Lokale Stabilität in generischen Modellen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen Fakultät
der Albert–Ludwigs–Universität Freiburg im Breisgau

vorgelegt von

Ingo Kraus

überarbeitete Version,
September 2001

Dekan: Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Referenten: Prof. Dr. Martin Ziegler, Freiburg
Prof. Dr. Andreas Baudisch, Berlin

Datum der Promotion: 9.3. 2001

Für meinen Vater

Einleitung

Die Stabilitätstheorie gehört zu den fruchtbarsten Gebieten der Modelltheorie. Obwohl bekannt war, daß Stabilität ein „lokales Phänomen" ist, wurde diesem Aspekt wenig Beachtung geschenkt, weil die betrachteten Theorien „global stabil" waren. Das hat sich geändert mit der Entdeckung, daß sich auch für die größere Klasse der einfachen Theorien guter Begriff von Unabhängigkeit definieren läßt. Denn obwohl einfache Theorien nicht mehr stabil sind, sind alle bekannten Beispiele hinreichend lokal stabil im folgenden Sinne: die Unabhängigkeitsrelation der einfachen Theorie hängt nur von stabilen Formeln ab. Ich werde in dieser Arbeit die lokale Stabilitätstheorie entwickeln, in dem verallgemeinerten Rahmen der „generischen Modelle".

Es sei T einer induktive Theorie. Falls T einen Modellbegleiter T^* hat, so sind die generischen Modelle von T genau die $|T^*|^+$-saturierten Modelle von T^*. In diesem Fall gehört die lokale Stabilitätstheorie der generischen Modelle zur Folklore, denn sie fällt mit der lokalen Stabilitätstheorie von T^* zusammen. Interessanter ist die Tatsache, daß man die lokale Stabilitätstheorie auch im nichtelementaren Fall entwickeln kann, d.h. wenn T keinen Modellbegleiter hat. Die generischen Modelle von T sind dann nicht mehr saturiert, bilden aber eine sich wohlverhaltende Klasse von sich wohlverhaltenden Modellen. Mein wichtigstes Beispiel einer solchen Klasse von generischen Strukturen ist die Klasse der generischen Automorphismen einer modellvollständigen stabilen Theorie. Ich behandele diese Dinge in den ersten beiden Kapiteln. Das dritte Kapitel beinhaltet verschiedene separate Resultate über generische Automorphismen.

In **Kapitel 1** werde ich die Klasse $\mathcal{G}$ der generischen Modelle einer induktiven Theorie T einführen und ausführlich beschreiben. A. Pillay hat diese Klasse bereits in seinem preprint „Forking in the category of existentially closed structures" ([Pi3]) sehr knapp eingeführt. Ich bin unabhängig auf diese Klasse gestoßen, indem ich den Begriff des generischen Automorphismus verallgemeinert habe – deshalb spreche ich von „generischen" Modellen. Wie auch für Pillay war das preprint „Simplicity and the Lascar group" von E. Hrushovski ([Hr1]) inspirierend für mich für die Einführung der Klasse $\mathcal{G}$. Im ersten Teil dieser Arbeit führt Hrushovski diese Klasse ein für den Spezialfall, daß T eine universelle Theorie mit der Amalgamierungseigenschaft und der joint embedding property ist. In diesem Fall verhält sich $\mathcal{G}$ noch etwas besser und Hrushovski skizziert grob, wie man Stabilitätstheorie in $\mathcal{G}$ entwickeln kann. Pillay entwickelt in [Pi3] Forking und Einfachheit in $\mathcal{G}$.

In **Kapitel 2** gehe ich in eine andere Richtung als Pillay und entwickele lokale Stabilität in $\mathcal{G}$. Ich beweise alle bekannten Resultate aus den Grundlagen der Stabilitätstheorie, bis auf Symmetrie: obwohl eine für die lokale Stabilitätstheorie fundamentale Form der lokalen Symmetrie gilt, wird keine symmetrische Unabhängigkeitsrelation induziert. Das hängt zusammen mit einem Phänomen auf das ich besonders hinweisen möchte, es erscheint mir neu und von seiner Art ungewohnt: es sei Θ eine Familie von Formeln und $\mathcal{D}$ eine Instanz einer Formel aus Θ. Wenn $\mathcal{D}$ äquivalent zu einer Formel mit Parametern aus A ist, gibt es dann auch eine Instanz einer Formeln aus Θ mit Parametern aus A, zu der $\mathcal{D}$ äquivalent ist? Ich fasse das als eine subtile Abgeschlossenheitseigenschaft von Θ auf und nenne sie *Striktheit*. Sie hat einen wichtigen Einfluß darauf, welche modelltheoretischen Methoden man lokal für Θ verwenden kann und auf die lokal-global Interaktion zwischen Θ und der Theorie.

Ich möchte mich bedanken bei all denen, die mich in den letzten Jahren begleitet haben, dazu gehören neben meinen Freunden auch die Sängerinnen und Sänger des Tallis–Ensembles. Ohne die Aufmerksamkeit von Markus Junker wäre in der Arbeit wahrscheinlich die fünffache Anzahl von Fehlern. Mein Betreuer Prof. Martin Ziegler hatte immer Zeit für mich und ohne seine Hilfe wäre besonders das erste Kapitel unverständlich geblieben. Es war schön, ein bißchen an der „reinen Kunst gerochen" zu haben. Dieses Vergnügen verdanke ich in hohem Maße dem Einfluß von Martin Ziegler und allen anderen Mitarbeitern am Institut für Mathematische Logik der Universität Freiburg.

Notation

L ist eine Sprache der Logik der ersten Stufe. Wenn ich über die Kardinalität von L spreche, so meine ich die Kardinalität der Menge aller L-Aussagen. Strukturen sind L-Strukturen, sie dürfen leer sein, falls L keine Konstanten enthält. Modelle sind nicht leer. x ist (wenn nicht anders gesagt) ein endliches Tupel von Variablen, (partielle) Typen sind in endlich vielen Variablen und stets konsistent. (Partielle) Typen in unendlich vielen Variablen nenne ich (partielle) $\star$-Typen.

Ist $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$, ...) eine Struktur, so bezeichnet A (B, M, ...) den Träger der Struktur. Teilmengen $C \subset \mathcal{A}$ sind Teilmengen von A^n für ein $n < \omega$. Wenn ich die Tupellänge spezifizieren möchte, so schreibe ich $C \subset A^n$. Ist $C \subset A$, so ist $\mathcal{A}_C$ die Struktur $\mathcal{A}$ mit Konstanten für die Elemente von C.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Generische Modelle

In diesem Kapitel definiere ich die Klasse der **generischen Modelle** einer induktiven Theorie und studiere sie ausführlich. Im ersten Abschnitt führe ich diese Klasse ein und beweise einige grundlegende Eigenschaften. Generische Modelle sind stets **$\exists$-Universalbereiche** und als solche betrachte ich sie im zweiten Abschnitt. Dabei unterscheide ich verschiedene Arten von $\exists$-Universalbereichen danach, welche Familie von Formeln von partiellen Automorphismen erhalten werden müssen, damit diese elementar sind. In diesem Abschnitt bespreche ich auch die Ansätze von Hrushovski und Pillay genauer. Der dritte Abschnitt ist dem Hauptbeispiel dieser Arbeit gewidmet, den **generischen Automorphismen** einer modellvollständigen Theorie. Im letzten Abschnitt **verallgemeinere ich** die Idee, daß die Klasse der generischen Modelle einer induktiven Theorie erstens eine sich wohlverhaltende Klasse von Strukturen ist und zweitens aus sich wohlverhaltenden Strukturen besteht.

1.1 Die generischen Modelle einer induktiven Theorie

Es sei T eine induktive Theorie und $\kappa > |L|$. Ich definiere nun die Klasse der generischen Modelle von T und beweise in einem allgemeinen Rahmen die grundlegenden Eigenschaften. Danach gebe ich eine Charakterisierung der generischen Modelle, welche zum Begriff des Universalbereichs überleitet, den ich im nächsten Abschnitt besprechen werde.

1.1 **Definition** Ein *κ-generisches Modell von T* ist eine Struktur $\mathcal{M}$, so daß für jede Menge $\Pi(x)$ von existenziellen Formeln über einer Parametermenge $A \subset \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa$ gilt: wenn Π in einem Obermodell $\mathcal{N} \supset \mathcal{M}$ realisiert ist, so auch in $\mathcal{M}$.[1]
Ein *generisches Modell von T* ist ein $|L|^+$-generisches Modell von T.
$\mathcal{G}_T$ ist die Klasse der generischen Modelle von T.

Die in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Tatsachen über existenziell abgeschlossene Strukturen behandele ich in Anhang A.1.

[1] Das ist [Pi3, Definition 2.7], Pillay nennt $\mathcal{M}$ ein „κ-existentially universal model for T“.

1.2 **Lemma**

(1) Eine Struktur $\mathcal{M}$ ist genau dann ein κ-generisches Modell von T, wenn $\mathcal{M}$ existenziell abgeschlossen in T ist und κ-$\exists$-saturiert.[2]

(2) Die κ-generischen Modelle von T sind genau die κ-generischen Modelle von $T_\forall$. Sie alle sind Modelle von T.

Beweis

(1) Es sei $\mathcal{M}$ existenziell abgeschlossen in T und κ-$\exists$-saturiert, $\Pi(x)$ sei eine Menge von existenziellen Formeln über einer Parametermenge aus $\mathcal{M}$ der Größe $< \kappa$, die in dem Obermodell $\mathcal{N} \supset \mathcal{M}$ realisiert ist. Weil $\mathcal{M}$ existenziell abgeschlossen ist in $\mathcal{N}$ ist $\Pi(x)$ endlich erfüllt in $\mathcal{M}$, also realisiert wegen κ-$\exists$-Saturation. Die Umkehrung ist klar.

(2) Die T-existenziell abgeschlossenen Strukturen sind genau die $T_\forall$-existenziell abgeschlossenen Strukturen. Sie sind Modelle von T, denn T ist induktiv. Wegen (1) sind wir fertig. $\square$

Die folgenden drei Sätze werde ich gleich in einem allgemeineren Setting beweisen.

1.3 **Satz A**

(1) Jedes Modell $\mathcal{A}$ von T hat eine Erweiterung $\mathcal{M}$, die ein κ-generisches Modell von T ist. Ist $|\mathcal{A}| \leq \lambda^{<\kappa}$ für eine unendliche Kardinalzahl λ, so kann auch $|\mathcal{M}| \leq \lambda^{<\kappa}$ gewählt werden.

(2) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ generische Modelle von T.

(i) Ist die universelle Theorie von $\mathcal{M}$ in der von $\mathcal{N}$ enthalten, so $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine in T existenziell abgeschlossene Struktur mit $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$, so $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.

Zwei Folgerungen aus Satz A möchte ich schon erwähnen:

- Sind $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ generische Modelle von T, so $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
- T hat genau dann die Joint Embedding Property (JEP), wenn alle generischen Modelle von T elementar äquivalent sind.

1.4 **Satz B** Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ generische Modelle von T: jeder partielle Isomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, der die $\exists$-Formeln erhält, ist elementar.[3]

1.5 **Satz C** Die universelle Theorie[4] von T hat genau dann (AP), wenn jeder nichtleere partielle Isomorphismus zwischen generischen Modellen von T die existenziellen Formeln erhält. Falls T (JEP) hat, so reicht es, daß in jedem generischen Modell von T jeder partielle Automorphismus die existenziellen Formeln erhält.

Die in Satz C vorkommenden partiellen Isomorphismen sind dann wegen Satz B schon elementar.

[2] Eine Struktur ist κ-$\exists$-*saturiert*, wenn jeder partielle existenzielle Typ der Struktur über einer Parametermenge $< \kappa$ in der Struktur realisiert ist.

[3] Das ist eine Verallgemeinerung von Satz A (2).

[4] Das ist die Menge $T_\forall$ der universellen Aussagen, die aus T folgen.

1.1.1 $\mathcal{K}$-generische Strukturen

Ich beweise nun die Sätze A, B und C in einem allgemeineren Rahmen: ich werde bezüglich einer gegebenen Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen mit einer Fraïssé-Konstruktion $\mathcal{K}$-generische Strukturen einführen und für die so entstehende Klasse die gewünschten Eigenschaften zeigen.

Es sei $\mathcal{K}$ eine gegen Isomorphie abgeschlossene Klasse von L-Strukturen und $\kappa > |L|$. Wenn L keine Konstanten enthält, so darf $\mathcal{K}$ die leere Struktur enthalten.

1.6 **Definition** Eine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{M}$ heißt κ-$\mathcal{K}$-*generisch*, wenn es für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$ mit $|\mathcal{B}| < \kappa$ und alle Einbettungen[5] $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ eine Einbettung $h : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ gibt, so daß $h \circ g = f$. $\mathcal{M}$ heißt $\mathcal{K}$-*generisch*, wenn $\mathcal{M}$ $|L|^+$-$\mathcal{K}$-generisch ist. $\mathcal{K}_{\text{gen}}$ sei die Klasse der $\mathcal{K}$-generischen Strukturen.

Ich werde gleich zeigen (1.14), daß die generischen Modelle einer induktiven Theorie T genau die $\mathcal{E}_T$-generischen Modelle sind, wobei $\mathcal{E}_T$ die Klasse der T-existenziell abgeschlossenen Strukturen ist.

1.7 **Existenzlemma** Ist $\mathcal{K}$ induktiv mit der Amalgamierungseigenschaft (AP), so hat jede $\mathcal{K}$-Struktur eine κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterung.

Beweis
Es sei $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ und $(\mathcal{A}_i)_{i<\lambda}$ eine Aufzählung der $\mathcal{K}$-Substrukturen von $\mathcal{N}$ der Größe $< \kappa$. Für jedes $i < \lambda$ sei $(\mathcal{B}_i^j)_{j<\lambda_i}$ eine (bis auf Isomorphie über $\mathcal{A}_i$) Aufzählung der $\mathcal{K}$-Oberstrukturen von $\mathcal{A}_i$ der Größe $< \kappa$. Wir ordnen die (i,j) lexikographisch und bauen mit Hilfe der (AP) und der Induktivität eine aufsteigende Kette in $\mathcal{K}$, in deren Vereinigung $\mathcal{N}^*$ sich jedes $\mathcal{B}_i^j$ über $\mathcal{A}_i$ einbetten läßt. Iteriert man die Konstruktion κ^+-mal[6], so erhält man eine κ-generische Struktur. $\square$

Wenn $\mathcal{K}$ (AP) hat und die leere Struktur enthält, so hat $\mathcal{K}$ die (JEP). Es sei (LS) die folgende Eigenschaft:

(LS) Für jede $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{M}$ und jede Teilmenge $C \subset \mathcal{M}$ gibt es eine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{A}$ der Kardinalität $\leq |L(C)|$, so daß $C \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.[7]

1.8 **Besseres Existenzlemma** Ist $\mathcal{K}$ induktiv mit (AP) und (LS), so gilt für jedes λ mit $\lambda^{<\kappa} = \lambda$: Jede $\mathcal{K}$-Struktur der Größe $\leq \lambda$ hat eine κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterung der Größe $\leq \lambda$.

Beweis
Es sei $|\mathcal{A}| \leq \lambda$, wegen des Existenzlemmas gibt es eine (eventuell große) κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{A}$. Die Anzahl der Teilmengen von $\mathcal{A}$ der Größe $< \kappa$ ist $\lambda^{<\kappa}$ (siehe etwa [Jech, Seite 43]), es gibt also höchstens $\lambda^{<\kappa}$-viele $\mathcal{K}$-Substrukturen von $\mathcal{A}$ der Größe $< \kappa$. Jede solche hat bis auf Isomorphie höchstens $2^{<\kappa}$ viele $\mathcal{K}$-Erweiterungen,

[5]Weil $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist gegen Isomorphie, reicht es, für f und g Inklusionsabbildungen zu nehmen.

[6]Ist κ regulär, so braucht man nur κ-mal zu iterieren

[7]Ich werde diese Eigenschaft nur für $\mathcal{K}$-generisches $\mathcal{M}$ verwenden.

denn es gibt bis auf Isomorphie höchstens $2^{<\kappa}$ viele L-Strukturen der Größe $< \kappa$. Da $\mathcal{M}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch ist können wir annehmen, daß alle diese kleinen $\mathcal{K}$-Erweiterungen von $\mathcal{A}$ schon Substrukturen von $\mathcal{M}$ sind. Alle diese Strukturen zusammen bilden dann eine Teilmenge von $\mathcal{M}$ der Größe $\leq \lambda^{<\kappa} \cdot \kappa \leq \lambda^{<\kappa} = \lambda$ und wegen (LS) (und weil $\lambda > |L|$) liegen sie alle in einer $\mathcal{K}$-Substruktur $\mathcal{N}^*$ von $\mathcal{M}$ mit $|\mathcal{N}^*| \leq \lambda$. Falls $\kappa < \lambda$, so iterieren wir diese Konstruktion κ^+-mal und falls $\kappa = \lambda$, so ist κ regulär und wir iterieren κ-mal. In beiden Fällen erhalten wir eine κ-generische Substruktur von $\mathcal{M}$ der Größe $\leq \lambda$. □

(LS) ist auch für eine ganz andere Eigenschaft wichtig:

1.9 **Vollständigkeitslemma** $\mathcal{K}$ erfülle (LS), dann gilt für jede $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{A}$ der Größe $< \kappa$: je zwei κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterungen von $\mathcal{A}$ sind partiell isomorph über $\mathcal{A}$.

Beweis

Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterungen von $\mathcal{A}$ und $I = \{f \mid f$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{M}_A$ nach $\mathcal{N}_A$, dessen Definitionsbereich eine kleine $\mathcal{K}$-Substruktur von $\mathcal{M}_A$ ist$\}$.

Behauptung: I hat die Hin-und-Her-Eigenschaft.

Beweis: Es sei $f \in I$, sei etwa $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ eine kleine $\mathcal{K}$-Substruktur von $\mathcal{M}$ mit $B = dom(f)$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ und $f = id_B$ (ersetze $\mathcal{M}$ durch eine isomorphe Kopie). Nun sei $c \in \mathcal{M}$, dann gibt es wegen (LS) eine hinreichend kleine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ mit $c \in \mathcal{C}$. Da $\mathcal{N}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch ist, kann man $\mathcal{C}$ über B nach $\mathcal{N}$ einbetten, das liefert eine Fortsetzung von f in I. I hat also die Hin-Eigenschaft, entsprechend auch die Her-Eigenschaft. □

1.10 **Korollar** $\mathcal{K}$ erfülle (LS), dann gilt für alle $\mathcal{K}$-generischen Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$$

Beweis

Es sei a ein (endliches) Tupel aus $\mathcal{M}$. Wegen (LS) gibt es eine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ mit $a \in \mathcal{A}$ und $|\mathcal{A}| \leq |L|$. Wegen des Vollständigkeitslemmas sind dann $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ partiell isomorph über A, insbesondere $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.[8] Es gilt also $\mathcal{M} \equiv_M \mathcal{N}$. □

Ich brauche nun eine schwache Abschlußeigenschaft von $\mathcal{K}$ gegen elementare Äquivalenz, um ein Kompaktheitsargument verwenden zu können. Diese zusätzliche Voraussetzung ist stark genug, um dann die Sätze A, B und C in diesem allgemeinen Rahmen beweisen zu können: ich nenne $\mathcal{K}$ *gut*, wenn $\mathcal{K}$ nichtleer und induktiv ist mit (AP) und (LS) und außerdem gilt:

(gut) Jede elementare Erweiterung einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur läßt sich zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern.[9]

[8] Daß partiell isomorphe Strukturen elementar äquivalent sind, setze ich als bekannt voraus, man zeigt das auch leicht mit einer Induktion über den Aufbau der Formeln.

[9] Das ist äquivalent dazu, daß $\mathcal{K}_{\text{gen}}$ in einer gegen elementare Äquivalenz abgeschlossenen Klasse liegt, so daß sich jede Struktur dieser Klasse zu einer $\mathcal{K}_{\text{gen}}$-Struktur erweitern läßt. Ich werde später zeigen, daß diese Voraussetzung sogar so stark ist, daß der allgemeinere Rahmen keine wirklich neuen Resultate liefert. Ich sehe andererseits nicht, wie man diese Voraussetzung abschwächen könnte.

1.11 **Satz I** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse:

(1) Für jedes $\kappa > |L|$ hat jede $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{A}$ eine κ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterung $\mathcal{M}$. Ist $|\mathcal{A}| \leq \lambda^{<\kappa}$, so kann auch $|\mathcal{M}| \leq \lambda^{<\kappa}$ gewählt werden.

(2) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ aus $\mathcal{K}_{\text{gen}}$:

(i) Ist die universelle Theorie der einen Struktur in der der anderen enthalten, so $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{K}$-Struktur mit $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$, so $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.

Beweis
(1) folgt sofort aus dem besseren Existenzlemma.

(2) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{K}$-generische Strukturen, etwa der Größe $< \lambda$.

(i) Wenn die universelle Theorie von $\mathcal{N}$ in der universellen Theorie von $\mathcal{M}$ enthalten ist, so läßt sich $\mathcal{M}$ in eine elementare Erweiterung von $\mathcal{N}$ einbetten. Weil $\mathcal{K}$ gut ist kann man diese elementare Erweiterung zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern, also auch zu einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur $\mathcal{N}'$. Wegen des vorigen Korollars ist dann $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ und die Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}'$ ist elementar. $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind also elementar äquivalent.

(ii) Es sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{K}$-Struktur mit $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$. Wegen (1) gibt es λ-$\mathcal{K}$-generische Erweiterungen $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ und $\mathcal{N}' \supset \mathcal{N}$ und aus dem letzten Korollar folgt, daß diese Erweiterungen elementar sind. Wegen des Vollständigkeitslemmas sind $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{N}'$ partiell isomorph über $\mathcal{A}$, also auch elementar äquivalent über A, damit sind auch $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ elementar äquivalent über A.[10] □

1.12 **Korollar** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse: $\mathcal{K}$ hat genau dann die (JEP), wenn alle $\mathcal{K}$-generischen Strukturen elementar äquivalent sind.

Beweis
Wenn $\mathcal{K}$ die (JEP) hat und $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{K}$-generisch sind, so lassen sie sich gemeinsam in eine $\mathcal{K}$-Struktur einbetten, also wegen Satz I (1) auch in eine $\mathcal{K}$-generische Struktur. Diese Einbettungen sind dann wegen Satz I (2) elementar, also $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Es seien umgekehrt $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ $\mathcal{K}$-Strukturen, diese lassen sich wegen Satz I (1) zu $\mathcal{K}$-generischen Strukturen erweitern. Falls diese nun elementar äquivalent sind, so lassen sich sich gemeinsam in eine L-Struktur elementar einbetten. Weil $\mathcal{K}$ gut ist kann man diese L-Struktur zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern. So erhält man Einbettungen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ in eine $\mathcal{K}$-Struktur. □

Ich zeige nun, daß Satz A direkt aus Satz I folgt. Dazu muß ich erst die Definitionen und Voraussetzungen vergleichen.

1.13 **Lemma** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse: Die κ-$\mathcal{K}$-generischen Strukturen sind genau die $\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossenen κ-$\exists$-saturierten Strukturen.

[10] Der Beweis wäre so wie der des letzten Korollars, wenn man (LS) auf $\mathcal{A}$ anwenden würde und $\mathcal{A}$ mit kleinen $\mathcal{K}$-Substrukturen überdecken würde. Ich habe aber gesagt, daß ich (LS) nur auf $\mathcal{K}$-generische Strukturen anwenden möchte.

Beweis
Es sei $\mathcal{M}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch.

Behauptung: $\mathcal{M}$ ist $\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossen.

Beweis: Es sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{K}$-Erweiterung von $\mathcal{M}$. Wir können $\mathcal{A}$ zu einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur $\mathcal{N}$ erweitern (Satz I), das ist dann eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ (Satz I). $\mathcal{M}$ ist also existenziell abgeschlossen in $\mathcal{A}$ (Anhang A.1).

Behauptung: $\mathcal{M}$ ist κ-$\exists$-saturiert.

Beweis: Es sei p ein (partieller) existenzieller Typ von $\mathcal{M}$ über einer kleinen Parametermenge A, wegen (LS) können wir annehmen, daß A der Träger einer $\mathcal{K}$-Substruktur $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ist. p ist dann in einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ realisiert. Diese läßt sich ($\mathcal{K}$ ist gut) zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern, also auch zu einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur $\mathcal{N}$ (Satz I). Weil p existenziell ist, ist p auch in $\mathcal{N}$ realisiert. Wegen (LS) gibt es eine kleine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$, die $\mathcal{A}$ erweitert und p realisiert. Da $\mathcal{M}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch ist, können wir $\mathcal{B}$ über $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$ einbetten und p wird auch in $\mathcal{M}$ realisiert.

