich (1) für Unzerlegbare von Defekt -1 im Bild von S_7 nachzuweisen, ist zu zeigen, daß für Unzerlegbare von Defekt -1 über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ gilt: $E_2/F_2 \oplus Q = 0 \oplus E_1 \cap E_3 + E_2/F_2 \oplus 0 + 0 \oplus F_3 + \Delta(E_2)$ (siehe Definition 5.4). Dafür genügt $0 \oplus Q \subseteq 0 \oplus (E_1 \cap E_3 + F_3) + \Delta(E_2) + E_2/F_2 \oplus 0$; dafür genügt wiederum $Q \subseteq E_1 \cap E_3 + F_3 + E_2$. So erhält man (3). Mit T_7 ergibt sich ganz ähnlich (4).

Um (2) für Unzerlegbare von Defekt -1 im Bild von S_7 zu verifizieren, ist für Unzerlegbare von Defekt -1 über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ zu zeigen, daß

$$E_2/F_2 \oplus E_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) \subseteq E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) + \Delta(E_1 \cap E_2) + 0 \oplus E_1.$$

Weil $0 \oplus E_1$ rechts enthalten ist, folgt dies, wenn man nur zeigt, daß $E_2/F_2 \oplus 0$ ebenfalls in der rechten Seite liegt. Das heißt: Gegeben $e \in E_2$, so ist $e \in E_2 \cap (F_1 + F_2 + F_3) + E_1 \cap E_2 + F_2$ zu zeigen (denn dann seien etwa $e = e_1 + e_{1,2} + f$ und $e_1 = f_1 + f_2 + f_3$ entsprechende Zerlegungen, mit $f_i \in F_i$, $e_1 \in E_2$, $e_{1,2} \in E_1 \cap E_2$ und $f \in F_2$; es ergibt sich $(\overline{e}, 0) = (\overline{e_1 + e_{1,2}}, 0) = (\overline{e_1 - f_2}, 0) + (\overline{e_{1,2}}, 0)$; also

$$(\overline{e}, 0) = (\overline{e_1 - f_2}, f_1) + (\overline{e_{1,2}}, e_{1,2}) + (0, -f_1 - e_{1,2}),$$

wobei $(0, -f_1 - e_{1,2}) \in 0 \oplus E_1$, $(\overline{e_{1,2}}, e_{1,2}) \in \Delta(E_1 \cap E_2)$ und $(\overline{e_1 - f_2}, f_1) = (\overline{e_1 - f_2}, e_1 - f_2) + (0, -f_3) \in E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3)$ wie gewünscht); oder gleichbedeutend: $E_2 \subseteq F_1 + F_2 + F_3 + E_1 \cap E_2$. Das ist (5) – denn wegen Lemma 5.3.2 gilt ja $Q = E_2 + F_1 + F_3$. Und übersetzt man entsprechend vermöge T_7, so ergibt sich (6). Das beendet den Beweis von Behauptung 2.

Aber (4) aus Behauptung 2 ist wahr nach Lemma 5.3.2; und (6) gilt aus Symmetriegründen genau dann für fast alle Unzerlegbaren (von Defekt -1), wenn (3) für fast alle gilt. Das heißt: Um (1) für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren von Defekt -1 zu verifizieren, ist für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1 über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} Q &= E_1 \cap E_3 + E_2 + F_3 && (7) \text{ und} \\ Q &= F_1 + F_2 + F_3 + E_1 \cap E_2 && (8) \end{aligned}$$

gilt. Aber (Lemma 8.8.1) solche Unzerlegbare sind im Bild von S oder C^+S. Wegen Lemma 5.3.4 und Lemma 5.3.3 erfüllen diejenigen im Bild von S Bedingung (7) und die im Bild von C^+S Gleichung (8), so daß es genügt, (7) für Präprojektive aus dem Bild von C^+S und (8) für solche aus dem Bild von S zu zeigen. Und das geht so:

Zunächst zu (8) und Unzerlegbaren aus dem Bild von S; erinnert sei an die Standardnotation bei $\tilde{\mathrm{A}}_5$. Man erhält, daß die Elemente der rechten Seite von (8) genau die der Gestalt

$$(e_{2,1}(w_2), e_{2,3}(w_2), 0) + (0, e_{4,3}(w_4), e_{4,5}(w_4)) + (e_{6,1}(w_6), 0, e_{6,5}(w_6)) + (0, w_3, 0)$$

mit $w_i \in W_i$ sind, also die

$$(e_{2,1}(w_2) + e_{6,1}(w_6), e_{2,3}(w_2) + e_{4,3}(w_4) + w_3, e_{4,5}(w_4) + e_{6,5}(w_6)).$$

Es genügt nun zu zeigen, daß jedes $(w_1, 0, 0)$ mit $w_1 \in W_1$ diese Form hat (denn aus Symmetriegründen hat dann auch jedes $(0, 0, w_5)$ diese Gestalt, so daß damit ganz $Q = W_1 \oplus W_3 \oplus W_5$ in der rechten Seite enthalten ist). Aber bei einem Präprojektiven über $\tilde{\mathrm{A}}_5$ ist entweder $e_{6,1}$ oder $e_{2,1}$ ein Isomorphismus – und dann die Behauptung richtig – oder diese beiden Abbildungen sind echte Injektionen und die restlichen Morphismen alles Isomorphismen. Dann ist die Behauptung ebenfalls klar: Es handelt sich ja – nach Identifizieren vermöge der Isomorphismen – um einen Kronecker-Modul, der wohlbekannt ist.

Nun zu (7) und Unzerlegbaren aus dem Bild von C^+S:

Behauptung 3: Sei U präprojektiv über $\tilde{\mathrm{E}}_6$. Dann folgt aus $Q = F_1 + F_2 + F_3 + E_1 \cap E_2$ für U, daß in C^+U Bedingung (7) erfüllt ist.

Beweis der Behauptung: Es ist $E_1^+ \cap E_3^+ = \ker(F_1 \oplus E_2 \oplus F_3 \to Q)$, $E_2^+ = \ker(E_1 \oplus F_2 \oplus E_3 \to Q)$ und $F_3^+ = \ker(E_1 \oplus E_2 \to Q)$. Um (7) für C^+U zu verifizieren, genügt der Nachweis von $F_1^+ \subseteq E_1^+ \cap E_3^+ + E_2^+ + F_3^+$. Sei also $(0, e, -e) \in F_1^+$, das heißt $e \in E_2 \cap E_3$. Nach Voraussetzung gibt es Elemente f_1, f_2, f_3 und e' ($f_i \in F_i$ und $e' \in E_1 \cap E_2$), so daß $e = f_1 + f_2 + f_3 + e'$. Somit ist $f_1 + f_3 \in E_2 \cap (F_1 + F_3)$, und

$$(0, e, -e) = (-f_1, f_1 + f_3, -f_3) + (f_1 + e', f_2, -e + f_3) + (-e', e', 0),$$

wie gewünscht. Das ist Behauptung 3.

Aber $Q = F_1 + F_2 + F_3 + E_1 \cap E_2$ ist eben für Präprojektive aus dem Bild von S verifziert worden; deshalb gilt also (7) für Präprojektive aus dem Bild von C^+S. ■

Für das nächste Lemma sei die Notation wie bisher.

Lemma 8.8.8 $(*)$ *Notation wie in Definition 8.6. Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren über dem jeweiligen Köcher sind äquivalent:*

i. $\tilde{\mathrm{E}}_6$: $\mathrm{III}^n_{b_3}$ *und* $Q = \mathrm{dom}(X^n f) + F_1 + F_2 + F_3$.

ii. $\tilde{\mathrm{E}}_7$: $\mathrm{III}^n_{b_2}$ *und* $R = \mathrm{dom}(X^n f) + G_1 + G_2 + W$;
$\mathrm{III}^n_{b_1}$ *und* $R = \mathrm{dom}(X^n f) + F_2 + W$.

iii. $\tilde{\mathrm{E}}_8$: $\mathrm{III}^n_{b_3}$ *und* $P = \mathrm{dom}(X^n f) + X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7$;
$\mathrm{III}^n_{b_2}$ *und* $P = \mathrm{dom}(X^n f) + X \cap Y_3 + Y_4 + Z_7$;
$\mathrm{III}^n_{b_1}$ *und* $P = \mathrm{dom}(X^n f) + Y_4 + Z_6$.

Beweis: Das folgt jeweils sofort mit Lemma 8.8.7, zum Beispiel Punkt i.: Es gelte $Q = \mathrm{dom}(X^n f) + F_1 + F_2 + F_3$. Da $\mathrm{dom}(X^n f) \subseteq A_1 = E_1 \cap E_2$, folgt $A_1 = \mathrm{dom}(X^n f) + (F_1 + F_2 + F_3) \cap A_1 = \mathrm{dom}(X^n f) + \mathrm{im}(g)$. Umgekehrt folgt aus $\mathrm{III}^n_{b_3}$ mit der Aussage $Q = E_1 \cap E_2 + F_1 + F_2 + F_3$ aus Lemma 8.8.7 $Q = \mathrm{dom}(X^n f) + \mathrm{im}(g) + F_1 + F_2 + F_3$, also $Q = \mathrm{dom}(X^n f) + F_1 + F_2 + F_3$, wie gewünscht. ∎

Lemma 8.8.9 $(*)$ *Die* $\mathrm{III}^n_{b_i}$ *vererben sich unter Epimorphismen.*

Beweis: Für die sechs in Lemma 8.8.8 betrachteten Serien $\mathrm{III}^n_{b_i}$ klar mit Lemma 8.8.8 und Tatsache 1.6.1. Für die übrigen $\mathrm{III}^n_{b_i}$ in den Fällen $\tilde{\mathrm{E}}_6$ und $\tilde{\mathrm{E}}_7$ mit entsprechenden Überlegungen. Im Falle $\tilde{\mathrm{D}}_4$ folgt das Lemma unmittelbar aus Tatsache 1.6.1. ∎

Lemma 8.8.10 $(*)$ *Gilt jedes* $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $n \geq 0$ *und* $i = 3$ *bei* $\tilde{\mathrm{E}}_6$, *bzw.* $i = 1, 2$ *bei* $\tilde{\mathrm{E}}_7$ *und* $i = 1, 2, 3$ *im Falle* $\tilde{\mathrm{E}}_8$, *für fast alle Präprojektiven von Defekt* -1, *dann enthält der Abschluß jeder unendlichen Menge neuer Präprojektiver alle (sporadischen)* $\mathfrak{p}$*-adischen Unzerlegbaren.*

Beweis: Wegen Lemma 8.8.9 und Lemma 8.8.6 überträgt sich die Gültigkeit der $\mathrm{III}^n_{b_i}$ von Unzerlegbaren mit Defekt -1 auf neue Unzerlegbare. Nun liefert Lemma 8.8.5 die Behauptung. ∎

Damit ist auch der zweite Teil der Vorbereitungen für Satz 8.8.12 beendet (Punkt ii. der Beweisskizze). Es bleibt also der Nachweis der Bedingungen $\mathrm{III}^n_{b_i}$ für Unzerlegbare von Defekt -1. Dieser ist leider recht rechenaufwendig, denn zwar sind die Unzerlegbaren von Defekt -1 wegen Lemma 8.8.1 wohlbekannt; sie sind nämlich die Bilder der unzerlegbaren Kronecker-Moduln P_i (von Defekt -1) – definiert vor Lemma 5.1.5 – unter explizit gegebenen Funktoren. Aber diese Funktoren sind nur noch bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$ einigermaßen überschaubar: Es gibt neun Funktoren $H_1, \ldots, H_9$ (siehe auch Seite 260) von Kronecker-Moduln zu Moduln über $\tilde{\mathrm{A}}_5$, so daß jedes Unzerlegbare von Defekt -1 über $\tilde{\mathrm{A}}_5$ im Bild wenigstens eines dieser Funktoren ist (da von den je drei "Pfeilen" im bzw. gegen den Uhrzeigersinn bei $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren je genau einer ein Nichtisomorphismus ist). Dementsprechend benötigt man wegen Lemma 8.8.1 also 18 Funktoren für $\tilde{\mathrm{E}}_6$, 72 für $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und gar 144 für $\tilde{\mathrm{E}}_8$; dabei sind im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_8$ Funktoren wie $(C^+S_1)(C^+T_7)(C^+S)H_3$ zu berücksichtigen, die durch das Auftreten der C^+ als in höchstem Grade unerfreulich bezeichnet werden dürfen. Es scheint einfacher, die Bedingungen etwa für $\tilde{\mathrm{E}}_8$ in entsprechende für $\tilde{\mathrm{E}}_7$, diese in solche für $\tilde{\mathrm{E}}_6$ etc. zu übersetzen (im Stile von Lemma 8.8.7, genauer: der Behauptungen im Beweis dieses Lemmas); diesen Weg habe ich eingeschlagen. – Hier also nun

Lemma 8.8.11 (*) *Für jedes n werden die $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $i = 3$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$) bzw. $i = 1, 2$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$) bzw. $i = 1, 2, 3$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_8$) von fast allen Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt.*

Nach Satz 8.8.12 wird erklärt, warum dies für *jeden* der vier Köcher für *alle* $i = 1, 2, 3$ gilt: Somit ergibt sich dann ein von Abschnitt 8.7 unabhängiger Beweis von Satz 8.8.12.

Beweis: Siehe Abschnitt 9.2. ■

Aus Lemma 8.8.10, Lemma 8.8.11 (und Satz 8.7.3 im Falle des Köchers $\tilde{\mathrm{D}}_4$) folgt nun

Satz 8.8.12 *Sei Δ einer der standardorientierten Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$. Dann enthält der Abschluß jeder unendlichen Menge neuer Präprojektiver alle $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.* ■

Damit ist wegen der Behauptung am Ende von Abschnitt 8.7 die Beschreibung der Topologie beendet.

Einige Bemerkungen:

1. Satz 8.8.12 gilt wegen Lemma 4.2.3 natürlich auch für beliebig orientierte $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$, so die Begriffe "neu" etc. geeignet definiert werden.

2. Dehnt man die in diesem Abschnitt definierten Begriffe wie "neu" etc. in geeigneter Weise auf Moduln über einem der $\tilde{\mathrm{A}}_n$ (mit einer Orientierung ohne gerichtete Zyklen, so daß der Begriff "präprojektiv" definiert ist) oder $\tilde{\mathrm{D}}_n$ aus, dann bleibt Satz 8.8.12 ebenfalls richtig: Über $\tilde{\mathrm{A}}_n$, $n \geq 2$, und über $\tilde{\mathrm{D}}_n$, $n \geq 5$, gibt es dann gar keine *neuen* Präprojektiven, so daß der Satz trivialerweise gilt. Und über $\tilde{\mathrm{A}}_1$, das heißt – wegen der Bedingung an die Orientierung – im Falle von Kronecker-Moduln, sind alle Präprojektiven neu; Satz 8.8.12 liefert damit das "maximale Häufungsverhalten" von Satz

8.2.1: Der Abschluß *jeder* unendlichen Menge Präprojektiver enthält alle $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren.

3. Und der Beweis von Satz 8.8.12 benutzt die Ergebnisse von Abschnitt 8.7 nicht wirklich; Lemma 8.7.4 und Satz 8.7.3 werden nicht benötigt.

a. Zunächst zu Lemma 8.7.4: Die $\mathrm{III}^n_{b_1}$, $\mathrm{III}^n_{b_2}$ (im Falle des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_6$) und $\mathrm{III}^n_{b_3}$ (im Fall des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_7$) werden nämlich im Beweis von Lemma 8.8.11 – in Abschnitt 9.2 – automatisch mitbewiesen. Denn III_{b_i} ($i = 1, 2$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$) – siehe auf Seite 238 im Beweis von Lemma 8.8.11 für die Definition der III_{b_i} – ist gerade die Bedingung iii. aus Behauptung 7 im Beweis von Lemma 8.8.11 (siehe Gleichungen (9), (10) und (11) auf Seite 233 im Beweis von Lemma 8.4.2), und III_{b_3}, im Falle des Köchers $\tilde{\mathrm{E}}_7$, ist Bedingung i. aus Behauptung 2 im Beweis von Lemma 8.8.11 (siehe auf Seite 234 Gleichungen (15) und (16)). Deshalb gelten alle Behauptungen im Beweis von Lemma 8.8.11 stets für alle $i = 1, 2, 3$, unabhängig vom betrachteten Köcher $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ oder $\tilde{\mathrm{E}}_8$.

b. Und auch Satz 8.7.3 wird nicht gebraucht, denn für den Köcher $\tilde{\mathrm{D}}_4$ läßt sich natürlich ein Argument im Stile von Lemma 8.8.11 geben; für die im folgenden benutzte Notation siehe die Vorbemerkung zu Beginn von Abschnitt 9.2. Man betrachte etwa III_{b_3} für $\tilde{\mathrm{D}}_4$: Der Fall b_3 wird im Beweis von Lemma 8.4.2 ausführlich analysiert; Gleichungen (1) und (2) auf Seite 231 zeigen, daß III_{b_3} gerade die Bedingung

i. $A_1 = V_2 \xrightarrow{V_3} V_1 \xrightarrow{V_4} A_1$

ist.

Mit Überlegungen analog den im Beweis von Lemma 8.8.11 ständig angestellten sieht man, daß i. für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1 (über $\tilde{\mathrm{D}}_4$) erfüllt ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild des Funktors $D = D_{1,2}$ liegen, zutreffen:

i. $A_1 = V_2 \xrightarrow{V_3} V_1 \xrightarrow{V_4} A_1$;

ii. $A_1 = V_4 \xrightarrow{V_1} V_3 \xrightarrow{V_2} A_1$.

Diese beiden Bedingungen gelten nun aber für fast alle Unzerlegbaren im Bild von D, die Defekt -1 haben, wenn iii. und iv. für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_3$-Unzerlegbaren (in Standardnotation) von Defekt -1 zutreffen, wobei

iii. $A_1 = W_3 \xrightarrow{W_2} W_1 \xrightarrow{W_4} A_1$ und

iv. $A_1 = W_4 \xrightarrow{W_1} W_2 \xrightarrow{W_3} A_1$.

(Siehe Vorbemerkung c. zu Beginn von Abschnitt 9.2; hier sind die W_i als Unterräume von $W_1 \oplus W_3$ zu verstehen, etwa W_2 als $\{(e_{2,1}(w_2), e_{2,3}(w_2), 0) \mid w_2 \in W_2\}$.) Aber iii. bzw. iv. sind für solche Unzerlegbare äquivalent zu den folgenden Bedingungen v. bzw. vi.:

v. $W_3 \xrightarrow{Y} W_3$ mit $Y = e_{4,3}e_{4,1}^{-1}e_{2,1}e_{2,3}^{-1}$;

vi. $W_4 \xrightarrow{Y} W_4$ mit $Y = e_{4,1}^{-1}e_{2,1}e_{2,3}^{-1}e_{4,3}$.

Und diese prüft man leicht wie im Beweis von Lemma 8.8.11 nach; siehe Behauptung 12 und 13 dort. – Damit ist nun verifiziert, daß der Beweis von Satz 8.8.12 ohne die Ergebnisse von Abschnitt 8.7 auskommt – und somit ist 3. beendet.

Hier – rückblickend – eine kurze Zusammenfassung des Beweises von Satz 8.8.12, die manchen Umweg vermeidet: Berechnet werden soll die Topologie von $\mathcal{A}$. Abschnitt 8.2 zeigt, daß man im Falle von Kronecker-Moduln maximales Häufungsverhalten hat. In den übrigen Fällen $\tilde{\mathrm{D}}_4$, $\tilde{\mathrm{E}}_6$, $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $\tilde{\mathrm{E}}_8$ geht der Beweis so: Lemma 8.4.2 liefert eine pp-Äquivalenz zwischen der Modulklasse zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ und gewissen m-Zyklen; so bekommt man Axiomatisierungen von $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren modulo $\mathcal{A}_{b,b'}$. Weil "der Baur-Funktor abspaltet", sind dies Axiomatisierungen modulo $\mathcal{A}$. Und zwar Axiomatisierungen, die man aus einer Axiomatisierung eines $\mathfrak{p}$-adischen $k[X]$-Moduls durch eventuelles Hinzufügen eines einzigen Axioms erhält; X ist dabei eine partielle Operation, die auf Präprojektiven torsionsfrei ist. Also sind Prüfer jedenfalls nicht im Abschluß einer unendlichen Menge (neuer) präprojektiver Unzerlegbarer. Lemma 8.6.5 und Abschnitt 8.7 kann man getrost weglassen. Lemma 8.8.3 bzw. Lemma 8.8.4 zeigt, daß man nur gewisse Gleichungen verifizieren muß. (Dies Argument funktioniert auch bei *gewöhnlichen* $\mathfrak{p}$-adischen.) Und in Abschnitt 8.8 werden diese Gleichungen bestätigt.