Es sei nun $\mathcal{M}$ κ-$\exists$-saturiert und $\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossen. Es sei $\mathcal{A}$ eine kleine $\mathcal{K}$-Substruktur, $\mathcal{B}$ eine kleine $\mathcal{K}$-Erweiterung von $\mathcal{A}$ und $p = \text{QF-}tp(^{B}/_{A})$ (in $\mathcal{B}$). Weil $\mathcal{K}$ (AP) hat, ist p in einer $\mathcal{K}$-Erweiterung von $\mathcal{M}$ realisiert und weil $\mathcal{M}$ $\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossen ist, ist p in $\mathcal{M}_A$ endlich erfüllt, also realisiert. $\mathcal{B}$ läßt sich also über $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{M}$ einbetten. □

1.14 **Lemma**

(1) Ist T eine induktive Theorie, so ist $\mathcal{E}_T$ gut.

(2) Es sei T eine induktive Theorie. Die κ-generischen Modelle von T sind genau die κ-$\mathcal{E}_T$-generischen Strukturen.

Beweis
(1) $\mathcal{E}_T$ ist nichtleer und induktiv: weil T induktiv ist, gibt es T-existenziell abgeschlossene Strukturen (Anhang A.1). Ist $\mathcal{M}$ die Vereinigung einer Kette von T-existenziell abgeschlossenen Strukturen und $\mathcal{A} \models T$ eine Erweiterung, so ist jede Existenzformel über $\mathcal{M}$ schon über einem Glied der Kette. Wenn sie dann in $\mathcal{A}$ erfüllt ist, so auch in diesem Glied der Kette, also auch in $\mathcal{M}$.

$\mathcal{E}_T$ hat (AP): ist $\mathcal{A} \supset \mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ (in $\mathcal{E}_T$), so gibt es Erweiterungen $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$, die elementare Erweiterungen von $\mathcal{M}$ sind (Anhang A.1). $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ kann man in T elementar über $\mathcal{M}$ amalgamieren und das Amalgam schließlich nach $\mathcal{E}_T$ erweitern.

$\mathcal{E}_T$ hat (LS): Es sei $\mathcal{M}$ T-existenziell abgeschlossen und $C \subset \mathcal{M}$. Es sei $\mathcal{A}$ eine elementare Substruktur von $\mathcal{M}$ mit $C \subset \mathcal{A}$ und $|\mathcal{A}| \leq |L_C|$. Dann ist auch $\mathcal{A}$ T-existenziell abgeschlossen (Anhang A.1).

Schließlich läßt sich jede elementare Erweiterung einer $\mathcal{E}_T$-generischen Struktur zu einer $\mathcal{E}_T$-Struktur erweitern. $\mathcal{E}_T$ ist also gut.

(2) Die κ-generischen Modelle von T sind die κ-$\exists$-saturierten T-existenziell abgeschlossenen Strukturen. Wegen (1) und des vorigen Lemmas sind das genau die κ-$\mathcal{E}_T$-generischen Strukturen. □

Beweis von Satz A: wegen des letzten Lemmas folgt Satz A direkt aus Satz I.

Ich werde dieses letzte Lemma von nun an stillschweigend verwenden, ebenso Satz I (1). Wenn $\mathcal{K}$ (gut) nicht erfüllt, so können wir über die $\mathcal{K}$-generischen Strukturen nicht so viel aussagen:

Beispiel: L bestehe aus den einstelligen Prädikaten P_i $(i < \omega)$ und $\mathcal{K}$ sei die Klasse der L-Strukturen, in denen alle P_i unendlich sind und deren Träger die disjunkte Vereinigung der P_i ist. $\mathcal{K}$ ist induktiv mit (AP) und (LS), aber nicht gut. Die κ-$\mathcal{K}$-generischen Strukturen sind die, in denen jedes P_i mindestens Größe κ hat, aber keine dieser Strukturen ist ω-$\exists$-saturiert.

1.1.2 Amalgamierung und elementare Abbildungen

Ich zeige nun, daß die partiellen elementaren Abbildungen genau die sind, die sich auf eine Amalgamierungsbasis fortsetzen lassen. Damit folgt Satz B schnell. Zusammen mit Satz C zeige ich dann, daß sich der Begriff der $\mathcal{K}$-generischen Struktur nicht verändert, wenn man zu $\mathcal{K}$ noch einige Amalgamierungsbasen hinzunimmt.

Amalgamierungsbasen und elementare Abbildungen

Eine *Amalgamierungsbasis für* $\mathcal{K}$ ist eine Struktur $\mathcal{A}$, die (i) eine Erweiterung in $\mathcal{K}$ hat und für die (ii) sich je zwei $\mathcal{K}$-Erweiterungen gemeinsam über $\mathcal{A}$ in eine $\mathcal{K}$-Struktur einbetten lassen.[11]

1.15 **Lemma** $\mathcal{K}$ sei gut. Es sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die eine Erweiterung in $\mathcal{K}$ hat. $\mathcal{A}$ ist genau dann eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$, wenn für alle $\mathcal{K}$-generischen Erweiterungen $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ gilt: $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.

Beweis
Es sei $\mathcal{A}$ eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ seien $\mathcal{K}$-generische Erweiterungen von $\mathcal{A}$. Weil man $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ über $\mathcal{A}$ in $\mathcal{K}$ amalgamieren kann, so kann man auch in einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur $\widetilde{\mathcal{M}}$ amalgamieren. Die Einbettungen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$ sind dann nach Satz I (2) elementar, insbesondere gilt $\mathcal{M}_A \equiv \widetilde{\mathcal{M}}_A \equiv \mathcal{N}_A$. Es seien umgekehrt $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{K}$-Strukturen mit $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{K}$-generisch sind. Falls dann $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$, so kann man in $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ elementar amalgamieren. Da $\mathcal{K}$ gut ist, hat dieses Amalgam eine $\mathcal{K}$-Erweiterung: fertig. □

1.16 **Satz II** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse, $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ seien $\mathcal{K}$-generisch und f ein partieller Isomorphismus[12] von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, dann sind äquivalent:

(1) f ist elementar.

(2) f erhält die $\exists$-Formeln.[13]

(3) f läßt sich zu einem partiellen Isomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}'$ fortsetzen, dessen Definitionsbereich eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$ ist. Dabei ist $\mathcal{N}'$ eine geeignete $\mathcal{K}$-generische Erweiterung von $\mathcal{N}$.

[11] Falls L keine Konstanten hat, so darf $\mathcal{A}$ auch die leere Struktur sein. Die leere Struktur ist genau dann eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ die (JEP) hat und nichtleer ist.

[12] Der leere partielle Isomorphismus ist stets zugelassen.

[13] Achtung, das bedeutet nicht, daß auch f^{-1} die $\exists$-Formeln erhalten soll!

Beweis
Es sei f ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ und $D = dom(f)$, wir können annehmen, daß $f = id_D$.

(1) nach (2) ist klar.

(2) nach (3): Es sei $\mathcal{N}'$ eine $|\mathcal{M}|^+$-$\mathcal{K}$-generische Erweiterung von $\mathcal{N}$. Wenn f die $\exists$-Formeln erhält, so ist der quantorenfreie Typ von M in $\mathcal{M}_D$ endlich erfüllt in $\mathcal{N}'_D$. Wegen 1.13 ist $\mathcal{N}'_D$ $|\mathcal{M}|^+$-$\exists$-saturiert, deshalb kann man f fortsetzen zu einer Einbettung $\mathcal{M} \rightarrow_D \mathcal{N}'$.

(3) nach (1): Das folgt aus dem vorigen Lemma, denn $\mathcal{N}'$ ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{N}$. □

Beweis von Satz B: folgt sofort aus Satz II.

Das nun folgende Lemma wende ich später auf die generischen Automorphismen an, der wichtige Punkt ist die Definition von „algebraisch abgeschlossen“ bezüglich $\mathcal{K}_{\text{gen}}$. Eine Amalgamierungsbasis $\mathcal{A}$ (für $\mathcal{K}$) ist *stark* , wenn man je zwei $\mathcal{K}$-Erweiterungen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ so amalgamieren kann über $\mathcal{A}$, daß der Schnitt ihrer Bilder im Amalgam genau das Bild von $\mathcal{A}$ ist. Eine Amalgamierungsbasis $\mathcal{A}$ (für $\mathcal{K}$) ist *algebraisch abgeschlossen in* $\mathcal{K}_{gen}$, wenn für alle $\mathcal{K}$-generischen Erweiterungen $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}$ ist algebraisch abgeschlossen in $\mathcal{M}$. Wegen Satz II sind alle $\mathcal{K}$-generischen Erweiterungen von $\mathcal{A}$ elementar äquivalent über $\mathcal{A}$, deshalb reicht es, daß $\mathcal{A}$ algebraisch abgeschlossen ist in einer $\mathcal{K}$-generischen Erweiterung.

1.17 **Lemma** $\mathcal{K}$ sei gut. Eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$ ist genau dann stark, wenn sie algebraisch abgeschlossen ist in $\mathcal{K}_{\text{gen}}$.

Beweis
Es sei $\mathcal{A}$ eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$. Ist $\mathcal{A}$ eine starke Amalgamierungsbasis, dann gibt es $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}_i$ in $\mathcal{K}_{\text{gen}}$ $(i = 1, 2)$, so daß $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}$ und $M_1 \cap M_2 = A$. Dann gilt $acl^{\mathcal{N}}(A) = acl^{\mathcal{M}_i}(A) \subset M_i$, also $acl^{\mathcal{N}}(A) \subset M_1 \cap M_2 = A$. $\mathcal{A}$ ist also algebraisch abgeschlossen in $\mathcal{K}_{\text{gen}}$. Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{K}_{gen}$-algebraisch abgeschlossene Amalgamierungsbasis und sind $\mathcal{M}_i$ in $\mathcal{K}_{gen}$ Erweiterungen von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{M}_1 \equiv_A \mathcal{M}_2$ (Satz II) und A ist algebraisch abgeschlossen in den $\mathcal{M}_i$. Man kann dann in der Theorie von $(\mathcal{M}_i)_A$ stark amalgamieren (diese Tatsache ist Folklore, siehe aber auch Kapitel 2, 80). Da $\mathcal{K}$ gut ist, kann man das Amalgam dann zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern und man hat $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2$ in $\mathcal{K}$ stark amalgamiert. □

Amalgamierung

1.18 **Satz III** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse und $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen, von der sich jede zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern läßt.

(1) Es sind äquivalent:

(i) $\tilde{\mathcal{K}}$ hat (AP).

(ii) Jede κ-$\mathcal{K}$-generische Struktur ist κ-$\tilde{\mathcal{K}}$-generisch.

(iii) Jeder partielle Isomorphismus zwischen $\mathcal{K}$-generischen Strukturen, dessen Definitionsbereich eine $\tilde{\mathcal{K}}$-Struktur ist, erhält die existenziellen Formeln.

Dann sind die κ-$\mathcal{K}$-generischen Strukturen genau die κ-$\tilde{\mathcal{K}}$-generischen Strukturen in $\mathcal{K}$.

(2) Falls $\mathcal{K}$ (JEP) hat, so hat $\tilde{\mathcal{K}}$ schon dann (AP), wenn in jeder $\mathcal{K}$-generischen Struktur jeder partielle Automorphismus, dessen Definitionsbereich eine $\tilde{\mathcal{K}}$-Struktur ist, die existenziellen Formeln erhält.

Beweis
(1) Die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt aus 1.15 und Satz II.

(i) nach (ii): Es sei $\mathcal{M}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch und $\mathcal{B}' \supset \mathcal{A}' \subset \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{A}'$ $\tilde{\mathcal{K}}$-Strukturen sind der Größe $< \kappa$. Wegen (LS) (für $\mathcal{K}$) gibt es eine kleine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ mit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Da $\tilde{\mathcal{K}}$ die (AP) hat, kann man $\mathcal{B}'$ über $\mathcal{A}'$ in eine $\tilde{\mathcal{K}}$-Erweiterung $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{A}$ einbetten. $\mathcal{C}'$ hat nach Voraussetzung eine Erweiterung in $\mathcal{K}$, also auch eine $\mathcal{K}$-generische Erweiterung. Wegen (LS) kann man dann $\mathcal{B}'$ über $\mathcal{A}'$ auch in eine kleine $\mathcal{K}$-Erweiterung $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$ einbetten. Nun kann $\mathcal{C}$ über $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$ eingebettet werden, das liefert auch eine Einbettung von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{M}$ über $\mathcal{A}'$.

(ii) nach (i): Es seien $\mathcal{B}' \supset \mathcal{A}' \subset \mathcal{C}'$ in $\tilde{\mathcal{K}}$. Man kann $\mathcal{C}'$ nach Voraussetzung zu einer $\mathcal{K}$-Struktur $\mathcal{M}$ erweitern, also auch zu einer $|\mathcal{B}'|^+$-$\mathcal{K}$-generischen Struktur, diese ist dann wegen (ii) $|\mathcal{B}'|^+$-$\tilde{\mathcal{K}}$-generisch, man kann also $\mathcal{B}'$ über $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{M}$ einbetten.

Der Zusatz folgt, weil die in (ii) noch fehlende Inklusion wegen $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$ klar ist.

(2) Es sei $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{K}}$, es reicht zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ eine Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$ ist, denn jedes Modell von $\tilde{\mathcal{K}}$ hat eine Erweiterung in $\mathcal{K}$. Es seien $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{K}$-generische Erweiterungen, wegen 1.15 reicht es zu zeigen:

Behauptung: $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.

Beweis: Wegen (LS) können wir annehmen, daß $\mathcal{A}$ klein ist. Es sei $\bar{a}$ eine Aufzählung von $\mathcal{A}$ und p der existenzielle Typ von $\bar{a}$ in $\mathcal{M}$. Wegen (JEP) gilt $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ (1.12), also ist p ein partieller Typ von $\mathcal{N}$ und wegen 1.13 gibt es ein $\bar{b} \in \mathcal{N}$, welches p realisiert. Dann ist $\bar{b} \mapsto \bar{a}$ ein partieller Automorphismus von $\mathcal{N}$, der nach Voraussetzung die existenziellen Formeln erhält, deshalb gilt $\mathcal{N} \models p(\bar{a})$. Der partielle Isomorphismus id_A von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ erhält also die existenziellen Formeln. Nun folgt die Behauptung mit Satz II. □

Beweis von Satz C: Mit $\tilde{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}(T_\forall)$, denn jeder nichtleere partielle Isomorphismus läßt sich dann zu einem partiellen Isomorphismus erweitern, dessen Definitionsbereich eine $\tilde{\mathcal{K}}$-Struktur ist.

Man beachte, daß ich die generischen Modelle von T nicht als $\mathrm{Mod}(T)$-generische Strukturen definiert habe, sondern als $\mathcal{E}_T$-generische Strukturen. Der Grund ist, daß T i.a. nicht die (AP) hat, d.h. daß $\mathrm{Mod}(T)$ i.a. nicht gut ist. Das gibt keine Zweideutigkeiten:

1.19 **Korollar** Es sei T eine induktive Theorie, dann sind äquivalent:

(1) T hat (AP).

(2) Die κ-$\mathrm{Mod}(T)$-generischen Strukturen sind genau die κ-generischen Modelle von T.

(3) Für alle generischen Modelle $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ von T und alle $\mathcal{A} \models T$ gilt: wenn $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$, so $\mathcal{M} \equiv_A \mathcal{N}$.

Beweis
Mit $\mathcal{K} = \mathcal{E}_T$ und $\tilde{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}(T)$ folgt das direkt aus Satz III, wobei man für die Richtung von (1) nach (2) noch beachten muß, daß $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathrm{gen}} \subset \mathcal{K}$. Das gilt wegen 1.13. □

Ich habe nun Sätze A, B und C bewiesen. Bevor ich weitergehe, erkläre ich den Zusammenhang zwischen den generischen Modellen von T und den $|L|^+$-saturierten Modellen von T. Danach gebe ich eine Charakterisierung der generischen Modelle, in der die existenzielle Abgeschlossenheit durch eine einfachere Bedingung ersetzt wird

Exkurs: Modellvollständigkeit

Vorbemerkung:
Ist Σ eine modellvollständige Theorie, so sind für jedes Modell $\mathcal{M} \models \Sigma$ äquivalent:

(i) $\mathcal{M}$ ist κ-generisch. (ii) $\mathcal{M}$ ist κ-$\exists$-saturiert. (iii) $\mathcal{M}$ ist κ-saturiert.

Begründung: T ist induktiv, jedes Modell von T ist existenziell abgeschlossen in T und jede Formel ist äquivalent zu einer existenziellen Formel (Anhang A.1).

Viele modelltheoretische Methoden sind entwickelt worden in der Klasse der $|L|^+$-saturierten Modelle einer modellvollständigen Theorie Σ, also in der Klasse der generischen Modelle von Σ. Ich spreche vom *elementaren Fall*, wenn wir in der Klasse der generischen Modelle einer modellvollständigen Theorie arbeiten. In dieser Arbeit werde ich zeigen, wie man viele modelltheoretische Methoden auch im nicht elementaren Fall verwenden kann.

Es sei T eine induktive Theorie, $\tilde{T}$ sei die $\forall\exists$-Theorie[14] der generischen Modelle von T.[15] Wegen der folgenden Bemerkung charakterisiert das nächste Lemma den elementaren Fall.

Bemerkung: $\tilde{T}$ ist die maximale induktive Theorie T', für die $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}_{T'}$ gilt. Falls $\mathcal{G}_T$ die Klasse der generischen Modelle einer modellvollständigen Theorie Σ ist (das ist der elementare Fall), so gilt $\tilde{T} \equiv \Sigma$.

Begründung: Jedes generische Modell von T ist ein Modell von T, also $T \subset \tilde{T}$. Weil sich jedes Modell von T zu einem Modell von $\tilde{T}$ erweitern läßt, haben T und $\tilde{T}$ dieselbe universelle Theorie, also $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}_{\tilde{T}}$. Ist schließlich $\mathcal{G}_{\tilde{T}} = \mathcal{G}_\Sigma$ für eine modellvollständige Theorie Σ, so gilt wegen dem gerade gesagten $\Sigma \subset \tilde{T}$ und es bleibt $\Sigma \models \tilde{T}$ zu zeigen. Es sei $\mathcal{A} \models \Sigma$, so kann man $\mathcal{A}$ zu einem generischen Modell $\mathcal{M}$ erweitern, also zu einem Modell von $\tilde{T}$. Wegen $\Sigma \subset \tilde{T}$ gilt $\mathcal{M} \models \Sigma$ und weil Σ modellvollständig ist gilt $\mathcal{A} \prec \mathcal{M}$, also $\mathcal{A} \models \tilde{T}$.

1.20 **Lemma** Es sind äquivalent:

(1) $\tilde{T}$ ist modellvollständig.

(2) $\tilde{T}$ ist der Modellbegleiter von T.

(3) T hat einen Modellbegleiter.

[14] Die $\forall\exists$-Theorie einer Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen besteht aus genau den $\forall\exists$-Aussagen, die in jeder $\mathcal{K}$-Struktur gelten.

[15] $\tilde{T}$ ist dann auch die $\forall\exists$-Theorie von $\mathcal{E}_T$ und auch unter dem Namen „Kaiserhülle“ (von T) bekannt.

(4) Die generischen Modelle von T sind genau die $|L|^+$-saturierten Modelle von $\tilde{T}$.

(5) Jedes $|L|^+$-saturierte Modell von $\tilde{T}$ ist T-existenziell abgeschlossen.

BEWEIS
(1) nach (2): Jedes Modell von T läßt sich zu einem Modell von $\tilde{T}$ erweitern.

(2) nach (3) sind klar.

(3) nach (1): Wenn T einen Modellbegleiter T^* hat, so axiomatisiert dieser $\mathcal{E}_T$ (Anhang A.1, Fakt 4). Deshalb ist jedes T-generische Modell auch ein Modell von T^* und $T^* \subset \tilde{T}$. Dann ist auch $\tilde{T}$ modellvollständig.

(1) nach (4): das folgt aus der Vorbemerkung, denn die generischen Modelle von T sind die generischen Modelle von $\tilde{T}$.

(4) nach (5): die generischen Modelle von T sind T-existenziell abgeschlossen.

(5) nach (1): Es sei $\mathcal{A} \models \tilde{T}$ und $\mathcal{M}$ eine $|L|^+$-saturierte elementare Erweiterung. Dann ist $\mathcal{M}$ T-existenziell abgeschlossen. Dann ist auch die elementare Substruktur $\mathcal{A}$ T-existenziell abgeschlossen und wegen $T \subset \tilde{T}$ ist $\mathcal{A}$ auch existenziell abgeschlossen in $\tilde{T}$. Es sind also alle Modelle von $\tilde{T}$ existenziell abgeschlossen in $\tilde{T}$, d.h. $\tilde{T}$ ist modellvollständig (Anhang A.1, Fakt 3). □

1.21 **Lemma** Es sind äquivalent:

(1) Für jedes generische Modell $\mathcal{M}$ von T ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ modellvollständig.

(2) Jedes generische Modell von T ist $|L|^+$-saturiert.

(3) Jedes generische Modell von T realisiert alle seine Typen über $\emptyset$.

BEWEIS
(1) nach (2) folgt aus der Vorbemerkung und (2) nach (3) ist klar.

(3) nach (1): Es sei $\mathcal{U}$ ein generisches Modell und $\varphi(x)$ eine existenzielle Formel (über $\emptyset$), ich arbeite nun in $\mathrm{Th}(\mathcal{U})$. Es sei $\Phi := \{\psi(x)\text{universell} \mid \varphi \to \psi\}$.

Behauptung: $\Phi \models \varphi$.

Beweis: Es sei $\mathcal{A}$ ein Modell und $\mathcal{A} \models \Phi(a)$, zu zeigen ist $\mathcal{A} \models \varphi(a)$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{A}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{U}$ ist, es sei $\mathcal{V}$ eine generische Erweiterung von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ hat also die richtige Theorie) und es gilt $\mathcal{V} \models \Phi(a)$. Ist p der existenziellen Typ von a in $\mathcal{V}$, so ist p konsistent mit φ, denn sonst gäbe es mit Kompaktheit eine existenzielle Formel $\neg\psi \in p$ mit $\varphi \to \psi$, also $\psi \in \Phi$ und $a \models \psi$, das ist ein Widerspruch zu $\neg\psi \in p$. Weil $\mathcal{V}$ hinreichend $\exists$-saturiert ist, gibt es ein $b \in \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} \models p \cup \{\varphi\}$. Die Abbildung $a \mapsto b$ ist dann ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{V}$, der die existenziellen Formeln erhält. Wegen Satz II gilt also $a \equiv b$ in $\mathcal{V}$ und deshalb $\mathcal{V} \models \varphi(a)$. Weil φ existenziell ist, gilt dann auch $\mathcal{A} \models \varphi(a)$. □

$\tilde{T}$ ist genau dann vollständig, wenn T die (JEP) hat. Dann beschreiben beide Lemmas dieselbe Situation. Die Klasse der generischen Modelle ist dann entweder disjunkt zur Klasse der $|L|^+$-saturierten Modelle oder identisch mit ihr.

1.1.3 Eine Charakterisierung der generischen Modelle

Vorbemerkung: Es sei $\tilde{T}$ die gemeinsame universelle Theorie der $\mathcal{K}$-generischen Strukturen. Wenn $\mathcal{K}$ (JEP) hat, so ist $\tilde{T}$ genau die universelle Theorie einer jeden $\mathcal{K}$-generischen Struktur, denn diese sind alle elementar äquivalent (1.12). Ist dann $\mathcal{A}$ eine beliebige $\mathcal{K}$-Struktur, so gilt $\mathcal{A} \models \tilde{T}$, denn $\mathcal{A}$ läßt sich zu einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur erweitern. $\tilde{T}$ ist also die (eindeutige) minimale universelle Theorie unter allen universellen Theorien von $\mathcal{K}$-Strukturen. Ist $\mathcal{K} = \mathcal{E}_T$ für eine universelle Theorie T mit (JEP), so gilt sogar $T = \tilde{T}$, jedes generische Modell von T hat also T als universelle Theorie. Denn aus dem gerade Gesagten folgt $T \models \tilde{T}$, also $T \supset \tilde{T}$. Die andere Inklusion ist klar, weil jedes generische Modell von T ein Modell von T ist.

Eine *minimale universelle Theorie von* $\mathcal{K}$ ist eine universelle Theorie einer $\mathcal{K}$-Struktur, die minimal ist als solche. Man beachte, daß jede universelle Theorie von $\mathcal{K}$ (JEP) hat, denn das gilt ganz allgemein für universelle Theorien von Strukturen.[16]

1.22 **Satz** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse und $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$. $\mathcal{M}$ ist genau dann κ-$\mathcal{K}$-generisch, wenn

(i) $\mathcal{M}$ ist κ-$\exists$-saturiert.

(ii) Jeder partielle Automorphismus von $\mathcal{M}$, der die existenziellen Formeln erhält, ist elementar.

(iii) $\mathcal{M}$ hat eine minimale universelle Theorie von $\mathcal{K}$.

Zusatz: Man kann (ii) abschwächen zu (ii)*: jeder partielle Automorphismus von $\mathcal{M}$, der die existenziellen Formeln erhält, erhält auch die universellen Formeln.

Beweis

Es sei $\mathcal{M}$ κ-$\mathcal{K}$-generisch, dann gilt (i) wegen 1.13 und (ii) wegen Satz II. Es sei nun $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{K}$-Struktur, deren universelle Theorie in der von $\mathcal{M}$ enthalten ist.