Eine Beschreibung der Topologie von einem etwas anderen Standpunkt aus gibt der folgende Satz 8.8.13: Für das sporadische $\mathfrak{p}$-adische Unzerlegbare $\tilde{U}_\Phi$ sei mit $O(\tilde{U}_\Phi)$ die offene Umgebung $(x = x/\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi)$ bezeichnet, so daß also ein präprojektives Unzerlegbares genau dann in $O(\tilde{U}_\Phi)$ liegt, wenn es γ_Φ^Σ nicht erfüllt. (Die Schreibweise $(x = x/\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi)$ macht natürlich nur für Unterraumsysteme Sinn, aber das stört hier nicht, zum einen, weil es auf endlich viele (isolierte) Unzerlegbare sowieso nicht ankommt, zum anderen, weil Präprojektive und $\mathfrak{p}$-adische, denen hier das Augenmerk gilt, ja Unterraumsysteme sind.) Zusammenfassend ergibt sich so

Satz 8.8.13 *$\mathcal{U}$ sei eine unendliche Menge präprojektiver Unzerlegbarer. Dann gilt:*

i. $\overline{\mathcal{U}}$ enthält alle gewöhnlichen $\mathfrak{p}$-adischen Unzerlegbaren und $\mathbf{Q}$.

ii. Genau dann gilt $\tilde{U}_\Phi \in \overline{\mathcal{U}}$, wenn unendlich viele der Präprojektiven aus $\mathcal{U}$ in $O(\tilde{U}_\Phi)$ liegen.

Beweis: Teil i. ist nur Lemma 8.6.5. Um nicht in Notationschaos zu geraten, gebe ich für Teil ii. das Argument nur im Falle eines der $\tilde{U}_{b''} = \tilde{U}_\Phi$. Mit Lemma 8.8.11 folgt dann aus Lemma 8.8.3 (und den Bezeichnungen wie dort), daß $\tilde{U}_{b''} \in \overline{\mathcal{U}}$ gilt, falls in unendlich vielen der Präprojektiven aus $\mathcal{U}$ die Abbildung g nicht surjektiv ist. Die Entsprechungen aus dem Beweis von Lemma 8.4.2 aber – sie gelten für beliebige Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$ – zeigen, daß g in einem Präprojektiven genau dann nicht surjektiv ist, wenn dieses γ_Φ^Σ nicht erfüllt – dies ist ja gerade die Definition von $\tilde{U}_{b''}$ (siehe unmittelbar vor Korollar 8.4.5 auf Seite 183). Also ist $\tilde{U}_{b''} \in \overline{\mathcal{U}}$ genau dann, wenn unendlich viele der Präprojektiven aus $\mathcal{U}$ die Aussage γ_Φ^Σ nicht erfüllen, das heißt in $O(\tilde{U}_\Phi)$ liegen. ■

Kapitel 9

Blut, Schweiß und Tränen

Dieses Kapitel enthält die Beweise zweier zentraler Lemmata, Rechnungen eigentlich, die zwar elementar aber recht lang sind, so daß sie den Fluß des Haupttextes sehr behindert hätten. Auf diese beiden Lemmata bin ich ein bißchen stolz! Auch in diesem Kapitel tragen die meisten Aussagen einen Stern (für dessen Bedeutung siehe Beginn von Kapitel 5), allein schon deshalb, weil nur Unterraumsysteme betrachtet werden. Bei geeigneter Interpretation der Begriffe könnte aber bei Lemma 8.4.2, das im ersten Abschnitt bewiesen wird, leicht auf $(*)$ verzichtet werden.

9.1 Beweis von Lemma 8.4.2

Hier wird Lemma 8.4.2 bewiesen; außerdem enthält dieser Abschnitt noch die Definition einiger Funktoren, sowie wichtige Eigenschaften, die dann in den Beweis des Lemmas einfließen. Die Funktoren H, H', J, J', ebenso wie alle Lemmata dieses Teils sind neu; alle anderen Funktoren sind wie in Kapitel 5.

Lemma 9.1.1 *(= Lemma 8.4.2) Sei $\{b, b', b''\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, sei $|b''| = m$. Dann ist die $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechende Klasse von Moduln pp-äquivalent zu einer abgeschlossenen Klasse von m-Zyklen. Dabei entsprechen die sporadischen $\mathfrak{p}$-adischen aus $\mathcal{A}_{b,b'}$ gerade den (X)-adischen m-Zyklen.*

Zusatz: Die Klasse von m-Zyklen besteht genau aus denjenigen Zyklen, für die alle f_i injektiv und ein (alle) $X_i + \epsilon$ bijektiv sind.

Man beachte bei den folgenden Überlegungen die Bedeutung von $(*)$ (siehe die Vereinbarung zu Beginn von Kapitel 5).

Der Beweis hat zwölf Teile (entsprechend den vier Köchern und jeweils drei möglichen Mengen $\{b, b'\}$). Die pp-Äquivalenzen werden in zehn der zwölf Fälle durch geeignete Kompositionen von Funktoren aus Kapitel 5 gegeben; für die Fälle $b'' = b_1 = \{\{E_1, G_2\}, \{F_2, W\}, \{E_2, G_1\}, \{F_1, W\}\}$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und $b'' = b_1 = \{\{Y_3, Z_8\}, \{X, Z_7\}, \{Y_4, Z_6\}, \{X, Y_3 \cap Z_5\}, \{X, Y_4, Z_9\}\}$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_8$ benötigen wir neue – nicht in [DF 73] enthaltene – Funktoren, die nun, vor dem eigentlichen Beweis, definiert werden sollen:

Definition 9.1 $(*)$

i. H sei der Funktor, der einen 4-Zyklus der Form

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ A_4 \arrow[u, "f_4"] & A_3 \arrow[l, "f_3"] \end{tikzcd}$$

abbildet auf die $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellung (ein Unterraumsystem)

$$\begin{tikzcd} & & & f_2 \oplus f_4 \arrow[d] & & & \\ f_1 \arrow[r] & A_1 \oplus A_2 \arrow[r] & A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \arrow[r] & A_1 \oplus \ldots \oplus A_4 & A_1 \oplus A_3 \oplus A_4 \arrow[l] & A_3 \oplus A_4 \arrow[l] & f_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Dabei sei f_i eine Abkürzung für $\mathrm{graph}(f_i)$.

ii. H' sei der Funktor, der eine $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellung (ein Unterraumsystem)

$$\begin{tikzcd} & & & W \arrow[d] & & & \\ G_1 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & R & E_2 \arrow[l] & F_2 \arrow[l] & G_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

die $\gamma_{b_3}^{\cap} \wedge \gamma_{b_3}^{\Sigma}$ erfüllt (das heißt $R = W \oplus (E_i \cap F_j) \oplus G_i$ für $\{i, j\} = \{1, 2\}$), abbildet auf

$$\begin{tikzcd}
E_2 \cap F_1 \arrow[r, "\pi_3 - 1"] & F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2) \arrow[d, "-\pi_2"] \\
F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1) \arrow[u, "-\pi_2'"] & E_1 \cap F_2 \arrow[l, "\pi_3' - 1"]
\end{tikzcd}$$

Dabei seien π_1, π_2, π_3 (bzw. π_1', π_2', π_3') die Projektionen auf die erste, zweite und dritte Koordinate in $R = W \oplus E_1 \cap F_2 \oplus G_1$ (bzw. in $R = W \oplus E_2 \cap F_1 \oplus G_2$).

H' ist wohldefiniert: Für $x \in R$ gilt, daß $(\pi_3 - 1)x \in W + E_1 \cap F_2$. Ist $x \in E_2 \cap F_1$, so folgt aus $\pi_3 x \in G_1$ und $x \in F_1$, daß $(\pi_3 - 1)x \in F_1$; aber $F_1 \cap (W + E_1 \cap F_2) = F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2)$. – Äquivalent wäre gewesen, die Abbildungen $f_1 = \pi_3 - 1$, $f_2 = -\pi_2$, $f_3 = \pi_3' - 1$ und $f_4 = -\pi_2'$ zu definieren als

$$\begin{aligned}
f_1(a_1) &= a_2, \text{ falls } a_1 + a_2 \in G_1, \\
f_2(a_2) &= a_3, \text{ falls } a_2 + a_3 \in W, \\
f_3(a_3) &= a_4, \text{ falls } a_3 + a_4 \in G_2 \text{ und} \\
f_4(a_4) &= a_1, \text{ falls } a_4 + a_1 \in W.
\end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, werden nur Unterraumsysteme betrachtet, was durch die Formulierung des nächsten Lemmas schon impliziert wird; unter anderem daher der $(*)$.

Lemma 9.1.2 $(*)$

i. *H und H' sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen 4-Zyklen und $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellungen, die $\gamma^{\cap}_{b_3} \wedge \gamma^{\Sigma}_{b_3} \wedge \gamma^{\cap}_{\{F_1,F_2\}} \wedge \gamma^{\Sigma}_{\{F_1,F_2\}} \wedge \gamma^{\cap}_{\{E_1 \cap E_2, W\}} \wedge \gamma^{\Sigma}_{\{E_1 \cap E_2, W\}}$ erfüllen (das heißt $R = W \oplus (E_i \cap F_j) \oplus G_i = F_1 \oplus F_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus W$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$).*

ii. *Sei M ein 4-Zyklus in der Notation wie eben. A_2 wird durch $X := f_1 f_4 f_3 f_2$ zu einem $k[X]$-Modul. Dann ist in der folgenden Liste die Abbildung links in M injektiv (bzw. surjektiv) genau dann, wenn die Summe der Unterräume rechts in $H(M)$ direkt ist (bzw. gleich R):*

f_1	E_2, G_1
f_2	F_1, W
f_3	E_1, G_2
f_4	F_2, W
$X - 1$	G_1, G_2, W

Statt A_2 könnte man auch ein anderes A_i betrachten. – Die Bedingungen in der rechten Spalte sind natürlich auch als gewisse $\gamma_\Phi^\cap$ bzw. γ_Φ^Σ formulierbar. – Vor dem Beweis noch ein kleines

Lemma 9.1.3 (∗) *Für* $\tilde{\mathrm{E}}_7$*-Darstellungen folgt aus* $R = F_1 \oplus F_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus W$*, daß*

$$R = E_2 \cap F_1 \ \oplus\ F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2) \ \oplus\ E_1 \cap F_2 \ \oplus\ F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1).$$

Beweis: (von Lemma 9.1.3) Aus Symmetriegründen und wegen $R = F_1 \oplus F_2$ genügt es zu zeigen, daß F_1 direkte Summe der ersten beiden Summanden der rechten Seite der behaupteten Gleichung ist, das heißt daß $F_1 = E_2 \cap F_1 \oplus F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2)$.
Direktheit: $E_2 \cap F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2) = F_1 \cap (W \cap E_1 \cap E_2 + F_2) = F_1 \cap F_2 = 0$. Summe: Sei $x \in F_1$; es gibt also $e \in E_1 \cap E_2$ und $w \in W$ mit $x = e + w$, insbesondere $w \in W \cap E_1$. Aber w läßt sich schreiben als $w = x_1 + x_2$ mit $x_i \in F_i$. Also $x_1 = w - x_2 \in F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2)$ und $F_1 \ni x - x_1 = e + x_2 \in E_2$, somit $x = x_1 + (e + x_2)$ wie gewünscht. ∎

Beweis: (von Lemma 9.1.2) Daß für Moduln im Bild von H die Bedingungen $R = W \oplus (E_i \cap F_j) \oplus G_i = F_1 \oplus F_2 = E_1 \cap E_2 \oplus W$ für $\{i, j\} = \{1, 2\}$ aus i. erfüllt sind, ist ebenso klar, wie die ersten vier Äquivalenzen aus ii. Die letzte Äquivalenz in ii. sieht man so: $G_1 + G_2 + W$ ist für Moduln aus dem Bild von H genau dann direkt, wenn $W \cap (G_1 + G_2) = 0$. Und jedes $x \in W \cap (G_1 + G_2)$ hat die Form

$$x = (a_1, f_1(a_1), a_3, f_3(a_3)) = (f_4(a_4), a_2, f_2(a_2), a_4)$$

mit $a_i \in A_i$, das heißt $a_2 = f_1(a_1) = \ldots = f_1 f_4 f_3 f_2(a_2)$, also $(X - 1)a_2 = 0$. Die Umkehrung und die Überlegung für die Summe sind genauso. Das ist ii.

Daß $H'H$ pp-isomorph zu 1 ist, ist ganz leicht. Sei nun M eine $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellung wie in Definition 9.1 (mit Universum R), sei das Universum von

$HH'(M)$ für den Augenblick mit $R^{H'H}$ bezeichnet; entsprechend für die E_i, F_i, G_i. Dann zeigt Lemma 9.1.3 gerade, daß $R \simeq R^{H'H}$, und es genügt zu zeigen, daß dieser Isomorphismus durch Einschränken Isomorphismen $E_i \simeq E_i^{H'H}$, $F_i \simeq F_i^{H'H}$ und $G_i \simeq G_i^{H'H}$ induziert. Aber $E_1^{H'H} = E_2 \cap F_1 + F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2) + E_1 \cap F_2 \subseteq E_1$; die Umkehrung ist klar mit Lemma 9.1.3 und $E_1 \cap (F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1)) = 0$. Die Gleichung $F_1^{H'H} = F_1$ wurde im Beweis von Lemma 9.1.3 gezeigt. Und $G_1^{H'H} = \mathrm{graph}(\pi_3 - 1) \subseteq G_1$; umgekehrt ist jedes $x \in G_1$ wegen $F_1 = F_1^{H'H}$ von der Form $x = a_1 + a_2$ mit $a_1 \in E_2 \cap F_1$ und $a_2 \in F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2)$, somit $(\pi_3 - 1)a_1 = x - a_1 = a_2$, also $x \in \mathrm{graph}(\pi_3 - 1)$. Daß man so ein Paar von pp-Äquivalenzen erhält, ist klar. ■

Es gilt, für 5-Zyklen und geeignete $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellungen nun eine entsprechende Rechnung durchzuführen; leider sind die Funktoren und die Beweise in diesem Fall nicht so übersichtlich und einfach:

Definition 9.2 (∗)

i. J sei der Funktor, der einen 5-Zyklus

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\ & & A_3 \arrow[dl, "f_3"] \\ A_5 \arrow[uu, "f_5"] & A_4 \arrow[l, "f_4"] & \end{tikzcd}$$

auf die $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung (ein Unterraumsystem)

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d] & & & & & \\ Y_4 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & P & Z_5 \arrow[l] & Z_6 \arrow[l] & Z_7 \arrow[l] & Z_8 \arrow[l] & Z_9 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

abbildet, mit

$$
\begin{aligned}
&P = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus B_{f_1}, \text{ wobei } B_{f_1} := A_1 \oplus A_2/\mathrm{graph}(f_1),\\
&Y_3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_5,\\
&Y_4 = \mathrm{graph}(f_2) \oplus \mathrm{graph}(f_5),\\
&X = \mathrm{graph}(f_4) \oplus \Delta, \text{ wobei } P \supseteq \Delta := \{(a_1, a_2, 0, 0, 0, \overline{(a_1, a_2)}) \mid a_i \in A_i\},\\
&Z_5 = A_1 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus B_{f_1},\\
&Z_6 = A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus B_{f_1},\\
&Z_7 = A_3 \oplus A_4 \oplus B_{f_1},\\
&Z_8 = \mathrm{graph}(f_3) \oplus B_{f_1},\\
&Z_9 = B_{f_1}.
\end{aligned}
$$

ii. Sei J' der Funktor, der eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung (ein Unterraumsystem), die den Bedingungen $\gamma_{b_2}^{\cap} \wedge \gamma_{b_2}^{\Sigma} \wedge \gamma_{\{Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9\}}^{\cap} \wedge \gamma_{\{Y_4 \cap Z_5, Y_3 \cap Z_7, X, Z_9\}}^{\Sigma}$ genügt, abbildet auf den 5-Zyklus

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\
& & A_3 \arrow[dl, "f_3"] \\
A_5 \arrow[uu, "f_5"] & A_4 \arrow[l, "f_4"] &
\end{tikzcd}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A_1 &= Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9),\\
A_2 &= (Y_4 + Y_3 \cap Z_7) \cap (X + Z_9),\\
A_3 &= Y_3 \cap Z_7,\\
A_4 &= Z_7 \cap [X \cap Z_6 + Y_3(\cap Z_6) \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)],\\
A_5 &= Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)
\end{aligned}
$$

(also $A_4 = Z_7 \cap (X \cap Z_6 + A_5)$) und Morphismen f_i, die wie folgt definiert seien: π_1, π_2, π_3 (bzw. π_1', π_2', π_3', bzw. $\pi_1'', \pi_2'', \pi_3''$, bzw. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$) seien die Projektionen auf die erste, zweite, dritte bzw. vierte Koordinate in $P = X \cap Z_5 \oplus Y_4 \oplus Z_8$ (bzw. $P = X \cap Y_3 \oplus Y_4 \oplus Z_7$, bzw. $P = Y_3 \cap Z_6 \oplus X \oplus Z_9$, bzw. $P = Y_4 \cap Z_5 \oplus Y_3 \cap Z_7 \oplus X \oplus Z_9$). Dann sei

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \pi_1' - 1,\\
f_2 &= -\pi_3',\\
f_3 &= \pi_3 + \pi_3''\pi_2 - 1,\\
f_4 &= -\pi_1'',\\
f_5 &= \nu_1 - 1.
\end{aligned}
$$

Der Funktor J' ist wohldefiniert:

1. Sei $a_1 \in A_1$; es ist $Y_3 \ni \pi_1'(a_1) - a_1 = f_1(a_1) = -\pi_2'(a_1) - \pi_3'(a_1) \in Y_4 + Z_7$, also $f_1(a_1) \in Y_4 + Y_3 \cap Z_7$. Da $a_1 \in X + Z_9$ und $\pi_1'(a_1) \in X \cap Y_3 \subseteq X + Z_9$, ist $f_1(a_1) \in A_2$ wie gewünscht.

2. $-\pi_3'(a_2) \in Z_7$ und mit $a_2 \in Y_3$ sogar $-\pi_3'(a_2) \in Y_3 \cap Z_7$.

3. Sei $a_3 \in A_3$; es ist $Z_7 \supseteq Z_8 + Z_9 + Z_7 \ni \pi_3(a_3) + \pi_3''\pi_2(a_3) - a_3 = f_3(a_3) = -\pi_1(a_3) - \pi_2(a_3) + \pi_3''\pi_2(a_3) = -\pi_1(a_3) - \pi_1''\pi_2(a_3) - \pi_2''\pi_2(a_3) = (-\pi_1(a_3) - \pi_2''\pi_2(a_3)) - \pi_1''\pi_2(a_3)$. Dabei ist $(-\pi_1(a_3) - \pi_2''\pi_2(a_3)) \in X$, und wegen $a_3, \pi_1''\pi_2(a_3) \in Z_6$ folgt sogar $(-\pi_1(a_3) - \pi_2''\pi_2(a_3)) \in X \cap Z_6$. Da $\pi_2(a_3) \in Y_4 \cap Z_5$, ist $\pi_1''\pi_2(a_3) \in Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$.

4. Sei $a_4 \in A_4$. Es gilt $a_4, (\pi_2''(a_4) + \pi_3''(a_4)) \in X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5$, also $X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5 \ni (\pi_2''(a_4) + \pi_3''(a_4)) - a_4 = -\pi_1''(a_4) \in Y_3 \cap Z_6$.

5. Sei $a_5 \in A_5$; also $a_5 \in X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5$ und somit $\nu_2(a_5) = 0$. Damit folgt $X + Z_9 \ni -\nu_3(a_5) - \nu_4(a_5) = -\nu_2(a_5) - \nu_3(a_5) - \nu_4(a_5) = \nu_1(a_5) - a_5 \in Y_3 \cap Z_5$, da beide $\nu_1(a_5), a_5 \in Y_3 \cap Z_5$.

Äquivalent zu den eben gegebenen Definitionen der f_i sind

$$
\begin{aligned}
f_1(a_1) &= a_2, \text{ falls } a_1 + a_2 \in X,\\
f_2(a_2) &= a_3, \text{ falls } a_2 + a_3 \in Y_4,\\
f_3(a_3) &= a_4, \text{ falls } a_3 + a_4 \in Z_8,\\
f_4(a_4) &= a_5, \text{ falls } a_4 + a_5 \in X \cap Z_6 \text{ und}\\
f_5(a_5) &= a_1, \text{ falls } a_5 + a_1 \in Y_4 \cap Z_5.
\end{aligned}
$$

So erklärt sich auch die Vorzeichenwahl in der obigen Definition der f_i.