Behauptung: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$ haben dieselbe universelle Theorie.

Beweis: Es sei $\mathcal{N}$ eine $\mathcal{K}$-generische Erweiterung von $\mathcal{A}$, dann ist die universelle Theorie von $\mathcal{N}$ in der von $\mathcal{A}$ enthalten, also auch in der von $\mathcal{M}$. Mit Kompaktheit läßt sich $\mathcal{M}$ in eine elementare Erweiterung von $\mathcal{N}$ einbetten, diese läßt sich zu einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur $\tilde{\mathcal{M}}$ erweitern, denn $\mathcal{K}$ ist gut. Dann ist die Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\tilde{\mathcal{M}}$ elementar und die universelle Theorie von $\tilde{\mathcal{M}}$ ist in der von $\mathcal{N}$ enthalten. Deshalb ist die universelle Theorie von $\mathcal{M}$ ist in der von $\mathcal{A}$ enthalten.

$\mathcal{M}$ erfülle nun umgekehrt (i), (ii)* und (iii). Wegen Satz II ist $\mathcal{M}$ genau dann κ-$\mathcal{K}$-generisch, wenn $\mathcal{M}$ $\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossen ist. Es sei also $\varphi(a)$ eine existenzielle Formel über $\mathcal{M}$, die in einem Obermodell $\mathcal{A} \supset \mathcal{M}$ erfüllt ist. Dann haben wegen (iii) beide Strukturen dieselbe universelle Theorie und deshalb ist $p := \exists\text{-}tp^{\mathcal{A}}(a)$ endlich erfüllt in $\mathcal{M}$ und es gilt $\varphi \in p$.[17] Weil $\mathcal{M}$ hinreichend $\exists$-saturiert ist, gibt

[16] Wenn $\mathcal{B}_i$ ein Modell der universellen Theorie von $\mathcal{A}$ ist, so läßt sich $\mathcal{B}_i$ in eine elementare Erweiterung $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ einbetten. Die $\mathcal{A}_i$ kann man dann gemeinsam in eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ einbetten.

[17] Ob eine Menge von existenziellen Formeln in einer Struktur endlich erfüllt ist oder nicht, hängt nur von der universellen Theorie der Struktur ab.

es eine Realisierung b von p in $\mathcal{M}$, dann gilt insbesondere $\mathcal{M}\models\varphi(b)$. Der partielle Isomorphismus $a \mapsto b$ in $\mathcal{M}$ erhält dann die existenziellen Formeln: $\mathcal{M}\models\psi(a) \Rightarrow \mathcal{A}\models\psi(a) \Rightarrow \mathcal{M}\models\psi(b)$ (ψ ist existenziell). Wegen (ii)* gilt dann $a \equiv b$ in $\mathcal{M}$, insbesondere $\mathcal{M}\models\varphi(a)$. $\mathcal{M}$ ist also T-existenziell abgeschlossen. □

1.23 **Korollar** Es sei T eine universelle Theorie. $\mathcal{G}_T$ ist die disjunkte Vereinigung der $\mathcal{G}_{\tilde{T}}$, wobei $\tilde{T}$ die minimalen universellen Theorien von $\mathcal{E}_T$ durchläuft.

Beweis
Es sei $\mathcal{U} \in \mathcal{G}_T$, dann ist wegen des Satzes seine universelle Theorie $\tilde{T}$ minimal bezüglich $\mathcal{E}_T$ und aus demselben Grund ist $\mathcal{U}$ ein generisches Modell von $\tilde{T}$. Es sei umgekehrt $\tilde{T}$ eine minimale universelle Theorie von $\mathcal{E}_T$ und $\mathcal{U}$ ein generisches Modell von $\tilde{T}$. Dann hat $\tilde{T}$ (JEP) und wegen der Vorbemerkung ist $\tilde{T}$ genau die universelle Theorie von $\mathcal{U}$. Daraus folgt, daß die Vereinigung der $\mathcal{G}_{\tilde{T}}$ disjunkt ist und wegen des Satzes ist $\mathcal{U}$ auch ein generisches Modell von T. □

In Anhang A.2 beschreibe ich den Verband der universellen Theorien etwas genauer. Dort diskutiere ich insbesondere, welches die minimalen universellen Theorien von $\mathcal{E}_T$ sind.

Der Vorteil dieser Charakterisierung ist, daß der „kategoriale Aspekt“ des Begriffs der $\mathcal{K}$-generischen Struktur reduziert ist auf die Eigenschaft (iii), während (i) und (ii) nur über die Struktur selber sprechen. Strukturen mit den Eigenschaften (i) und (ii) werde ich gleich gesondert betrachten. Vorher erkläre ich noch, warum es keine Einschränkung ist, nur noch mit generischen Modellen von universellen Theorien zu arbeiten.

Exkurs: Gute Klassen liefern nichts Neues

Mit den Techniken des letzten Korollars zeige ich nun, daß der Ansatz, generische Strukturen in guten Klassen zu konstruieren, nicht wirklich allgemeiner ist, als wenn man sich auf induktive (universelle) Theorien beschränkt.[18]

1.24 **Lemma** Es sei $\mathcal{K}$ eine gute Klasse.

(1) $\mathcal{K}_{gen}$ ist die disjunkte Vereinigung der $\mathcal{G}_{\tilde{T}}\cap\mathcal{K}$, wobei $\tilde{T}$ die minimalen universellen Theorien von $\mathcal{K}$ durchläuft.

(2) Hat $\mathcal{K}$ (JEP) und ist T die universelle Theorie der $\mathcal{K}$-generischen Strukturen, so sind die $\mathcal{K}$-generischen Strukturen genau die κ-generischen Modelle von T, die in $\mathcal{K}$ liegen.

[18] Der Grund liegt in der schwachen Abschlußeigenschaft gegen elementare Äquivalenz, daß sich nämlich jede elementare Erweiterung einer $\mathcal{K}$-generischen Struktur zu einer $\mathcal{K}$-Struktur erweitern läßt. Ohne diese Annahme kann ich weder 1.13 noch Satz II beweisen – und ich mußte leider erkennen, daß diese Annahme den allgemeineren Ansatz in gewissem Sinn überflüssig macht.

Beweis
(1) Es sei $\mathcal{U}$ $\mathcal{K}$-generisch, dann ist seine universelle Theorie T minimal wegen 1.22 und aus demselben Grund ist $\mathcal{U}$ ein generisches Modell von T. Es sei umgekehrt $\tilde{T}$ eine minimale universelle Theorie von $\mathcal{K}$, dann ist $\tilde{T}$ die universelle Theorie seiner generischen Modelle. Die sind wegen 1.22 dann auch $\mathcal{K}$-generisch und die Vereinigung ist disjunkt.

(2) Wenn $\mathcal{K}$ die (JEP) hat, dann ist T die eindeutige minimale universelle Theorie von $\mathcal{K}$. Nun geht es weiter wie in (1). □

Das Korollar oben besagt, daß (2) für $\mathcal{K} = \mathcal{E}_T$ auch dann stimmt, wenn T nicht (JEP) hat. Im allgemeinen ist das jedoch falsch, denn die universelle Theorie der $\mathcal{K}$-generischen Strukturen kann Modelle haben, die zwar $\mathcal{K}$-Strukturen erweitern, die sich aber nicht nach $\mathcal{K}$ erweitern lassen:

Beispiel: Es sei $L = \{f, R\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist und R ein einstelliges Relationssymbol, P sei die Menge der Primzahlen. Für jedes $p \in P$ sei φ_p die Aussage $\forall x f^p(x) = x$ und es sei $T := \{\forall x\ f(x) \neq x, \forall x\ (Rx \to Rfx)\}$. $\mathcal{K}_p$ bestehe aus den Modellen von $T_p := T \cup \{\varphi_p\}$ und $\mathcal{K}_0$ aus den Modellen von $T_0 := T \cup \{\forall x f^n(x) \neq x \mid n < \omega\} \cup \{\forall x Rx\}$. Es sei $\mathcal{K}$ die Vereinigung aller $\mathcal{K}_i$, dann gibt es zwei Arten von $\mathcal{K}$-Strukturen: (i) die $\mathcal{K}_p$-Strukturen, das sind Familien von gleichlangen Zykeln von Primpotenzlänge, wobei jeweils ein ganzer Zykel gefärbt ist (mit R) oder nicht und (ii) die $\mathcal{K}_0$-Strukturen, das sind Familien von unendlichen Zykeln, die alle gefärbt sind. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{K}$ gut ist.
Es sei nun $\mathcal{A}$ eine abzählbare $\mathcal{K}_0$-Struktur, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ eine abzählbare Struktur, die aus unendlichen Zykeln besteht, von denen einige ungefärbt sind. $\mathcal{B}$ ist dann nicht nach $\mathcal{K}$ erweiterbar. $\mathcal{B}$ ist aber ein Modell der universellen Theorie T von $\mathcal{K}$, denn man kann $\mathcal{B}$ einbetten in ein Ultraprodukt von Strukturen aus den $\mathcal{K}_p$. Daraus folgt, daß keine $\mathcal{K}$-generische Erweiterung von $\mathcal{A}$ ein generisches Modell von T ist also gilt nicht $\mathcal{K}_{gen} = \mathcal{G}_T \cap \mathcal{K}$.

1.2 Generische Modelle als ∃-Universalbereiche

Ich untersuche nun weitere Eigenschaften von generischen Modellen, behandele sie jedoch als Teil einer größeren Klasse von Strukturen, der ∃-Universalbereiche. Generische Modelle sind ∃-Universalbereiche (2.2), umgekehrt ist jeder ∃-Universalbereich ein generisches Modell seiner universellen Theorie (2.3). Hrushovski und Pillay arbeiten im wesentlichen mit diesem Begriff. In Abschnitt 1.2.1 charakterisiere ich verschiedene Arten von ∃-Universalbereichen und ihre universellen Theorien. Die Ergebnisse verwende ich in Abschnitt 1.2.2, wo ich genau sagen werde, in welcher Beziehung die hier eingeführten Universalbereiche zu den von Hrushovski und Pillay eingeführten „universal domains“ stehen. In Abschnitt 1.2.3 setze ich das Studium der generischen Modelle fort.

2.1 **Definition** Ein κ-∃-*Universalbereich* ist eine κ-∃-saturierte Struktur, in der jeder partielle Automorphismus, welcher die ∃-Formeln erhält[19], elementar ist. $\mathcal{U}$ ist ein ∃-*Universalbereich*, wenn $\mathcal{U}$ ein $|L|^+$-∃-Universalbereich ist.

[19] Ich erinnere daran, daß nur in eine Richtung die ∃-Formeln erhalten werden müssen.

Ist $\mathcal{U}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich und $A \subset U$ mit $|A| < \kappa$, so ist auch $\mathcal{U}_A$ ein κ-$\exists$-Universalbereich.

2.2 **Satz** Es sei $\mathcal{U}$ eine Struktur und T eine universelle Theorie, dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein κ-generisches Modell von T.

(2) $\mathcal{U}$ ist ein T-existenziell abgeschlossener κ-$\exists$-Universalbereich.

(3) $\mathcal{U}$ ist ein κ-$\exists$-Universalbereich mit einer minimalen universellen Theorie von T.

Beweis
Die Äquivalenz von (1) und (2) gilt wegen 1.13 und Satz II. Die Äquivalenz von (1) und (3) folgt aus 1.22. □

2.3 **Korollar** Ein $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ ist ein generisches Modell seiner universellen Theorie T. Die generischen Modelle von T sind genau die zu $\mathcal{U}$ elementar äquivalenten $\exists$-Universalbereiche.

Beweis
$\mathcal{U}$ hat eine minimale universelle Theorie unter den Modellen von T, ist also ein generisches Modell von T. Dasselbe gilt für elementar äquivalente $\exists$-Universalbereiche. Andererseits sind alle generischen Modelle von T $\exists$-Universalbereiche und weil T (JEP) hat[20], sind sie alle elementar äquivalent (1.12). □

Anstatt also mit einer universellen Theorie mit (JEP) zu starten und die Klasse der generischen Modelle von T zu betrachten können wir genauso mit einem $\exists$-Universalbereich starten und die Klasse der elementar äquivalenten $\exists$-Universalbereiche betrachten.

1.2.1 Universalbereiche und Robinsontheorien

Ich führe nun verschiedene Arten von Universalbereichen als spezielle $\exists$-Universalbereiche ein und charakterisiere sie als $\exists$-saturierte Strukturen mit gewissen Trennungseigenschaften im Verband der existenziell definierbaren Mengen. Wir sehen später, daß diese verschiedenen Trennungseigenschaften einen großen Einfluß auf die Fruchtbarkeit der modelltheoretischen Methoden hat, die in der Klasse der generischen Modelle einer induktiven Theorie angewendet werden können. Die „QF-Universalbereiche“ sind im wesentlichen die von Hrushovski eingeführten Universalbereiche, und ihre universellen Theorien sind genau die „Robinsontheorien“. Die „Δ_1-Universalbereiche“ sind im wesentlichen dasselbe wie QF-Universalbereiche, wenn man die Sprache geeignet modifiziert.

$\exists$ ($\forall$, QF, $\Delta_1(T)$) sei die Menge der existenziellen (universellen, quantorenfreien, $\Delta_1(T)$-Formeln[21]) Formeln. Eine $\exists$-Menge (entsprechend $\forall$, QF und Δ_1) in einer Struktur ist eine mit Parametern $\exists$-definierbare Teilmenge der Struktur. Kommen die Parameter aus A, so nenne ich sie eine $\exists(A)$-Menge. Ich erinnere daran, daß Teilmengen einer Struktur $\mathcal{U}$ Teilmengen von U^n sind für ein $n < \omega$.

[20] Universelle Theorien von Strukturen haben (JEP)

[21] Eine $\Delta_1(T)$-*Formel* ist eine Formel, die in T sowohl zu einer existenziellen Formel als auch zu einer universellen Formel äquivalent ist. Ist eine feste Theorie oder ein Modell im Hintergrund, so spreche ich nur von Δ_1-Formeln.

2.4 **Lemma** Für eine κ-$\exists$-saturierte Struktur $\mathcal{U}$ sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein κ-$\exists$-Universalbereich.

(2) Jeder partielle Automorphismus in $\mathcal{U}$, der die existenziellen Formeln erhält, erhält auch die universellen Formeln.

(3) Jede $\exists(\emptyset)$-Menge in $\mathcal{U}$ ist Schnitt von $\forall(\emptyset)$-Mengen.

(4) Zu jeder $\exists(\emptyset)$-Menge $\mathcal{D}$ in $\mathcal{U}$ und jedem $a \in \mathcal{U}$ mit $a \notin \mathcal{D}$ gibt es eine zu $\mathcal{D}$ disjunkte $\exists(\emptyset)$-Menge, die a enthält.

Beweis

(1) nach (2) und (3) nach (4) sind klar.

(2) nach (3): Es sei φ existenziell (und konsistent) und $\Psi = \{\psi \text{ universell} \mid \varphi \to \psi\}$. Es sei $\bar{a} \in \Psi^{\mathcal{U}}$, dann ist jedes $\varphi' \in \exists\text{-}tp^{\mathcal{U}}(\bar{a})$ konsistent mit φ, denn sonst $\neg\varphi' \in \Psi$ – das geht nicht, da $\bar{a} \models \varphi'$ und $\bar{a} \models \Psi$. $\exists\text{-}tp^{\mathcal{U}}(\bar{a})$ ist also konsistent mit φ und weil $\mathcal{U}$ hinreichend $\exists$-saturiert ist, gibt es $\bar{b} \models \exists\text{-}tp^{\mathcal{U}}(\bar{a}) \cup \{\varphi\}$ in $\mathcal{U}$. $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ist dann ein partieller Automorphismus, der die existenziellen Formeln erhält, wegen (2) gilt das dann auch für $\bar{b} \mapsto \bar{a}$. Daraus folgt $\varphi \in \exists\text{-}tp^{\mathcal{U}}(\bar{a})$, also $a \in \varphi^{\mathcal{U}}$. Deshalb gilt $\Psi^{\mathcal{U}} \subset \varphi^{\mathcal{U}}$, also gilt Gleichheit.

(4) nach (2): Es sei f ein partieller Automorphismus in $\mathcal{U}$, der die existenziellen Formeln erhält, $a \in dom(f)$ und ψ universell mit $\mathcal{U} \models \psi(a)$. Wegen (4) (mit $\mathcal{D} = \neg\psi^{\mathcal{U}}$) gibt es eine existenzielle Formel φ, so daß $\mathcal{U} \models \varphi(a)$ und $\mathcal{U} \models \varphi \to \psi$. Dann gilt $\mathcal{U} \models \varphi(f(a))$ und folglich $\mathcal{U} \models \psi(f(a))$.

(2) nach (1): $\mathcal{U}$ erfüllt (i), (ii)* und (iii) aus 1.22, wobei T die universelle Theorie von $\mathcal{U}$ ist und $\mathcal{K} = \mathcal{E}_T$. $\mathcal{U}$ ist dann κ-$\mathcal{K}$-generisch, also wegen 2.2 ein κ-$\exists$-Universalbereich.[22]

$\square$

In einem $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ gelten diese Trennungseigenschaften dann auch über Parametern, denn für jede kleine Parametermenge A aus $\mathcal{U}$ ist auch $\mathcal{U}_A$ ein $\exists$-Universalbereich. Entsprechendes gilt für die im folgenden beschriebenen Trennungseigenschaften.

2.5 **Definition** Ein *(κ-)QF-Universalbereich* ist eine (κ-)$\exists$-saturierte Struktur, in der jeder partielle Automorphismus elementar ist.

Offensichtlich sind die κ-QF-Universalbereiche genau die κ-$\exists$-Universalbereiche, in denen jeder partielle Automorphismus elementar ist. Das folgende Lemma beweist man wie das vorige:

2.6 **Lemma** Für eine κ-$\exists$-saturierte Struktur $\mathcal{U}$ sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein κ-QF-Universalbereich.

(2) Jeder partielle Automorphismus in $\mathcal{U}$ erhält die existenziellen Formeln.

(3) Jede $\exists(\emptyset)$-Menge in $\mathcal{U}$ ist Schnitt von QF$(\emptyset)$-Mengen.

(4) Zu jeder $\exists(\emptyset)$-Menge $\mathcal{D}$ in $\mathcal{U}$ und jedem $a \in \mathcal{U}$ mit $a \notin \mathcal{D}$ gibt es eine zu $\mathcal{D}$ disjunkte QF$(\emptyset)$-Menge, die a enthält.

[22] Alternativ kann man sich überlegen, daß die Familie der kleinen partiellen Automorphismen von $\mathcal{U}$, welche die existenziellen Formeln in beide Richtungen erhalten, die Hin-und-Her-Eigenschaft hat.

Beweis

(2) nach (3): Es sei $\psi(x)$ eine existenzielle Formel und $\Phi(x) = \{\varphi$ quantorenfrei $\mid \psi \to \varphi\}$, dann ist wieder für jedes $a \in \Phi(\mathcal{U})$ ψ konsistent mit $\exists$-$tp(a)$ und es gibt ein b in $\mathcal{U}$, das $p(x) \cup \{\psi(x)\}$ realisiert. Der partielle Automorphismus $b \mapsto a$ erhält wegen (2) die existenziellen Formeln, also gilt $a \models \psi$: das reicht.

(4) nach (1): Ist f ein partieller Automorphismus, so erhält er wegen (4) die existenziellen Formeln. Außerdem folgt Eigenschaft (4) des vorigen Lemmas, also ist $\mathcal{U}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich und deshalb ist f elementar. □

2.7 **Lemma** Eine $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ ist genau dann ein QF-Universalbereich, wenn je zwei disjunkte $\exists(\emptyset)$-Mengen in $\mathcal{U}$ durch eine QF$(\emptyset)$-Menge getrennt werden können.

Beweis

Es sei $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich und $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ $\exists(\emptyset)$-Mengen. Wegen des vorigen Lemmas ist jedes $\mathcal{D}_i$ Schnitt von QF$(\emptyset)$-Mengen. Wenn nun die beiden $\exists(\emptyset)$-Mengen disjunkt sind, so ist der Schnitt aller dieser QF$(\emptyset)$-Mengen leer und wegen hinreichender $\exists$-Saturation ist dann schon ein endlicher Schnitt dieser QF$(\emptyset)$-Mengen leer. $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ können also durch eine QF$(\emptyset)$-Menge getrennt werden. Es sei umgekehrt $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich mit dieser Trennungseigenschaft, $a \mapsto b$ sei ein partieller Automorphismus und ψ_1 eine $\exists(\emptyset)$-Formel. $\mathcal{U}$ ist ein $\exists$-Universalbereich und wenn $b \models \neg\psi_1$, so gibt es wegen 2.4 eine existenzielle Formel ψ_2, die mit ψ_1 inkonsistent ist und mit $b \models \psi_2$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine quantorenfreie Formel φ, so daß $\psi_1 \to \varphi$ und $b \models \neg\varphi$. Dann gilt auch $a \models \neg\varphi$ und $a \models \neg\psi_1$. $a \mapsto b$ erhält also die existenziellen Formeln, wegen des vorigen Lemmas ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich. □

Die folgenden Begriffe sind von Hrushovski ([Hr1, Definition 1]).

2.8 **Definition**

(1) Eine Theorie T hat *Quantorenseparation*, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Sind ψ_1 und ψ_2 miteinander in T inkonsistente existenzielle Formeln, so gibt es eine quantorenfreie Formel φ, so daß $T \models \psi_1 \to \varphi$ und $T \models \neg\varphi \to \psi_2$.

(2) Eine *Robinsontheorie* ist eine universelle Theorie mit (JEP) und Quantorenseparation.

2.9 **Satz** Es sei T eine universelle mit (JEP), dann sind äquivalent:[23]

(1) T ist eine Robinsontheorie.

(2) Alle generischen Modelle von T sind QF-Universalbereiche.

(3) T ist die universelle Theorie eines QF-Universalbereichs.

(4) T hat (AP).

Dann ist jeder partielle Isomorphismus zwischen generischen Modellen von T elementar.

[23] Die Äquivalenz von (1) und (3) ist [Hr1, Proposition 1.1].

Beweis
(1) nach (2): Es sei $\mathcal{U}$ ein generisches Modell, dann ist $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich und weil Quantorenseparation genau die im vorigen Lemma beschriebene Trennungseigenschaft ist, ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich.

(2) nach (3): Weil T (JEP) hat, ist T die universelle Theorie jedes seiner generischen Modelle.

(3) nach (1): Ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich und T seine universelle Theorie, so gilt Quantorenseparation in der Theorie $\mathcal{U}$ wegen des letzten Lemmas. Aber Quantorenseparation ist eine universelle Aussage und gilt deshalb schon in T.

Die Äquivalenz von (2) und (4): weil T universell ist mit (JEP), hat T nach Satz C genau dann (AP), wenn in jedem generischen Modell von T jeder partielle Automorphismus die existenziellen Formeln erhält. Wegen 2.6 bedeutet das, daß jedes generische Modell von T ein QF-Universalbereich ist.

Zusatz: Ist f der leere partielle Isomorphismus zwischen zwei generischen Modellen, so ist f elementar wegen (JEP) (1.12). Ist f nichtleer, so erhält f nach Satz C die existenziellen Formeln und ist nach Satz II elementar. $\square$

Die Äquivalenz von (1) und (4) kann man auch direkt mit Kompaktheit nachrechnen.

2.10 **Korollar** Es sei T eine universelle Theorie mit Modellbegleiter T^*. T ist genau dann eine Robinsontheorie, wenn T^* vollständig ist mit (QE).

Beweis
Wegen 1.20 sind die generischen Modelle von T genau die $|L|^+$-saturierten Modelle von T^* und T^* ist deren Theorie. T^* ist genau dann vollständig, wenn T (JEP) hat (1.12). Eine $|L|^+$-saturierte Struktur ist genau dann ein QF-Universalbereich, wenn in ihr jede $\exists(\emptyset)$-Menge Schnitt von QF$(\emptyset)$-Mengen ist. Mit Kompaktheit ist das äquivalent dazu, daß jede $\exists(\emptyset)$-Menge eine QF$(\emptyset)$-Mengen ist. Das ist äquivalent zur (QE) in der Theorie der Struktur. $\square$

Δ_1-Universalbereiche

Ich werde in dieser Arbeit noch andere Universalbereiche betrachten:

2.11 **Definition** Ein κ-Δ_1-*Universalbereich* ist eine κ-$\exists$-saturierte Struktur $\mathcal{U}$, in der jeder partielle Automorphismus, welcher die $\Delta_1(\mathcal{U})$-Formeln erhält, elementar ist.

Offensichtlich ist jeder κ-QF-Universalbereich ein κ-Δ_1-Universalbereich und jeder κ-Δ_1-Universalbereich ein κ-$\exists$-Universalbereich. Es sei $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich. Führt man für jede $\Delta_1(\emptyset)$-Menge ein Prädikat ein, so verändert sich die existenzielle Struktur von $\mathcal{U}$ nicht, also auch nicht die Δ_1-Struktur und dann ist jede Δ_1-Menge quantorenfrei definiert. $\mathcal{U}$ ist genau dann ein Δ_1-Universalbereich, wenn $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich in dieser Sprache ist.[24]

[24] Deshalb gelten in Δ_1-Universalbereich „dieselben" Eigenschaften wie in QF-Universalbereichen, wenn man „QF" durch „Δ_1" ersetzt.

2.12 **Lemma** Für eine κ-$\exists$-saturierte Struktur $\mathcal{U}$ sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein κ-Δ_1-Universalbereich.

(2) Jeder partielle Automorphismus in $\mathcal{U}$, der die Δ_1-Formeln erhält, erhält die existenziellen Formeln.

(3) Jede $\exists(\emptyset)$-Menge in $\mathcal{U}$ ist Schnitt von $\Delta_1(\emptyset)$-Mengen.

(4) Zu jeder $\exists(\emptyset)$-Menge $\mathcal{D}$ in $\mathcal{U}$ und jedem $a \in \mathcal{U}$ mit $a \notin \mathcal{D}$ gibt es eine zu $\mathcal{D}$ disjunkte $\Delta_1(\emptyset)$-Menge, die a enthält.

Beweis
Wie 2.6. □

2.13 **Lemma**

(1) Ein Δ_1-Universalbereich $\mathcal{U}$ ist genau dann ein QF-Universalbereich, wenn jede $\Delta_1(\mathcal{U})$-Formel äquivalent zu einer quantorenfreien Formel ist.

(2) Ein $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ ist genau dann ein Δ_1-Universalbereich, wenn wenn je zwei disjunkte $\exists(\emptyset)$-Mengen in $\mathcal{U}$ durch eine $\Delta_1(\emptyset)$-Menge getrennt werden können.[25]

Beweis
(1) Ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich und φ eine $\Delta_1(\mathcal{U})$-Formel, so sind φ und $\neg\varphi$ existenziell und wegen Quantorenseparation (2.9) durch eine quantorenfreie Formel trennbar. φ ist also äquivalent zu einer quantorenfreien Formel. Die Umkehrung ist klar, denn dann ist jeder partielle Automorphismus elementar, denn er erhält die Δ_1-Formeln.

(2) Wie 2.7 □

Ich werde später mit dem Begriff des Ω-Universalbereichs auf die allgemeinen Prinzipien eingehen, die hinter dem Begriff des Universalbereichs stehen.

1.2.2 Universal domains bei Pillay und Hrushovski

Ich erkläre nun den Zusammenhang zwischen den hier definierten Universalbereichen und den von Hrushovski bzw. von Pillay definierten „universal domains“.

Universal domains bei Pillay

Pillay definiert in [Pi3, Definition 2.9] einen „e-universal domain of cardinality κ“ als eine κ-$\exists$-saturierte Struktur $\mathcal{U}$ der Kardinalität κ mit der folgenden Eigenschaft:

(*) wenn A und B Teilmengen von $\mathcal{U}$ sind der Kardinalität $< \kappa$ und $f : A \to B$ eine Bijektion ist, welche die existenziellen Formeln erhält, so läßt sich f zu einem Automorphismus von $\mathcal{U}$ fortsetzen.

[25] Das ist eine Eigenschaft der $\forall\exists$-Theorie von $\mathcal{U}$.

Die Eigenschaft (*) ist ist offensichtlich äquivalent dazu, daß (i) partielle Isomorphismen in $\mathcal{U}$ schon dann elementar sind, wenn sie die existenziellen Formeln erhalten und (ii) $\mathcal{U}$ stark κ-homogen[26] ist.

Pillay nimmt die Existenz geeigneter großer Kardinalzahlen an, um die Existenz solcher $\exists$-saturierten Strukturen zu garantieren. Das mache ich in dieser Arbeit nicht. Ein *starker κ-$\exists$-Universalbereich* sei ein stark κ-homogener κ-$\exists$-Universalbereich. Es folgt:

2.14 **Lemma** Die starken κ-$\exists$-Universalbereiche der Kardinalität κ sind genau Pillay's „e-universal domains of cardinality κ“.

2.15 **Satz** Jeder κ-$\exists$-Universalbereich kann zu einem stark κ-homogenen κ-$\exists$-Universalbereich elementar erweitert werden.

Beweis

Wir können annehmen, daß κ regulär ist und $\kappa > |L|$. Es sei $\mathcal{U}_0$ ein κ-$\exists$-Universalbereich, T seine universelle Theorie und $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine stetige elementare Kette von $\exists$-Universalbereichen, so daß $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ stets ein $|\mathcal{U}_\alpha|^+$-$\exists$-Universalbereich ist. Es sei $\mathcal{U} := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha$, das ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{U}_0$ und ein κ-$\exists$-Universalbereich, denn $\mathcal{U}$ ist ein generisches Modell von T: als Vereinigung einer Kette von T-existenziell abgeschlossenen Strukturen ist auch $\mathcal{U}$ T-existenziell abgeschlossen und wegen der Regularität von κ ist $\mathcal{U}$ κ-$\exists$-saturiert.

Behauptung: $\mathcal{U}$ ist stark κ-homogen.

Beweis: Es seien A und B klein und $f : A \to B$ sei bijektiv und elementar (in $\mathcal{U}$), wegen Regularität ist f in einem $\mathcal{U}_\alpha$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ und einen Isomorphismus $\sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cong \tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ mit $f \subset \tilde{\sigma}_\alpha$. Weil $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ hinreichend $\exists$-saturiert ist, kann man $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ als Substruktur von $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ finden (realisiere $\mathrm{QF}tp(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha/B)$). Da beides $\exists$-Universalbereiche sind mit derselben universellen Theorie, ist $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \prec \mathcal{U}_{\alpha+1}$. Entsprechend (nur andersrum) kann man $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha+1} \prec \mathcal{U}_{\alpha+2}$ finden, so daß sich σ_α fortsetzen läßt zu $\sigma_{\alpha+1} : \tilde{\mathcal{U}}_{\alpha+1} \cong \mathcal{U}_{\alpha+1}$. Auf diese Weise konstruiert man eine aufsteigende Kette $(\sigma_{\alpha+i})_{i<\omega}$, so daß $\bigcup_{i<\omega} \sigma_{\alpha+i}$ ein Automorphismus von $\mathcal{U}_{\alpha+\omega}$ ist („Sandwichprinzip”). Diesen Automorphismus können wir auf dieselbe Weise zu einem Automorphismus von $\mathcal{U}_{\alpha+\omega+\omega}$ erweitern und so fort – schließlich erhalten wir einen Automorphismus von $\mathcal{U}$. □

Fordert man die Existenz geeignet großer Kardinalzahlen, so folgt aus den Lemma, daß sich jeder (kleine) $\exists$-Universalbereich elementar zu einem „e-universal domain of cardinality κ” erweitern läßt.

Universal domains bei Hrushovski

Hrushovski definiert in [Hr1, Definition 2] einen „universal domain“ relativ zu einer Familie Δ von Formeln, die unter Teilformeln und unter booleschen Kombinationen abgeschlossen ist, und relativ zu einem unendlichen κ. Für den Spezialfall, daß

[26] Eine Struktur ist *stark κ-homogen*, wenn sich jede partielle elementare Abbildung zwischen Teilmengen der Größe $< \kappa$ zu einem Automorphismus fortsetzen läßt.

$\Delta = \mathrm{QF}$, ist ein „universal domain" dann eine Struktur $\mathcal{M}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(*) Jeder partielle quantorenfreie Typ von $\mathcal{M}$ über einer Parametermenge $< \kappa$ ist in $\mathcal{M}$ realisiert.

(**) Jeder partielle Automorphismus zwischen Teilmengen der Kardinalität $< \kappa$ läßt sich zu einem Automorphismus fortsetzen.

2.16 **Lemma** [Hr1, Lemma 1.6 (1)] Ein „universal domain" (bezüglich QF und $\kappa > |L|$) ist κ-$\exists$-saturiert.

Beweis

Es sei $\Sigma(x)$ ein partieller existenzieller Typ von $\mathcal{M}$ über einer kleinen Parametermenge A. Wir ersetzen jede existenziell abquantifizierte Variable durch eine neue Variable und erhalten so einen quantorenfreien $\star$-Typ $\Pi((x_i)_{i<\kappa})$ von $\mathcal{M}$ in höchstens κ vielen Variablen ($|L| < \kappa$) und es reicht, Π zu realisieren. Wir können annehmen, daß Π vollständig ist. Für $\alpha < \kappa$ sei $(a_i)_{i<\alpha}$ eine Folge in $\mathcal{M}$, welche die Restriktion von Π auf $(x_i)_{i<\alpha}$ realisiert.

Behauptung: Es gibt a_α in $\mathcal{M}$, so daß $(a_i)_{i\leq\alpha}$ die Restriktion von Π auf $(x_i)_{i\leq\alpha}$ realisiert.

Beweis: Es sei $\bar{x}$ ist ein endliches Teiltupel von $(x_i)_{i<\alpha}$, so ist die Restriktion von Π auf $\bar{x}x_\alpha$ in $\mathcal{M}$ realisiert wegen (*), etwa durch $\bar{b}b$. Wegen (**) gilt dann $\bar{b} \equiv \bar{a}$ ($\bar{a}$ ist das entsprechende Teiltupel von $(a_i)_{i<\alpha}$), also ist $\{\varphi(\bar{a}, x_\alpha) \mid \varphi(\bar{x}, x_\alpha) \in \Pi\}$ endlich erfüllt in $\mathcal{M}$. Folglich ist auch $\{\varphi((a_i)_{i<\alpha}, x_\alpha) \mid \varphi((x_i)_{i<\alpha}, x_\alpha) \in \Pi\}$ endlich erfüllt in $\mathcal{M}$ und wegen (*) gibt es eine Realisierung a_α, die tut's. □

Der Beweis zeigt, daß eine Struktur, in der jeder partielle Automorphismus elementar ist, schon dann ein κ-QF-Universalbereich ist, wenn (*) erfüllt ist.

2.17 **Korollar** Ein „universal domain" (bezüglich QF und $\kappa > |L|$) in Sinne von Hrushovski ist genau ein starker κ-QF-Universalbereich.[27]

Beweis

Wegen des Lemmas ist ein (κ-)„universal domain" ein κ-QF-Universalbereich und wegen (**) sogar ein stark κ-homogener. Umgekehrt erfüllen die starken κ-QF-Universalbereiche sicher (*) und (**). □

Außerdem läßt sich jeder QF-Universalbereich elementar zu einem (κ-)„universal domain" erweitern: wegen 2.15 können wir elementar zu starken κ-$\exists$-Universalbereichen erweitern, das sind dann starke κ-QF-Universalbereiche, also (κ-)„universal domains". Es sei $\mathcal{U}$ ein „universal domain" und T seine universelle Theorie, dann ist $\mathcal{U}$ ein „universal domain for T" [Hr1, Definition 2]. Wegen 2.3 ist das ein generisches Modell von T.

[27] Ein *starker κ-QF-Universalbereich* ist ein stark κ-homogener κ-QF-Universalbereich.

1.2.3 Weitere Eigenschaften von generischen Modellen

Es sei nun T eine universelle Theorie mit (JEP), $\mathcal{G}$ die Klasse der generischen Modelle von T und $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$. Alternativ könnten wir auch einen $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ fixieren und die Klasse der elementar äquivalenten Universalbereiche betrachten. Ich werde zuerst sagen, was „**invariante Mengen** in $\mathcal{G}$“ sind und einige Eigenschaften beweisen, die ich später für die lokale Stabilitätstheorie brauche. Danach zeige ich, wie man generischen Modellen **Imaginäre** hinzufügen kann. Ich zeige, daß die Konstruktion von $\mathcal{U}^{eq}$ für Δ_1-Universalbereiche die erwarteten Eigenschaften erfüllt. In einem Exkurs erkläre ich, was die **induzierte Struktur** auf einer durch einen partiellen $\exists$-Typ gegebenen Menge ist, auch hier verhalten sich die Dinge für Δ_1-Universalbereiche besser als allgemein für $\exists$-Universalbereiche. Abschließend schaue ich kurz auf **generische Expansionen** und auf eine weitere Art spezieller $\exists$-Universalbereiche. Solche „**ACL-Universalbereiche**” erscheinen mir interessant für Anwendungen. Insbesondere sind die generischen Automorphismen ein Beispiel von generischen Expansionen, die „ACL-Universalbereiche“ sind.

Ich arbeite meistens in $\mathcal{U}$, werde aber bei Bedarf in hinreichend stark homogene generische Erweiterungen übergehen (das geht wegen 2.15). Ich werde ständig verwenden, daß generische Modelle hinreichend $\exists$-saturiert sind und daß alle partiellen Automorphismen, welche die $\exists$-Formeln erhalten, elementar sind.

Invariante Mengen

Vorbemerkung: Es sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur, eine *invariante Menge in* $\mathcal{A}$ ist eine Menge $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}^k$, so daß für alle $a \equiv b$ in $\mathcal{A}$ gilt: $a \in \mathcal{D} \iff b \in \mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{D} = \bigcup\{tp(a)^{\mathcal{U}} \mid a \in \mathcal{D}\}$, also gegeben durch eine Menge X von vollständigen Typen (über $\emptyset$). Ist dann $\mathcal{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, so sei $\mathcal{D}^{\mathcal{B}} := \bigcup\{p^{\mathcal{B}} \mid p \in X\}$, das ist dann eine invariante Menge in $\mathcal{B}$. Invariante Mengen sind also Realisierungsmengen von Typenfamilien.

2.18 **Definition** Es sei $\mathcal{U}$ ein generisches Modell, φ eine Formel über $\mathcal{U}$ und $A \subset \mathcal{U}$. φ heißt *$\mathcal{G}$-A-invariant*, wenn es eine Menge $X \subset S(A)$ gibt, so daß φ und X in jeder generischen Erweiterung von $\mathcal{U}$ dieselbe Menge definieren.[28]

Ich diskutiere nun die folgenden Fragen:

(1) Wenn eine definierbare Menge invariant in einem generischen Modell ist, ist sie dann in jedem generischen Modell invariant?

(2) Wenn eine definierbare Menge invariant in jedem generischen Modell ist, ist sie dann äquivalent zu einer Formeln ohne Parameter?[29]

(3) Wenn eine Δ_1-Formel äquivalent zu einer Formel ohne Parameter ist, ist sie dann äquivalent zu einer $\Delta_1(\emptyset)$-Formel?

[28] Im elementaren Fall würde folgen, daß X die Menge der mit φ konsistenten Typen über A ist und φ äquivalent zu einer Formel über A.

[29] Die schärfere Frage, wann $X = [\varphi]$ gilt, stelle ich nicht: weil die generischen Modelle i.a. viele Typen auslassen, ist das nicht zu erwarten.

Ich arbeite in $\mathcal{U}$, $A \subset \mathcal{U}$ sei klein[30], $\mathcal{U}_A$ ist dann auch ein κ-$\exists$-Universalbereich. Eine A-invariante Menge in $\mathcal{U}$ ist eine invariante Menge in $\mathcal{U}_A$. Ist $\mathcal{U}$ ein starker $\exists$-Universalbereich, so sind die A-invarianten Mengen in $\mathcal{U}$ genau die $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{U})$-invarianten Mengen.

2.19 **Lemma** Es sei φ eine Formel über $\mathcal{U}$, die in $\mathcal{U}$ A-invariant ist. Dann ist φ $\mathcal{G}$-A-invariant.

Beweis
Es sei $X = \{tp(^a\!/_A) \mid a \in \varphi^{\mathcal{U}}\}$ und $\mathcal{V}$ eine generische Erweiterung von $\mathcal{U}$.

Behauptung: $\varphi^{\mathcal{V}} = \bigcup_{p\in X} p^{\mathcal{V}}$.

Beweis: Es sei etwa φ definiert über der kleinen Menge $B \supset A$ in $\mathcal{U}$. Es sei $c \in \varphi^{\mathcal{V}}$ und b eine Realisierung von $\exists$-$tp(^c\!/_B)$ in $\mathcal{U}$, dann gilt $b \equiv_B c$, also $b \in \varphi^{\mathcal{U}}$ und $tp(^c\!/_A) = tp(^b\!/_A) \in X$. Deshalb gilt $\subset$. Ist umgekehrt $c \in p^{\mathcal{V}}$ für ein $p \in X$ und wieder b eine Realisierung von $\exists$-$tp(^c\!/_B)$ in $\mathcal{U}$, dann ist wieder $b \equiv_B c$ und deshalb $tp(^b\!/_A) \in X$, also $b \in \varphi^{\mathcal{U}}$, und $c \in \varphi^{\mathcal{V}}$. □

2.20 **Lemma** Es sei φ eine $\mathcal{G}$-A-invariante Δ_1-Formel: φ ist äquivalent zu einer über A definierten Formel.

Beweis
Es sei $\varphi = \varphi(x, b)$ über der kleinen Menge $B \supset A$. Wenn $\varphi(x, b)$ nicht äquivalent ist zu einer Formel über A, so gibt es in einer elementaren Erweiterung (die nicht generisch sein muß) ein $c' \equiv_A b$, so daß $c' \models \exists x \neg(\varphi(x,b) \leftrightarrow \varphi(x,y))$. Weil φ Δ_1 ist, ist das eine existenzielle Eigenschaft von c' (über B). Es sei c eine Realisierung von $\exists$-$tp(^{c'}\!/_B)$ in $\mathcal{U}$, dann gilt $c \equiv_A b$ und $c \models \exists x \neg(\varphi(x,b) \leftrightarrow \varphi(x,y))$. Wir können wegen des vorigen Lemmas annehmen, daß $\mathcal{U}$ hinreichend stark homogen ist, dann ist $\mathcal{D}$ nicht $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{U})$-invariant, also nicht A-invariant in $\mathcal{U}$. □

Das folgende Lemma ist eine leichte Verschärfung der Trennungseigenschaft in 2.4 bzw. 2.12.

2.21 **Lemma** Es sei $\mathcal{D}$ eine A-invariante universell-definierbare Menge.

(1) $\mathcal{D}$ ist die Vereinigung von $\exists(A)$-Mengen.

(2) Ist $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich, so ist $\mathcal{D}$ die Vereinigung von $\Delta_1(A)$-Mengen.

(3) Ist $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich und $\mathcal{D}$ Δ_1-definierbar, so ist $\mathcal{D}$ äquivalent zu einer $\Delta_1(A)$-Menge.

Beweis
(1) Es sei wie immer Ω die Menge der $\forall(A)$-Formeln, die aus $\neg\mathcal{D}$ folgen, dann gilt $\Omega^{\mathcal{U}} = \neg\mathcal{D}^{\mathcal{U}}$: es sei $a \in \Omega^{\mathcal{U}}$, dann ist $\exists$-$tp(^a\!/_A)$ konsistent mit $\neg\mathcal{D}$ und realisiert durch b. Dann ist $b \equiv_A a$, also auch $a \models \neg\mathcal{D}$.

(2) Analog, Ω besteht aus Δ_1-Formeln und $\exists$-$tp(^a\!/_A)$ wird ersetzt durch Δ_1-$tp(^a\!/_A)$.

(3) Wendet man (2) auf $\mathcal{D}$ und $\neg\mathcal{D}$, so erhält man zwei miteinander inkonsistente Menge von $\Delta_1(A)$-Formeln. Wegen hinreichender $\exists$-Saturation ist dann schon ein endlicher Teil davon inkonsistent, damit folgt (3). □

[30] $\mathcal{U}$ ist ein κ-$\exists$-Universalbereich für ein $\kappa > |L|$, „klein“ bedeutet dann $< \kappa$.

Imaginäre

Es sei $\mathcal{U}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich. Ich behandele nun Problem (iv) aus [Pi3] und definiere $\mathcal{U}^{eq}$, indem ich die Konstruktion in [Hr1, Definition 4] verallgemeinere. Ich zeige dann, daß die resultierende Struktur ein $\exists$-Universalbereich ist, der „Imaginärenelimination" erlaubt. Leider liefert das i.a. keine kanonischen Parameter für Δ_1-Mengen.

2.22 **Definition** $\mathcal{U}$ erlaubt Δ_1-*Imaginärenelimination*, (Δ_1-IE), wenn es für jedes $k > 0$ und jede $\Delta_1(\emptyset)$-definierbare Äquivalenzrelation E auf U^k eine $\Delta_1(\emptyset)$-definierbare Funktion f gibt, so daß für alle $a, b \in U^k$ gilt: $Eab \leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Das ist dann eine Eigenschaft der Theorie von $\mathcal{U}$, gilt also auch in allen elementar äquivalenten $\exists$-Universalbereichen. In einem QF-Universalbereich mit Δ_1-Imaginärenelimination haben wir sogar *QF-Imaginärenelimination*: jede quantorenfrei definierbare Äquivalenzrelation ist die Faserung einer quantorenfrei definierbare Abbildung (denn jede $\Delta_1(\emptyset)$-Menge ist eine QF($\emptyset$)-Menge).

Es sei E eine $\Delta_1(\emptyset)$-definierbare Äquivalenzrelation auf U^k. $\mathcal{U}(E)$ sei die Struktur $(U \cup U^k/E, \mathcal{U}, pr_E, U^k/E)$. Wenn E quantorenfrei definiert ist sieht man leicht, daß die in $\mathcal{U}(E)$ (mit beliebigen Parametern) existenziell definierbaren Teilmengen von $\mathcal{U}$ existenziell definierbar sind in $\mathcal{U}$. Insbesondere verändert sich die Δ_1-Struktur in $\mathcal{U}$ nicht. Das gilt auch dann, wenn E Δ_1-definierbar ist (nimmt man E mit in die Sprache, so bleibt die Δ_1-Struktur in $\mathcal{U}$ dieselbe).

2.23 **Lemma** $\mathcal{U}(E)$ ist ein κ-$\exists$-Universalbereich.

Beweis

Es sei $\Pi(x, y)$ ein partieller existenzieller Typ über wenig Parametern, wobei $\Pi(x, y) \models x \in U^l \wedge y \in (U^k/E)^m$. Dann ist $\exists y \Pi(x, y)$ wegen der vorangegangenen Bemerkung äquivalent zu einem partiellen Typ in $\mathcal{U}$, und dieser ist realisiert in $\mathcal{U}$. Also ist $\exists y \Pi(x, y)$ realisiert in $\mathcal{U}(E)$ und dann auch Π (denn die y sind Bilder unter pr_E oder „dummy"). $\mathcal{U}(E)$ ist also κ-$\exists$-saturiert. Ich weise nun die Trennungseigenschaft (4) aus 2.4 nach, dann sind wir fertig. Es sei $\psi(x, y)$ eine existenzielle Formel in $\mathcal{U}(E)$ und (a, e) ein Tupel mit $\neg\psi(a, e)$ (es seien x und a aus der $\mathcal{U}$-Sorte, y und e aus der U^k/E-Sorte). Es sei etwa $e = pr_E(b)$, dann erfüllen (a, b) nicht die existenzielle Formel $\exists y(\psi(x, y) \wedge pr_E(x') = y)$. Weil $\mathcal{U}$ die gewünschte Trennungseigenschaft erfüllt, gibt in $\mathcal{U}$ eine mit $\exists y(\psi(x, y) \wedge pr_E(x') = y)$ inkonsistente existenzielle Formel $\chi(x, x')$, so daß $\chi(a, b)$. Dann ist $\exists x'(\chi(x, x') \wedge pr_E(x') = y)$ eine mit $\psi(x, y)$ inkonsistente existenzielle Formel, die von (a, e) realisiert wird. □

Man kann diese Konstruktion auch für mehrere Äquivalenzrelationen $E_1, ..., E_n$ durchführen und erhält die Struktur $\mathcal{U}(E_1, ..., E_n)$. Die selben Argumente zeigen, daß $\mathcal{U}(E_1, ..., E_n)$ ein κ-$\exists$-Universalbereich ist, der auf $\mathcal{U}$ keine neue existenzielle Struktur induziert. Ist $\mathcal{V}$ eine generische Erweiterung von $\mathcal{U}$, so gilt $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ und $\mathcal{U}(E_1, ..., E_n) \prec \mathcal{V}(E_1, ..., E_n)$[31]. Nun können wir die übliche (mehrsortige) Konstruktion machen und erhalten $\mathcal{U}^{eq}$ – wobei wir nur $\Delta_1(\emptyset)$-definierbare Äquivalenzrelationen berücksichtigen. Aus den bisherigen Überlegungen folgt:

[31] Die Theorie von $\mathcal{U}$ interpretiert die von $\mathcal{U}(E_1, ..., E_n)$.

2.24 **Satz** $\mathcal{U}^{eq}$ ist ein κ-$\exists$-Universalbereich, der keine neue existenzielle Struktur auf $\mathcal{U}$ induziert. Ist $\mathcal{V}$ eine generische Erweiterung von $\mathcal{U}$, so gilt $\mathcal{U}^{eq} \prec \mathcal{V}^{eq}$.

Ist also $\mathcal{G}$ die Klasse der zu $\mathcal{U}$ elementar äquivalenten $\exists$-Universalbereiche, so können wir auch von $\mathcal{G}^{eq}$ sprechen.

2.25 **Lemma** $\mathcal{U}^{eq}$ erlaubt Δ_1-Imaginärenelimination.