Lemma 9.1.4 $(*)$

i. *J und J' sind ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen 5-Zyklen und $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellungen, die $\gamma_{b_2}^{\cap} \wedge \gamma_{b_2}^{\Sigma} \wedge \gamma_{\{Y_4\cap Z_5, Y_3\cap Z_7, X, Z_9\}}^{\cap} \wedge \gamma_{\{Y_4\cap Z_5, Y_3\cap Z_7, X, Z_9\}}^{\Sigma}$ erfüllen, das heißt für die gilt:*

$$
\begin{aligned}
P &= X \cap Z_5 \oplus Y_4 \oplus Z_8 && (1)\\
P &= X \cap Y_3 \oplus Y_4 \oplus Z_7 && (2)\\
P &= Y_3 \cap Z_6 \oplus X \oplus Z_9 && (3)\\
P &= Y_4 \cap Z_5 \oplus Y_3 \cap Z_7 \oplus X \oplus Z_9 && (4).
\end{aligned}
$$

ii. *Sei M ein 5-Zyklus in der Notation wie eben; A_5 wird durch $X := f_4 f_3 f_2 f_1 f_5$ zu einem $k[X]$-Modul. Dann sind in der folgenden Liste die*

Abbildungen links in M injektiv (bzw. surjektiv) genau dann, wenn die Summe der Unterräume rechts in $J(M)$ direkt ist (bzw. gleich P):

f_1	$X\cap Y_3,\ X\cap Z_5,\ Y_3\cap Z_5$
f_2	$X,\ Y_4,\ Z_9$
f_3	$Y_3,\ Z_8$
f_4	$X,\ Z_7$
f_5	$Y_4,\ Z_6$
$X+1$	$X\cap Y_3,\ X\cap Z_6,\ Y_4,\ Z_8$

Es gelten die entsprechenden Bemerkungen wie nach Lemma 9.1.2.

Im folgenden Beweis wird reichlich von $(*)$ Gebrauch gemacht: Unter anderem werden die Gleichungen aus Lemma 5.5.2 kommentarlos verwandt.

Beweis: Daß $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellungen der Form $J(M)$ die Gleichungen (1) bis (4) aus Teil i. des Lemmas erfüllen, ist eine einfache Rechnung; ebenso einfach ist der Nachweis, daß $J'J$ pp-isomorph zu 1 ist und daß die Entsprechungen aus Teil ii. gelten. Hier beschränke ich mich auf den leider mühsamen Beweis, daß JJ' pp-isomorph zu 1 ist. Der Beweis ist in mehrere Zwischenbehauptungen gegliedert. Sei M eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung, die den Bedingungen (1) bis (4) aus dem Lemma genügt; mit $A_1,\ldots,A_5$ und $f_1,\ldots,f_5$ seien die Vektorräume und Morphismen im 5-Zyklus $J'(M)$ gemeint. Ich übernehme auch die Bezeichnungen für die Projektionen aus Definition 9.2.

Behauptung 1: $A_1+\ldots+A_5$ ist direkt.

Beweis der Behauptung: $A_1\cap A_2 = (Y_4+Y_3\cap Z_7)\cap(X+Z_9)\cap Z_5 = (Y_4\cap Z_5+Y_3\cap Z_7)\cap(X+Z_9)=0$ wegen (4).
$(A_1+A_2)\cap A_3\subseteq (X+Z_9)\cap(Y_3\cap Z_7)=0$ wegen (4).
$A_4\cap A_5\subseteq (Y_3\cap Z_7)\cap(X+Z_9+Y_4\cap Z_5)=0$ wegen (4).
Und $(A_1+A_2+A_3)\cap(A_4+A_5)=0$ sieht man so ein: Sei $a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$ mit $a_i\in A_i$ gegeben; also $Z_7\ni a_4-a_3=a_1+a_2-a_5\in Y_3\cap(X+Z_9+Y_4\cap Z_5)$, wegen (4) somit $a_4-a_3=a_1+a_2-a_5=0$. Folglich $a_3=a_4\in(Y_3\cap Z_7)\cap(X+Z_9+Y_4\cap Z_5)=0$, also $a_3=a_4=0$ und $a_1+a_2=a_5\in(X+Z_9)\cap(Y_3\cap Z_6)=0$ wegen (3). Damit ist $a_5=0$ und $a_4+a_5=0$.

Behauptung 2: $-\nu_4$ induziert einen surjektiven Morphismus $\sigma: A_1+A_2\to Z_9$ mit $\ker(\sigma)=\mathrm{graph}(f_1)$.

Beweis der Behauptung: Ich argumentiere mit ν_4; es ist $a_1+a_2\in\mathrm{graph}(f_1)$ genau dann, wenn $a_1+a_2=\pi_1'(a_1)\in X\cap Y_3\subseteq X$, also gilt $\mathrm{graph}(f_1)\subseteq$

$\ker(\nu_4)$. Umgekehrt gilt für $a_1 + a_2 \in A_1 + A_2 \subseteq Y_3 \cap (X + Z_9)$ aus $\ker(\nu_4)$, daß $a_1 + a_2 \in X \cap Y_3$. Und $a_1 - (a_1 + a_2) = -a_2 \in Y_4 + Z_7$, somit ist dann $a_1 + a_2 = \pi_1'(a_1)$ und $a_1 + a_2 \in \mathrm{graph}(f_1)$. – Zur Surjektivität: Wegen (2) ist $Y_3 \subseteq X \cap Y_3 + Y_4 + Y_3 \cap Z_7$, also $X, Y_3 \subseteq X + Y_4 + Y_3 \cap Z_7$ und $P = X + Y_3 = Y_3 \cap Z_7 + X + Y_4$; jedes $z \in Z_9$ hat also die Form $z = y + x + y'$ mit $y + y' \in A_2$ und $\nu_4(y + y') = \nu_4(z - x) = z$.

Behauptung 3: $Y_3 \cap (X + Z_9) = A_1 + A_2$.

Beweis der Behauptung: Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Die Umkehrung zeige ich in mehreren Schritten, leider etwas umständlich, wie mir scheint:

i. $Y_4 \cap Z_5 \subseteq A_1 + A_5$: Wegen (3) ist $y \in Y_4 \cap Z_5$ von der Form $y = y' + x + z$ mit $y' \in Y_3 \cap Z_6$, $x \in X$ und $z \in Z_9$, also $x + z \in Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9) = A_1$ und $y' \in A_5$.

ii. $Y_4 \subseteq A_1 + A_2 + A_3 + A_5$: Sei $y = y_1 + y_2 + x + z$ eine Zerlegung gemäß (4), insbesondere also $x + z \in (X + Z_9) \cap (Y_4 + Y_3 \cap Z_7) = A_2$, $y_2 \in A_3$ und $y_1 \in Y_4 \cap Z_5$. Nun i.

iii. $Y_3 \cap Z_6 \subseteq A_3 + A_5$ wegen (4).

iv. $X \cap Y_3 \subseteq A_1 + A_2 + A_3 + A_5$: Sei für $x \in X \cap Y_3$ eine Zerlegung gemäß (1) gegeben durch $x = x' + y + z$. Dann $Y_3 \ni x - y = z + x' \in Z_5$, also $z + x' \in Y_3 \cap Z_5$. Gleichung (3) ergibt nun $z + x' \in Y_3 \cap Z_6 + (X + Z_9) \cap Y_3 \cap Z_5 = Y_3 \cap Z_6 + A_1 \subseteq A_1 + A_2 + A_3 + A_5$ wegen iii. Nun liefert ii. das Gewünschte, da $y \in Y_4$.

v. $Y_3 \cap (X + Z_9) \subseteq A_1 + A_2 + A_3 + A_5$: Denn wegen (2) hat $y \in Y_3 \cap (X + Z_9)$ die Gestalt $y = x + y' + z$, mit $x \in X \cap Y_3$, $y' \in Y_4$ und $z \in Z_7$. Also $z \in Y_3 \cap Z_7$ und $Y_4 + Y_3 \cap Z_7 \ni y' + z = y - x \in X + Z_9$, somit $y' + z \in A_2$. Und $y = (y' + z) + x \subseteq A_1 + A_2 + A_3 + A_5$ mit iv.

Nun ist aber $A_3 + A_5 \subseteq Y_3 \cap Z_6$, also wegen (3) $Y_3 \cap (X + Z_9) \cap (A_3 + A_5) \subseteq Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9) = 0$ und folglich $Y_3 \cap (X + Z_9) \subseteq A_1 + A_2$: Damit ist Behauptung 3 bewiesen.

Behauptung 4: $Y_3 = A_1 + A_2 + A_3 + A_5$.

Beweis der Behauptung: Aus (3) folgt $Y_3 = (Y_3 \cap Z_6) + Y_3 \cap (X + Z_9)$; wegen Behauptung 3 und Punkt iii. in deren Beweis also $\subseteq$. Die Umkehrung ist klar.

Behauptung 5: $Y_3 + (X \cap Z_6) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.

Beweis der Behauptung: Da $A_4 \subseteq Y_3 + (X \cap Z_6)$, genügt es wegen Behauptung 4 zu zeigen, daß

Teilbehauptung: $X \cap Z_6 \subseteq A_4 + A_5$.

Beweis der Teilbehauptung: $x \in X \cap Z_6$ hat mit (2) die Form $x = x' + y + z$ mit $x' \in X \cap Y_3$, $y \in Y_4$ und $z \in Z_7$. Somit ist $x' + y = x - z \in Z_6$, also $\in Y_3 \cap Z_6$. Wegen (4) läßt sich $x' + y$ schreiben als $x' + y = a_5 + y'$, $a_5 \in A_5$ und $y' \in Y_3 \cap Z_7$. Also $x = (x' + y) + z = a_5 + (y' + z)$ mit $y' + z \in Z_7 \cap (X \cap Z_6 + A_5) = A_4$, wie gewünscht.

Behauptung 6: $P = (X \cap Z_6) \oplus Y_3 \oplus Z_9$.

Beweis der Behauptung: Dies folgt ganz leicht aus (3) und $P = (X \cap Z_6) + Y_3 + Z_8$ (Lemma 5.5.2).

Sei nun analog zum Beweis von Lemma 9.1.2 das Universum von $JJ'(M)$ mit $P^{J'J}$ bezeichnet, entsprechend für X, Y_i und Z_i. Dann folgt

$$\begin{aligned}
P &= (X \cap Z_6) \oplus Y_3 \oplus Z_9 && \text{wegen Behauptung 6}\\
&= (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \oplus Z_9 && \text{wegen Behauptung 5}\\
&= A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus Z_9 && \text{wegen Behauptung 1}\\
&\simeq A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus B_{f_1} && \text{wegen Behauptung 2}\\
&= P^{J'J}.
\end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß dieser Isomorphismus durch Einschränken Isomorphismen zwischen X und $X^{J'J}$, zwischen den Y_i und $Y_i^{J'J}$ und zwischen den Z_i und $Z_i^{J'J}$ induziert. (Daß sich dann ein Paar von pp-Äquivalenzen ergibt, ist klar.)

Behauptung 7: $Y_i = Y_i^{J'J}$ für $i = 3, 4$.

Beweis der Behauptung: Für $i = 3$ ist dies gerade Behauptung 4; für $i = 4$ ist $Y_4 = \mathrm{graph}(f_2) + \mathrm{graph}(f_5)$ zu zeigen. Ich benutze dafür und im folgenden die – unbewiesenen, aber sehr leicht zu verifizierenden – Beschreibungen der f_i vor Lemma 9.1.4. Also ist die Inklusion $\supseteq$ schon klar. Sei nun $y \in Y_4$. Der Beweis von ii. im Beweis von Behauptung 3 zeigt, daß $y = y_1 + y_2 + x + z$ mit $x + z \in A_2$, $y_2 \in A_3$ und $(x + z) + y_2 = y - y_1 \in Y_4$, also daß $x + z + y_2 \in \mathrm{graph}(f_2)$ und $y_1 \in Y_4 \cap Z_5$. Der Beweis von i. dort wiederum zeigt, daß $y_1 \in A_1 + A_5$, also $y_1 \in \mathrm{graph}(f_5)$.

Behauptung 8: $Z_i \simeq Z_i^{J'J}$ (durch den oben angegebenen Isomorphismus), $i = 5, 6, 7, 8, 9$.

Beweis der Behauptung: Der oben angegebene Isomorphismus zwischen P und $P^{J'J}$ induziert gerade $\sigma^{-1} : Z_9 \to B_{f_1}$ (siehe Behauptung 2). Da $Z_9 \subseteq Z_i$ und $P = (X \cap Z_6 + Y_3) \oplus Z_9$, genügt es zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}
Z_8 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) &= \mathrm{graph}(f_3), \\
Z_7 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) &= A_3 + A_4, \\
Z_6 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) &= A_3 + A_4 + A_5 \text{ und} \\
Z_5 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) &= A_1 + A_3 + A_4 + A_5.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Inklusion $\supseteq$ stets klar.

Sei nun $x + y \in Z_8 \cap (X \cap Z_6 + Y_3)$, mit $x \in X \cap Z_6$ und $y \in Y_3$. Sei $y = y_1 + y_2 + x' + z$ eine Zerlegung gemäß (4), also $y_2 \in Y_3 \cap Z_7 = A_3$; weiter ist $Y_3 \cap Z_6 \ni y - y_2 = y_1 + x' + z \in Y_4 \cap Z_5 + X + Z_9$, somit $x + (y - y_2) \in A_4$. Da $x + (y - y_2) + y_2 = x + y \in Z_8$, ist $x + y \in \mathrm{graph}(f_3)$. – Für Z_7 rechnet man ganz analog. Bei Z_6 schließt man so: $Z_6 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) = X \cap Z_6 + Y_3 \cap Z_6 \subseteq A_3 + A_4 + A_5$ wegen iii. im Beweis von Behauptung 3 und der Teilbehauptung im Beweis von Behauptung 5. – Z_5 ist ganz ähnlich: $Z_5 \cap (X \cap Z_6 + Y_3) = X \cap Z_6 + Y_3 \cap Z_5$, und $Y_3 \cap Z_5 = Y_4 \cap Z_5 + A_3 + A_1$ wegen (4); zusammen mit der Teilbehauptung aus dem Beweis von Behauptung 5 und mit i. aus dem Beweis von Behauptung 3 erhält man das Gewünschte.

Behauptung 9: Obiger Isomorphismus induziert einen Isomorphismus $X \simeq X^{J'J}$:

Beweis der Behauptung: Diese Rechnerei schenke ich mir. ■

Beweis: (von Lemma 8.4.2) In diesem Beweis sei F_1 stets der Funktor von einer geeigneten Klasse von m-Zyklen in die Modulklasse, die $\mathcal{A}_{b,b'}$ entspricht, F_2 der Funktor von der zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ gehörigen Modulklasse zu m-Zyklen. m-Zyklen schreibe ich, wie vor Korollar 5.1.3 und zu Anfang von Abschnitt 5.1.2 vereinbart (und wie schon bisher in diesem Kapitel) meist mit Vektorräumen A_i, $1 \leq i \leq m$, und Funktionen $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ und $f_m : A_m \to A_1$; im Falle $m = 2$ sei dann noch $f = f_1$ und $g = f_2$. – Der Beweis ist wieder eine Einzelfallanalyse:

1. $\tilde{\mathrm{D}}_4$:

Aus Symmetriegründen sei ohne Einschränkung $b = \{\{V_1, V_2\}, \{V_3, V_4\}\}$ und $b' = \{\{V_1, V_3\}, \{V_2, V_4\}\}$, also $b'' = b_3 = \{\{V_1, V_4\}, \{V_2, V_3\}\}$. Moduln aus der Klasse zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ sind wegen $\gamma^{\cap}_{\{V_1,V_2\}} \wedge \gamma^{\Sigma}_{\{V_1,V_2\}}$ – das heißt weil für sie $V_1 \oplus V_2 = V_0$ gilt – im Bild des Funktors $D = D_{1,2}$. Wegen $\gamma^{\cap}_{b'} \wedge \gamma^{\Sigma}_{b'}$ und Lemma 5.2.7 haben sie dann die Gestalt

$$D_{1,2}\left(\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & W_4 \arrow[dl] \arrow[dr, "\simeq"] & \\ W_3 & & W_1 \\ & W_2 \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right).$$

Und die Bedingung $\gamma^{\cap}_{\{V_3,V_4\}} \wedge \gamma^{\Sigma}_{\{V_3,V_4\}}$ bedeutet, daß, etwa, $e_{2,1}e_{2,3}^{-1}e_{4,3}e_{4,1}^{-1} - 1 : W_1 \to W_1$ Isomorphismus ist. Die – nach Identifikation von $e_{2,3}$ und $e_{4,1}$ zu 1 – durch $D_{1,2}$ vermittelte pp-Äquivalenz zwischen der zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ gehörenden Klasse von Moduln und 2-Zyklen

$$A_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} A_2,$$

die f und g injektiv und $fg - 1 : A_2 \to A_2$ Isomorphismus (bzw., äquivalent, $gf - 1 : A_1 \to A_1$ Isomorphismus) erfüllen, wird also gegeben durch den Funktor F_1, der einen solchen 2-Zyklus auf das Quadrupel (Unterraumsystem)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] A_2 \arrow[dr] & & \mathrm{graph} g \arrow[dl] \\ & A_2 \oplus A_1 & \\ A_1 \arrow[ur] & & \mathrm{graph} f \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

abbildet, und den Funktor F_2, der ein geeignetes Quadrupel $(V_0; V_1, V_2, V_3, V_4)$ auf

$$V_2 \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} V_1$$

wirft, mit

$$\begin{aligned} f(v_2) &= v_1, \text{ falls } v_1 + v_2 \in V_3 \text{ und} && (1)\\ g(v_1) &= v_2, \text{ falls } v_1 + v_2 \in V_4, && (2) \end{aligned}$$

$v_1 \in A_2 := V_1$ und $v_2 \in A_1 := V_2$.

Außerdem erhält man die folgende Entsprechung:

f surjektiv	$V_2 \oplus V_3 = V_0$
g surjektiv	$V_1 \oplus V_4 = V_0$

Für spätere Anwendungen wird nur noch die spezielle Gestalt des Funktors F_2 benötigt werden – das heißt wie Funktionen in einem gegebenen Modul kodiert werden; ich verzichte daher im Rest des Beweises von Lemma 8.4.2 darauf, F_1 auszurechnen.

2. $\tilde{\mathrm{E}}_6$:

i. $b = b_1$, $b' = b_2$, also $b'' = b_3 = \{\{E_1, E_2 \cap E_3\}, \{F_1, F_2, F_3\}\}$. Hier liefern Lemma 5.3.4 ii. und Lemma 5.3.6 zusammen mit der Diskussion im Falle $\tilde{\mathrm{D}}_4$ soeben, daß die Komposition von T und $D_{1,2}$ die gewünschte pp-Äquivalenz ergibt: T' und $D'_{1,2}$ zeigen sofort, daß die $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechende Klasse von Moduln pp-äquivalent ist zu 2-Zyklen

$$A_1 \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} A_2,$$

mit f und g injektiv, sowie $fg - 1$ (bzw. $gf - 1$) bijektiv, und daß als F_2 der Funktor dienen kann, der eine $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Darstellung (in Standardnotation) aus der Modulklasse von $\mathcal{A}_{b,b'}$ auf den 2-Zyklus

$$E_1 \cap E_2 \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} F_1$$

abbildet, mit

$$f(x) = y, \text{ falls } x + y \in E_1 \cap E_3, \text{ das heißt } x + y \in E_3 \text{ und} \tag{7}$$
$$g(y) = x, \text{ falls } x + y \in E_1 \cap (F_2 + F_3), \text{ das heißt } x + y \in F_2 + F_3, \tag{8}$$

für $x \in A_1 := E_1 \cap E_2$ und $y \in A_2 := F_1$.