Beweis
Es sei $\tilde{F}$ eine Δ_1-Äquivalenzrelation in $\mathcal{U}^{eq}$, etwa auf $\prod_{i\leq n} U^{k_i}/E_i$, wobei jedes E_i eine $\Delta_1(\emptyset)$-Äquivalenzrelation in $\mathcal{U}$ auf U^{k_i} ist. Für $a_i, b_i \in U^{k_i}$ gelte
$F(a_0, ..., a_n)(b_0, ..., b_n) \iff \tilde{F}(pr_{E_0}(a_0), ..., pr_{E_n}(a_n))(pr_{E_0}(b_0), ..., pr_{E_n}(b_n))$. Dann ist F eine in $\mathcal{U}^{eq}$ $\Delta_1(\emptyset)$-definierbare Äquivalenzrelation auf $\prod_{i\leq n} U^{k_i}$, also $\Delta_1(\emptyset)$-definierbar in $\mathcal{U}$. Es sei $f : \prod_{i\leq n} U^{k_i}/E_i \to \prod_{i\leq n} U^{k_i}/F$ definiert durch $f(x_{E_0}, ..., x_{E_n}) = z_F \iff \exists x_0, ..., x_n \ (pr_F(x_0, ..., x_n) = z_F \wedge \bigwedge_i pr_{E_i}(x_i) = x_{E_i})$. Diese Funktion ist $\exists(\emptyset)$-definierbar, also $\Delta_1(\emptyset)$, ihre Faserung ist gerade $\tilde{F}$.[32] □

2.26 **Lemma** Es sei $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich mit (Δ_1-IE) und A eine kleine Parametermenge. Dann erlaubt auch $\mathcal{U}_A$ (Δ_1-IE).

Beweis
Es sei E eine $\Delta_1(A)$-Äquivalenzrelation, etwa definiert durch $\varphi(x, x', a)$. Der Typ von a (in der Variable y) impliziert dann, daß $\varphi(x, x', y)$ eine Äquivalenzrelation ist. Das ist eine universelle Eigenschaft, deshalb gibt es eine Δ_1-Formel $\chi(y) \in tp(a)$, so daß auch $\chi(y)$ das impliziert – denn $\mathcal{U}$ ist ein Δ_1-Universalbereich. Dann definiert $y = y' \wedge (\chi(y) \to \varphi(x, x', y))$ eine (globale) $\Delta_1(\emptyset)$-Äquivalenzrelation $xyFx'y'$, welche die Faserung einer $\Delta_1(\emptyset)$-Funktion $f(x, y)$ ist. Dann gilt für alle c, c': $f(c, a) = f(c', a) \leftrightarrow \varphi(c, c', a)$, $f(x, a)$ ist also die gesuchte Funktion. □

Die Tatsache, daß dieses Lemma für $\exists$-Universalbereiche nicht zu gelten scheint, legt nahe, daß der Begriff der (Δ_1-IE) eigentlich nur in Δ_1-Universalbereichen nützlich ist. Zumindest bräuchte ich (Δ_1-IE) über Parametern später in der lokalen Stabilitätstheorie, wenn ich starke Typen durch Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen ersetzen wollte, siehe Kapitel 2, 2.32. Ich sehe auch keinen anderen brauchbaren Ansatz für die Konstruktion von Imaginären.[33]

2.27 **Lemma** Es sei $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich. $\mathcal{U}^{eq}$ ist genau dann ein Δ_1-Universalbereich, wenn in $\mathcal{U}$ gilt:

(*) für alle $\Delta_1(\emptyset)$-Äquivalenzrelationen $E \subset U^k \times U^k$ lassen sich je zwei disjunkte E-saturierte existenziell definierbare Mengen in U^k durch eine E-saturierte $\Delta_1(\emptyset)$-Menge trennen.

[32] Das ist ein Grund, warum ich mich nicht auf QF-Imaginärenelimination beschränkt habe: diese Funktionen sind nun einmal Δ_1.

[33] Zwei Ansätze habe ich bedacht: (i) man erlaubt, daß $dom(E)$ existenziell definierbar ist und (ii) man fordert nur, daß jede E-Klasse Δ_1 ist.

Beweis
Es sind alle definierten Mengen über $\emptyset$. Es sei $\varphi(x_0, ..., x_n)$ eine existenziell definierbare Teilmenge in $\mathcal{U}^{eq}$ und $(a_0, ..., a_n) \models \neg\varphi$. Wegen 2.12 reicht es zu zeigen, daß es eine mit φ inkonsistente Δ_1-Formel ψ gibt, so daß $\psi(a_0, ..., a_n)$. Angenommen φ ist eine Teilmenge von $\prod_i U^{k_i}/E_i$, dann gibt es eine Δ_1-definierbare Bijektion $\prod_i U^{k_i}/E_i \sim \prod_i U^{k_i}/\prod_i E_i$ und weil solche Bijektionen $\exists$-Mengen auf $\exists$-Mengen abbilden (also auch Δ_1-Mengen auf Δ_1-Mengen) können wir annehmen, daß φ auf einer einigen Sorte U^k/E definiert ist. Es sei dann $\mathcal{D} = pr_E^{-1}(\varphi)$, das ist eine in $\mathcal{U}$ existenziell definierbare E-saturierte Menge und sei $\bar{a} \in pr_E^{-1}(a_0, ..., a_n)$, dann ist $\bar{a} \notin \mathcal{D}$. Da $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich ist, gibt es eine mit $\mathcal{D}$ inkonsistente $\exists$-Menge $\mathcal{E}$, die $\bar{a}$ enthält. Es sei $\mathcal{F}$ der E-saturierte Abschluß von $\mathcal{E}$ (also $\{\bar{b} \mid \exists \bar{c} \in \mathcal{E} : \bar{b}E\bar{c}\}$), dann auch $\mathcal{F}$ inkonsistent mit $\mathcal{D}$. Wegen (*) kann man die beiden Mengen nun durch eine E-saturierte Δ_1-Menge trennen, deren pr_E-Bild ist dann eine Δ_1-Menge, die $(a_0, ..., a_n)$ enthält und mit φ inkonsistent ist. Die Umkehrung geht analog. □

Ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich und (*) erfüllt, so ist $\mathcal{U}^{eq}$ ein Δ_1-Universalbereich, wobei die quantorenfreie Struktur auf $\mathcal{U}$ unverändert bleibt (weil sie mit der Δ_1-Struktur übereinstimmt). Will man $\mathcal{U}^{eq}$ zu einem QF-Universalbereich machen, so muß man neue Prädikate für die $\Delta_1(\emptyset)$-Mengen in den imaginären Sorten einführen - das sind, in der E-Sorte, genau die Faktoren von E-saturierten $\Delta_1(\emptyset)$-Mengen. Diesen Weg geht Hrushovski in [Hr1, Definition 4]. Dort findet man auch das folgende Kriterium, welches ich jedoch nicht weiter benötige:

2.28 **Lemma** Ist $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich in dem es keine dichten Ketten von Δ_1-Mengen gibt, so ist (*) erfüllt.

Beweis
Es sei $E \subset U^k \times U^k$ eine Δ_1-Äquivalenzrelation und $\mathcal{E}_0$ und $\mathcal{E}_1$ seien disjunkte E-saturierte $\exists$-Mengen in U^k. Es sei $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \supset \mathcal{E}_0$ eine trennende Δ_1-Menge (die gibt es, weil $\mathcal{U}$ ein Δ_1-Universalbereich ist), $\mathcal{D}^+_{\frac{1}{2}}$ sei der E-saturierte Abschluß von $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}}$ sei der E-saturierte Abschluß von $\neg\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$, das sind beides wieder $\exists$-Mengen. $\mathcal{E}_0$ und $\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}}$ sind wieder disjunkt und lassen sich durch eine Δ_1-Menge $\mathcal{D}_{\frac{1}{4}} \supset \mathcal{E}_0$ trennen, entsprechend entsteht $\mathcal{D}_{\frac{3}{4}}$ zwischen $\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{E}_1$. Auf diese Weise erhalten wir eine Kette $(\mathcal{D}_i)$ von Δ_1-Mengen, wobei i die dyadischen Zahlen im offenen Intervall $(0, 1)$ durchläuft, so daß $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}^+_i \subset \mathcal{D}^-_j \subset \mathcal{D}_j$ für $i < j$. Wegen der Voraussetzung gibt es dann $i < j$ mit $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_j$, die sind dann E-saturiert. □

Achtung, Imaginärenelimination liefert i.a. keine kanonischen Parameter! Leider gibt es selbst in QF-Universalbereichen mit QF-Imaginärenelimination i.a. nicht für jede QF-Menge einen kanonischen Parameter. Ist etwa $\mathcal{M}$ saturiert, stabil mit (QE) und (IE), Π ein partieller Typ über $\emptyset$ und $\mathcal{D}$ eine relativ definierbare Teilmenge von Π, so hat $\mathcal{D}$ i.a. keinen kanonischen Parameter in $\mathcal{M}$. Wir sehen aber gleich, daß Π mit der (vollen) induzierten Struktur wieder ein QF-Universalbereich mit (QF-IE) ist, ein kanonischer Parameter von $\mathcal{D}$ in Π wäre dann auch einer von $\mathcal{D}$ in $\mathcal{M}$ (weil sich jeder Automorphismus von Π nach $\mathcal{M}$ fortsetzen läßt).

Exkurs: Die induzierte Struktur

Es sei $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich und Π ein existenzieller partieller Typ über $\emptyset$. Für jede Δ_1-Formel $\varphi(x_1, ..., x_n)$ über $\emptyset$ sei R_φ ein neues n-stelliges Prädikat (für jedes $n > 0$), $\tilde{L}$ sei die Sprache aller dieser neuen Relationen. Die *induzierte Struktur* auf $X := \Pi^{\mathcal{U}}$ ist die $\tilde{L}$-Struktur auf X, für die jedes R_φ durch $\varphi^{\mathcal{U}} \cap X^n$ belegt wird. Ich bezeichne diese Struktur mit $\mathcal{U} \restriction \Pi$.

2.29 **Lemma** Ist $\mathcal{U}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich, so ist $\mathcal{U} \restriction \Pi$ κ-$\exists$-saturiert.

Beweis
Die existenziell definierbaren Mengen in $\mathcal{U} \restriction \Pi$ sind existenziell typdefinierbar in $\mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ κ-$\exists$-saturiert ist, ist $\mathcal{U} \restriction \Pi$ es deshalb auch. □

$\mathcal{U} \restriction \Pi$ ist i.a. kein $\exists$-Universalbereich mehr, auch dann nicht, wenn Π eine quantorenfreie Formel ist. Wir kennen die existenzielle Struktur von $\mathcal{U} \restriction \Pi$ nicht gut genug, sie ist i.a. nicht so fein, wie die von den in $\mathcal{U}$ existenziell definierbaren Mengen induzierte Struktur. Der folgende Satz ist [Hr1, Lemma 1.13]:

2.30 **Satz** Ist $\mathcal{U}$ ein κ-QF-Universalbereich, so ist $\mathcal{U} \restriction \Pi$ ein κ-QF-Universalbereich.

Beweis
Wegen des letzten Lemmas müssen wir uns nur um die QF-Homogenität kümmern: es seien $\bar{a}$ und $\bar{b}$ Tupel in $\mathcal{U} \restriction \Pi$ mit demselben QF-Typ und $a \in \mathcal{U} \restriction \Pi$: die beiden Tupel haben auch in $\mathcal{U}$ denselben QF-Typ, denn in $\mathcal{U}$ ist Π ein Schnitt von quantorenfrei definierbaren Mengen. Es gibt also ein b in $\mathcal{U}$, so daß auch $\bar{a}a$ und $\bar{b}b$ denselben QF-Typ in $\mathcal{U}$ haben. Dann haben sie denselben Typ in $\mathcal{U}$ und deshalb liegt auch b in Π und in $\mathcal{U} \restriction \Pi$ haben die beiden verlängerten Tupel denselben QF-Typ. □

Ist $\mathcal{U}$ ein starker QF-Universalbereich, so auch $\mathcal{U} \restriction \Pi$ (und der vorige Beweis wäre schneller gegangen). Ist $\mathcal{U}'$ ein weiterer QF-Universalbereich und $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ eine Einbettung, so induziert f eine Einbettung $f \restriction \Pi : \mathcal{U} \restriction \Pi \to \mathcal{U}' \restriction \Pi$. Wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ dieselbe universelle Theorie haben, dann ist f elementar und $\mathcal{U} \restriction \Pi$ und $\mathcal{U}' \restriction \Pi$ haben auch dieselbe universelle Theorie. Also ist auch $f \restriction \Pi$ elementar. Betrachtet man nicht die volle quantorenfrei induzierte Struktur auf Π, so folgt aus dem gerade Gesagten, daß trotzdem $f \restriction \Pi$ elementar ist. Ich nenne $\Pi(x)$ *abgeschlossen gegen QF-Funktionen*, wenn für jede QF($\emptyset$)-definierbare Funktion $f : U^k \to U$ gilt: $\Pi(\bar{x}) \models \exists y(\Pi(y) \wedge f(\bar{x}) = y))$.

2.31 **Lemma** Es sei Π abgeschlossenen gegen QF-Funktionen. Ist $\mathcal{U}$ ein QF-Universalbereich mit (QF-IE), so auch $\mathcal{U} \restriction \Pi$.

Beweis
Es sei E eine über $\emptyset$ quantorenfrei definierbare Äquivalenzrelation in $\mathcal{U} \restriction \Pi$. Weil Π in $\mathcal{U}$ der Schnitt von QF($\emptyset$)-Mengen ist, gibt es mit Kompaktheit schon eine QF($\emptyset$)-Obermenge von $\Pi^{\mathcal{U}}$, auf der E immer noch eine Äquivalenzrelation ist - man kann also E zu einer globalen QF($\emptyset$)-Äquivalenzrelation F in $\mathcal{U}$ fortsetzen. F ist dann die Faserung einer QF($\emptyset$)-Funktion f, weil Π abgeschlossen ist gegen QF-Funktionen, ist dann E die Faserung der entsprechenden Restriktion von F. □

Diese beiden Lemmas gelten natürlich auch entsprechend in Δ_1-Universalbereichen – leider nicht allgemein in $\exists$-Universalbereichen.

ACL-Universalbereiche

Viele interessante Beispiele von $\exists$-Universalbereichen haben die Eigenschaft, daß partielle Automorphismen schon dann elementar sind, wenn sie sich auf den algebraischen Abschluß des Definitionsbereichs fortsetzen lassen. Ich schaue mir diese Eigenschaft nun etwas genauer an. Unter der Annahme, daß der algebraische Abschluß durch quantorenfreie Formeln gegeben ist, beantworte ich die folgende Frage: wie sieht die „kleinste" Menge von Formeln aus, die erhalten werden muß, damit partielle Automorphismen zwischen solchen Universalbereichen elementar werden. Zuerst muß ich mir den algebraischen Abschluß in $\exists$-Universalbereichen genauer anschauen.

Es sei T eine vollständige Theorie, dann bedeute „$\varphi(x,y) \models y \in acl(x)$ (in T)", daß es ein $n < \omega$ gibt, so daß $T \models \forall x\, \exists^{<n} y\, \varphi(x,y)$ [34]. Es sei ACL $:= ACL_T$ die Familie aller solcher $\varphi(x;y)$. Ist $\Omega \subset L$, so ist *Ω-ACL* die Familie der $\varphi(x;y) \in$ ACL mit $\varphi(x,y) \in \Omega$. Für $A \subset \mathcal{M} \models T$ ist dann Ω-$acl(A)$ die Menge der $b \in \mathcal{M}$, so daß es eine Formel $\varphi(x;y) \in \Omega$-ACL gibt und ein $a \in A$, so daß $\mathcal{M} \models \varphi(a,b)$. Achtung, der Operator Ω-acl ist i.a. nicht idempotent und kann sich bei Parameterexpansionen verändern.[35]

2.32 **Lemma**

(1) In einem $\exists$-Universalbereich ist stets $acl = \exists$-acl.

(2) In einem QF-Universalbereich ist stets $acl =$ QF-acl.

Beweis
(1) Es sei $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich.

Behauptung: eine endliche A-invariante Menge ist eine $\exists(A)$-Menge.

Beweis: Es sei p ein algebraischer Typ über $A \subset \mathcal{U}$, so ist $p^{\mathcal{U}}$ QF-definierbar und A-invariant, also wegen 2.21 Vereinigung von $\exists(A)$-Mengen. Wegen Vollständigkeit ist $p^{\mathcal{U}}$ eine $\exists(A)$-Menge, das reicht.

Ist also $b \in acl(A)$, so gibt es eine algebraische $\exists(A)$-Formel $\varphi(a,y)$, so daß $b \models \varphi(a,y)$. Die Tatsache, daß $\varphi(a,y)$ algebraisch ist, ist eine universelle Eigenschaft von a, nämlich $\forall y_1, ..., y_n (\bigvee_i \neg\varphi(x,y_i) \vee \bigvee_{i \neq j} y_i = y_j)$ für ein $n < \omega$. Es gibt also wegen 2.21 eine $\exists(\emptyset)$-Formel $\psi(x)$, so daß $a \models \psi(x)$ und $\forall x\, (\psi(x) \to \exists^{<n} y\, \varphi(x,y))$. Dann ist $\varphi(x,y) \wedge \psi(x) \in \exists$-ACL und bezeugt, daß $b \in \exists$-$acl(A)$.

(2) Analog. □

2.33 **Definition**

(1) Ein *(κ-)$\exists$-ACL-Universalbereich* ist ein (κ-)$\exists$-Universalbereich, in dem jeder partielle Automorphismus, dessen Definitionsbereich algebraisch abgeschlossen ist, elementar ist.

(2) Ein *(κ-)ACL-Universalbereich* ist ein (κ-)$\exists$-ACL-Universalbereich, in dem gilt: $acl =$ QF-acl.

[34] y darf das leere Tupel sein, dann gilt „$\varphi(x,y) \models y \in acl(x)$ (in T)" trivialerweise.

[35] Gibt es $\varphi \in \Omega$ und $a \in A$, so daß $\varphi(a,y)$ algebraisch ist und $\varphi(a,b)$ gilt, so gilt nicht notwendig $b \in \Omega$-$acl(A)$.

2.34 **Lemma** Es sei $\mathcal{U}$ ein ∃-ACL-Universalbereich und T seine universelle Theorie.

(1) Jedes generische Modell von T ist ein ∃-ACL-Universalbereich.

(2) Jeder partielle Isomorphismus zwischen generischen Modellen von T, dessen Definitionsbereich algebraisch abgeschlossen ist, ist elementar.

Beweis
(1) Es sei $\mathcal{V}$ generisch und f ein partieller Automorphismus, dessen Definitionsbereich algebraisch abgeschlossen ist. Wir können annehmen, daß $dom(f)$ klein ist. Es gibt einen partiellen Isomorphismus h von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$, der die existenziellen Formeln erhält und dessen Definitionsbereich der Graph von f ist, denn $\mathcal{U}$ ist hinreichend ∃-saturiert. Das Bild von f ist dann ein partieller Isomorphismus g in $\mathcal{U}$, h ist nach Satz II elementar und der Definitionsbereich von g ist wieder algebraisch abgeschlossen. Nach Definition ist g elementar, also auch f.

(2) Es sei f ein solcher partieller Isomorphismus von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$ und h eine partielle elementare Abbildung von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$, diesesmal mit $dom(h) = dom(f)$. Dann ist $f \circ h^{-1} : im(h) \to im(f)$ ein partieller Automorphismus in $\mathcal{U}$ mit algebraisch abgeschlossenem Definitionsbereich. Deshalb ist $f \circ h^{-1}$ elementar, dann ist auch f elementar. □

QF-Universalbereiche sind sicher ∃-ACL-Universalbereiche und wegen des vorletzten Lemmas sind sie sogar ACL-Universalbereiche. Ich betrachte nun die zugehörige Familie von Formeln.

2.35 **Definition** Es sei T eine Theorie. Eine *T-semiquantorenfreie Formel* (*SQF-Formel*) ist eine Formel der Form $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, wobei $\varphi(x; y) \in$ QF-ACL.

Diese Eigenschaft hängt nur von $T_\forall$ ab und die Familie der T-semiquantorenfreien Formeln ist abgeschlossen unter positiven booleschen Kombinationen und enthält die quantorenfreien Formeln.

2.36 **Lemma** Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen mit derselben universellen Theorie, f ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und C der QF-algebraische Abschluß von $dom(f)$, dann sind äquivalent:

(1) f läßt sich fortsetzen zu einem partiellen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ auf C.

(2) f erhält die SQF-Formeln.

Beweis
(2) nach (1): Es sei a eine Aufzählung von $dom(f)$ und $\bar{a}$ eine Aufzählung von $C =$ QF-$acl(a)$. f erhält genau dann die SQF-Formeln, wenn $p(x) :=$ SQF-$tp(a) \subset tp^{\mathcal{B}}(f(a)) =: q(x)$. Es ist leicht zu sehen, daß $p(x)$ genau die Projektion von $p(x, \bar{y}) :=$ QF-$tp(a, \bar{a})$ auf die Variablen von a ist. f erhält also genau dann die SQF-Formeln, wenn $q(x) \cup p(x, \bar{y})$ konsistent ist. Dann gibt es $\bar{b}$ in einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{B}$, so daß dort $f(a), \bar{b} \models p(x, \bar{y})$. Aber $p(x, \bar{y})$ erzwingt, daß $\bar{b}$ schon in $\mathcal{B}$ ist und $a\bar{a} \mapsto f(a)\bar{b}$ ist ein partieller Isomorphismus.

(1) nach (2) ist klar. □

2.37 **Satz** Es sei $\mathcal{U}$ ein ACL-Universalbereich und T seine universelle Theorie.

(1) Jedes generische Modell von T ist ein ACL-Universalbereich.

(2) Jeder partielle Isomorphismus zwischen generischen Modellen von T, der die SQF-Formeln erhält, ist elementar.

Beweis
(1) Jedes generische Modell von T ist wegen 2.34 ein $\exists$-ACL-Universalbereich und „acl = QF-acl ist eine Eigenschaft der Theorie von $\mathcal{U}$. Weil alle generischen Modelle von T elementar äquivalent sind zu $\mathcal{U}$, sind wir fertig.

(2) Es sei f ein solcher partieller Isomorphismus von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{V}$. Wegen des vorigen Lemmas kann man annehmen, daß $dom(f)$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist f elementar wegen 2.34. □

Beispiel Es sei T eine vollständige Theorie mit (QF) und (PAPA), dann ist jeder generische Automorphismus von T ein ACL-Universalbereich (siehe 3.14).

Die generischen Automorphismen sind eine Variante des folgenden Themas:

Generische Expansionen

Es sei $L \subset L^*$, T eine induktive L-Theorie und T^* eine induktive L^*-Theorie mit $T^* \models T$.

2.38 **Lemma** Es gelte

(*) Für alle generischen Modelle $\mathcal{U}^*$ von T^* und alle $\mathcal{A} \models T$ mit $\mathcal{U}^* \restriction L \subset \mathcal{A}$ gibt es ein $\mathcal{B}^* \models T^*$, so daß $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^* \restriction L$ und $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{B}^*$.

Dann sind die L-Redukte der κ-generischen Modelle von T^* κ-generische Modelle von T und jedes generische Modell von T hat eine generische Erweiterung, welche sich zu einem generischen Modell von T^* expandieren läßt.

Beweis
Es sei $\mathcal{U}^*$ ein κ-generische Modell von T^* und $\mathcal{U}$ sei L-Redukt. Wegen (*) ist $\mathcal{U}$ existenziell abgeschlossen in T und mit $\mathcal{U}^*$ ist auch $\mathcal{U}$ κ-$\exists$-saturiert. Deshalb ist $\mathcal{U}$ ein κ-generisches Modell von T. Ist $\mathcal{V}$ ein generisches Modell von T, so hat $\mathcal{V}$ wegen (*) eine Erweiterung in T, die sich zu einem Modell $\mathcal{B}^*$ von T^* expandieren läßt. $\mathcal{B}^*$ aber hat eine generische Erweiterung in T^*. □

Beispiel: Es sei T eine induktive L-Theorie.

(1) Es sei T modellvollständig, $L^* = L \cup \{\alpha\}$, wobei α ein neues einstelliges Funktionssymbol ist, und $T^* = T \cup$ „α ist ein Automorphismus“. Natürlich sind die generischen Modelle von T^* genau die generischen Automorphismen von T. T^* ist eine induktive L^*-Theorie mit $T^* \models T$ und (*) ist erfüllt: wenn $(\mathcal{U}, \sigma)$ ein κ-generisches Modell von T^* ist und $\mathcal{U} \subset \mathcal{A} \models T$, so ist $\mathcal{U} \prec \mathcal{A}$ wegen Modellvollständigkeit und σ ein partieller elementarer Automorphismus in $\mathcal{A}$, der Rest ist klar.

(2) Es sei $L \cap L' = \emptyset$, T' eine induktive L'-Theorie, $L^* = L \cup L'$ und $T^* = T \cup T'$. T^* ist eine induktive L^*-Theorie mit $T^* \models T$ und es ist leicht zu sehen, daß (*) erfüllt

ist. Dasselbe gilt, wenn man die Rollen von T und T' vertauscht: $T^* \models T'$ und (*) ist auch für dieses Paar erfüllt. Ist also $\mathcal{U}^*$ ein κ-generisches Modell von T^*, so ist $\mathcal{U}^* \restriction L$ ein κ-generisches Modell von T und $\mathcal{U}^* \restriction L'$ ein κ-generisches Modell von T'.

(3) Ich betrachte den Spezialfall von (2), in dem R ein neues zweistelliges Prädikat ist, $L' = \{R\}$ und $T' =$ „R ist irreflexiv und symmetrisch". T' hat einen Modellbegleiter, nämlich die Theorie des Zufallsgraphen. Die generischen Modelle von T' sind also die $\aleph_1$-saturierten Zufallsgraphen und die generischen Modelle von T^* sind generische Modelle von T, auf denen noch ein Zufallsgraph lebt.

2.39 **Lemma** In Beispiel (3) gilt: Angenommen die generischen Modelle von T sind $\exists$-ACL-Universalbereiche, dann sind auch die generischen Modelle von T^* $\exists$-ACL-Universalbereiche und in ihnen ist der algebraische Abschluß genau der L-algebraische Abschluß.

Beweis
Es seien $\mathcal{U}_i^*$ $(i = 1, 2)$ generische Modelle von T^* und $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i^* \restriction L$. Es sei $\mathcal{A}^*$ eine gemeinsame Substruktur von den $\mathcal{U}_i^*$, so daß $\mathcal{A} := \mathcal{A}^* \restriction L$ algebraisch abgeschlossen ist in $\mathcal{U}_1$. Weil die $\mathcal{U}_i$ $\exists$-ACL-Universalbereiche sind und wegen 1.17 ist $\mathcal{A}$ eine starke Amalgamierungsbasis in $\mathcal{G}$. Deshalb gibt es ein T-generisches Modell $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}_1$ und eine elementare Einbettung von $\mathcal{U}_2$ nach $\mathcal{V}$ über A, so daß $\mathcal{A}$ der Schnitt von $\mathcal{U}_1$ mit dem Bild von $\mathcal{U}_2$ ist. Ich identifiziere $\mathcal{U}_2^*$ mit seinem Bild. Mann kann nun $\mathcal{V}$ zu einem Modell von T^* expandieren, welches die $\mathcal{U}_i^*$ erweitert. Daraus folgt, daß $\mathcal{A}^*$ eine starke Amalgamierungsbasis in $\mathcal{G}^*$ ist. Wegen 1.17 ist $\mathcal{A}^*$ algebraisch abgeschlossen in $\mathcal{G}^*$ und wegen Satz II sind partielle Isomorphismen zwischen generischen Modellen von T^* mit Definitionsbereich $\mathcal{A}^*$ elementar. □

Beispiel Baudisch konstruiert in [Ba] auf die oben beschriebene Weise Theorien als Modellbegleiter von T^* (für den Fall, daß T modellvollständig ist) und beweist in Theorem 3.3:

> Wenn die generischen Modelle von T $\exists$-ACL-Universalbereiche sind, so stimmt das auch für die generischen Modelle von T^*.

Baudisch setzt jedoch voraus, daß T den Quantor $\exists^\infty$ eliminiert, damit T^* einen Modellbegleiter hat, um also den elementaren Fall zu garantieren. Ich bin davon überzeugt, daß das Resultat auch ohne diese Voraussetzung gilt.

Die Konstruktion von generischen Expansionen ist ein bekanntes Thema. Meistens wird dabei vorausgesetzt, daß T modellvollständig ist und es wird nach Kriterien gesucht, wann T^* einen Modellbegleiter hat. Erst dann studiert man die generischen Modelle von T^* – also nur im elementaren Fall. Ich bin überzeugt, daß man in vielen Fällen die Frage nach der Existenz des Modellbegleiters vernachlässigen kann und die gewünschten Eigenschaften direkt für die generischen Modelle von T^* nachweisen kann. Für die generischen Automorphismen mache ich das nun.

1.3 Generische Automorphismen

Ich bespreche nun die Klasse der „**generischen Automorphismen**" ausführlich als Beispiel einer Klasse von generischen Modellen einer induktiven Theorie. Lascar hat die generischen Automorphismen einer vollständigen Theorie T mit (QE) in [La] eingeführt. Dort fordert er, daß die Klasse der „**lokalen Automorphismen**“ von T die „**Propriété d'Amalgamation Pour les Automorphisms**“, kurz (PAPA), hat. Ich verallgemeinere Lascars Definition, indem ich auf diese Eigenschaft verzichte. Erst im zweiten Teil führe ich lokale Automorphismen ein und zeige, daß die generischen Automorphismen ACF-Universalbereiche sind, falls (PAPA) erfüllt ist. Die bekannten Resultate wurden bisher nur für den elementaren Fall bewiesen (nämlich unter der Voraussetzung, daß die Theorie der generischen Automorphismen modellvollständig ist). Auf diese Voraussetzung verzichte ich natürlich.

1.3.1 Generische Automorphismen

Ich führe nun die Klasse der generischen Automorphismen einer modellvollständigen Theorie T ein und beschreibe kurz die existenziell abgeschlossenen Automorphismen. Danach erkläre ich den Zusammenhang zwischen Stationarität und Amalgamierung in einfachen Theorien und folgere, daß die Klasse der „T-Automorphismen“ in stabilen Theorien die (AP) hat.

Es sei T eine L-Theorie. Die *Kategorie der T-Automorphismen* hat als Objekte T-Automorphismen, das sind Paare $(\sigma, \mathcal{M})$, wobei $\mathcal{M}$ ein Modell von T ist und $\sigma \in Aut(\mathcal{M})$, und die folgenden Morphismen: sind $(\sigma, \mathcal{M})$ und $(\tau, \mathcal{N})$ T-Automorphismen, so ist $f : (\sigma, \mathcal{M}) \to (\tau, \mathcal{N})$ ein Morphismus von T-Automorphismen, wenn $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine elementare Abbildung ist und $f \circ \sigma = \tau \circ f$.

Ich möchte diese Kategorie als Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen in einer geeigneten Sprache auffassen. L_α entstehe aus L durch Hinzunahme zwei neuer Funktionssymbole α und α^{-1}. Den T-Automorphismus $(\sigma, \mathcal{M})$ identifiziert man mit der L_α-Struktur $(\mathcal{M}, \sigma, \sigma^{-1})$. $\mathcal{K}$ ist axiomatisiert durch die Theorie $T_\alpha :=$

$$T \cup \{\text{„}\alpha \text{ und } \alpha^{-1} \text{ sind } L\text{-Homomorphismen''}\} \cup \forall x\ \alpha(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(\alpha(x)) = x$$

Das Funktionszeichen für den inversen Automorphismus garantiert, daß σ auf Substrukturen surjektiv bleibt. Damit die Morphismen genau die L_α-Einbettungen sind, müssen wir voraussetzen, daß T modellvollständig ist. Dann ist T_α induktiv.

3.1 **Definition** Es sei T eine modellvollständige Theorie. Die *generischen Automorphismen von T* sind die generischen Modelle von T_α.

Es sei $\mathcal{G}$ die Klasse der generischen Automorphismen von T. Ist $(\sigma, \mathcal{M})$ ein κ-generischer T-Automorphismus, so ist auch $\mathcal{M}$ κ-$\exists$-saturiert. Da T modellvollständig ist, ist $\mathcal{M}$ dann sogar κ-saturiert. Ich identifiziere manchmal σ mit dem T-Automorphismus $(\sigma, \mathcal{M})$ bzw. mit der L_α-Struktur $(\mathcal{M}, \sigma, \sigma^{-1})$. $T_\sigma := \mathrm{Th}(\sigma)$ ist dann die Theorie von $\sigma = (\mathcal{M}, \sigma, \sigma^{-1})$ und $A \subset \sigma$ bedeutet natürlich $A \subset \mathcal{M}$ – das sollte keine Verwirrungen geben. Ich nenne σ generisch, wenn $\sigma \in \mathcal{G}$. T_{gen} sei die Theorie von $\mathcal{G}$, also $T_{\mathrm{gen}} = \bigcap\{T_\sigma \mid \sigma \text{ ist generisch}\}$.

Jeder T-Automorphismus der Größe $\leq \lambda = \lambda^{<\kappa}$ läßt sich zu einem κ-generischen T-Automorphismus der Größe $\leq \lambda$ erweitern (Satz I). Ich nehme an, daß es (große) Kardinalzahlen λ gibt mit $\lambda = \lambda^{<\lambda}$ (in (ZFC) + (GCH) gilt das für jedes reguläre λ, siehe etwa [Jech, Seite 49, Corollary 2]). Dann läßt sich jeder kleine T-Automorphismus zu einem λ-generischen T-Automorphismus der Größe λ erweitern, das zugrundeliegende T-Modell ist dann saturiert.

3.2 **Lemma** Es sei $\mathcal{M}$ ein saturiertes Modell von T der Größe $\lambda = \lambda^{<\lambda}$. Jeder kleine T-Automorphismus in $\mathcal{M}$ läßt sich zu einem generischen Automorphismus von $\mathcal{M}$ fortsetzen.

Beweis
Es sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ klein und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$. Dann läßt sich τ zu einem generischen Automorphismus $\sigma' \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}')$ erweitern, wobei $\mathcal{M}'$ die Größe λ hat. Dann ist auch $\mathcal{M}'$ saturiert und weil T modellvollständig ist, ist $\mathcal{M}' \equiv_N \mathcal{M}$. Es gibt also einen Isomorphismus $f : \mathcal{M}' \cong_{\mathcal{N}} \mathcal{M}$ und $f \circ \sigma' \circ f^{-1}$ ist die gesuchte Fortsetzung von τ nach $\mathcal{M}$. □

Ich arbeite nun in einem solchen großen saturierten Modell $\mathcal{C}$ von T, alle betrachteten Modelle von T seien elementare Substrukturen von $\mathcal{C}$. Die Automorphismen von $\mathcal{C}$ nenne ich *globale Automorphismen*. Wegen des Lemmas läßt sich jeder (kleine) Automorphismus zu einem globalen generischen Automorphismus fortsetzen.

Die Sprache von T_α

Notation: $x^{(k)} := \alpha^k(x)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\alpha^0(x) := x$. Ist $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ ein Multiindex und $\bar{x}$ das Variablentupel $x_1...x_n$, so sei $x_i^{(k)} := x_i^{(k_1)}, ..., x_i^{(k_n)}$, und $\bar{x}^{(k)} := x_1^{(k_1)}, ..., x_n^{(k_n)}$. $k \in \mathbb{Z}$ kann auch als Multiindex $(k, ..., k) \in \mathbb{Z}^n$ verwendet werden. Die α-Bahn eines Variablentupels $\bar{x}$ ist das (unendliche) Tupel (von L_α-Termen) $\bar{x}_\alpha := (\bar{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Es sei $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ eine quantorenfreie L_α-Formel. Da α mit den L-Symbolen kommutiert (in T_α), kann man α in jeder atomaren Formel unmittelbar vor die Variablen schreiben. Es gibt also zu $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ Multiindizes $k_1, ..., k_n$ und eine quantorenfreie L-Formel $\varphi^*(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m})$, so daß

$$T_\alpha \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^*(x_1^{(k_1)}, \ldots, x_m^{(k_m)})$$

Eine quantorenfreie L_α-Aussage über $\bar{x}$ ist also dasselbe, wie eine quantorenfreie L-Aussage über die α-Bahn von $\bar{x}$. Man kann außerdem annehmen, daß k_1 mit 0 beginnt, denn für jede L_α-Formel $\psi(x)$ gilt $T_\alpha \models \psi(x) \leftrightarrow \psi(\alpha(x))$. Man kann für höhere α-Potenzen auch neue Variable einführen und diese dann abquantifizieren (etwa $\psi(x, x^{(-2)}) \equiv \exists y_{-1}, y_{-2}(\psi(x, y_{-2}) \wedge y_{-1} = \alpha(y_{-2}) \wedge x = \alpha(y_{-1})))$, auf diese Weise findet man zu $\varphi(\bar{x})$ eine quantorenfreie L-Formel φ^{**}, so daß

$$T_\alpha \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists \bar{y}\, \varphi^{**}(\bar{x}, \bar{y}, \alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y}))$$

Es gilt $T_\alpha \models \varphi^{**}(\bar{x}, \bar{y}, \alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})) \rightarrow \bar{y} \in \bar{x}_\alpha$ (wobei $\bar{y} \in \bar{x}_\alpha$ die offensichtliche abzählbare Disjunktion ist).

Man muß bei modelltheoretischen Begriffen aufpassen, ob sie in T, in einer Theorie T_σ oder in einem generischen Modell σ gemeint sind. Die meisten Begriffe werden T oder generische Modelle σ betreffen, denn solange T_σ nicht modellvollständig ist, haben wir nicht genug Kontrolle über die gesamte Theorie von σ. Der Index $_\sigma$ wird dann kenntlich machen, daß man in dem Modell σ und nicht in T arbeitet. So ist etwa $acl_\sigma(A)$ der modelltheoretische algebraische Abschluß von A in der Struktur σ (der *σ-algebraische Abschluß von A*).

Existenziell abgeschlossene T-Automorphismen

Es seien $p(x)$ und $q(y)$ L-Typen über den T-Automorphismus $(\mathcal{M}, \sigma)$. p^σ ist dann wieder ein L-Typ über $\mathcal{M}$ und $p^\sigma = q$ soll heißen, daß beide Typen in jeder elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ dieselben Realisierungen haben. Für $a \models p$ gilt:

(*) $\sigma \cup \{(a, b)\}$ ist genau dann elementar, wenn $b \models p^\sigma$.

Ist r ein Typ in den Variablen x und y, so seien r_x und r_y die Projektionen von r auf die x-Variable bzw. auf die y-Variable. Ist $r(x, y)$ ein L-Typ über $\mathcal{M}$, so nenne ich r *σ-verträglich*, wenn $r_x^\sigma = r_y$. Aus (*) folgt dann

(**) $r(x, y)$ ist genau dann σ-verträglich, wenn $r(x, \alpha(x))$ in einer Erweiterung von σ erfüllt ist.

3.3 **Lemma** Für $\sigma \in Aut(\mathcal{M})$ sind äquivalent:

(1) σ ist T_α-existenziell abgeschlossen.

(2) Für alle σ-verträglichen $r(x, y) \in S(\mathcal{M})$ und alle $\varphi(x, y) \in r$ ist $\varphi(x, \alpha(x))$ in $(\mathcal{M}, \sigma)$ realisiert.

Beweis

(1) nach (2): es sei $r(x, y)$ σ-verträglich und $\varphi(x, y) \in r$. Wegen (**) ist $\varphi(x, \alpha(x))$ in einer Erweiterung von σ erfüllt, wegen (1) dann auch in σ.

(2) nach (1): es sei $\varphi(x)$ eine quantorenfreie L_α-Formel über $\mathcal{M}$, wir können annehmen, daß $\varphi = \exists y \varphi^{**}(x, y, \alpha(x), \alpha(y))$, wobei φ^{**} eine L-Formel über $\mathcal{M}$ ist. Falls $\varphi(x)$ eine Realisierung in $\tau \supset \sigma$ hat, so gibt es $aa', \tau(aa') \models \varphi^{**}$. Dann ist $r(xx', yy') := tp(aa', \tau(aa')/_{\mathcal{M}})$ σ-verträglich wegen (**). Wegen (2) ist dann $\varphi^{**}(xy, \alpha(xy))$ in $(\mathcal{M}, \sigma)$ realisiert, also auch $\varphi(x)$. □

T_{gen} ist genau dann modellvollständig, wenn T_α einen Modellbegleiter hat. Dann ist T_{gen} die Modellvervollständigung von T_α und die generischen T-Automorphismen sind genau die $|L|^+$-saturierten Modelle von T_{gen} (1.20). Das folgende Lemma gibt eine notwendige Bedingung an T, damit T_α einen Modellbegleiter hat. Das ist im wesentlichen [La, Exemple 1]:

3.4 **Lemma** Wenn T_{gen} modellvollständig ist, so eliminiert T den Quantor $\exists^\infty$.

Beweis

Angenommen T eliminiert den Quantor $\exists^\infty x \varphi(x, y)$ nicht, dann sei

$$\Pi_\varphi(y) := \alpha(y) = y \wedge \forall x(\varphi(x, y) \rightarrow \alpha(x) = x) \wedge \exists^\infty x \varphi(x, y)$$

Behauptung: $\Pi_\varphi(y)$ ist ein partieller Typ von T_{gen}.

Beweis: es gibt eine Folge $(b_i)_{i<\omega}$, so daß jedes $\varphi(x, b_i)$ zwar algebraisch ist, aber mindestens i-viele Realisierungen hat. Es sei $\mathcal{M}_0$ ein Modell, in dem alle b_i liegen. Wir können $(\mathcal{M}_0, id)$ dann zu einem generischen T-Automorphismus $(\mathcal{M}, \sigma)$ erweitern. Da alle $\varphi(x, b_i)$ algebraisch sind, liegen ihre Realisierungen alle in $\mathcal{M}_0$ und werden deshalb von σ fixiert. Deshalb ist Π in $(\mathcal{M}, \sigma)$ endlich erfüllt.

Behauptung: $\Pi_\varphi(y)$ wird in keinem generischen Modell realisiert.

Beweis: Es sei $(\mathcal{M}, \sigma)$ generisch und $b \in \mathcal{M}$, so daß $(\mathcal{M}, \sigma) \models \alpha(b) = b \wedge \exists^\infty x \varphi(x, b)$. Zu zeigen ist, daß $(\mathcal{M}, \sigma) \models \neg \forall x(\varphi(x, b) \to \alpha(x) = x)$. Es sei $a \models \varphi(x, b)$, wobei a aus einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ kommt, so daß $tp(a/\mathcal{M})$ nicht algebraisch ist. Es gibt dann $a' \models \sigma(tp(a/\mathcal{M}))$ mit $a \neq a'$, dann ist $\sigma \cup \{(a, a')\}$ elementar. Deshalb bezeugt a, daß $\varphi(x, b) \wedge x \neq \alpha(x)$ in einer Erweiterung von σ erfüllt wird. Da σ existenziell abgeschlossen ist, wird diese Formel auch in $(\mathcal{M}, \sigma)$ erfüllt.

Aus den beiden Behauptungen folgt, daß nicht alle generischen T-Automorphismen ω-saturiert sind. Deshalb ist T_{gen} nicht modellvollständig. □

Stationäre Amalgamierung

Bisher habe ich keine Amalgamierungsannahmen gehabt. Ich werde nun etwas genauer schauen, wann (AP) erfüllt ist.

In einer einfachen Theorie ist für zwei Typen $p(x)$ und $q(y)$ über der Parametermenge A ist die A-invariante Klasse $p \otimes q$ definiert als $p(x) \cup q(y) \cup$ „$x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A y$". $p \otimes q$ ist dann typdefinierbar (also A-typdefinierbar), aber i.a. kein vollständiger Typ. Es ist aber leicht zu sehen:

p ist genau dann stationär, wenn $p \otimes q$ vollständig ist für alle $q \in S(A)$.

Das Folgende ist im wesentlichen eine Umformulierung dieser Tatsache. Es sei Σ eine vollständige einfache Theorie, f, g und h seien partielle elementare Abbildungen in Σ (d.h. in einem großen hinreichend saturierten Modell) mit $h \subset f$ und $h \subset g$. Ich nenne f und g unabhängig über h, wenn $dom(f) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{dom(h)} dom(g)$ und $im(f) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{im(h)} im(g)$.

3.5 **Stationäre Amalgamierung** Es sei Σ vollständig und einfach, $h \subset f$ seien partielle elementare Abbildungen, dann sind äquivalent:

(1) $tp(dom(f)/dom(h))$ ist stationär.

(2) Für alle partiellen elementaren Abbildungen $g \supset h$, so daß f und g unabhängig über h ist, ist $f \cup g$ eine elementare Abbildung.

Beweis

Wir können annehmen, daß $h = id_A$, denn sonst wählt man einen globalen Automorphismus σ, so daß $\sigma \circ h = id_A$ und ersetzt f durch $\sigma \circ f$ und g durch $\sigma \circ g$.

(1) nach (2): Wenn $tp(dom(f)/A)$ stationär ist und $dom(f) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A dom(g)$, dann ist $tp(dom(f)dom(g)/A) = tp(dom(f)/A) \otimes tp(dom(g)/A)$. Ist auch $im(f) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A im(g)$, so ist $tp(dom(f)/A) \otimes tp(dom(g)/A) = tp(im(f)/A) \otimes tp(im(g)/A)$, denn f und g sind A-elementar, also $dom(f)dom(g) \equiv_A im(f)im(g)$. Das bedeutet, daß $f \cup g$ A-elementar ist.

(2) nach (1): Es sei $B \equiv_A dom(f)$, $dom(f) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ und $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$. Zu zeigen ist $dom(f) \equiv_C B$. Es ist auch $B \equiv_A im(f)$, also gibt es einen globalen Automorphismus σ über A, so daß $\sigma(B) = im(f)$. Dann ist f unabhängig von $g := \sigma \upharpoonright C$ über id_A und deshalb ist wegen (2) $dom(f)C \equiv_A im(f)\sigma(C)$. Aber $im(f)\sigma(C) \equiv_A BC$, also $dom(f)C \equiv_A BC$ und $dom(f) \equiv_C B$. □

3.6 **Korollar** Ist T stabil, so hat T_α die (AP).

1.3.2 Lokale Automorphismen

Ich werde nun die Klasse der T-Automorphismen erweitern, dazu nehme ich an, daß T Quantorenelimination hat. Ein *lokaler T-Automorphismus* ist ein Paar (σ, A), wobei es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ gibt mit $A = acl^{\mathcal{M}}(A) \subset \mathcal{M}$ und $\sigma \in Aut^{\mathcal{M}}(A)$.[36] Weil T (QE) hat, ist diese Definition unabhängig von der Wahl des umgebenden Modells. Außerdem ist A auf eindeutige Weise eine L-Struktur $\mathcal{A}$. Wenn $acl(\emptyset) = \emptyset$, so ist auch der leere lokale T-Automorphismus zugelassen.

Es seien (σ, A) und (τ, B) lokale T-Automorphismen mit zugehörigen umgebenden Modellen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Ein Morphismus $f : (\sigma, A) \to (\tau, B)$ ist eine Permutation $f : A \sim B$, die elementar ist bezüglich der umgebenden Modelle, so daß $f \circ \sigma = \tau \circ f$. Wegen (QE) ist auch diese Definition unabhängig von der Wahl der umgebenden Modelle. Man identifiziert wieder den lokalen Automorphismus (σ, A) mit der L_α-Struktur $\sigma = (\mathcal{A}, \sigma, \sigma^{-1})$. Die Morphismen sind dann wieder genau die L_α-Einbettungen.

Es sei $\mathcal{K}$ die Klasse der lokalen T-Automorphismen. $\mathcal{K}$ ist induktiv und erfüllt (LS), und weil sich jede elementare Erweiterung eines lokalen T-Automorphismus zu einem T-Automorphismus erweitern läßt, ist $\mathcal{K}$ genau dann gut, wenn $\mathcal{K}$ die (AP) hat.[37]

Es sei σ ein T-Automorphismus und A eine Parametermenge in σ.

Notation: $A_\sigma := \{\sigma^k(a) \mid a \in A, k \in \mathbb{Z}\}$ ist der *σ-Abschluß* von A, $\sigma_A := \sigma \upharpoonright acl(A_\sigma)$.

σ_A ist der von A erzeugte lokale Automorphismus $\sigma \upharpoonright acl(A_\sigma)$. Ist f ein globaler T-Automorphismus, so ist ${}^f\sigma := f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Dann gilt ${}^f(\sigma_A) = ({}^f\sigma)_{f(A)}$. Falls $A = A_\sigma$, so legt A eine eindeutige L_α-Struktur fest, unabhängig vom umgebenden Modell: A legt wegen (QE) eine eindeutige L-Struktur fest, auf die σ eindeutig fortgesetzt wird. Ich sage das, weil deshalb der Begriff der L_α-Einbettung von A sinnvoll ist, ohne auf das umgebende L_α-Modell zu achten. Insbesondere macht es Sinn zu fragen, ob A eine Amalgamierungsbasis in T_{gen} ist.

PAPA

T sei von nun an vollständig und habe Quantorenelimination, $\mathcal{K}$ sei die Klasse der lokalen T-Automorphismen.

3.7 **Definition** T hat *(PAPA)*, wenn $\mathcal{K}$ die (AP) und hat. T hat starke (PAPA), wenn $\mathcal{K}$ die starke (AP)[38] hat.

Wenn $\mathcal{K}$ die leere Struktur enthält, dann folgt aus der Definition von (PAPA), daß $\mathcal{K}$ (JEP) hat.

3.8 **Satz** Es sind äquivalent:

(1) T hat (PAPA).

[36] $Aut^{\mathcal{M}}(A)$ ist die Menge der in $\mathcal{M}$ elementaren Permutationen von A.

[37] $\mathcal{K}$ ist aber i.a. nicht abgeschlossen gegen elementare Äquivalenz, denn die Eigenschaft, eine algebraisch abgeschlossenen Substruktur von T zu sein ist i.a. nicht abgeschlossen gegen elementare Äquivalenz.