Außerdem hat man (mit Lemma 5.3.6 und der Überlegung für $\tilde{\mathrm{D}}_4$ eben; oder ganz direkt und mit Lemma 5.5.5) die folgende Entsprechung:

$$\begin{array}{ll} f \text{ surjektiv} & Q = E_1 \oplus E_2 \cap E_3 \\ g \text{ surjektiv} & Q = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \end{array}$$

ii. $b = b_1$, $b' = b_3$, also $b'' = b_2 = \{\{E_1, F_2\}, \{E_2, F_3\}, \{E_3, F_1\}\}$. Ganz analog dem Vorgehen bei $\tilde{\mathrm{D}}_4$; Lemma 5.3.5 zeigt, daß die Funktoren S und S' ein Paar von pp-Äquivalenzen zwischen 3-Zyklen

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f_1"] & & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& A_3 \arrow[ul, "f_3"] &
\end{tikzcd}
$$

wobei alle f_i injektiv und $f_3 f_2 f_1 + 1$ bijektiv sind, und der $\mathcal{A}_{b,b'}$ entsprechenden Modulklasse ergeben. Als F_2 erhält man – durch S' induziert – den Funktor, der eine $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Darstellung (in Standardnotation) auf den 3-Zyklus

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \cap E_3 \arrow[rr, "f_1"] & & E_1 \cap E_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& E_2 \cap E_3 \arrow[ul, "f_3"] &
\end{tikzcd}
$$

wirft, wobei

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= y, \text{ falls } x + y \in F_1, && (9)\\
f_2(y) &= z, \text{ falls } y + z \in F_2, && (10)\\
f_3(z) &= x, \text{ falls } z + x \in F_3, && (11)
\end{aligned}
$$

mit $x \in A_1 := E_1 \cap E_3$, $y \in A_2 := E_1 \cap E_2$ und $z \in A_3 := E_2 \cap E_3$. (Denn seien π_1, π_2 und π_3 die Projektionen auf erste, zweite und dritte Koordinate in $Q = E_1 \cap E_3 \oplus E_1 \cap E_2 \oplus E_2 \cap E_3$; dann ist $f_1(x) = y$, falls es ein $z \in F_1$ gibt, so daß $\pi_1(z) = x$ und $\pi_2(z) = y$, also genau dann wenn $x + y = z \in F_1$.)

Weiter erhält man die Entsprechungen

$$
\begin{array}{ll}
f_1 \text{ surjektiv} & Q = E_3 \oplus F_1 \\
f_2 \text{ surjektiv} & Q = E_1 \oplus F_2 \\
f_3 \text{ surjektiv} & Q = E_2 \oplus F_3
\end{array}
$$

iii. Vollkommen analog ii.

3. $\tilde{\mathrm{E}}_7$:

i. $b = b_1$ und $b' = b_2$. Lemmata 5.4.4 und 5.4.5 zeigen, daß S'_7 eine pp-Äquivalenz zwischen der Modulklasse von $\mathcal{A}_{b,b'}$ (über $\tilde{\mathrm{E}}_7$) und der von $\mathcal{A}_{b,b'}$ (über $\tilde{\mathrm{E}}_6$) ist (bzw. induziert); mit Definition 5.4 und den Resultaten im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$ eben ist die zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ gehörige Klasse von $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellungen also pp-äquivalent zu 2-Zyklen

$$A_1 \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} A_2$$

mit f und g injektiv, sowie $fg-1$ bijektiv. Als F_2 erhält man den Funktor, der einen $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Modul, der die Bedingungen von $\mathcal{A}_{b,b'}$ erfüllt, abbildet auf

$$E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} E_2 \cap F_1,$$

wobei

$$\begin{aligned} f(x) &= y, \text{ falls } x+y \in F_2, && (15)\\ g(y) &= x, \text{ falls } y+x \in E_2 \cap W + G_2, \text{ äquivalent } y+x \in W+G_2, && (16) \end{aligned}$$

$x \in A_1 := E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W)$ und $y \in A_2 := E_2 \cap F_1$.
Außerdem gelten die Äquivalenzen

$$\begin{array}{ll} f \text{ surjektiv} & R = W \oplus E_1 \cap F_2 \oplus G_1 \\ g \text{ surjektiv} & R = W \oplus E_2 \cap F_1 \oplus G_2 \end{array}$$

ii. $b = b_1$ und $b' = b_3$. Man schließt analog i.; $\mathcal{A}_{b_1,b_3}$ über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ und über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ (genauer: die entsprechenden Klassen von Moduln) sind mittels S_7' pp-äquivalent, und somit hat man eine pp-Äquivalenz von 3-Zyklen, deren f_i (in der Notation wie eben) alle injektiv sind und die $f_3f_2f_1+1$ bijektiv erfüllen, und der Klasse zu $\mathcal{A}_{b_1,b_3}$. F_2 wirft einen $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Modul, der die Gleichungen zu $\mathcal{A}_{b_1,b_3}$ erfüllt, auf

$$\begin{tikzcd} F_2 \cap E_1 \arrow[r, "f_1"] & E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \arrow[dl, "f_2"] \\ F_2 \cap (G_1 + W) \arrow[u, "f_3"] & \end{tikzcd}$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(x) &= y, \text{ falls } x+y \in E_2 \cap F_1, \text{ äquivalent } x+y \in F_1, && (17)\\ f_2(y) &= z, \text{ falls } y+z \in E_2 \cap W, \text{ äquivalent } y+z \in W, && (18)\\ f_3(z) &= x, \text{ falls } z+x \in G_2, && (19) \end{aligned}$$

mit $x \in A_1 := F_2 \cap E_1$, $y \in A_2 := E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W)$ und $z \in A_3 := F_2 \cap (G_1 + W)$.
Außerdem entsprechen sich

$$\begin{array}{ll} f_1 \text{ surjektiv} & R = F_1 \oplus F_2 \\ f_2 \text{ surjektiv} & R = E_1 \cap E_2 \oplus W \\ f_3 \text{ surjektiv} & R = G_1 \oplus G_2 \oplus W \end{array}$$

iii. $b = b_2$ und $b' = b_3$. Lemma 9.1.2 zeigt die pp-Äquivalenz der zu $\mathcal{A}_{b_2,b_3}$ gehörigen Klasse von Moduln mit 4-Zyklen

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ A_4 \arrow[u, "f_4"] & A_3 \arrow[l, "f_3"] \end{tikzcd}$$

so daß alle f_i Injektionen und $f_4 f_3 f_2 f_1 - 1$ Isomorphismus ist. F_2 ist gerade der Funktor H' aus Definition 9.1; insbesondere also – wie im Anschluß an Definition 9.1 bemerkt –

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = y, \text{ falls } x + y \in G_1, & (20) \\ f_2(y) = z, \text{ falls } y + z \in W, & (21) \\ f_3(z) = w, \text{ falls } z + w \in G_2, & (22) \\ f_4(w) = x, \text{ falls } w + x \in W, & (23) \end{array}$$

$x \in A_1 := E_2 \cap F_1$, $y \in A_2 := F_1 \cap (W \cap E_1 + F_2)$, $z \in A_3 := E_1 \cap F_2$ und $w \in A_4 := F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1)$.
Und Lemma 9.1.2 ii. liefert an Entsprechungen:

$$\begin{array}{ll} f_1 \text{ surjektiv} & R = E_2 \oplus G_1 \\ f_2 \text{ surjektiv} & R = F_1 \oplus W \\ f_3 \text{ surjektiv} & R = E_1 \oplus G_2 \\ f_4 \text{ surjektiv} & R = F_2 \oplus W \end{array}$$

4. $\tilde{\mathrm{E}}_8$:
i. und ii. $b = b_1$, $b' = b_2$ oder $b' = b_3$: Man schließt analog wie in 3. i. und 3. ii. dieses Beweises. Lemmata 5.5.4 und 5.5.6 zeigen, daß S_1 eine pp-Äquivalenz zwischen den Klassen von Moduln zu $\mathcal{A}_{b,b'}$ (für $\tilde{\mathrm{E}}_8$) und $\mathcal{A}_{b,b'}$ (für $\tilde{\mathrm{E}}_7$) ergibt. Somit liefern 3. i. und ii. (sowie Definition 5.5):
i. $b = b_1$ und $b' = b_2$: Die $\mathcal{A}_{b_1,b_2}$ entsprechende Klasse von Darstellungen ist pp-äquivalent zu 2-Zyklen mit f und g injektiv, $fg - 1$ bijektiv. Dabei

bildet F_2 eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung, die den definierenden Gleichungen von $\mathcal{A}_{b_1,b_2}$ genügt, auf den 2-Zyklus

$$Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4) \underset{g=f_2}{\overset{f=f_1}{\rightleftarrows}} Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9)$$

ab, mit

$$f(x) = y, \text{ falls } x + y \in Y_3 \cap Z_6, \text{ äquivalent } x + y \in Z_6, \quad (24)$$
$$g(y) = x, \text{ falls } y + x \in Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7, \quad (25)$$

$x \in A_1 := Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4)$ und $y \in A_2 := Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9)$. Außerdem gelten die Äquivalenzen

$$\begin{array}{ll} f \text{ surjektiv} & P = X \cap Y_3 \oplus X \cap Z_6 \oplus Y_4 \oplus Z_8 \\ g \text{ surjektiv} & P = Y_4 \cap Z_5 \oplus Y_3 \cap Z_7 \oplus X \oplus Z_9 \end{array}$$

ii. $b = b_1$ und $b' = b_3$: Man erhält eine pp-Äquivalenz mit 3-Zyklen wie in Teil 3. ii. F_2 wirft eine $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Darstellung aus der Modulklasse zu $\mathcal{A}_{b_1,b_3}$ auf

$$\begin{tikzcd} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_8) \arrow[r, "f_1"] & Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4) \arrow[dl, "f_2"] \\ Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \arrow[u, "f_3"] & \end{tikzcd}$$

mit

$$f_1(x) = y, \text{ falls } x + y \in Y_3 \cap (X + Z_9), \text{ äquivalent } x + y \in X + Z_9, \quad (26)$$
$$f_2(y) = z, \text{ falls } y + z \in Y_4, \quad (27)$$
$$f_3(z) = x, \text{ falls } z + x \in Y_3 \cap Z_7, \text{ äquivalent } z + x \in Z_7, \quad (28)$$

$x \in A_1 := Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_8)$, $y \in A_2 := Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4)$ und $z \in A_3 := Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4)$.
Es entsprechen sich

$$\begin{array}{ll} f_1 \text{ surjektiv} & P = Y_3 \cap Z_6 \oplus X \oplus Z_9 \\ f_2 \text{ surjektiv} & P = X \cap Z_5 \oplus Y_4 \oplus Z_8 \\ f_3 \text{ surjektiv} & P = X \cap Y_3 \oplus Y_4 \oplus Z_7 \end{array}$$

iii. $b = b_2$ und $b' = b_3$; wegen Lemma 9.1.4 hat man eine pp-Äquivalenz zwischen den Moduln zu $\mathcal{A}_{b_2,b_3}$ und den 5-Zyklen

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\
 & & A_3 \arrow[dl, "f_3"] \\
A_5 \arrow[uu, "f_5"] & A_4 \arrow[l, "f_4"] &
\end{tikzcd}$$

mit Injektionen f_i, so daß $f_5 f_4 f_3 f_2 f_1 + 1$ bijektiv ist. Als F_2 ergibt sich der Funktor J' aus Definition 9.2; insbesondere

$$\begin{array}{ll}
f_1(x) = y, \text{ falls } x + y \in X, & (29) \\
f_2(y) = z, \text{ falls } y + z \in Y_4, & (30) \\
f_3(z) = v, \text{ falls } z + v \in Z_8, & (31) \\
f_4(v) = w, \text{ falls } w + v \in X \cap Z_6, & (32) \\
f_5(w) = x, \text{ falls } w + x \in Y_4 \cap Z_5, & (33)
\end{array}$$

$x \in A_1 := Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9)$, $y \in A_2 := (Y_4 + Y_3 \cap Z_7) \cap (X + Z_9)$, $z \in A_3 := Y_3 \cap Z_7$, $v \in A_4 := Z_7 \cap [X \cap Z_6 + Y_3(\cap Z_6) \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)]$ und $w \in A_5 := Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$.

Die üblichen Entsprechungen sind

$$\begin{array}{ll}
f_1 \text{ surjektiv} & P = X \cap Y_3 \oplus X \cap Z_5 \oplus Y_3 \cap Z_5 \\
f_2 \text{ surjektiv} & P = X \oplus Y_4 \oplus Z_9 \\
f_3 \text{ surjektiv} & P = Y_3 \oplus Z_8 \\
f_4 \text{ surjektiv} & P = X \oplus Z_7 \\
f_5 \text{ surjektiv} & P = Y_4 \oplus Z_6
\end{array}$$

■

Übrigens gelten, wie in der Zusammenfassung dieses Beweises vor Korollar 8.4.3 bereits erwähnt, die Entsprechungen zu "f_i surjektiv" aus dem Beweis für Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$, nicht nur für solche aus dem jeweils betrachteten $\mathcal{A}_{b,b'}$.

9.2 Beweis von Lemma 8.8.11

Dieser Abschnitt besteht nur aus dem sehr mühseligen, rechnerischen Beweis von Lemma 8.8.11. Einige wenige Teile sind vollkommen stumpfsinnige

Verifikationen, andere aber erfordern ad hoc Tricks und kosten nicht wenig Mühe.

Lemma 9.2.1 *(= Lemma 8.8.11)* (*) *Für jedes n werden die $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $i = 3$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$) bzw. $i = 1, 2$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$) bzw. $i = 1, 2, 3$ (bei $\tilde{\mathrm{E}}_8$) von fast allen Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt.*

(Die Bemerkungen nach Satz 8.8.12 zeigen, daß das Lemma in *jedem* der drei Fälle, ja sogar für $\tilde{\mathrm{D}}_4$, für *alle* $i = 1, 2, 3$ zutrifft.)

Beweis: Ich führe nicht alle Rechnungen vor, beschränke mich manchmal auf Hinweise; anfangs gebe ich allerdings ganz ausführliche Begründungen. Man beachte die gleich folgende Vereinbarung zur Notation.

Vorbemerkung:
a. Aus Symmetriegründen ist es günstig, sogar etwas stärkere Gleichungen als die $\mathrm{III}^n_{b_i}$ (siehe Definition 8.6 auf Seite 205) nachzuweisen:

$$\mathrm{III}^n_{b_i}$$

sei die Gleichung

$$A_1 = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n),$$

wobei, wie nach Lemma 8.4.2 auf Seite 181 vereinbart, $Y := gf = X_1 : A_1 \to A_1$. (Es ist klar, daß $\mathrm{III}^{n+1}_{b_i}$ die Gleichung $\mathrm{III}^n_{b_i}$ impliziert.) Erinnert sei daran, daß die g, f, etc. wie in Definition 8.6 sind, das heißt aus dem Beweis von Lemma 8.4.2 kommen, von den dort gegebenen pp-Äquivalenzen vermittelt werden.

b. Da durch das "Übersetzen" (siehe im weiteren Verlauf des Beweises oder auch den früheren Beweis von Lemma 8.8.7) der Bedingungen $\mathrm{III}^n_{b_i}$ laufend neue auftreten, eine

Vereinbarung zur Notation:
"Bedingung (oder auch: Gleichung)

$$(1) \quad A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_1$$

gilt für fast alle Unzerlegbaren aus der Menge $\mathcal{U}$" soll bedeuten, daß für jedes n fast alle Unzerlegbaren aus $\mathcal{U}$ die Gleichung

$$A_1 = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$$

– fürderhin auch als $(1)^n$ bezeichnet – mit $Y = f_i \cdot \ldots \cdot f_1$ erfüllen. Entsprechend für III_{b_i}: Dies stehe als Abkürzung statt “für jedes n $\mathrm{III}^n_{b_i}$”. Gelegentlich schreibe ich auch

$$(1) \quad A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_1,$$

meine aber in Wirklichkeit $(1)^n$: Aus dem Zusammenhang wird jeweils ersichtlich sein, ob (1) für ein festes n – das heißt $(1)^n$ – oder (1) betrachtet wird.

Außerdem sei in diesem Beweis die erste Menge der gerade betrachteten Bedingung stets mit A_1, die zweite mit A_2 etc. bezeichnet; ausgewertet auf einem Unzerlegbaren der Form C^+U seien sie A_1^+, A_2^+ etc. Entsprechend für die Abbildungen $f_i : A_i \to A_{i+1}$. (Siehe auch Vereinbarung c. zu Beginn von Kapitel 5.)

c. Sind A und B Unterräume eines gemeinsamen Vektorraums und gilt für $a \in A, b \in B$ und eine partielle Funktion $f : A \to B$, daß $f(a) = b$ genau dann, wenn $a + b \in C$, dann schreibe ich einfach “$f = C$” oder auch $A \overset{C}{\to} B$ dafür.

Von allen im folgenden vorkommenden solchen C läßt sich jeweils leicht einsehen, daß sie in der Tat partielle (und injektive) Abbildungen, also partielle Isomorphismen, definieren.

Ist $A \overset{C}{\to} B$ eine partielle (injektive) Abbildung und $\pi : A + B \to \ldots$ eine Injektion, dann ist auch $\pi(A) \overset{\pi(C \cap (A+B))}{\longrightarrow} \pi(B)$ eine partielle (injektive) Abbildung. (Klar.) – Und mit der Vereinbarung zur Notation unter Punkt b. gilt: Sind die A_i Unterräume eines gemeinsamen Vektorraums, und ist $\pi : A_1 + \ldots + A_i \to \ldots$ injektiv, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i. $A_1 \xrightarrow{C_1} A_2 \xrightarrow{C_2} A_3 \xrightarrow{C_3} \ldots \xrightarrow{C_{i-1}} A_i \xrightarrow{C_i} A_1$;

ii. $\pi(A_1) \xrightarrow{C_1'} \pi(A_2) \xrightarrow{C_2'} \pi(A_3) \xrightarrow{C_3'} \ldots \xrightarrow{C_{i-1}'} \pi(A_i) \xrightarrow{C_i'} \pi(A_1)$, mit $C_1' = \pi(C_1 \cap (A_1 + A_2))$, $C_2' = \pi(C_2 \cap (A_2 + A_3))$, $\ldots$, $C_{i-1}' = \pi(C_{i-1} \cap (A_{i-1} + A_i))$ und $C_i' = \pi(C_i \cap (A_i + A_1))$;

iii. $A_1 \xrightarrow{C_i} A_i \xrightarrow{C_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{C_{i-2}} \ldots \xrightarrow{C_2} A_2 \xrightarrow{C_1} A_1$.

Entsprechend für die i.^n, ii.^n und iii.^n (definiert in Vorbemerkung b.). (Klar.) Dies werde ich kommentarlos verwenden.

Behauptung 1: Die Bedingungen III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$, gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden sechs Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild von S_1 liegen, erfüllt sind (alles in Standardnotation):

i. $A_1 = Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4) \xrightarrow{f_1} Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9) \xrightarrow{f_2} A_1$, mit $f_1 = Z_6$ und $f_2 = Y_4 \cap Z_5 + Y_3 \cap Z_7$;

ii. $A_1 = (Y_3 \cap Z_6 + Z_9) \cap (X + Y_4 \cap Z_5) \xrightarrow{Z_7} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X+Z_8} A_1$;

iii. $A_1 = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_8) \xrightarrow{X+Z_9} Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_8) \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_4} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Z_7} A_1$;

iv. $A_1 = (Y_3 \cap Z_7 + Z_9) \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_3} (Y_3 \cap Z_6 + Z_9) \cap (X + Y_4 \cap Z_5) \xrightarrow{X} Z_7 \cap (X + Y_4 \cap Z_5) \xrightarrow{Z_8} A_1$;

v. $A_1 = Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9) \xrightarrow{X+Y_4} Y_3 \cap Z_7 \xrightarrow{X+Z_8} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5) \xrightarrow{Y_4} A_1$;

vi. $A_1 = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X+Y_4 \cap Z_5} Z_8 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_3+Z_9} Z_7 \cap (X + Y_4) \cap (X \cap Z_6 + Y_3) \xrightarrow{X} A_1$.

(Dabei ist i. gerade III_{b_3}, iii. ist III_{b_2} und v. ist im wesentlichen äquivalent zu III_{b_1} (genauer: v.^{n} ist zu $\mathrm{III}_{b_1}^n$ äquivalent.); siehe gleich im Beweis. Punkte ii., iv. bzw. vi. sind "Übersetzungen" von Punkt i., iii. bzw. v.; siehe Teilbehauptungen 3 bis 5.)

Beweis der Behauptung: Zunächst zu Punkt v.: (Für Bezeichnungen siehe wie immer Definition 8.6, den Beweis von Lemma 8.4.2 und Seite 181.)

Teilbehauptung 1: Bis auf das Vorzeichen ist die Abbildung $A_1 = Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9) \xrightarrow{X+Y_4} Y_3 \cap Z_7$ gerade $A_1 = Y_3 \cap Z_5 \cap (X + Z_9) \xrightarrow{f_2 f_1} Y_3 \cap Z_7$ aus der Bedingung III_{b_1}.

Beweis der Teilbehauptung: Sei $z \in A_1$, $z' \in Y_3 \cap Z_7$ mit $z + z' \in X + Y_4$. Also gilt für geeignete $x \in X$ und $y \in Y_4$, daß $z + z' = x + y$, somit

$$Y_3 \cap Z_7 + Y_4 \ni z' - y = x - z \in X + Z_9.$$

Folglich ist $z' - y \in (Y_3 \cap Z_7 + Y_4) \cap (X + Z_9)$, $f_1(z) = z' - y$ und $f_2(z' - y) = -z'$, wie gewünscht. Umgekehrt sei $z \in A_1$ und $z' \in Y_3 \cap Z_7$, mit $f_2 f_1(z) = z'$. Dann ist also $z + f_1(z) \in X$ und $f_1(z) + z' \in Y_4$, folglich $z - z' \in X + Y_4$ wie verlangt. Das zeigt Teilbehauptung 1.

Teilbehauptung 2: Bis auf das Vorzeichen ist die Abbildung $Y_3 \cap Z_7 \xrightarrow{X+Z_8} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$ gerade $Y_3 \cap Z_7 \xrightarrow{f_4 f_3} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$ aus der Bedingung III_{b_1}.

Beweis der Teilbehauptung: Sei $y \in Y_3 \cap Z_7$, $y' \in Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$ und $y + y' \in X + Z_8$, also von der Form $y + y' = x + z$ mit $x \in X \cap Z_6$ und $z \in Z_8$. Dann ist $y' - x \in X \cap Z_6 + Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)$, und da $y' - x = z - y \in Z_7$, folgt $y' - x \in Z_7 \cap [X \cap Z_6 + Y_3 \cap (X + Z_9 + Y_4 \cap Z_5)]$. Außerdem ist $y + (y' - x) = z \in Z_8$ und $y' - x + (-y') = -x \in X$, also $f_3(y) = y' - x$ und $f_4(y' - x) = -y'$, wie gewünscht. Die andere Richtung ist wieder klar. Das beendet Teilbehauptung 2.

Damit ist klar, daß aus v. Bedingung III_{b_1} folgt, genauer sogar: aus v.^{n} folgt $\mathrm{III}^n_{b_1}$.

Wegen Lemma 8.8.1 genügt es zum Beweis von Behauptung 1 nun zu zeigen, daß für fast alle präprojektiven Unzerlegbaren U (von Defekt -1) und für festes n aus der Gültigkeit von ii.^{n}, iv.^{n} bzw. vi.^{n} diejenige von $\mathrm{III}^n_{b_i}$, $i = 3, 2$ bzw. $i = 1$ für C^+U folgt. Das ist jeweils eine Rechnung nach Art derjenigen im Beweis von Lemma 8.8.7: Da $Y_3^+ = \ker(X \oplus Y_4 \oplus Z_5 \to P)$ und ((*)!) $X \cap Y_4 = 0$, ist die Projektion $\pi : Y_3^+ \to Z_5$ auf die dritte Koordinate von Y_3^+ injektiv. Weil die pp-definierbaren Mengen A_i^+ der Bedingungen i., iii. und v. alle in Y_3^+ liegen, sind diese Bedingungen zu "ihren π-Bildern" (siehe Vorbemerkung c.) äquivalent; darauf beruht der Beweis der nächsten drei Teilbehauptungen: Berechnet wird nämlich etwa in Teilbehauptung 3 das "π-Bild" der "geplusten" Version von $\mathrm{III}^n_{b_3}$. Nach den Bemerkungen eben ist dies eine Bedingung an U, die äquivalent zum Bestehen von $\mathrm{III}^n_{b_3}$ in C^+U ist.

Teilbehauptung 3: Für fast alle Unzerlegbaren U folgt aus ii.^{n}, daß $\mathrm{III}^n_{b_3}$ für C^+U gilt.

Beweis der Teilbehauptung: Es ist $A_1^+ = Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Z_8^+) \cap (X^+ + Y_4^+)$ und entsprechend $A_2^+ = Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Z_9^+)$ (wie zu Anfang unter Punkt b. vereinbart); es gilt, zunächst $\pi(A_1^+)$ und $\pi(A_2^+)$ zu berechnen:

a. Es ist $Y_3^+ \cap Z_5^+ = \ker(X \oplus Y_4 \oplus Z_6 \to P)$:
Klar.

b. $\pi(Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Z_8^+)) = (Z_6 \cap Y_3 + Z_9) \cap (X + Y_4)$:
Denn ist $(x, y, z) \in Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Z_8^+)$, so wegen a. zunächst $z \in Z_6$, $y \in Y_4$, außerdem aber $(x, y, z) = (0, y', -y') + (x, y'', z'')$ mit $y' \in Y_3 \cap Z_5$, $z'' \in Z_9$, also sogar $y' = z'' - z \in Y_3 \cap Z_6$ und somit $z \in (Y_3 \cap Z_6 + Z_9)$ – wegen $z = -y' + z''$ – und $z \in X + Y_4$ – wegen $z = -x - y$. Umgekehrt sei nun

$z \in (Z_6 \cap Y_3 + Z_9) \cap (X + Y_4)$. Also gibt es $y' \in Y_3 \cap Z_6$, $z' \in Z_9$, $x \in X$ und $y \in Y_4$ mit $Z_6 \ni z = -y' + z' = -x - y$. Damit ist dann $(x, y, z) \in Y_3^+ \cap Z_5^+$, sowie $(x, y, z) = (0, y', -y') + (x, y - y', z') \in X^+ + Z_8^+$ (Man beachte, daß $x + (y - y') + z' = x + y + z = 0$ und daß $y' \in Y_3 \cap Z_5$.).

c. $\pi(Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Y_4^+)) = Z_6 \cap (Y_4 \cap Z_5 + X)$:
Eine Rechnung genau wie in b.

Da π injektiv ist auf Y_3^+, folgt also, daß $\pi(A_1^+)$ Schnitt der in b. bzw. c. berechneten Mengen ist, also

$$\pi(A_1^+) = (Y_3 \cap Z_6 + Z_9) \cap (Y_4 \cap Z_5 + X).$$

d. $\pi(A_2^+) = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4)$:
Denn sei $(x, y, z) \in A_2^+ = Y_3^+ \cap Z_5^+ \cap (X^+ + Z_9^+)$, also $y \in Y_4$, $z \in Z_6$ und $(x, y, z) = (0, -z, z) + (x, -x, 0)$, also $x \in X \cap Y_3$ und $z \in Y_3 \cap Z_5$, also in der Tat $z \in Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4)$ wie behauptet. Die Umkehrung geht genauso.

Als nächstes sind die Projektionen der Abbildungen zu ermitteln, also $\pi(f_1^+) = \pi(Y_3^+ \cap Z_6^+)$ und $\pi(f_2^+) = \pi(Y_4^+ \cap Z_5^+ + Y_3^+ \cap Z_7^+)$:

e. $\pi(Y_3^+ \cap Z_6^+) = Z_7 \cap (X + Y_4)$:
Sofort klar.

f. $\pi(Y_4^+ \cap Z_5^+ + Y_3^+ \cap Z_7^+) = (X \cap Z_6) + (X + Y_4) \cap Z_8$:
Das ist eine leichte Rechnung.

Somit erhält man zunächst als Bedingung, die für U erfüllt sein muß, damit in $C^+(U)$ dann $\mathrm{III}_{b_3}^n$ gilt ,

$$\pi(A_1^+) = (Y_3 \cap Z_6 + Z_9) \cap (X + Y_4 \cap Z_5) \overset{Z_7 \cap (X + Y_4)}{\longrightarrow} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \overset{\pi(f_2^+)}{\longrightarrow} \pi(A_1^+)$$

(für dieses feste n), mit $\pi(f_2^+) = (X \cap Z_6) + (X + Y_4) \cap Z_8$. Da aber $\pi(A_1^+), \pi(A_2^+) \subseteq X + Y_4$, kann man für die erste Abbildung einfach Z_7 schreiben und für die zweite $X \cap Z_6 + Z_8$; weil aber auch $\pi(A_1^+), \pi(A_2^+) \subseteq Z_6$, vereinfacht sich letzteres zu $X + Z_8$: Das ist dann tatsächlich ii. bzw. ii.^{n}, und die Teilbehauptung ist bewiesen.

Teilbehauptung 4: Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren U: Gilt Bedingung iv.^{n} in U, so gilt $\mathrm{III}_{b_2}^n$ in C^+U.

Beweis der Teilbehauptung: Man geht vor wie im Beweis von Teilbehauptung 3 eben; die A_i, f_i seien wie in iii., das heißt wie in der Bedingung III_{b_2}. Die Projektion $\pi(A_2^+)$ von A_2^+ ist im Beweis von Teilbehauptung 3 ausgerechnet worden (nach Punkt c., als $\pi(A_1^+)$ in der dortigen Notation); $\pi(A_1^+)$ und

$\pi(A_3^+)$ erhält man wie in Punkt b. und c. dort (indem man Z_5^+ durch Z_6^+ und Z_6 durch Z_7 ersetzt). Auch die Projektionen der Abbildungen sind ganz leicht zu ermitteln, etwa die der ersten: $\pi(f_1^+) = \pi(Y_3^+ \cap (X^+ + Z_9^+)) = Y_3 \cap (X + Y_4)$; da die Projektionen der A_i^+ alle in $X + Y_4$ liegen, kann man dies zu Y_3 vereinfachen, etc. Das beweist diese Teilbehauptung.

Teilbehauptung 5: Für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren U: Gilt Bedingung vi.^{n} in U, so gilt Bedingung v.^{n} – und somit $\mathrm{III}_{b_1}^n$ (siehe unmittelbar nach Teilbehauptung 2) – in C^+U.

Beweis der Teilbehauptung: A_i und f_i sind nun wie in v.

a. Es ist $\pi(A_1^+) = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4)$:
Denn siehe $\pi(A_2^+)$ im Beweis von Teilbehauptung 3.

b. $\pi(A_2^+) = Z_8 \cap (X + Y_4)$:
Trivial.

c. $\pi(A_3^+) = Z_7 \cap (X + Y_4) \cap (X \cap Z_6 + Y_3)$:
Denn sei zunächst $(x, y, z) \in A_3^+$, also $y \in Y_4$, $z \in Z_7$ und

$$(x, y, z) = (0, y_1, -y_1) + (x_1, -x_1, 0) + (x_2, 0, -x_2),$$

mit $x_1 \in X \cap Y_3, y_1 \in Y_3 \cap Z_5, x_2 \in X \cap Z_6$, insbesondere auch $y_1 \in Y_3 \cap Z_6$ und $z \in Z_7 \cap (X + Y_4)$. Da aber auch $z = -y_1 - x_2$, folgt $z \in X \cap Z_6 + Y_3$. Umgekehrt ganz entsprechend: Sei $z \in Z_7$, mit $z = -x - y$ für $y \in Y_4$, $x \in X$ und $z = -x_2 - y_1$ für $x_2 \in X \cap Z_6$ und $y_1 \in Y_3 \cap Z_6$. Dann folgt

$$(x, y, z) = (0, y_1, -y_1) + (x - x_2, y - y_1, 0) + (x_2, 0, -x_2)$$

wie gewünscht.

d. Entsprechend für die Abbildungen: $\pi(f_3^+) = \pi(Y_4^+) = Z_5 \cap X$ ist klar; $\pi(f_1^+) = \pi(Y_3^+ \cap (X^+ + Y_4^+)) = X + Y_4 \cap Z_5$ ist einfach (siehe Punkt c. im Beweis von Teilbehauptung 3). Und $\pi(f_2^+) = (Y_3 + Z_9) \cap (X + Y_4)$ ergibt sich wie in Punkt b. dort. Nun die üblichen Vereinfachungen der Abbildungen, und man erhält vi.^{n}. Das beweist Teilbehauptung 5 und somit Behauptung 1.

Behauptung 2: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$, gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$-Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden sechs Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren von Defekt -1 (in Standardnotation) erfüllt sind:

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{F_2} E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_2 + W} A_1$;

ii. $A_1 = F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W) \xrightarrow{G_2} F_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{E_1} A_1$;

iii. $A_1 = F_2 \cap E_1 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{W+G_2} A_1$;

iv. $A_1 = G_2 \xrightarrow{G_1+W} F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W) \xrightarrow{E_1} A_1$;

v. $A_1 = E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} G_2 \xrightarrow{E_1 \cap F_2 + W} A_1$;

vi. $A_1 = F_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{G_1 + W \cap E_2} E_1 \cap W \xrightarrow{F_1+G_2} A_1$.

Beweis der Behauptung: Wir zeigen eigentlich für fast alle rein-injektiven Unzerlegbaren U über $\tilde{\mathrm{E}}_7$: Gilt Bedingung j.^{n} für U, so gilt Bedingung j.^{n} aus Behauptung 1 für $S_1(U)$. (Dabei wird gar nicht gebraucht, daß der Defekt von U -1 beträgt.) Wegen Behauptung 1 ist dann Behauptung 2 gezeigt. – Achtung: Die n lasse ich im folgenden aber gleich wieder weg.

a. Wie der Beweis von Lemma 8.4.2 zeigt, ist Bedingung i. aus Behauptung 1 gerade definiert worden als Übersetzung (via S_1) von i. aus Behauptung 2, das heißt als "S_1-Bild" von i. aus Behauptung 2; siehe Seite 234 und Seite 236. Und iii. von Behauptung 1 ist entsprechend definiert worden als Übersetzung (via S_1) der Bedingung (für $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Darstellungen; siehe Seite 234 und Seite 236)

$$A_1 = F_2 \cap E_1 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{W} F_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{G_2} A_1,$$

das heißt von III_{b_2} für $\tilde{\mathrm{E}}_7$. Diese aber ist äquivalent zu Bedingung iii. aus Behauptung 2: nach Ausrechnen von $f_3 f_2$ (wie in Teilbehauptungen 1 und 2 des Beweises von Behauptung 1) erhält man nämlich die Gleichung iii. von Behauptung 2. Das heißt: Für j=i bzw. j=iii ist man fertig.

Für den Rest des Beweises von Behauptung 2 sei π die Projektion auf die zweite Koordinate in $E_1/G_1 \oplus R$, $\pi : E_1/G_1 \oplus R \to R$. A_i und f_i beziehe sich jeweils auf die Ausdrücke in Behauptung 1; mit A_i^8 und f_i^8 – und analog für andere Mengen – seien die entsprechenden Übersetzungen (via S_1) bezeichnet, das heißt für Unzerlegbare U über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ soll gelten, daß $A_i^8(U) = A_i(S_1(U))$ etc. Zum Vorgehen: Im wesentlichen, das heißt bis auf den etwas aufwendigeren Punkt vi., ersetzt man in den Bedingungen von Behauptung 1 nun die Mengen A_i durch A_i^8, die Abbildungen f_i durch f_i^8 und erhält so eine Bedingung für $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbare, die allerdings unübersichtlich und für die weitere Behandlung wenig geeignet ist. Daher berechnet man dann davon das "π-Bild" und erhält so eine deutlich einfacher zu handhabende Bedingung: Diese tut es dann – was natürlich jeweils einer Begründung bedarf.

b. Man rechnet ii. aus Behauptung 1 via S_1 um in eine Bedingung über $\tilde{\mathrm{E}}_7$: $Y_3^8 \cap Z_6^8 + Z_9^8 = 0 \oplus F_2 + F_1/G_1 \oplus 0 = F_1/G_1 \oplus F_2$. Und $X^8 + Y_4^8 \cap Z_5^8 = \Delta(E_1) + 0 \oplus (E_2 \cap W)$, so daß also $A_1^8 = (Y_3^8 \cap Z_6^8 + Z_9^8) \cap (X^8 + Y_4^8 \cap Z_5^8) = \{(\overline{e}, e + e') \mid e \in F_1, e + e' \in F_2, e' \in E_2 \cap W\}$. Ganz analog erhält man $A_2^8 = 0 \oplus F_2 \cap (G_1 + W)$.

Nun ist $A_1, A_2 \subseteq (X + Y_4) \cap (Y_3 + Z_9)$, daher $A_1^8, A_2^8 \subseteq (\Delta(E_1) + 0 \oplus W) \cap (F_1/G_1 \oplus R) = \Delta(F_1) + 0 \oplus W = \{(\overline{f}, f + w) \mid f \in F_1, w \in W\}$, so daß π auf $A_1^8 + A_2^8$ injektiv ist (da $F_1 \cap W = 0$, siehe Lemma 5.4.2). Deshalb genügt es nun, ganz analog wie im Beweis von Behauptung 1, die $\pi(A_i^8)$ und $\pi(f_i^8)$ zu berechnen (siehe Vorbemerkung c.):

Es ist $\pi(A_1^8) = F_2 \cap (F_1 + E_2 \cap W) = F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W)$, $\pi(A_2^8) = F_2 \cap (G_1 + W)$, und ganz analog erhält man $\pi(f_1^8) = G_2 \cap (F_1 + W)$ und $\pi(f_2^8) = E_1 \cap (F_1 + W)$. Da $\pi(A_i^8) \subseteq F_1 + W$, vereinfachen sich die Ausdrücke für $\pi(f_1^8)$ bzw. $\pi(f_2^8)$ zu G_2 bzw. E_1, wie behauptet: Dies ist ii.

c. Zu Punkt iv.: Durch Ausrechnen von $f_3 f_2$ (wie in Teilbehauptung 1 oder 2 im Beweis von Behauptung 1) erhält man aus iv. von Behauptung 1 zunächst die folgende Bedingung

$$A_1 = (Y_3 \cap Z_7 + Z_9) \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_3} (Y_3 \cap Z_6 + Z_9) \cap (X + Y_4 \cap Z_5) \xrightarrow{X + Z_8} A_1;$$

A_1 und A_2 seien nun die Mengen dieser Bedingung. π ist auf $A_1^8 + A_2^8$ aus dem gleichen Grund wie eben in b. injektiv, und man erhält $\pi(A_1^8) = G_2 \cap (F_1 + W)$, $\pi(A_2^8) = F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W)$, sowie für die Abbildungen $\pi(f_1^8) = G_1 + W$ und $\pi(f_2^8) = E_1 \cap (F_1 + W)$. Da $\pi(A_i^8) \subseteq F_1 + W$, kann man $\pi(f_2^8)$ ersetzen durch E_1; ersetzt man nun noch $\pi(A_1^8)$ durch die größere Menge G_2, so erhält man iv. von Behauptung 2: Gilt iv.^{n} für U, so sicherlich auch iv.^{n} aus Behauptung 1 für $S_1(U)$.

d. Zu v.: Da $A_1, A_2, A_3 \subseteq Y_3$, ist π auf $A_1^8 + A_2^8 + A_3^8$ injektiv, und man kann ganz analog wie eben argumentieren.

e. Es bleibt nun nur noch Punkt vi. von Behauptung 1 zu übersetzen; man kann nicht direkt mit π schließen, da π nicht injektiv ist auf $A_1^8 + A_2^8 + A_3^8$, daher bietet sich folgendes Vorgehen an: Die Komposition $f_3 f_2$ in vi. von Behauptung 1 wird – bis auf das Vorzeichen – durch $Y_3 \cap Z_7 + Z_9 + X \cap Z_6$ gegeben, wie eine leichte Rechnung zeigt (ähnlich den Beweisen der Teilbehauptungen 1 und 2 im Beweis von Behauptung 1). Bedingung vi. ist also äquivalent zu

$$A_1 = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X + Y_4 \cap Z_5} Z_8 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_3 \cap Z_7 + Z_9 + X \cap Z_6} A_1.$$

Weil $X \cap Z_8 = 0$ bzw. $X \cap Y_4 = 0$ (Lemma 5.5.2), hat man einen (totalen) Isomorphismus

$$Z_8 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X} Y_4 \cap (X + Z_8) \xrightarrow{X} Z_8 \cap (X + Y_4)$$

gegeben durch $z = x + y \mapsto y$ bzw. durch $y = x + z \mapsto z$.

Teilbehauptung 1: Die Komposition $Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X+Y_4\cap Z_5} Z_8 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X} Y_4 \cap (X + Z_8)$ wird – bis auf das Vorzeichen – gegeben durch $X + Y_4 \cap Z_5$.

Beweis der Teilbehauptung: Sei $x \in Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4), y \in Y_4 \cap (X + Z_8)$ mit $x + y \in X + Y_4 \cap Z_5$, also für geeignetes $x' \in X$ und $z \in Z_8 \cap (X + Y_4)$: $y = x' + z$. Somit $x + z = (x + y) - x' \in X + Y_4 \cap Z_5$, so daß also unter der Abbildung $X + Y_4 \cap Z_5$ das Element x auf z geworfen wird, z wiederum unter X (wegen $z - y = -x' \in X$) auf $-y$. Die andere Richtung ist klar. Ganz entsprechend beweist man

Teilbehauptung 2: Die Komposition $Y_4 \cap (X + Z_8) \xrightarrow{X} Z_8 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{Y_3\cap Z_7+Z_9+X\cap Z_6} Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4)$ wird – bis auf das Vorzeichen – gegeben durch $Y_3 \cap Z_7 + Z_9 + X \cap Z_6 + X \cap (Y_4 + Z_8)$.