[38] Das bedeutet, daß jede $\mathcal{K}$-Struktur eine starke Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$ ist.

(2) Die κ-$\mathcal{K}$-generischen T-Automorphismen genau die κ-generischen T-Automorphismen.

(3) Für alle generischen T-Automorphismen σ und τ und alle partiellen (L_α-)Isomorphismen f von σ nach τ gilt: falls $dom(f)$ σ-invariant ist und algebraisch abgeschlossen (in T), so ist f L_α-elementar.

Beweis
Der Satz wäre genau Satz III, wenn statt (2) die folgende schwächere Aussage dort stehen würde: die κ-generischen T-Automorphismen sind genau die T-Automorphismen, die κ-$\mathcal{K}$-generisch sind. Es ist also nur noch folgendes zu zeigen:

Behauptung:
Falls T (PAPA) hat, so ist jede $\mathcal{K}$-generische Struktur ein T-Automorphismus.

Beweis: Es sei $(\sigma, \mathcal{A})$ $\mathcal{K}$-generisch, wir müssen $\mathcal{A} \models T$ zeigen. Weil T modellvollständig ist reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ T-existenziell abgeschlossen ist. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \models T$. Weil σ ist T-elementar ist können wir $\mathcal{B}$ zu einem Modell $\mathcal{M} \models T$ erweitern, so daß man σ zu einem $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ fortsetzen kann. Da T (PAPA) hat, ist $\mathcal{K}$ gut, und weil $(\sigma, \mathcal{A})$ $\mathcal{K}$-generisch ist, ist $(\sigma, \mathcal{A})$ existenziell abgeschlossen in $(\tau, \mathcal{M})$ (1.13). Dann ist auch $\mathcal{A}$ existenziell abgeschlossen in $\mathcal{M}$, also auch in $\mathcal{B}$. $\square$

Da Automorphismen auf eindeutige Weise auch auf den Imaginären operieren, impliziert (PAPA) eine Bedingung an algebraische Imaginäre[39]:

3.9 **Lemma** Falls T die (PAPA) hat, so gilt $acl^{eq} = dcl^{eq} \circ acl$.

Beweis
Es sei $A = acl(A) \subset \mathcal{M}$ und σ ein Automorphismus von $\mathcal{M}$, der A fixiert. Zu zeigen ist, daß σ auch $acl^{eq}(A)$ fixiert. Aus (PAPA) folgt, daß man ein Konjugat (über A) von σ mit $id_{\mathcal{M}}$ zu einem globalen Automorphismus fortsetzen kann (falls $A = \emptyset$, so gilt das wegen (JEP)). Nun gilt aber für jede globale Fortsetzung von $id_{\mathcal{M}}$, daß sie $acl^{eq}(A)$ fixiert, das gilt dann auch für das Konjugat von σ, also auch für σ. $\square$

Beispiele:

(1) Es sei T die Theorie der Äquivalenzrelation mit zwei unendlichen Klassen. Dann enthält $acl^{eq}(\emptyset)$ Imaginäre für die beiden Klassen, aber $dcl^{eq}(acl(\emptyset)) = \emptyset$. Ein Automorphismus, der die Klassen vertauscht, ist nicht amalgamierbar mit einem Automorphismus, der die Klassen festhält.

(2) Hier kommt eine total kategorische, triviale streng minimale Menge ohne (PAPA) (das Beispiel ist von Martin Ziegler): es sei $M = \mathbb{Z}^2$ und $E \subset M^2 \times M^2$ die Äquivalenzrelation $(k,l)(k',l')E(m,n)(m',n') \iff (k' = k \wedge l' = l+1 \wedge m' = m \wedge n' = n+1) \vee (k' = k+1 \wedge l' = l \wedge m' = m+1 \wedge n' = n)$, T sei die Theorie von $\mathcal{M}$. Die beiden Klassen von E repräsentieren die beiden Richtungen „einen aufwärts“ und „einen nach rechts“. Es ist $acl(\emptyset) = \emptyset$ aber die T-Automorphismen haben nicht (JEP): man betrachte die Identität und einen Automorphismus, der die E-Klassen vertauscht. Ebenso sieht man, daß $acl^{eq}(\emptyset) \neq dcl^{eq}(acl(\emptyset))$. T hat nicht die (PAPA).

(3) Der Random Graph ist einfach und instabil, es ist stets $acl(A) = A$ und es gilt genau dann $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C$, wenn $A \cap C \subset B$. Falls es Kanten zwischen A und C gibt

[39] Ich setze keine Imaginärenelimination in T voraus.

(außerhalb von B), so kann man elementare Permutationen von A i.a. nicht beliebig mit elementaren Permutationen von C vereinigen. Konjugiert man C jedoch über B so, daß es keine Kanten mehr zwischen A und C gibt (außerhalb von B), so kann man elementare Permutationen vereinigen – deshalb gilt (PAPA), sogar in der starken Form. Im Gegensatz dazu kann man in stabilen Theorien mit (PAPA) zwei lokale Automorphismen schon dann zu einer elementaren Abbildung vereinigen, wenn sie auf ihrem Schnitt übereinstimmen und über ihm unabhängig sind, das zeigt der Beweis des folgenden Lemmas.

3.10 **Lemma** Ist T stabil, so sind sind äquivalent:

(1) T hat (PAPA).

(2) $acl^{eq} = dcl^{eq} \circ acl$.

(3) Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen sind stationär.

(4) T hat starke (PAPA).

Beweis
(1) nach (2) gilt stets wegen des vorigen Lemmas und (4) nach (1) ist klar.

(2) nach (3): Typen über acl^{eq}-abgeschlossenen Mengen sind in stabilen Theorien stationär. Wegen (2) axiomatisiert jeder Typ über acl-abgeschlossenen Mengen also einen stationären Typ und ist damit selber stationär.

(3) nach (4): Es seien $\sigma \subset \tau_i$ lokale Automorphismen, dann kann man τ_2 so über $dom(\sigma)$ konjugieren, daß τ_1 und τ_2 unabhängig über σ sind. $\tau_1 \cup \tau_2$ ist dann elementar, denn wegen (3) ist die Stationaritätsvoraussetzung für die stationäre Amalgamierung (3.5) erfüllt. Jeder lokale Automorphismus, der $\tau_1 \cup \tau_2$ fortsetzt, ist dann ein starkes Amalgam. □

Dieses Lemma werde ich im Folgenden stillschweigend verwenden.

3.11 **Korollar** Jede stabile Theorie mit schwacher Imaginärenelimination hat starke (PAPA).

Beweis
Schwache (IE) ist äquivalent dazu, daß es zu jedem Imaginären Element e ein nichtimaginäres Tupel a gibt, so daß $e \in dcl^{eq}(a)$ und $a \in acl^{eq}(e)$. Daraus folgt $acl^{eq} = dcl^{eq} \circ acl$. □

Für den Rest des Kapitels sei T eine vollständige Theorie
mit (QE) und (PAPA).

α-elementare Abbildungen

Ist τ ein lokaler Automorphismus und $A \subset \tau$, so sei (bei einer gegebenen Aufzählung von A) $tp_\tau(A) := tp_{\tilde{\tau}}(A)$, wobei $\tilde{\tau}$ eine globale generische Fortsetzung von τ ist. Wegen 3.8 ist das unabhängig von der Wahl der generischen Fortsetzung.[40] Ebenso

[40] Mit $tp_\tau(A)$ ist also nicht der Typ von A in der L_α-Struktur τ gemeint.

nenne ich einen partiellen Isomorphismus f zwischen lokalen Automorphismen α-elementar, wenn es generische Fortsetzungen der lokalen Automorphismen gibt, so daß f als partieller Isomorphismus f zwischen den generischen Automorphismen L_α-elementar ist.

3.12 **Lemma** Es seien σ und τ lokale Automorphismen und $(f : A \sim B)$ ein partieller Isomorphismus von σ nach τ, dann sind äquivalent:

(1) f ist α-elementar.

(2) f läßt sich auf fortsetzen zu einer T-elementaren Abbildung $\tilde{f}$ auf $acl(A) \subset \sigma$, so daß auf $acl(A)$ gilt: $\tilde{f} \circ \sigma = \tau \circ \tilde{f}$.

(3) f läßt sich auf fortsetzen zu einem Isomorphismus $\tilde{f} : \sigma_A \cong \tau_B$.[41]

Beweis

(1) nach (2): wenn f α-elementar ist, so kann man f fortsetzen zu einer α-elementaren Abbildung $\tilde{f} : acl_\sigma(A) \sim acl_\tau(B)$. Die Restriktion von $\tilde{f}$ auf $acl(A)$ erfüllt dann (2).

(2) nach (3): Für ein solches $\tilde{f}$ ist dann $im(\tilde{f}) = acl(B)$, deshalb ist $\tilde{f}$ schon der Isomorphismus in (3).

(3) nach (1): wegen 3.8 ist $\tilde{f}$ α-elementar, also auch f. □

Es seien σ und τ generische Automorphismen, die A enthalten, aus dem Lemma folgt

$$\sigma \equiv_A \tau \iff \sigma_A \cong_A \tau_A$$

3.13 **Korollar**

(1) Die Vervollständigungen von T_{gen} entsprechen den Isomorphieklassen von lokalen Automorphismen auf $acl(\emptyset)$.

(2) T_{gen} ist genau dann vollständig, wenn $acl(\emptyset) = dcl(\emptyset)$ in T gilt.

Ein *starker T-Automorphismus* ist ein T-Automorphismus, der $acl^{eq}(\emptyset)$ fixiert.[42] Wegen $acl^{eq} = dcl^{eq} \circ acl$ sind das hier genau die Automorphismen, die $acl(\emptyset)$ fixieren. Die generischen starken Automorphismen bilden also gerade die Vervollständigung von T_{gen}, die zu $id_{acl(\emptyset)}$ gehört (ein generischer Automorphismus, der elementar äquivalent zu einem starken generischen Automorphismus ist, ist auch stark, denn $id_{acl(\emptyset)}$ hat keine echten Konjugate). Diese Vervollständigung spielt eine besondere Rolle, etwa zeigt der Beweis von 3.4, daß T schon dann den Quantor $\exists^\infty$ eliminiert, wenn die Theorie der starken generischen Automorphismen modellvollständig ist.

[41] Falls $acl(\emptyset) = \emptyset$, so ist diese Aussage trivialerweise wahr, aber dann haben wir (JEP) und der leere partielle Isomorphismus ist elementar.

[42] Das ist nicht ganz die richtige Definition. Die in [La] definierten starken Automorphismen sind in stabilen Theorien genau die, die $acl^{eq}(\emptyset)$ fixieren. Ich benutze den Begriff jedoch wie oben definiert.

ACL-Universalbereiche

Ich erinnere an $dom(\sigma_A) = acl(A_\sigma)$, das ist der T-algebraische Abschluß des σ-Abschlusses von A. Andererseits ist $acl_\sigma(A)$ der algebraische Abschluß von A in der L_α-Struktur σ.

3.14 **Satz** T hat genau dann die starke (PAPA), wenn für alle generischen Automorphismen σ und für alle $A \subset \sigma$ gilt:

$$acl(A_\sigma) = acl_\sigma(A)$$

Dann sind die generischen Automorphismen von T ACL-Universalbereiche.

Beweis
Es sei σ generisch und $A \subset \sigma$.

T habe die starke (PAPA), dann ist σ_A eine starke Amalgamierungsbasis für $\mathcal{K}$ und wegen 1.17 ist σ_A algebraisch abgeschlossen in $\mathcal{G}$. Das bedeutet, daß σ_A algebraisch abgeschlossen ist in jeder generischen Erweiterung, also auch in σ. Daraus folgt $acl(A_\sigma) = acl_\sigma(A)$. Ist umgekehrt σ_A L_α-algebraisch abgeschlossen in σ, so auch in jeder generischen Erweiterung von σ_A, denn sie sind alle elementar äquivalent über $acl(A_\sigma)$. σ_A ist also algebraisch abgeschlossen in $\mathcal{G}$ und wegen 1.17 eine starke Amalgamierungsbasis.

Wegen $acl(A_\sigma) \subset$ QF-$acl_\sigma(A) \subset acl_\sigma(A) = acl(A_\sigma)$ gilt $acl_\sigma =$ QF-acl_σ, das ist Bedingung (i) für ACL-Universalbereiche. Bedingung (ii) ist: ein partieller L_α-Automorphismus in σ, dessen Definitionsbereich algebraisch abgeschlossen ist in σ, ist α-elementar. Das gilt nach 3.8. □

3.15 **Korollar** Ist T stabil mit (PAPA), so sind alle generischen Automorphismen von T ACL-Universalbereiche und es gilt stets $acl(A_\sigma) = acl_\sigma(A)$.

Beispiel:
Alle generischen Automorphismen des Random Graphs sind ACL-Universalbereiche und es gilt stets $acl(A_\sigma) = acl_\sigma(A)$, denn der Random Graph hat die starke (PAPA).

Ich habe in 2.35 die Formeln eingeführt, welche in ACL-Universalbereichen erhalten bleiben müssen, damit ein partieller Automorphismus elementar wird. Da wir hier den algebraischen Abschluß noch genauer kennen, können wir noch etwas speziellere Formeln einführen, nämlich die, die zum T-algebraischen Abschluß der σ-Bahn gehören: eine *SSQF-Formel* (*spezielle semiquantorenfreie Formel*) ist eine L_α Formel $\exists y \varphi(x^{(0,\ldots,k)}, y^{(l_1,\ldots,l_2)})$, wobei $\varphi(x_0, \ldots, x_k; y_{l_1}, \ldots, y_{l_2})$ eine quantorenfreie ACL_T-Formel ist mit $0 \leq l_1 \leq l_2$.

3.16 **Lemma** SSQF-$tp_\sigma(a)$ ist äquivalent zur Projektion von QF-$tp_\sigma(a, acl(a_\sigma))$ auf die Variable von a.

Beweis
SSQF-$tp_\sigma(a)$ ist sicher in dieser Projektion enthalten. Es sei umgekehrt $b \in acl(a_\sigma)$ und $\psi(x,y) \in$ QF-$tp_\sigma(a,b)$, es reicht zu zeigen:

Behauptung: Es gibt eine ACL$_T$-Formel $\varphi^*(x_0,...,x_k;y_{l_1},...,y_{l_2})$, so daß für $\varphi(x,y) := \varphi^*(x^{(0,...,k)}, y^{(l_1,...,l_2)})$ gilt: $\sigma \models \varphi(a,b)$ und $\sigma \models \varphi \to \psi$.

Beweis: es gibt eine L-Formel $\psi^*(x_0,...,x_m;y_0,...,y_n)$ und ein $i \geq m$, so daß $T_\alpha \models \psi(x,y) \leftrightarrow \psi^*(x^{(0,..,m)}, y^{(0,..,n)})$ und $b \in acl(a^{(-i,...,i)})$. Es sei etwa $\chi(x_{-i},...,x_i;y)$ eine ACL$_T$-Formel mit $\chi(a^{(-i,...,i)},b)$. Für $\varphi^*(x_{-i},...,x_{i+n},y_0,...,y_n) :=$
$\psi^*(x_0,...,x_m;y_0,...,y_n) \wedge \bigwedge_{j\leq n} \chi(x_{-i+j},...,x_{i+j};y_j)$ ist dann φ^* eine ACL$_T$-Formel und für $\varphi(x,y) := \varphi^*(x^{(-i,...,i+n)}, y^{(0,...,n)})$ gilt: $\sigma \models \varphi(a,b)$ und $\sigma \models \varphi \to \psi$. Das gilt dann auch für $\varphi(x^{(i)}, y^{(i)})$, damit folgt die Behauptung. □

Wie in 2.36 folgt dann: ein partieller L_α-Isomorphismus $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ zwischen elementar äquivalenten generischen Automorphismen läßt sich genau dann zu einem partiellen Isomorphismus auf $acl(\bar{a}_\alpha)$ fortsetzen, wenn er die SSQF-Formeln erhält. Mit 3.12 erhalten wir die syntaktische Beschreibung der α-elementaren Abbildungen:

3.17 **Lemma** T habe die starke (PAPA). Es seien σ und τ elementar äquivalente generische Automorphismen und f ein partieller L_α-Isomorphismus von σ nach τ, dann sind äquivalent:

(1) f ist α-elementar.

(2) f erhält die SSQF-Formeln.

Beweis
Klar. □

Exkurs: QF-Universalbereiche

3.18 **Lemma** Die starken generischen Automorphismen sind genau dann QF-Universalbereiche, wenn in T für alle $A \supset acl(\emptyset)$ gilt: $acl(A) = dcl(A)$.

Beweis
Es sei $A \supset acl(\emptyset)$ und f sei ein lokaler Automorphismus auf $acl(A)$, der A fixiert. f hat eine generische Erweiterungen σ, σ ist dann stark, denn $acl(\emptyset)$ bleibt fixiert. Es sei nun τ eine (starke) generische Erweiterung von $id_{acl(A)}$. Falls nun beides QF-Universalbereiche sind, so $\sigma \equiv_A \tau$ (denn A ist eine gemeinsame L_α-Substruktur), dann wird $acl(A)$ auch von τ fixiert. Daraus folgt $acl(A) = dcl(A)$.

Es sei umgekehrt σ stark generisch und f ein partieller L_α-Automorphismus (in σ). Da f T-elementar ist, kann man f T-elementar fortsetzen auf $acl(\emptyset)$. Weil σ stark ist, bleibt f dann ein partieller L_α-Automorphismus. Wir können also annehmen, daß $A = dom(f) \supset acl(\emptyset)$. Nun läßt sich f sicher fortsetzen nach $dcl(A_\sigma) = acl(A_\sigma)$, also ist f α-elementar. □

3.19 **Korollar** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Die universelle Theorie von T_α ist eine Robinsontheorie.

(2) T_{gen} ist vollständig und die generischen Automorphismen sind QF-Universalbereiche.

(3) In T gilt $acl = dcl$.

Beweis
Es sind äquivalent: (i) die universellen Theorie von T_α hat (JEP), (ii) T_{gen} ist vollständig und (iii) $acl(\emptyset) = dcl(\emptyset)$. Wir können diese Eigenschaften also annehmen. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist dann 2.9, die von (2) und (3) folgt aus 3.12. □

Hier kommen ein paar sehr einfache **Beispiele**:

(1) Eine generische Permutation ist ein generischer Automorphismus der Theorie T der unendlichen Menge (bzw. eine generische Struktur in der Klasse aller Permutationen). T ist stabil mit (PAPA) und es gilt $acl = dcl$. Deshalb ist die universelle Theorie von T_α, das ist die Theorie aller Permutationen, eine Robinsontheorie. Eine Permutation ist genau dann existenziell abgeschlossen, wenn sie für jedes k, $0 < k < \omega$, unendlich viele k-Zykel hat. Deshalb hat T_α einen Modellbegleiter, T_{gen} ist also modellvollständig und hat wegen 2.10 (QE).

(2) Es sei P ein einstelliges Prädikat. T besagt, daß es genau n Elemente in P gibt und unendlich viele in $\neg P$. Ein generischer Automorphismus von T besteht aus einer generischen Permutation von $\neg P$ und einer Permutation von P, das sind alles QF-Universalbereiche. Aber die universelle Theorie von T_α ist keine Robinsontheorie, denn (JEP) ist verletzt. Die Vervollständigungen von T_{gen} entsprechen den Konjugationsklassen der $\mathrm{Sym}(n)$.

(3) Es seien a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 paarweise verschieden, $P = \{a, b\}$ eine zweielementige Menge und $R = \{(a_1, a), (a_2, a), (b_1, b), (b_2, b)\}$. $\mathcal{M}$ bestehe aus dieser Struktur zusammen mit unendlich vielen weiteren Elementen, die Sprache ist $\{P, R\}$. Die starken generischen Automorphismen von $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ bilden eine vollständige Theorie mit (QE), aber nicht alle generischen Automorphismen sind QF-Universalbereiche: σ fixiere a, a_1, a_2 und b, vertausche aber b_1 und b_2, das ist ein lokaler Automorphismus auf $acl(\emptyset)$ und legt eine Vervollständigung T_σ von T_{gen} fest. $a \mapsto b$ ist dann ein partieller Automorphismus in σ, der sich nicht zu einer T-elementaren Abbildung von $acl(\emptyset)$ fortsetzen läßt, die mit σ kommutiert. Die zu T_{gen} gehörenden generischen Automorphismen sind also keine QF-Universalbereiche.

Anmerkung: Mit den generischen Automorphismen hat alles angefangen: ich begann meine Arbeit, indem ich Resultate aus [ChHr] über die Theorie $ACFA$ verallgemeinerte. Das haben auch Chatzidakis und Pillay in [ChHr] gemacht und sie zeigten, daß die Theorie der generischen Automorphismen einer stabilen vollständigen Theorie mit (QE) und (PAPA) einfach ist – wenn sie modellvollständig ist. Die Voraussetzung der Modellvollständigkeit schien wie eine unhinterfragte Voraussetzung immer dabei zu sein, obwohl sie selten in die Beweise einging. Wir verstehen nun besser, warum: sie diente dazu, den elementaren Rahmen zu gewährleisten (siehe 1.20), obwohl man einfach in den generischen Modellen argumentieren konnte. Die Arbeit von Hrushovski über Universalbereiche ([Hr1]) war für mich deshalb ein wichtiger Stein des Anstoßes, denn sie sagte gewissermaßen: „warum sich um den elementaren Rahmen kümmern, wenn es auch so geht!“ Besser noch: die generischen Automorphismen sind keine QF-Universalbereiche, also schien noch ein allgemeinerer Rahmen möglich zu sein. So kam ich dazu, in „generischen Klassen“ zu arbeiten und zu schauen, wie lokale Stabilität darin möglich ist. Wie gesagt ist Pillay einen ähnlichen Weg gegangen, er zeigt in [Pi3], daß die generischen Automorphismen einfach sind in seinem verallgemeinerten Sinn und sagt: „This paper can be seen as a natural continuation of [ChPi], but going beyond the first order context.“ ([Pi3, Einleitung]).

1.4 ∃-Pseudomonster

Ich werde nun die Klasse der generischen Modelle einer universellen Theorie mit (JEP) axiomatisch beschreiben. In einem ersten Schritt führe ich „**Pseudomonster**" als sich gut verhaltende Klassen $\mathcal{G}$ von Strukturen axiomatisch ein, ihre Elemente nenne ich *$\mathcal{G}$-Strukturen*. Die Klasse der generischen Modelle einer induktive Theorie mit (JEP) ist ein Pseudomonster. Ich zeige die Existenz von stark homogenen „$\mathcal{G}$-saturierten" $\mathcal{G}$-Strukturen. Dann verschärfe ich die Definition und zeige, daß die resultierenden „**∃-Pseudomonster**" bis auf „**Äquivalenz**" genau die Klassen der generischen Modelle von universellen Theorien mit (JEP) sind.

Hinter der Namensgebung des Pseudomonsters verbirgt sich die folgende Heuristik: der gerichtete „Limes" eines Pseudomonsters $\mathcal{G}$ ist ein „Monstermodell", in welches alle $\mathcal{G}$-Strukturen elementar einbettbar sind und welches stark homogen ist, aber *nicht* saturiert. Ein Pseudomonster ist bis auf „Äquivalenz" durch sein Monstermodell festgelegt bzw. durch die Familie der $\star$-Typen über $\emptyset$, die im Monster realisiert sind.

1.4.1 Pseudomonster

Es sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von L-Strukturen, abgeschlossen unter Isomorphie, Strukturen aus $\mathcal{G}$ nenne ich *$\mathcal{G}$-Strukture*.

4.1 **Definition** $\mathcal{G}$ nenne ich ein *Pseudomonster*, wenn

(1) Alle Einbettungen zwischen $\mathcal{G}$-Strukturen sind elementar.

(2) $\mathcal{G}$ ist nichtleer und hat (JEP).

(3) Jedes $\mathcal{G}$-Struktur hat für jedes κ eine κ-homogene[43] Erweiterung in $\mathcal{G}$.

(4) Für alle $\lambda = \lambda^{|L|}$ und alle $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ mit $|A| \leq \lambda$ gibt es ein $\mathcal{U}' \in \mathcal{G}$, so daß $A \subset \mathcal{U}' \prec \mathcal{U}$ und $|\mathcal{U}'| \leq \lambda$.

Wegen (1) und (JEP) sind alle $\mathcal{G}$-Strukture eines Pseudomonsters elementar äquivalent. Es sei $T_{\mathcal{G}}$ die zugehörige vollständige Theorie. Die Eigenschaft (4) nenne ich *(LÖSKO)*.

Beispiele:

(1) Es sei T eine Theorie. Mod(T) ist genau dann ein Pseudomonster, wenn T vollständig und modellvollständig ist.

(2) Es sei $\mathcal{A}$ eine Struktur der Größe höchstens $2^{|L|}$, dann ist $\{\mathcal{A}_A\}$ ein Pseudomonster.[44]

4.2 **Lemma** Es sei T eine induktive Theorie mit (JEP), dann ist die Klasse $\mathcal{G}_T$ der generischen Modelle von T ein Pseudomonster.

---

[43]Eine Struktur ist κ-homogen, wenn in ihr gilt: für alle Tupel $\bar{a}$ und $\bar{b}$ der Länge $< \kappa$ mit $\bar{a} \equiv \bar{b}$ und alle a gibt es ein b, so daß $\bar{a}a \equiv \bar{b}b$.