Daher ist es äquivalent, statt Bedingung vi. zu betrachten

$$A_1 = Y_3 \cap Z_6 \cap (X + Y_4) \xrightarrow{X+Y_4\cap Z_5} Y_4 \cap (X + Z_8) \xrightarrow{f_2} A_1,$$

mit $f_2 = Y_3 \cap Z_7 + Z_9 + X \cap Z_6 + X \cap (Y_4 + Z_8)$. Da durch diese Umformulierung nun $A_1, A_2 \subseteq Y_3$, ist π auf $A_1^8 + A_2^8$ injektiv, und es bleiben nur die $\pi(A_i^8)$ und $\pi(f_i^8)$ zu berechnen:

Es ergibt sich $\pi(A_1^8) = F_2 \cap (G_1 + W)$, $\pi(A_2^8) = E_1 \cap W$, $\pi(f_1^8) = W \cap E_2 + G_1$ und schließlich zunächst $\pi(f_2^8) = F_1 \cap (E_1 \cap F_2 + W) + G_2$, wobei letzteres aber zu $F_1 + G_2$ vereinfacht werden kann, denn sind $x \in \pi(A_1^8) = F_2 \cap (G_1 + W), y \in \pi(A_2^8) = E_1 \cap W$ und $x + y \in F_1 + G_2$, so folgt für geeignete $f \in F_1, g \in G_2$, daß $x + y = f + g$, also $F_2 \ni x - g = f - y \in E_1$, das heißt $x - g \in E_1 \cap F_2$ und somit $f = (x - g) + y \in E_1 \cap F_2 + E_1 \cap W$. Das beendet den Beweis von Behauptung 2.

Behauptung 3: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden sieben Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind:

Die Bedingungen i. bis vi. aus Behauptung 2, sowie

vii. $A_1 = E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_2+W} A_1$.

Beweis der Behauptung: Wie in a. des Beweises von Behauptung 2. gesehen, ist iii. gerade III_{b_2} für $\tilde{\mathrm{E}}_7$; und vii. ist einfach III_{b_1}, wobei die Kompositionen $f_2 f_1$ und $f_4 f_3$ wie üblich ausgerechnet worden sind. (Für die f_i siehe (20) bis (23) auf Seite 235.)

Behauptung 4: Für fast alle Präprojektiven U (von Defekt -1) gilt: Um Bedingung j.^{n} aus Behauptung 3 für $C^+(U)$ nachzuweisen, genügt es, Bedingung (j+vii).^{n} der folgenden Liste für U zu verifizieren:

viii. $A_1 = F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1) \xrightarrow{G_2} F_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{E_1} A_1$;

ix. $A_1 = (W + G_2) \cap (G_1 + E_1 \cap F_2) \xrightarrow{W} E_1 \cap E_2 \cap (W + G_2) \xrightarrow{F_1} A_1$;

x. $A_1 = G_2 \xrightarrow{G_1+W} F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1) \xrightarrow{E_1} A_1$;

xi. $A_1 = E_1 \cap W \xrightarrow{E_2} (W + G_2) \cap (G_1 + E_1 \cap F_2) \xrightarrow{F_1} A_1$;

xii. $A_1 = G_1 \xrightarrow{E_2} E_1 \cap W \xrightarrow{F_1 \cap (W+G_2) + E_1 \cap F_2} A_1$;

xiii. $A_1 = G_2 \xrightarrow{E_1 \cap F_2 + W} E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} A_1$;

xiv. $A_1 = F_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{F_1 \cap E_2 + W} G_2 \xrightarrow{E_1} A_1$.

Beweis der Behauptung: Der Beweis verläuft natürlich ganz analog zu dem von Behauptung 1. Es ist $R^+ = \ker(W \oplus E_1 \oplus E_2 \to R)$ (Tatsache 5.4.1); mit π_i sei in diesem Beweis die Projektion $\pi_i : R^+ \to E_i$ auf die zweite bzw. dritte Koordinate von R^+ bezeichnet. Benutzt wird im folgenden, daß π_1 auf E_2^+ und π_2 auf E_1^+ injektiv sind (klar); außerdem ist π_2 auf $W^+ + G_1^+$ injektiv: Ist nämlich $(0, e_1, -e_1) + (e_2, 0, -e_2) = (e_2, e_1, -e_1 - e_2) \in (W^+ + G_1^+) \cap \ker(\pi_2)$, so folgt $e_1 = -e_2 \in W \cap E_1 \cap E_2 = 0$ (wegen Lemma 8.3.3 oder Lemma 8.3.4, denn die Gleichung $W \cap E_1 \cap E_2 = 0$ ist gerade $\gamma^{\cap}_{\{W, E_1 \cap E_2\}}$, folgt also aus $\gamma^{\cap}_{b_2}$ für $\tilde{\mathrm{E}}_7$, gilt demnach für Unzerlegbare aus $\mathcal{A}$).

viii. Die A_i und f_i seien wie in Punkt i. von Behauptung 3. Es gilt $A_1^+, A_2^+ \subseteq E_1^+$, so daß also π_2 injektiv auf $A_1^+ + A_2^+$ ist. Leichte Rechnungen zeigen, daß $\pi_2(A_1^+) = F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1)$, $\pi_2(A_2^+) = F_2 \cap (W + G_1)$, $\pi_2(f_1^+) = \pi_2(F_2^+ \cap E_1^+) = G_2 \cap (F_1 + W)$ und schließlich $\pi_2(f_2^+) = \pi_2((G_2^+ + W^+) \cap E_1^+) = E_1 \cap E_2 \cap (F_1 + W)$. Da $\pi_2(A_i^+) \subseteq (F_1 + W) \cap E_2$, vereinfachen sich $\pi_2(f_1^+)$ bzw. $\pi_2(f_2^+)$ zu G_2 bzw. zu E_1: Das ist viii.

ix. Betrachte ii. von Behauptung 3; A_i, f_i wie dort. Es ist $A_i^+ \subseteq E_2^+$; man argumentiert mit π_1 ganz ähnlich wie eben.

x. A_i wie in iii. Da $A_i^+ \subseteq E_1^+$, ist π_2 injektiv auf $A_1^+ + A_2^+$. Ausrechnen der $\pi_2(A_i^+)$ bzw. $\pi_2(f_i^+)$ ergibt als Bedingung zunächst

$$\pi_2(A_1^+) = G_2 \cap (F_1 + W) \overset{E_2 \cap (W+G_1)}{\longrightarrow} F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1) \overset{E_1 \cap E_2 \cap (W+F_1)}{\longrightarrow} \pi_2(A_1^+).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\pi_2(A_1^+) = G_2 \cap (F_1 + W) \overset{W+G_1}{\longrightarrow} F_2 \cap (W \cap E_2 + F_1) \overset{E_1}{\longrightarrow} \pi_2(A_1^+),$$

was wiederum aus x. folgt.

Bei xi. und xii. verwendet man ganz entsprechend π_1; bei xiii. (A_i wie in vi.) ist $A_i^+ \subseteq W^+ + G_1^+$, so daß π_2 geeignet ist.

xiv. Man erhält aus vii. von Behauptung 3 mit π_2 zunächst

$$\pi_2(A_1^+) = F_2 \cap (W + G_1) \overset{E_2 \cap (F_1 \cap E_2 + W)}{\longrightarrow} G_2 \cap (W + F_1) \overset{E_1 \cap E_2 \cap (F_1 + W)}{\longrightarrow} \pi_2(A_1^+);$$

dies vereinfacht sich zu

$$\pi_2(A_1^+) = F_2 \cap (W + G_1) \overset{F_1 \cap E_2 + W}{\longrightarrow} G_2 \cap (W + F_1) \overset{E_1 \cap (W+F_1)}{\longrightarrow} \pi_2(A_1^+),$$

und das wiederum folgt aus xiv.: Denn – f_i, A_i nun bezogen auf xiv. – $\mathrm{im}(f_1) \subseteq W + F_1$ ist automatisch; zwar vergrößert sich beim Übergang zu xiv. $\mathrm{im}(f_2)$ etwas, aber schon $\mathrm{im}(Y) = \mathrm{im}(f_2 f_1)$ ist unverändert. Das beweist Behauptung 4.

Da viii. von Behauptung 4 und ii. von Behauptung 3, bzw. x. von Behauptung 4 und iv. von Behauptung 3 übereinstimmen, erhält man – zusammen mit Lemma 8.8.1 – aus den Behauptungen 3 und 4 zunächst zwei mal sieben minus zwei, also zwölf Bedingungen, aus deren Gültigkeit für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild von S_7 oder T_7 liegen, die III_{b_i}, $i = 1, 2$ (bzw. $i = 1, 2, 3$), für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_8$-) Unzerlegbaren von Defekt -1 folgen. Berücksichtigt man nun, daß T_7 aus S_7 durch "Vertauschen der Arme" entsteht, so erhält man (indem man zu diesen eben erhaltenen zwölf Gleichungen noch die zwölf hinzufügt, die durch Vertauschen der Indizes 1 und 2 aus ihnen entstehen)

Behauptung 5: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden 24 Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_7$-Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild von S_7 liegen, erfüllt sind:

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \overset{F_2}{\longrightarrow} E_2 \cap F_1 \overset{G_2+W}{\longrightarrow} A_1$;

ii. $A_1 = F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W) \xrightarrow{G_2} F_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{E_1} A_1$;

iii. $A_1 = F_2 \cap E_1 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{W+G_2} A_1$;

iv. $A_1 = G_2 \xrightarrow{G_1+W} F_2 \cap (E_2 \cap F_1 + W) \xrightarrow{E_1} A_1$;

v. $A_1 = E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} G_2 \xrightarrow{E_1 \cap F_2 + W} A_1$;

vi. $A_1 = F_2 \cap (G_1 + W) \xrightarrow{G_1 + W \cap E_2} E_1 \cap W \xrightarrow{F_1 + G_2} A_1$;

vii. $A_1 = E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_2+W} A_1$;

viii. $A_1 = (W + G_2) \cap (G_1 + E_1 \cap F_2) \xrightarrow{W} E_1 \cap E_2 \cap (W + G_2) \xrightarrow{F_1} A_1$;

ix. $A_1 = E_1 \cap W \xrightarrow{E_2} (W + G_2) \cap (G_1 + E_1 \cap F_2) \xrightarrow{F_1} A_1$;

x. $A_1 = G_1 \xrightarrow{E_2} E_1 \cap W \xrightarrow{F_1 \cap (W + G_2) + E_1 \cap F_2} A_1$;

xi. $A_1 = G_2 \xrightarrow{E_1 \cap F_2 + W} E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} A_1$;

xii. $A_1 = F_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{F_1 \cap E_2 + W} G_2 \xrightarrow{E_1} A_1$;

xiii. $A_1 = E_1 \cap E_2 \cap (G_2 + W) \xrightarrow{F_1} E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_1+W} A_1$;

xiv. $A_1 = F_1 \cap (E_1 \cap F_2 + W) \xrightarrow{G_1} F_1 \cap (W + G_2) \xrightarrow{E_2} A_1$;

xv. $A_1 = F_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \cap (G_2 + W) \xrightarrow{W+G_1} A_1$;

xvi. $A_1 = G_1 \xrightarrow{G_2+W} F_1 \cap (E_1 \cap F_2 + W) \xrightarrow{E_2} A_1$;

xvii. $A_1 = E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_2+W} G_1 \xrightarrow{E_2 \cap F_1 + W} A_1$;

xviii. $A_1 = F_1 \cap (G_2 + W) \xrightarrow{G_2 + W \cap E_1} E_2 \cap W \xrightarrow{F_2 + G_1} A_1$;

xix. $A_1 = E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_2+W} E_2 \cap F_1 \xrightarrow{G_1+W} A_1$;

xx. $A_1 = (W + G_1) \cap (G_2 + E_2 \cap F_1) \xrightarrow{W} E_1 \cap E_2 \cap (W + G_1) \xrightarrow{F_2} A_1$;

xxi. $A_1 = E_2 \cap W \xrightarrow{E_1} (W + G_1) \cap (G_2 + E_2 \cap F_1) \xrightarrow{F_2} A_1$;

xxii. $A_1 = G_2 \xrightarrow{E_1} E_2 \cap W \xrightarrow{F_2 \cap (W + G_1) + E_2 \cap F_1} A_1$;

xxiii. $A_1 = G_1 \xrightarrow{E_2 \cap F_1 + W} E_1 \cap F_2 \xrightarrow{G_2+W} A_1$;

xxiv. $A_1 = F_1 \cap (W + G_2) \xrightarrow{F_2 \cap E_1 + W} G_1 \xrightarrow{E_2} A_1$.

Behauptung 6: Für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Präprojektiven U folgt aus der Bedingung j.^{n}, j. aus der folgenden Liste, die Gültigkeit von j.^{n}, j. aus Behauptung 5, für $S_7(U)$.

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_3} F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

ii. $A_1 = (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

iii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

iv. $A_1 = F_3 \xrightarrow{E_2} (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

v. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_2} F_3 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

vi. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_1+F_3} A_1$;

vii. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_2} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

viii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{E_2} E_1 \cap (F_2 + F_3) \xrightarrow{F_1} A_1$;

ix. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} A_1$;

x. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_1+F_2} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

xi. $A_1 = F_3 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} F_1 \xrightarrow{E_2} A_1$;

xii. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{F_1+F_2} F_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

xiii. $A_1 = E_1 \cap (F_2 + F_3) \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{E_2} A_1$;

xiv. $A_1 = F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} E_2/F_2 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

xv. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_3} E_1 \cap (F_2 + F_3) \xrightarrow{E_2} A_1$;

xvi. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_2+F_3} F_1 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

xvii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} E_2/F_2 \xrightarrow{F_1+F_2} A_1$;

xviii. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_1 \cap E_2 + F_3} F_2 \xrightarrow{E_3} A_1$;

xix. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} F_1 \xrightarrow{E_2} A_1$;

xx. $A_1 = E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_3} A_1$;

xxi. $A_1 = F_2 \xrightarrow{E_1} E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{E_3} A_1$;

xxii. $A_1 = F_3 \xrightarrow{E_1} F_2 \xrightarrow{F_1 + E_2 \cap E_3} A_1$;

xxiii. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_1 + F_2} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2 + F_3} A_1$;

xxiv. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} F_1 \xrightarrow{F_2 + F_3} A_1$.

Dabei ist in Erweiterung der üblichen Vereinbarung etwa die Abbildungsvorschrift $E_2/F_2 \xrightarrow{F_1+F_2} E_1 \cap E_3$ von Punkt x. zu verstehen als $\overline{e} \mapsto e'$, falls $e + e' \in F_1 + F_2$, mit $e \in E_2$ und $e' \in E_1 \cap E_3$.

Beweis der Behauptung: Der Beweis geht wie der von Behauptung 2: Entsprechend sei π die Projektion auf die zweite Koordinate von $E_2/F_2 \oplus Q$ (siehe Definition 5.4 für den Funktor S_7), $\pi : E_2/F_2 \oplus Q \to Q$. A_i und f_i beziehe sich jeweils auf die gerade betrachtete Bedingung aus Behauptung 5; und A_i^7, f_i^7 etc. seien die Übersetzungen vermöge S_7, das heißt für Unzerlegbare U über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ gelte, daß $A_i^7(U) = A_i(S_7(U))$. – Man beachte noch, daß sowohl in der Standardnotation von Unterraumsystemen über $\tilde{\mathrm{E}}_6$, als auch in der von solchen über $\tilde{\mathrm{E}}_7$ Unterräume E_i und F_i vorkommen; Konfusion ist also nicht ganz ausgeschlossen, jedenfalls aber nicht beabsichtigt.

π ist injektiv auf $A_1^7 + A_2^7$, falls $A_1, A_2 \subseteq E_2$ (Dies ist der Fall bei i. bis v., vii., xi. bis xiii., xv. und xix. bis xxii.), bzw. $A_1, A_2 \subseteq F_2 + E_1 \cap W$ (Punkt vi.) oder falls $A_1, A_2 \subseteq W + G_2$ (in den Fällen viii., ix. und xviii.). In allen diesen Fällen sind die Rechnungen ganz einfach und einander sehr ähnlich, daher hier nur als Beispiel

viii. Es ist $A_1^7 = (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) \cap (E_2/F_2 \oplus 0 + 0 \oplus E_1 \cap E_3) = (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) \cap E_2/F_2 \oplus E_1 \cap E_3 = \{(\overline{e}, e') \mid e' \in E_1 \cap E_3 \cap (E_2 + F_3), e \in E_2, e' - e \in F_3\}$, $A_2^7 = 0 \oplus E_1 \cap (F_2 + F_3)$, $f_1^7 = \Delta(E_2)$ und $f_2^7 = E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3)$. Nach Anwenden von π erhält man also zunächst als Gleichung

$$\pi(A_1^7) = E_1 \cap E_3 \cap (E_2 + F_3) \xrightarrow{E_2} E_1 \cap (F_2 + F_3) \xrightarrow{F_1 \cap (E_2 + F_3)} \pi(A_1^7);$$

Da aber beide $\pi(A_i^7) \subseteq E_2 + F_3$, vereinfacht sich $\pi(f_2^7)$ sofort zu F_1, und es ist klar, daß aus Bedingung viii. von Behauptung 6 diese hier folgt.

Die verbleibenden Punkte erfordern eine genauere Untersuchung:

x. Man erhält $A_1^7 = E_2/F_2 \oplus 0$, $A_2^7 = \Delta(E_1 \cap E_2)$, $f_1^7 = 0 \oplus Q$ und $f_2^7 = E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) + 0 \oplus (E_1 \cap E_3) = \{(\overline{e}, f_1) \mid e \in E_2, f_1 \in$

$F_1, e - f_1 \in F_3\} + 0 \oplus (E_1 \cap E_3)$. Identifiziert man A_2^7 mit $E_1 \cap E_2$ und A_1^7 mit E_2/F_2, so ergibt sich, daß $f_1^7(\overline{e}) = e' \in E_1 \cap E_2$, falls e' der – dann eindeutig bestimmte – Repräsentant von $\overline{e}$ in $E_1 \cap E_2$ ist. Und eine kleine Rechnung zeigt, daß für $e \in E_1 \cap E_2$ gilt: $f_2^7(e) = \overline{e'}$, falls es $e_3 \in E_1 \cap E_3$ und $f_1 \in F_1$ gibt, so daß $e = f_1 + e_3$ und $e' + e_3 \in F_2 + F_3$, das heißt – bis auf das Vorzeichen – falls e bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_1 \cap E_3 + F_1$ ("partielle direkte Zerlegung": Das soll einfach heißen, daß die Summe $E_1 \cap E_3 + F_1$ direkt ist.) und e' bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_1 \cap E_3 + F_2 + F_3$ die gleiche $E_1 \cap E_3$-Koordinate haben. (Insbesondere wird die Existenz solcher Zerlegungen für e und e' verlangt; die Direktheit ist jeweils klar.) Also ist zu der Bedingung

$$A_1^7 \xrightarrow{f_1^7} A_2^7 \xrightarrow{f_2^7} A_1^7$$

offenbar die Bedingung

$$E_2/F_2 \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} E_2/F_2.$$

äquivalent. Die übliche Überlegung zeigt, daß hierfür aber die Bedingung x. genügt.

xvii. Identifiziert man hier $A_1^7 = 0 \oplus E_1 \cap E_3$ mit $E_1 \cap E_3$ und $A_2^7 = E_2/F_2 \oplus 0$ mit E_2/F_2, so induziert $f_1^7 = \Delta(E_2) + 0 \oplus F_3$ die Abbildung, die $e \in E_1 \cap E_3$ auf $\overline{e'}$ wirft, falls e' die E_2-Koordinate von e bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_2 + F_3$ ist; $(f_2^7)^{-1}$ induziert die Abbildung, die $e \in E_1 \cap E_3$ auf $\overline{e'}$ wirft, falls e' die E_2-Koordinate von e bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_2 + F_1$ ist. Also bietet sich als geeignete Bedingung tatsächlich xvii. von Behauptung 6 an.

xxiii. Aus Symmetriegründen klar mit xvii.

xiv. ist ganz ähnlich.

Für die noch abzuhakenden Punkte xxiv. und xvi. hier noch eine

Teilbehauptung: Seien Y und Y' zwei partielle lineare Operationen auf dem k-Vektorraum A. Es gelte $\mathrm{dom}(Y') \subseteq \mathrm{dom}(Y)$ und $Y' = Y + a$ auf $\mathrm{dom}(Y')$ für ein $a \in k$. Ferner sei $A = \mathrm{dom}((Y')^{2n}) + \mathrm{im}((Y')^{2n})$. Dann folgt $A = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$.

Beweis der Teilbehauptung: Zunächst zeigt man durch Induktion nach i, daß $\mathrm{dom}(Y')^i \subseteq \mathrm{dom}(Y^i)$ und daß auf $\mathrm{dom}(Y')^i$ gilt $Y'^i = Y^i + iaY^{i-1} + \ldots + a^i$: Für $i = 1$ ist das klar; sei nun $x \in \mathrm{dom}(Y')^{i+1}$, also einerseits $Y'^i(x) \in \mathrm{dom}(Y') \subseteq \mathrm{dom}(Y)$ und andererseits nach Induktionsvoraussetzung: $x \in$

$\mathrm{dom}(Y')^i \subseteq \mathrm{dom}(Y)^i$ und $Y'^i x = Y^i x + (iaY^{i-1}x + \ldots)$. Nun sind also $Y'^i x$ und der Inhalt der Klammer in $\mathrm{dom}(Y)$, also auch $Y^i x \in \mathrm{dom}(Y)$, das heißt $x \in \mathrm{dom}(Y)^{i+1}$. Und $(Y')^{i+1}x = Y'(Y'^i x) = (Y+a)(Y'^i x)$ nach dem Fall $i = 1$; mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun die gewünschte Gleichung. – Zum Beweis der Teilbehauptung genügt es daher zu zeigen, daß

$$\mathrm{im}(Y')^{2n} \subseteq \mathrm{im}(Y^n) + \mathrm{dom}(Y^n).$$

Das ist jetzt aber eine leichte Rechnung: Für $x \in \mathrm{dom}(Y')^{2n}$ ist $Y'^{2n}x = Y^{2n}x + 2naY^{2n-1}x + \ldots$, und da, wie eben gezeigt, $x \in \mathrm{dom}(Y')^{2n} \subseteq \mathrm{dom}(Y^{2n})$ gilt, ist hier jeder Summand in $\mathrm{dom}(Y^n)$ oder in $\mathrm{im}(Y^n)$. Das beweist die Teilbehauptung.

xxiv. Man rechnet hier aus, daß $A_1^7 = E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus F_3) = \{(\overline{e}, f) \mid e \in E_2, f \in F_1, f - e \in F_2 + F_3\}$, $A_2^7 = E_2/F_2 \oplus 0$, $f_1^7 = 0 \oplus (E_1 \cap E_3) + \Delta(E_2)$ und $f_2^7 = 0 \oplus Q$.

$\pi' : E_2/F_2 \oplus Q \to E_2/F_2$ ist injektiv auf A_1^7; identifiziert man A_1^7 mit dem Bild von A_1^7 unter π' und analysiert man, was $Y := f_2^7 f_1^7$ bedeutet, dann erhält man, daß Y die Form $Y' - 1$ hat, wobei Y' die Abbildung $\pi'(A_1^7) = (E_2 \cap (F_1 + F_2 + F_3))/F_2 \to \pi'(A_1^7)$ ist, die $\overline{e}$ auf $\overline{e'}$ abbildet, falls es $f \in F_1, f' \in F_3, e'' \in E_1 \cap E_3$ gibt, so daß $f = e' + e'' = e + f'$. Wegen der Teilbehauptung eben genügt es also, die folgende Bedingung

$$\pi'(A_1^7) = (E_2 \cap (F_1 + F_2 + F_3))/F_2 \stackrel{F_2+F_3}{\longrightarrow} F_1 \stackrel{E_1 \cap E_3 + F_2}{\longrightarrow} \pi'(A_1^7)$$

zu zeigen, denn die Komposition der Abbildungen $\pi'(A_1^7) \to F_1$ und $F_1 \to \pi'(A_1^7)$ ist gerade Y'. Diese Bedingung folgt aber aus xxiv.

xvi. Hier erhält man sofort $A_1^7 = E_2/F_2 \oplus 0$, $A_2^7 = E_2/F_2 \oplus F_1 \cap (\Delta(E_2) + 0 \oplus E_1 \cap E_3) = \{(\overline{e}, f) \mid f \in F_1, f - e \in E_1 \cap E_3 + F_2\}$, $f_1^7 = \Delta(E_2) + 0 \oplus F_3$ und $f_2^7 = 0 \oplus Q$. Identifiziert man A_1^7 mit E_2/F_2 und vertauscht f_1^7 und f_2^7 (was wegen Vorbemerkung c. eine äquivalente Gleichung liefert), dann ergibt sich für die Komposition der Abbildungen Y, daß

$$Y : \overline{e} \mapsto \overline{e'},$$

falls es $f \in F_1$ gibt, so daß e die E_2-Koordinate von f bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_2 + E_1 \cap E_3$ ist und $\overline{e + e'}$ die E_2-Koordinate von f bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $E_2 + F_3$. Y ist also von der Form $Y' - 1$, wobei Y' die Abbildung $\overline{e} \mapsto \overline{e + e'}$ ist, die beschrieben wird als Komposition der beiden Abbildungen in Punkt xvi. von Behauptung 6 (bis auf Reihenfolge). Das erledigt auch Punkt xvi. und damit Behauptung 6.

Behauptung 7: Die III_{b_i}, $i = 1,2,3$ (bzw. $i = 1,2$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden 11 Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind:

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_3} F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

ii. $A_1 = (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

iii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

iv. $A_1 = F_3 \xrightarrow{E_2} (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

v. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_2} F_3 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

vi. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_3} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

vii. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} E_3 \cap (F_1 + F_2) \xrightarrow{F_3} A_1$;

viii. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_1+F_2} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

ix. $A_1 = F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} E_2/F_2 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

x. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_2+F_3} F_1 \xrightarrow{E_1 \cap E_3 + F_2} A_1$;

xi. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1+F_2} E_2/F_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$.

Beweis der Behauptung: Behauptungen 5 und 6 liefern zunächst 24 Bedingungen (nämlich die von Behauptung 6), so daß gilt: Sind diese für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt, dann gelten die III_{b_i}, $i = 1,2,3$ (bzw. $i = 1,2$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$), für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-) Unzerlegbaren von Defekt -1. Bis auf Permutationen der Indizes bzw. Vertauschen von f_1 und f_2 (siehe Vorbemerkung c.) stimmen von den Bedingungen von Behauptung 6 aber überein: i., xii. und xix; ii., xiii. und xx; iii., vi. und ix; iv., xv. und xxi; v., xi., xviii. und xxii.; x. und xxiii; xvi. und xxiv. Damit bleiben nur die Gleichungen i. bis v., vii., viii., x., xiv., xvi. und xvii. zu betrachten: Aber dies sind – wieder bis auf Vertauschen von f_1 und f_2 und Permutationen der Indizes – genau die angegebenen. (Die letzte Permutation der Indizes bewirkt etwa, daß in Behauptung 7 nun vi. aus i. durch Vertauschen von A_1 und A_2 hervorgeht, was die folgenden Überlegungen erleichtern wird.)

Nun beachte man noch, daß im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$ die Gleichung III_{b_3} gerade die Bedingung mit der Nummer i. ist. Das beweist Behauptung 7.

Behauptung 8: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ bei $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls nur die Bedingungen i. bis iv. und vi. bis viii. von Behauptung 7 für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind, das heißt die folgenden sieben (in neuer Numerierung):

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_3} F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

ii. $A_1 = (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

iii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

iv. $A_1 = F_3 \xrightarrow{E_2} (F_1 + F_2) \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

v. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_3} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

vi. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} E_3 \cap (F_1 + F_2) \xrightarrow{F_3} A_1$;

vii. $A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_1+F_2} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$.

Beweis der Behauptung: Es genügt, Bedingungen v. und ix. bis xi. von Behauptung 7 zu eliminieren.

v. Dies ist äquivalent zu

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{E_1 \cap E_3} E_1 \cap (F_2 + F_3) \xrightarrow{F_2} F_3 \xrightarrow{E_2} A_1.$$

Denn man beachte Vorbemerkung c.; und: Seien $x \in F_1, y \in F_3, x + y \in E_1 \cap E_3 + F_2$, also $x + y = e + f$ für ein $e \in E_1 \cap E_3$ und $f \in F_2$. Dann ist $z := e - x = y - f \in E_1 \cap (F_2 + F_3)$ und $x + z \in E_1 \cap E_3, z - y \in F_2$, wie zu zeigen war. – Und die eben angegebene Gleichung ist mit einem analogen Argument wiederum äquivalent zu

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{(E_1 \cap) E_3} (F_2 + F_3) \cap E_1 \xrightarrow{E_2} A_1,$$

was bis auf eine Permutation der Indizes die Bedingung unter Punkt iv. aus Behauptung 7 ist.

ix. ist mit einem Argument wie eben äquivalent zu

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{F_2} E_2/F_2 \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_1 \cap E_3} A_1.$$

Und dies wiederum zu

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_1 \cap E_3} A_1,$$

dies zu

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{F_2 + F_3} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{(E_1 \cap) E_3} A_1.$$

Das ist aber Gleichung vi. aus Behauptung 7 (Vorbemerkung c.).

xi. geht ganz ähnlich: Die Bedingung von Punkt xi. ist äquivalent zu

$$A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2} E_2/F_2 \xrightarrow{F_2} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{F_3} A_1$$

und dies zu

$$A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2 + F_3} A_1,$$

also Punkt iii. aus Behauptung 7.

x. Die Bedingungen viii. und xi., bzw. ix. und x. von Behauptung 7 gehen durch Vertauschen von A_1 und A_2 auseinander hervor. Daher zeigen die Überlegungen zu ix. und xi. eben, daß die partielle Operation $Y = f_2 f_1$ sich für viii. bzw. x. jeweils so beschreiben läßt: Bei Punkt viii. wähle zu gegebenem Element aus E_2/F_2 einen (den) Repräsentanten aus $E_1 \cap E_2$, davon die $E_3(\cap E_1)$-Koordinate bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $F_1 + E_3$, dazu dann die E_2-Koordinate e bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $F_3 + E_2$, und diese werde auf $\overline{e}$ abgebildet; in Punkt x. ganz genauso, nur wählt man die F_1-Koordinate bezüglich der partiellen direkten Zerlegung $F_1 + E_3$.

Somit erhält man, daß Y von x. die Form $1 - Y'$ hat, wenn Y' die partielle Operation aus Punkt viii. ist. Das beweist – wegen der Teilbehauptung im Beweis von Behauptung 6 – Behauptung 8.

Behauptung 9: Für alle n und fast alle Präprojektiven U über $\tilde{\mathrm{E}}_6$ (von Defekt -1) gilt: Um Bedingung j.^{n} aus Behauptung 8 für $C^+(U)$ nachzuweisen, genügt es, Bedingung (j+vii).^{n} der folgenden Liste für U zu verifizieren:

viii. $A_1 = F_2 \xrightarrow{F_1 + F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

ix. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} F_2 \xrightarrow{F_1 + F_3} A_1$;

x. $A_1 = E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{E_3} F_2 \xrightarrow{E_1} A_1$;

xi. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{F_1 + F_3} A_1$;

xii. $A_1 = E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} F_2 \xrightarrow{F_1+F_3} A_1$;

xiii. $A_1 = F_2 \xrightarrow{F_1+F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} A_1$;

xiv. $A_1 = F_2 \xrightarrow{F_1+E_2\cap E_3} F_3 \xrightarrow{E_1} A_1$.

Beweis der Behauptung: Man geht vor wie im Beweis von Behauptung 4: Es ist $Q^+ = \ker(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \to Q)$ (Tatsache 5.3.1), sei $\pi_i : Q^+ \to E_i$ die Projektion nach E_i. In den Fällen i. bis vi. (von Behauptung 8) ist $A_1^+, A_2^+ \subseteq E_i^+$ für $i = 1$ oder $i = 3$, also π_2 auf $A_1^+ + A_2^+$ injektiv, da wegen Lemma 8.3.3 (oder Lemma 8.3.4) für Präprojektive $F_i \cap E_k = 0$. Vorbemerkung c. zeigt dann wie üblich, daß für fast alle U von Defekt -1 aus $\pi_2(A_1^+) \to \pi_2(A_2^+) \to \pi_2(A_1^+)$ folgt, daß die Bedingung $A_1^+ \to A_2^+ \to A_1^+$ gilt, das heißt $A_1 \to A_2 \to A_1$ für $C^+(U)$ (wenn man möchte: für festes n und U); es sind also lediglich einige Projektionen auszurechnen:

i. Man erhält zunächst

$$\pi_2(A_1^+) = F_2 \cap (F_1 + E_3) \xrightarrow{E_2\cap(F_1+F_3)} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1\cap E_2\cap(F_1+E_3)} \pi_2(A_1^+),$$

das sich sofort zu

$$\pi_2(A_1^+) = F_2 \cap (F_1 + E_3) \xrightarrow{F_1+F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1\cap(F_1+E_3)} \pi_2(A_1^+)$$

vereinfacht. Aber dies folgt aus

$$F_2 \xrightarrow{F_1+F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{E_1} F_2.$$

Die übrigen der ersten sechs Punkte gehen ganz analog; übrigens folgt aber v. aus Symmetriegründen sofort aus i., entsprechend vi. aus ii.

vii. Man betrachte die äquivalente Bedingung

$$A_1 = E_2/F_2 \xrightarrow{F_2} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_3} E_2 \cap E_3 \xrightarrow{F_2} A_1$$

(siehe im Beweis von Behauptung 8 unter Punkt xi.). Es ergibt sich, daß $A_1^+ = E_2^+/F_2^+ = \ker(E_1 \oplus F_2 \oplus E_3 \to Q)/\ker(E_1 \oplus E_3 \to Q) \simeq F_2$, $A_2^+ = E_1^+ \cap E_2^+ = \ker(F_1 \oplus F_2 \oplus E_3 \to Q)$, $A_3^+ = \ker(F_1 \oplus E_2 \oplus F_3 \to Q)$ und $A_4^+ = \ker(E_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \to Q)$; entsprechend für die Abbildungen. Identifiziert man nun A_1^+ mit F_2, dann zeigt eine Analyse der f_i^+, daß $Y^+ = f_4^+ \cdot \ldots \cdot f_1^+$ bis auf das Vorzeichen gleich ist der Komposition der drei Abbildungen in

$$F_2 \xrightarrow{F_1} E_3 \cap (F_1 + F_2) \xrightarrow{E_2} F_3 \xrightarrow{E_1} F_2.$$

Dies ist aber (Zusammenfassen der ersten beiden Abbildungen) äquivalent zu
$$F_2 \xrightarrow{F_1+E_2\cap E_3} F_3 \xrightarrow{E_1} F_2.$$
Das beweist Behauptung 9.

Behauptung 10: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden vier Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild des Funktors S liegen, erfüllt sind:

i. $A_1 = E_1 \cap E_2 \xrightarrow{E_3} F_1 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

ii. $A_1 = E_1 \cap E_3 \xrightarrow{F_1} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

iii. $A_1 = F_1 \xrightarrow{E_3} E_1 \cap E_2 \xrightarrow{F_2+F_3} A_1$;

iv. $A_1 = E_2 \cap (F_1 + F_3) \xrightarrow{E_3} F_2 \xrightarrow{E_1} A_1$;

Beweis der Behauptung: Behauptung 8 und 9 liefern mit Lemma 8.8.7 zunächst, daß die angegebenen sechs III_{b_i} für fast alle Unzerlegbaren von Defekt -1 gelten, falls die Bedingungen i. bis xiv. dieser Behauptungen für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_6$-Unzerlegbaren von Defekt -1, die im Bild von S sind, erfüllt sind. Modulo Vertauschen von f_1 und f_2 und Permutationen der Indizes gilt aber: Die Bedingungen viii., ix., xi. bis xiii. kommen unter den übrigen vor, und Bedingung xiv. ist bereits im Beweis von Behauptung 8 (als Bedingung v. von Behauptung 7) eliminiert worden; es genügen also i. bis vii. und x.

Behauptung 9 aber zeigt die folgende triviale (Nummern wie in Behauptung 8 und 9)

Teilbehauptung: Sei $\mathcal{U}$ eine unter $\mathcal{S}_3$ (das heißt: unter Permutationen der drei "Arme" einer Darstellung bzw. der Indizes) und unter $(C^+)^2$ invariante Menge von präprojektiven Unzerlegbaren über $\tilde{\mathrm{E}}_6$. Gilt i. (bzw. v., x., iii.) für fast alle $U \in \mathcal{U}$, so auch vi. (bzw. ii., iv., vii.).

Beweis der Teilbehauptung: Gilt i. für fast alle $U \in \mathcal{U}$, so wegen der Invarianz unter $\mathcal{S}_3$ und Behauptung 9 auch v. für fast alle $U \in C^+(\mathcal{U})$, damit dann – mit dem gleichen Argument – vi. für fast alle $U \in (C^+)^2(\mathcal{U})$. Wegen Satz 4.2.4 und der Invarianz ist $(C^+)^2(\mathcal{U})$ koendlich in $\mathcal{U}$; somit gilt vi. für fast alle U. – Die nächsten beiden Fälle gehen genauso. Und der letzte: Aus iii. für fast alle $U \in \mathcal{U}$ folgt wegen der $\mathcal{S}_3$-Invarianz xi. für fast alle $U \in \mathcal{U}$, also iv. für fast alle $U \in C^+(\mathcal{U})$, also (siehe im Beweis von Behauptung 8, Punkt v.) xiv. für fast alle $U \in C^+(\mathcal{U})$, also vii. für fast alle $U \in (C^+)^2(\mathcal{U})$. Das beweist die Teilbehauptung.

Diese Teilbehauptung wendet man nun an auf die Menge $\mathcal{U} = \operatorname{im}(S) \cap \{U \mid \delta(U) = -1\}$: Die Invarianz von $\operatorname{im}(S)$ ist Lemma 5.3.4 und Lemma 5.3.3, die von $\{U \mid \delta(U) = -1\}$ folgt aus Satz 4.2.4 iv. Das beweist die Behauptung.

Behauptung 11: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls die folgenden vier Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind:

i. $W_3 \xrightarrow{e_{2,3}^{-1}} W_2 \xrightarrow{e_{4,3}e_{4,5}^{-1}e_{6,5}e_{6,1}^{-1}e_{2,1}+e_{2,3}} W_3$;

ii. $W_1 \xrightarrow{e_{2,3}e_{2,1}^{-1}} W_3 \xrightarrow{e_{6,1}e_{6,5}^{-1}e_{4,5}e_{4,3}^{-1}} W_1$;

iii. $W_2 \xrightarrow{e_{4,3}e_{4,5}^{-1}e_{6,5}e_{6,1}^{-1}e_{2,1}+e_{2,3}} W_3 \xrightarrow{e_{2,3}^{-1}} W_2$;

iv. $W_2 \xrightarrow{e_{6,5}^{-1}e_{4,5}e_{4,3}^{-1}e_{2,3}} W_6 \xrightarrow{e_{2,1}^{-1}e_{6,1}} W_2$.

Beweis der Behauptung: Der Beweis ist ähnlich dem der Behauptungen 2 und 6: Man übersetzt mittels des Funktors S die Bedingungen i. bis iv. aus Behauptung 10 in entsprechende für $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbare. Zum Beispiel ergibt i. von Behauptung 10 die Bedingung

$$A_1 = 0 \oplus W_3 \oplus 0 \xrightarrow{W_1 \oplus 0 \oplus 0} W_2 = \{(e_{2,1}(w_2), e_{2,3}(w_2), 0) \mid w_2 \in W_2\} \xrightarrow{W_4 + W_6} A_1;$$

dabei sind die W_i mit ihrem Bild in $W_1 \oplus W_3 \oplus W_5$ identifiziert, also etwa $W_4 = \{(0, e_{4,3}(w_4), e_{4,5}(w_4)) \mid w_4 \in W_4\}$. Das heißt, daß für $w_i \in W_i$ gilt: $f_1((0, w_3, 0)) = (e_{2,1}(w_2), e_{2,3}(w_2), 0)$, falls $(e_{2,1}(w_2), w_3 + e_{2,3}(w_2), 0) \in W_1 \oplus 0 \oplus 0$, das heißt falls $w_2 = -e_{2,3}^{-1}(w_3)$, bis auf das Vorzeichen also wie behauptet. Analog für f_2. Der Rest dieser Behauptung ist genauso einfach.

Behauptung 12: Die III_{b_i}, $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = 1, 2$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls nur für jedes n die folgenden beiden Bedingungen für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind:

i. $W_1 = \operatorname{dom}(Y^n) + \operatorname{im}(Y^n)$ mit $Y = (e_{6,1} + e_{2,1}e_{2,3}^{-1}e_{4,3}e_{4,5}^{-1}e_{6,5})e_{6,1}^{-1}$;

ii. $W_2 = \operatorname{dom}(Y^n) + \operatorname{im}(Y^n)$ mit $Y = e_{2,3}^{-1}(e_{4,3}e_{4,5}^{-1}e_{6,5}e_{6,1}^{-1}e_{2,1} + e_{2,3})$.

Beweis der Behauptung: i. ist gerade Punkt i. der letzten Behauptung, bis auf eine "Drehung um 120 Grad"; und Punkt ii. ist iii. von Behauptung 11. Es genügt also zu zeigen, daß ii. und iv. von Behauptung 11 für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren von Defekt -1 erfüllt sind, falls dies für i und ii. aus Behauptung 12 gilt. Nun gilt aber ii. aus Behauptung 11 genau dann für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren von Defekt -1, wenn die Bedingung

$$W_1 \xrightarrow{e_{6,5}e_{6,1}^{-1}} W_5 \xrightarrow{e_{2,1}e_{2,3}^{-1}e_{4,3}e_{4,5}^{-1}} W_1$$

für fast alle $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Unzerlegbaren von Defekt -1 zutrifft: Denn sie geht aus ii. von Behauptung 11 durch eine "Spiegelung an der W_1-W_4-Achse" hervor (die natürlich Unzerlegbarkeit und Defekt invariant läßt). Nun zeigt die Teilbehauptung aus dem Beweis von Behauptung 6, daß diese Bedingung aus i. von Behauptung 12 folgt. Entsprechend sieht man ein, daß iv. aus ii. von Behauptung 12 folgt. Damit ist auch Behauptung 12 gezeigt.

Die präprojektiven Kronecker-Moduln P_j – siehe vor Lemma 5.1.5 – seien, in Abweichung von der dortigen Notation, notiert als

$$A \underset{l}{\overset{h}{\rightrightarrows}} B$$

mit den injektiven Abbildungen $h, l : A \longrightarrow B$, also mit $\dim(A) = j, \dim(B) = j+1$ in P_j. Dann sieht man leicht – etwa mit Lemma 5.1.2 oder Korollar 5.1.3 – , daß jedes präprojektive Unzerlegbare über $\tilde{\mathrm{A}}_5$ im Bild eines der folgenden neun Funktoren $H_1, \ldots, H_9$ von (präprojektiven) Kronecker-Moduln zu $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Darstellungen ist (siehe auch Seite 215); dabei gebe ich unter Punkt j. nur die Wirkung von H_j auf einem unzerlegbaren Kronecker-Modul wie eben an, es sei stets $W_i \in \{A, B\}$ (in der Standardnotation von $\tilde{\mathrm{A}}_5$-Darstellungen), und alle außer den angegeben $e_{i,j}$ seien die Identität:

i. $e_{4,5} = h, e_{4,3} = l$;

ii. $e_{6,1} = h, e_{6,5} = l$;

iii. $e_{2,3} = h, e_{2,1} = l$;

iv. $e_{4,5} = h, e_{2,1} = l$;

v. $e_{6,1} = h, e_{4,3} = l$;

vi. $e_{2,3} = h, e_{6,5} = l$;

vii. $e_{4,5} = h, e_{6,5} = l$;

viii. $e_{6,1} = h, e_{2,1} = l$;

ix. $e_{2,3} = h, e_{4,3} = l$.

Behauptung 13: Die III_{b_i}, $i = 1,2,3$ (bzw. $i = 1,2$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_7$, bzw. $i = 3$ im Falle $\tilde{\mathrm{E}}_6$), gelten für fast alle $\tilde{\mathrm{E}}_8$- (bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_7$-, bzw. $\tilde{\mathrm{E}}_6$-) Unzerlegbaren von Defekt -1, falls für jedes n die Bedingungen i. und ii. für fast alle (präprojektiven) Kronecker-Moduln P_j erfüllt sind (in der Notation wie eben):

i. $B = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$ mit $Y = lh^{-1} + 1$;

ii. $A = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$ mit $Y = h^{-1}l + 1$.

Beweis der Behauptung: Wie in den Beweisen der Behauptungen 2, 6 und 11 übersetzt man mittels der Funktoren H_i die beiden Bedingungen aus Behauptung 12 in entsprechende für Kronecker-Moduln; diese übersetzten Bedingungen haben alle die Form $B = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$ bzw. $A = \mathrm{dom}(Y^n) + \mathrm{im}(Y^n)$ für gewisse Y: Aus Punkt i. von Behauptung 12 erhält man der Reihe nach (via $H_1, \ldots, H_9$, wobei ich jeweils nur die partielle Operation Y angebe) $lh^{-1} + 1, (l+h)h^{-1}, lh^{-1} + 1, lh^{-1} + 1, (l+h)h^{-1}, h^{-1}l + 1, h^{-1}l + 1, (l+h)h^{-1}, h^{-1}l + 1$. Und ii. liefert $lh^{-1} + 1, lh^{-1} + 1, h^{-1}(l + h), h^{-1}l + 1, lh^{-1} + 1, h^{-1}(l+h), h^{-1}l + 1, h^{-1}l + 1, h^{-1}(l+h)$. Also bleiben nach Streichen von mehrfach vorkommenden Gleichungen nur die partiellen Operationen $Y = lh^{-1} + 1, Y = lh^{-1} + hh^{-1}, Y = h^{-1}l + 1$; man beachte, daß etwa $h^{-1}(l+h) = h^{-1}l + h^{-1}h$ als partielle Operationen: denn ist $l(a) + h(a) \in \mathrm{dom}(h^{-1})$, so wegen $h(a) \in \mathrm{dom}(h^{-1})$ auch $l(a) \in \mathrm{dom}(h^{-1})$; umgekehrt klar. Aber die ersten beiden dieser drei Operationen definieren die gleiche Operation, da ihre Definitionsbereiche übereinstimmen. Das beweist Behauptung 13.

Daß die P_j die Bedingungen aus Behauptung 13 erfüllen, ist eine leichte Verifikation. ■

Literaturverzeichnis

[AL 81] Maurice Auslander, Emilio Lluis (editors). *Representations of Algebras*. Proceedings, Puebla, Mexico 1980. LNM 903, Springer, Berlin, 1981

[AL 82] Maurice Auslander, Emilio Lluis (editors). *Representations of Algebras*. Proceedings (workshop), Puebla, Mexico 1980. LNM 944, Springer, Berlin, 1982

[AR 75] Maurice Auslander, Idun Reiten. Representation Theory of Artin Algebras III. Almost Split Sequences. *Communications in Algebra* 3:239-294, 1975

[AS 80] Maurice Auslander, Sverre O. Smalø. Preprojective Modules: An introduction and some applications. In: Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, editors, *Representation Theory II*. LNM 832, Springer, Berlin, 1980

[Aus 76] Maurice Auslander. Large Modules over Artin Algebras. In: Alex Heller, Myles Tierney, editors, *Algebra, Topology, and Category Theory*. Academic Press, New York, 1976

[Aus 78] Maurice Auslander. Functors and Morphisms Determined by Objects. In: Robert Gordon, editor, *Representation Theory of Algebras*. Marcel Dekker, New York, 1978

[Aus 85] Maurice Auslander. A survey of existence theorems for almost split sequences. In: P. Webb, editor, *Representations of Algebras*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 116, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[AZ 86] Gisela Ahlbrandt, Martin Ziegler. Quasi Finitely Axiomatizable Totally Categorical Theories. *Annals of Pure and Applied Logic* 30:63-82, 1986

[Bau 80] Walter Baur. On the elementary theory of quadrupels of vector spaces. *Annals of Mathematical Logic* 19:243-262, 1980

[BJKSV 90] Stanisław Balcerzyk, Tadeusz Józefiak, Jan Krempa, Daniel Simson, Wolfgang Vogel (editors). *Topics in Algebra*, Part 1, Rings and Representations of Algebras. Banach Center Publications, PWN, Warszawa, 1990

[BM 81] Stanley Burris, Ralph McKenzie. *Decidability and Boolean Representations.* Memoirs of the American Mathematical Society 246, Providence, 1981

[BT 92] Sheila Brenner, Hiroyuki Tachikawa (editors). *Representations of Algebras and Related Topics.* Proceedings of the Tsukuba Workshop 1990. London Mathematical Society Lecture Notes Series 168, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[CHL 85] Gregory L. Cherlin, Leo Harrington, Alistair H. Lachlan. $\aleph_0$-categorical $\aleph_0$-stable structures. *Annals of Pure and Applied Logic* 28:103-135, 1985

[CLS ??] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón. Méthodes diagrammatiques en représentation d'algèbres de dimension finie. Publication internes de la section de mathématiques de l'université de Génève. Ohne Jahr

[Cra 92] William Crawley-Boevey. Modules of finite length over their endomorphism rings. In: Sheila Brenner, Hiroyuki Tachikawa, editors, *Representations of Algebras and Related Topics.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 168, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[DF 73] Peter Donovan, Mary Ruth Freislich. *The Representation Theory of Graphs and Associated Algebras.* Carleton Mathematics Lecture Notes, 5, Ottawa, 1973

[DG 75] Vlastimil Dlab, Peter Gabriel (editors). *Representations of Algebras.* Proceedings of the International Conference Ottawa 1974. LNM 488, Springer, Berlin, 1975

[DG 80] Vlastimil Dlab, Peter Gabriel (editors). *Representation Theory I.* Proceedings. Ottawa, Carleton University, 1979. LNM 831, Springer, Berlin, 1980

[DG 80a] Vlastimil Dlab, Peter Gabriel (editors). *Representation Theory II.* Proceedings. Ottawa, Carleton University, 1979. LNM 832, Springer, Berlin, 1980

[DGM 86] Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, Gerhard O. Michler (editors). *Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras.* Proceedings. Ottawa 1984. LNM 1177, Springer, Berlin, 1986

[Die 46] Jean Dieudonné. Sur la Réduction canonique des couples de matrices. *Bulletin de la Société Mathématique de France.* 74:130-146, 1946

[Dla 92] Vlastimil Dlab. Pairs of semi-simple algebras (Hereditary algebras with radical-square zero). In: Sheila Brenner, Hiroyuki Tachikawa, editors, *Representations of Algebras and Related Topics.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 168, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[DR 76] Vlastimil Dlab, Claus Michael Ringel. *Indecomposable Representations of Graphs and Algebras.* Memoirs of the American Mathematical Society 173, Providence, 1976

[DT 91] Vlastimil Dlab, Hiroyuki Tachikawa (editors). *Representations of Finite Dimensional Algebras.* Proceedings of the Tsukuba International Conference (Fifth ICRA) held August 13-18, 1990. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings Volume 11, AMS, Providence, 1991

[EF 72] Paul Eklof, Edward Fisher. The elementary theory of abelian groups. *Annals of Mathematical Logic* 4(2):115-171, 1972

[Gab 80] Peter Gabriel. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In: Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, editors, *Representation Theory I.* LNM 831, Springer, Berlin, 1980

[Gei 90] Gunter Geisler. A short version of Peretjatkin's example. Unveröffentlichtes Manuskript, Freiburg, 1990

[Gor 78] Robert Gordon (editor). *Representation theory of algebras.* Proceedings of the Philadelphia conference 1976. Marcel Dekker, New York, 1978

[GP 71] Izrail′ Moĭseevich Gel′fand, Vladimir Aleksandrovich Ponomarev. Quadrupels of subspaces of a finite-dimensional vector space. *Soviet Mathematics. Doklady* 12(2):535-539, 1971. Übersetzung von: Израиль Мойсеевич Гельфанд, Владимир Александрович Пономарев. Четверки подпространств конечномерного векторного пространства. *Доклады Академии Наук СССР* 197(4):762-765, 1971

[GP 72] Izrail' Moiseevič Gel'fand, Vladimir Aleksandrovič Ponomarev. Problems of linear algebra and classification of quadrupels of subspaces in a finite-dimensional vector space. In: Béla Sz.-Nagy, editor, *Hilbert Space Operators and Operator Algebras.* North Holland, Amsterdam, 1972

[Har 67] Robin Hartshorne. *Local cohomology.* LNM 41, Springer, Berlin, 1967

[Her 92] Ivo Herzog. The Auslander-Reiten Translate. *Contemporary Mathematics* 130:153-165, 1992

[Her 93] Ivo Herzog. Elementary Duality of Modules. *Transactions of the American Mathematical Society* 340:37-69, 1993

[Hru 86] Ehud Hrushovski. Contributions to Stable Model Theory. Ph.D. Dissertation. University of California, 1986

[Hru 92] Ehud Hrushovski. Finitely Axiomatizable Aleph-One Categorical Theories. Preprint, Jerusalem, 1992

[Iva 89] Aleksandr Aleksandrovich Ivanov. Problem of Finite Axiomatizability for Strongly Minimal Theories of Graphs and Groups with a Nonzero Number of Ends. *Algebra and Logic* 28(2):108-116, 1989. Übersetzung von: Александр Александрович Иванов. Проблема конечной аксиоматизируемости для силь но минимальных теорий графов и группы с неединичным числом концов. *Алгебра и логика* 28(2):160-173, 1989

[Iva 89a] Aleksandr Aleksandrovich Ivanov. The Problem of Finite Axiomatizability for Strongly Minimal Graph Theories. *Algebra and Logic* 28(3):183-194, 1989. Übersetzung von: Александр Александрович Иванов. Проблема конечной аксиоматизируемости для сильно минимальных теорий графов. *Алгебра и логика* 28(3):280-297, 1989

[JL 89] Christian U. Jensen, Helmut Lenzing. *Model Theoretic Algebra with particular emphasis on Fields, Rings, Modules.* Gordon and Breach, New York, 1989

[Kap 74] Irving Kaplansky. *Commutative Rings.* The University of Chicago Press, Chicago, 1974

[Kas 77] Friedrich Kasch. *Moduln und Ringe.* Teubner, Stuttgart, 1977

[KP 92] T. G. Kucera, Mike Prest. Imaginary Modules. *The Journal of Symbolic Logic* 57:698-723, 1992

[Kue 88] Urs Martin Künzi. Darstellungstheorie von Köchern. Unveröffentlichtes Manuskript, Bonn, 1988

[Mor 65] Michael Morley. Categoricity in Power. *Transactions of the American Mathematical Society* 114:514-538, 1965

[MR 91] Gerhard O. Michler, Claus Michael Ringel (editors). *Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras.* Proceedings of the Conference at the University of Bielefeld 1991. Birkhäuser, Basel, 1991

[Naz 73] Lyudmila Aleksandrovna Nazarova. Representations of quivers of infinite type. *Mathematics of the USSR – Izvestija* 7:749-792, 1973. Übersetzung von: Людмила Александровна Назарова. Представления колчанов бесконечного типа. *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая* 37: 752-791, 1973

[Oko 80] Frank Okoh. Indecomposable pure-injective modules over hereditary Artin algebras of tame type. *Communications in Algebra* 8:1939-1941, 1980

[Oko 80a] Frank Okoh. Hereditary algebras that are not pure-hereditary. In: Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, editors, *Representation Theory II.* LNM 832, Springer, Berlin, 1980

[Оль 89] Александр Юрьевич Ольшанский. *Геометрия определяющих соотношений в группах.* Наука, Москва, 1989

[Пал 82] Евгений Андреевич Палютин. Дополнение. Спектр и структура моделей полных теорий. В книге: Юрий Леонидович Ершов, Евгений Андреевич Палютин, Асан Дабсович Тайманов, редакторы, *Справочная книга по математической логике в четырех частях*, часть первая. Наука, Москва, 1982. (Anhang zum ersten Band der russischen Übersetzung des Buches: John Barwise, Handbook of Mathematical Logic. North Holland, Amsterdam, 1977)

[Per 80] Mikhail Georgievich Peretyatkin. Example of an ω_1-categorical complete finitely axiomatizable theory. *Algebra and Logic* 19(3):202-229, 1980. Übersetzung von: Михаил Георгиевич Перетяткин. Пример ω_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории. *Алгебра и логика* 19(3):314-347, 1980

[Per 91] Mikhail Georgievich Peretyatkin. Uncountably categorical quasisuccession of Morley rank 3. *Algebra and Logic* 30(1):51-61, 1991. Übersetzung von: Михаил Георгиевич Перетяткин. Несчетно категоричное квазиследование ранга Морли 3. *Алгебра и логика* 30(1):74-89, 1991

[Pie 82] Richard Pierce. *Associative Algebras.* Graduate Texts in Mathematics 88, Springer, Berlin, 1982

[Poi 86] Françoise Point. Problèmes de décidabilité pour les théories de modules. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Serie B* 38:58-74, 1986

[PP 88] Françoise Point, Mike Prest. Decidability for theories of modules. *Journal of the London Mathematical Society (2)* 38:193-206, 1988

[Pre 84] Mike Prest. Rings of Finite Representation Type and Modules of Finite Morley Rank. *Journal of Algebra* 88:502-533, 1984

[Pre 85] Mike Prest. Tame Categories of Modules and Decidability. University of Liverpool, preprint, 1985

[Pre 88] Mike Prest. *Model Theory and Modules.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 130, Cambridge University Press, Cambridge, 1988

[Pre 92] Mike Prest. Persönliche Mitteilung. 1992

[PRZ 94] Mike Prest, Philipp Rothmaler, Martin Ziegler. Extensions of Elementary Duality. *Journal of Pure and Applied Algebra* 93:33-56, 1994

[Rin 76] Claus Michael Ringel. Representations of K-Species and Bimodules. *Journal of Algebra* 41:269-302, 1976

[Rin 79] Claus Michael Ringel. Infinite Dimensional Representations of Finite Dimensional Algebras. *Symposia Mathematica* 23:321-412, 1979

[Rin 80] Claus Michael Ringel. Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojter's theorem and the theorem of Nazarova and Rojter. (On algorithms for solving vector space problems. I) In: Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, editors, *Representation Theory I.* LNM 831, Springer, Berlin, 1980

[Rin 80a] Claus Michael Ringel. Tame Algebras. (On algorithms for solving vector space problems. II) In: Vlastimil Dlab, Peter Gabriel, editors, *Representation Theory I.* LNM 831, Springer, Berlin, 1980

[Rin 84] Claus Michael Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms.* LNM 1099, Springer, Berlin, 1984

[Rin 86] Claus Michael Ringel. Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras. In: P. Webb, editor, *Representations of Algebras.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 116, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[Rin 93] Claus Michael Ringel. Persönliche Mitteilung. 1993

[RT 74] Claus Michael Ringel, Hiroyuki Tachikawa. QF-3 Rings. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 272:49-72, 1974

[Ste 75] Bo Stenström. *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory.* Springer, Berlin, 1975

[SV 72] David W. Sharpe, Peter Vámos. *Injective Modules.* Cambridge University Press, Cambridge, 1972

[War 69] Robert B. Warfield Jr. Purity and algebraic compactness for modules. *Pacific Journal of Mathematics* 28:699-719, 1969

[Web 86] Peter J. Webb (editor). *Representations of Algebras.* Proceedings of the Durham Symposium 1985. London Mathematical Society Lecture Notes Series 116, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[Zie 84] Martin Ziegler. Model Theory of Modules. *Annals of Pure and Applied Logic* 26:149-213, 1984.

[Zil 80] Boris Iosifovich Zil′ber. Solution of the Problem of Finite Axiomatizability for Theories that are Categorical in All Infinite Powers. In: *Six Papers in Logic.* American Mathematical Society translations – series 2, 135, Providence, 1987. Übersetzung von: Борис Иосифович Зильбер. Решение проблемы конечной аксиоматизируемости для теорий, категоричных во всех бесконечных мощностях. В книге: Бектур С. Байжанов, редактор, *Теория моделей и ее приложения.* Издание Министерства Высшего и Среднего Специального Образования Казахской ССР и Казахского Государственного Университета, Алма Ата, 1980

[Zil 80a] Boris Iosifovich Zil′ber. Totally categorical theories: structural properties and the nonfinite axiomatizability. In: Leszek Pacholski, Jedrzej Wierzejewski, Alec Wilkie, editors, *Model Theory of Algebra and Arithmetic.* Proceedings, Karpacz, Poland 1979. LNM 834, Springer, Berlin, 1980

[Zil 81] Boris Iosifovich Zil′ber. On a Solution of the Problem of Finite Axiomatizability for Theories that are Categorical in All Infinite Powers. In: *Six Papers in Logic.* American Mathematical Society translations – series 2, 135, Providence, 1987. Übersetzung von: Борис Иосифович Зильбер. О решении проблемы конечной аксиоматизируемости для теорий, категоричных во всех бесконечных мощностях. В книге: Михаил

А. Тайцлин, редактор, *Исследования по теоретическому программированию.* Издание Министерства Высшего и Среднего Специального Образования Казахской ССР и Казахского Государственного Университета, Алма Ата, 1981

Index