[44]$\{\mathcal{A}_A\}$ ist κ-homogen für jedes κ.

Beweis
(1) und (4): Satz I.

(2): $\mathcal{G}_T$ ist nach Satz I nichtleer und weil T (JEP) hat, hat auch $\mathcal{G}_T$ (JEP) (1.12).

(3): Wegen Satz I gibt es stets κ-generische Erweiterungen, diese sind κ-homogen: $\bar{a} \equiv \bar{b}$, so gibt es zu jedem a wegen κ-$\exists$-Saturation (1.13) ein b, so daß $\bar{b}b$ den existenziellen Typ von $\bar{a}a$ realisiert. Dann ist $\bar{a}a \mapsto \bar{b}b$ elementar wegen Satz II. □

Wenn man Parameter betrachtet, muß man die umgebende $\mathcal{G}$-Struktur kennen, weil sonst ihr Typ nicht festgelegt ist. Ich beschränke mich, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, auf *$\mathcal{G}$-Parameter*, das sind Parameter, die in einer $\mathcal{G}$-Struktur leben – die $\mathcal{G}$-Struktur werde ich jedoch meistens nicht mit angeben. Ist $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$, so sei $\mathcal{G}_{\mathcal{U}_A} := \{\mathcal{U}'_{A'} \mid \mathcal{U}' \in \mathcal{G}, \mathcal{U}'_{A'} \equiv \mathcal{U}_A\}$. Ich werde meistens nachlässig sein und nur von „$\mathcal{G}_A$" an Stelle von „$\mathcal{G}_{\mathcal{U}_A}$" sprechen. Ist $\mathcal{G}$ ein Pseudomonster, so auch $\mathcal{G}_A$.

4.3 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein Pseudomonster und $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$: zu jeder $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}'_{A'}$ aus $\mathcal{G}_A$ gibt es eine elementare Erweiterung $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{G}$ von $\mathcal{U}$ und eine elementare Einbettung $f : \mathcal{U}'_{A'} \to \tilde{\mathcal{U}}_A$.

Beweis
Wegen (JEP) (und weil $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist gegen Isomorphie) gibt es eine Erweiterung $\tilde{\mathcal{U}}$ von $\mathcal{U}$ und eine Einbettung $g : \mathcal{U}' \to \tilde{\mathcal{U}}$. All diese Einbettungen sind elementar, insbesondere gilt $g(A') \equiv A$ in $\tilde{\mathcal{U}}$. Wir können annehmen, daß $\tilde{\mathcal{U}}$ hinreichend homogen ist, dann gibt es eine elementare Abbildung $h : g(\mathcal{U}') \to \tilde{\mathcal{U}}$ mit $h(g(A')) = A$. $f := h \circ g$ ist dann die gesuchte Einbettung. □

4.4 **Korollar** Ein Pseudomonster hat (AP).

4.5 **Definition** Es sei $\mathcal{U}$ eine $\mathcal{G}$-Struktur und $A \subset \mathcal{U}$. Ein *partieller $\mathcal{G}$-Typ* über A ist ein partieller Typ über A, der in einer $\mathcal{G}_A$-Struktur realisiert ist. Ein *$\mathcal{G}$-Typ* über A ist ein vollständiger Typ über A, der in $\mathcal{G}_A$ realisiert ist.[45] Ein (partieller) $\mathcal{G}$-Typ ist ein (partieller) $\mathcal{G}$-Typ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge.

4.6 **Definition** Es sei $\mathcal{U}$ eine $\mathcal{G}$-Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl. $\mathcal{U}$ ist *$\mathcal{G}$-κ-saturiert*, wenn für jedes $A \subset \mathcal{U}$ mit $|A| < \kappa$ jeder $\mathcal{G}$-Typ über A in $\mathcal{U}$ realisiert ist.

Ist $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-κ-saturiert und $A \subset \mathcal{U}$ mit $|A| < \kappa$, so ist $\mathcal{U}_A$ $\mathcal{G}_A$-κ-saturiert.

4.7 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein Pseudomonster und $\mathcal{U}$ eine $\mathcal{G}$-Struktur. Ist $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-κ-saturiert, so auch $\mathcal{G}$-κ-universell[46] und κ-homogen. Falls $\kappa = \kappa^{|L|}$, so gilt auch die Umkehrung.

[45] Falls der Typ unendlich viele Variable hat, so spreche ich von einem $\mathcal{G}$-$\star$-Typ.
[46] d.h. jede $\mathcal{G}$-Struktur der Größe $\leq \kappa$ läßt sich in $\mathcal{U}$ elementar einbetten.

Beweis
Das ist der Standardbeweis. Es sei $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-κ-saturiert. Es sei (v_α) eine Aufzählung einer kleinen $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{V}$, dann können wir (v_α) sukzessive nach $\mathcal{U}$ elementar einbetten, deshalb ist $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-κ-universell. Zur Homogenität: sind $\bar{a}$ und $\bar{b}$ kurze Tupel in $\mathcal{U}$ mit $\bar{a} \equiv \bar{b}$ und ist $a \in \mathcal{U}$, so gibt es in einer hinreichend homogenen elementaren Erweiterung (die eine $\mathcal{G}$-Struktur ist) von $\mathcal{U}$ ein b, so daß $\bar{a}a \equiv \bar{b}b$. Wegen $\mathcal{G}$-κ-Saturation kann man b schon in $\mathcal{U}$ finden.

Ist umgekehrt $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-κ-universell und κ-homogen und ist p ein Typ über einer kleinen Teilmenge A von $\mathcal{U}$, so gibt es wegen (LÖSKO) eine $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}' \supset A$ der Größe $\leq \kappa^{|L|}$, das p realisiert. Ist nun $\kappa = \kappa^{|L|}$, so gibt es eine elementare Einbettung $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ (Universalität). $f(p)$ ist also in $\mathcal{U}$ realisiert, wegen Homogenität auch p. □

Um $\mathcal{G}$-saturierte Strukturen konstruieren zu können brauche ich, daß $\mathcal{G}$ induktiv ist.

4.8 **Satz** Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster[47]. Jede $\mathcal{G}$-Struktur hat für jedes κ eine stark κ-homogene $\mathcal{G}$-κ-saturierte elementare $\mathcal{G}$-Erweiterung.

Beweis
Es sei $\mathcal{V}$ eine $\mathcal{G}$-Struktur.

Behauptung: $\mathcal{V}$ hat für jedes κ eine $\mathcal{G}$-κ-saturierte elementare Erweiterung.

Beweis: Es sei $\mathcal{U}$ eine $(\kappa^{|L|})^+$-$\mathcal{G}$-generische Erweiterung von $\mathcal{V}$, diese Erweiterung existiert weil $\mathcal{G}$ induktiv ist mit (AP) (1.7) und ist elementar. Es sei $A \subset \mathcal{U}$ mit $|A| < \kappa$ und p ein $\mathcal{G}$-Typ über A. p ist dann in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{U}'$ von $\mathcal{U}$ realisiert, etwa durch a. Wegen (LÖSKO) gibt es eine $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{U}$ mit $A \subset \mathcal{U}_0$ und $|\mathcal{U}_0| \leq \kappa^{|L|}$ und eine $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}_1 \prec \mathcal{U}'$ mit $\mathcal{U}_0 \cup \{a\} \subset \mathcal{U}_1$ und $|\mathcal{U}_1| \leq \kappa^{|L|}$. Dann ist $\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{U}_1$, und weil $\mathcal{U}$ $(\kappa^{|L|})^+$-generisch ist, kann man $\mathcal{U}_1$ über $\mathcal{U}_0$ nach $\mathcal{U}$ einbetten. Da diese Einbettung elementar ist, ist p in $\mathcal{U}$ realisiert.

Wie im Beweis von 2.15 konstruieren wir nun eine lange elementare Kette, deren Limes stark κ-homogen ist. Wir können annehmen, daß κ regulär ist. Es sei $\mathcal{U}_0$ eine $\mathcal{G}$-κ-saturierte elementare Erweiterung von $\mathcal{V}$ und $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine stetige Kette von $\mathcal{G}$-Strukturen, so daß $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ stets $\mathcal{G}$-$|\mathcal{U}_\alpha|^+$-saturiert ist. Diese Kette existiert wegen der vorigen Behauptung. Es sei $\mathcal{U} := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha$, das ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{U}_0$ und eine $\mathcal{G}$-κ-saturierte $\mathcal{G}$-Struktur (κ ist regulär).

Behauptung: $\mathcal{U}$ ist stark κ-homogen.

Beweis: Es seien A und B klein und $f : A \sim B$ sei elementar (in $\mathcal{U}$), wegen Regularität ist f in einem $\mathcal{U}_\alpha$. Wegen des vorigen Lemmas ist $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ $|\mathcal{U}_\alpha|^+$-homogen, es gibt also eine $\mathcal{G}$-Struktur $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \prec \mathcal{U}_{\alpha+1}$ und einen Isomorphismus $\sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cong \tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ mit $f \subset \tilde{\sigma}_\alpha$. Nun geht es weiter wie im Beweis von 2.15. □

4.9 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster. Es sei $\kappa = \kappa^{|L|}$, $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ und $|A| \leq \kappa$. Dann gibt es ein $\mathcal{G}$-$|L|^+$-saturiertes Modell der Größe $\leq \kappa$, welches A umfaßt.

[47] d.h. $\mathcal{G}$ ist eine induktive Klasse.

Beweis
Wir können ein Kette $A \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset ...$ der Länge κ konstruieren, so daß $\mathcal{U}_{i+1}$ stets alle Typen über höchstens $|L|$-vielen Parametern aus $\mathcal{U}_i$ realisiert. Wegen (LÖSKO) können wir annehmen, daß alle $|\mathcal{U}_i| \leq \kappa$. Da $cf(\kappa) > |L|$, erfüllt der Limes der Kette das Gewünschte. □

4.10 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster, $\mathcal{G}'$ die Klasse der $\mathcal{G}$-$|L|^+$-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen und $\mathcal{G}''$ die Klasse der $\mathcal{G}$-ω-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen. Dann ist $\mathcal{G}'$ ein Pseudomonster und $\mathcal{G}''$ ein induktives Pseudomonster.

Beweis
Einfach, für (LÖSKO) beachte man den vorigen Beweis. □

Äquivalente Pseudomonster

Ich nenne zwei Pseudomonster *äquivalent*, wenn sie dieselben $\star$-Typen über $\emptyset$ realisieren. Offensichtlich gilt:

> Zwei Pseudomonster $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ sind genau dann äquivalent, wenn sich jede $\mathcal{G}$-Struktur elementar in eine $\mathcal{G}'$-Struktur einbettenläßt und umgekehrt.

Zwei Pseudomonster sind also genau dann äquivalent, wenn sie dasselbe „Monstermodell“ festlegen.

4.11 **Lemma** Jedes Pseudomonster ist äquivalent zu einem induktiven Pseudomonster.

Beweis
Es sei $\mathcal{G}$ ein Pseudomonster und $(\mathcal{U}_i)_{i<\alpha}$ eine aufsteigende Kette in $\mathcal{G}$ und I die Familie der aufsteigenden Ketten $(\mathcal{U}'_i)_{i<\alpha}$ in $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{U}'_i \prec \mathcal{U}_i$. $\mathcal{G}'$ entstehe dadurch, daß man die Vereinigung jeder Kette aus I zu $\mathcal{G}$ hinzunimmt und das Ganze gegen Isomorphie abschließt.

Behauptung: $\mathcal{G}'$ ist ein zu $\mathcal{G}$ äquivalentes Pseudomonster.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß sich jede $\mathcal{G}'$-Struktur elementar in eine $\mathcal{G}$-Struktur einbetten läßt und daß $\mathcal{G}'$ (LÖSKO) erfüllt. Damit folgt die Behauptung leicht. Es gibt ein $\mathcal{V} \in \mathcal{G}$, so daß alle $\mathcal{U}_i \prec \mathcal{V}$. Dann lassen sich auch alle zu $\mathcal{G}$ hinzugenommenen Strukturen elementar in $\mathcal{V}$ einbetten. Zu (LÖSKO): es sei $(\mathcal{U}'_i)_{i<\alpha} \in I$, $\mathcal{M}$ die Vereinigung und $A \subset \mathcal{M}$ mit $|A| \leq \lambda = \lambda^{|L|}$. Wegen (LÖSKO) in $\mathcal{G}$ gibt es zu jedem $i < \alpha$ ein $\mathcal{V}_i \prec \mathcal{U}'_i$ mit $A \cap \mathcal{U}'_i \subset \mathcal{V}_i$ und $|\mathcal{V}_i| \leq \lambda$. Es sei $\mathcal{N}$ die Vereinigung der $\mathcal{V}_i$, dann gilt $A \subset \mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ und $|\mathcal{N}| \leq \lambda$.

Wenn man diese Konstruktion nun geeignet iteriert, so sieht man, daß die „induktive Hülle“ von $\mathcal{G}$ ein zu $\mathcal{G}$ äquivalentes Pseudomonster ist. □

Ich zeige nun, daß sich induktive Pseudomonster besonders gut unter Äquivalenz verhalten.

4.12 **Lemma** Es seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ äquivalente induktive Pseudomonster und $\lambda = \lambda^{|L|}$. Jede $\mathcal{G}$-Struktur der Größe $\leq \lambda$ läßt sich zu einer $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$-Struktur der Größe $\leq \lambda$ erweitern.

Beweis

Es sei $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ der Größe $\leq \lambda$. Nach Voraussetzung ist $tp(\mathcal{U})$ ein $\mathcal{G}'$-Typ, deshalb gibt es ein $\mathcal{U}' \in \mathcal{G}'$ mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$. Wegen (LÖSKO) können wir annehmen, daß $|\mathcal{U}'| \leq \lambda$. Entsprechend gibt es ein $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{G}$ der Größe $\leq \lambda$ mit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_1$ und wir können eine „Sandwichkette" $\mathcal{U}_0 := \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0' := \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_1' \subset ... \subset \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_n' \subset ...$ konstruieren mit $\mathcal{U}_n \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{U}_n' \in \mathcal{G}'$ und so daß jede Struktur der Kette eine Größe $\leq \lambda$ hat. Dann sind $(\mathcal{U}_n)$ und $(\mathcal{U}_n')$ elementare Ketten, der Limes ist in $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ und hat eine Größe $\leq \lambda$. □

4.13 **Satz** Es seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ induktive Pseudomonster. $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ sind genau dann äquivalent, wenn $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ ein induktives Pseudomonster ist, das zu $\mathcal{G}$ und zu $\mathcal{G}'$ äquivalent ist.

Beweis

Es sei $\mathcal{K} = \mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$. Aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ folgt sofort, daß $\mathcal{K}$ induktiv ist, abgeschlossen gegen Isomorphie und daß alle Einbettungen zwischen $\mathcal{K}$-Strukturen elementar sind. Wegen des letzten Lemmas gilt (JEP).

Behauptung: $\mathcal{K}$ erfüllt (LÖSKO).

Beweis: Es sei $\lambda = \lambda^{|L|}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{K}$ und A eine Teilmenge von $\mathcal{U}$ der Größe $\leq \lambda$. Weil $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$, gibt es mit (LÖSKO) ein $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{G}$ der Größe $\leq \lambda$ mit $A \subset \mathcal{U}_0 \prec \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U} \in \mathcal{G}'$, gibt es entsprechend mit (LÖSKO) ein $\mathcal{U}_0' \in \mathcal{G}'$ der Größe $\leq \lambda$ mit $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0' \prec \mathcal{U}$. Auf diese Weise können wir wieder eine Sandwichkette innerhalb $\mathcal{U}$ konstruieren, deren Limes in $\mathcal{K}$ liegt, eine und Größe $\leq \lambda$ hat.

Behauptung: Jede $\mathcal{K}$-Struktur hat für jedes κ eine κ-homogene Erweiterung in $\mathcal{K}$.

Beweis: Wir können annehmen, daß κ regulär ist. Es sei $\mathcal{U} \in \mathcal{K}$, dann hat $\mathcal{U}$ eine κ-homogene Erweiterung $\mathcal{U}_0$ in $\mathcal{G}$. $\mathcal{U}_0$ hat eine Erweiterung in $\mathcal{K}$, also auch eine κ-homogene Erweiterung $\mathcal{U}_0'$ in $\mathcal{G}'$. Wir konstruieren eine Sandwichkette der Länge κ, deren Glieder jeweils κ-homogen sind. Der Limes ist dann (κ ist regulär) eine κ-homogene Struktur in $\mathcal{K}$.

Weil wegen des letzten Lemmas jede $\mathcal{G}$-Struktur eine Erweiterung in $\mathcal{K}$ hat und andererseits $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{K}$ äquivalent, ebenso $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{K}$. □

1.4.2 ∃-Pseudomonster

4.14 **Definition** Ein *∃-Pseudomonster* ist ein Pseudomonster $\mathcal{G}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Jeder partielle existenzielle Typ von $T_{\mathcal{G}}$ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge ist in $\mathcal{G}$ realisiert.

(ii) In allen $\mathcal{G}$-Strukturen sind partiellen Automorphismen, welche die ∃-Formeln erhalten, elementar.

4.15 **Lemma** Die Klasse der generischen Modelle einer universellen Theorie mit (JEP) ist ein ∃-Pseudomonster.

Beweis
Klar nach Definition und mit 4.2. □

Es sei $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster. Wegen (JEP) sind auch alle partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{G}$-Strukturen, welche die $\exists$-Formeln erhalten, elementar. Außerdem kann man sukzessive auch jeden partiellen existenziellen $\star$-Typ von $T_{\mathcal{G}}$ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge in $\mathcal{G}$ realisieren.

4.16 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster, dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{G}$ ist ein $\exists$-Pseudomonster.

(2) Für jedes $\kappa > |L|$ ist jede κ-$\mathcal{G}$-saturierte $\mathcal{G}$-Struktur ein κ-$\exists$-Universalbereich.

(3) Für jedes $\kappa > |L|$ und jede $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}$ gibt es eine $\mathcal{G}$-Oberstruktur $\mathcal{U}'$, die ein κ-$\exists$-Universalbereich ist.

Dann sind die κ-$\exists$-Universalbereiche in $\mathcal{G}$ genau die κ-$\mathcal{G}$-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen.

Beweis
(1) nach (2): Es sei $\mathcal{U}$ eine κ-$\mathcal{G}$-saturierte $\mathcal{G}$-Struktur und Π ein partieller $\exists$-Typ von $\mathcal{U}$ über einer kleinen Parametermenge. Das ist dann auch ein partieller Typ von $T_{\mathcal{G}}$, also wegen (i) ein $\mathcal{G}$-Typ. Deshalb ist Π in $\mathcal{U}$ realisiert und $\mathcal{U}$ ist κ-$\exists$-saturiert. Da in $\mathcal{U}$ jede Einbettung, welche die $\exists$-Formeln erhält, elementar ist, ist $\mathcal{U}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich.

(2) nach (3) folgt aus der Existenz von κ-$\mathcal{G}$-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen (4.8).

(3) nach (1): (i) Es sei $A \subset \mathcal{U}$, $|A| < \kappa$ und $\Pi((x_\alpha)_{\alpha<\kappa})$ ein partieller existenzieller $\star$-Typ von $T_{\mathcal{G}}$ über A. Wir können $\mathcal{U}$ wegen (3) elementar zu einem κ-$\exists$-Universalbereich $\mathcal{V} \in \mathcal{G}$ erweitern. $\mathcal{V}$ realisiert dann Π und Π ist in $\mathcal{G}$ realisiert. (ii) Es sei f ein partieller Isomorphismus in eine $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}$, der die $\exists$-Formeln erhält. Wähle mit (3) eine elementare $\mathcal{G}$-Oberstruktur, welches ein $\exists$-Universalbereich ist, in dem ist f dann elementar, also auch in $\mathcal{U}$.

Zusatz: Es sei $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ ein κ-$\exists$-Universalbereich und p ein Typ über einer kleinen Parametermenge $A \subset \mathcal{U}$, der ein einer $\mathcal{G}$-Oberstruktur $\mathcal{V}$ realisiert ist, etwa durch a. Es gibt in $\mathcal{U}$ dann eine Realisierung b von $\exists$-$tp(a/A)$ und wegen Eigenschaft (ii) ist $a \mapsto b$ eine A-elementare Abbildung in $\mathcal{V}$. Deshalb ist auch b eine Realisierung von p, $\mathcal{U}$ ist also κ-$\mathcal{G}$-saturiert. Die Umkehrung gilt wegen (2). □

4.17 **Satz** Die $\exists$-Pseudomonster sind bis auf Äquivalenz genau die Klassen der generischen Modelle von universellen Theorien mit (JEP).

Beweis
Die Klasse der generischen Modelle einer universellen Theorie mit (JEP) ist nach 4.15 ein $\exists$-Pseudomonster. Es sei andererseits $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster. Der Beweis von 4.11 zeigt auch, daß jedes $\exists$-Pseudomonster äquivalent ist zu einem induktiven $\exists$-Pseudomonster. Wir können also annehmen, daß $\mathcal{G}$ induktiv ist. T sei die universelle Theorie von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_T$ die Klasse der generischen Modelle von T. Für jedes $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ ist dann T die universelle Theorie von $\mathcal{U}$ und hat deshalb (JEP).

Behauptung: $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_T$ realisieren dieselben vollständigen $\star$-Typen über $\emptyset$.

Beweis: Es sei $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ und p ein in $\mathcal{U}$ realisierter Typ über $\emptyset$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{U}$ hinreichend $\mathcal{G}$-saturiert ist, dann ist wegen 4.16 $\mathcal{U}$ ein $\exists$-Universalbereich. Weil T die universelle Theorie von $\mathcal{U}$ ist, ist $\mathcal{U}$ ein generisches Modell von T und p ist in $\mathcal{G}_T$ realisiert. Es sei umgekehrt $\mathcal{U}' \in \mathcal{G}_T$ und a ein (beliebig langes) Tupel aus $\mathcal{U}'$. Es sei q der existenzielle Typ von a (in $\mathcal{U}'$ über $\emptyset$), dann ist wegen $\exists$-Saturation q in einem hinreichend großen $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ realisiert, etwa durch b. Wir können wieder annehmen können, daß $\mathcal{U}$ ein generisches Modell von T ist, und wegen (JEP) können wir außerdem annehmen, daß $\mathcal{U}' \prec \mathcal{U}$. Die Abbildung $a \mapsto b$ erhält dann in $\mathcal{U}$ die existenziellen Formeln, also ist $a \equiv b$ und $tp(a)$ ist in $\mathcal{G}$ erfüllt. □

4.18 **Definition** Ein Δ_1-*Pseudomonster* ist ein Pseudomonster $\mathcal{G}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Jeder partielle Δ_1-Typ von $T_\mathcal{G}$ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge ist in $\mathcal{G}$ realisiert.

(ii) In allen $\mathcal{G}$-Strukturen sind partiellen Automorphismen, welche die Δ_1-Formeln erhalten, elementar.

4.19 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster, dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{G}$ ist ein Δ_1-Pseudomonster.

(2) Für jedes $\kappa > |L|$ ist jede κ-$\mathcal{G}$-saturierte $\mathcal{G}$-Struktur ein κ-Δ_1-Universalbereich.

(3) Für jedes $\kappa > |L|$ und jede $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}$ gibt es eine $\mathcal{G}$-Oberstruktur $\mathcal{U}'$, das ein κ-Δ_1-Universalbereich ist.

Dann sind die κ-Δ_1-Universalbereiche in $\mathcal{G}$ genau die κ-$\mathcal{G}$-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen.

Beweis
Wie der Beweis von 4.16. □

Es folgt, daß jedes Δ_1-Pseudomonster auch ein $\exists$-Pseudomonster ist. Diese Begriffe lassen sich auch allgemeiner bilden, wie ich nun skizzieren werde. Das ist jedoch für den Rest der Arbeit nicht mehr wichtig.

1.4.3 Ω-Universalbereiche und Ω-Pseudomonster

Wir haben bisher Ω-Universalbereiche kennengelernt für $\Omega = \exists$, QF und Δ_1. Ich werde nun zeigen, daß es eine uniforme Definition für Ω-Universalbereiche gibt und sie kurz in einer größeren Allgemeinheit studieren. Ω-Universalbereiche tauchen dann in die Definition der Ω-Pseudomonstern auf, welche die $\exists$-Pseudomonster verallgemeinern. $\Omega \subset L$ sei abgeschlossen gegen positive boolesche Kombinationen und gegen Variablensubstitution und enthalte die atomaren Formeln.

Es sei $\mathcal{A}$ eine Struktur und $C \subset A$. Eine $\Omega(C)$-Formel (auch: Ω-Formel über C) ist eine Formel aus Ω, in der einige Variablen durch Konstanten aus C substituiert sind. Ein partieller $\Omega(C)$-Typ von $\mathcal{A}$ ist ein partieller Typ $\Pi(\bar{x})$ von $\mathcal{A}$, der aus $\Omega(C)$-Formeln besteht.

4.20 Definition

(1) Eine L-Struktur $\mathcal{A}$ heißt *κ-Ω-saturiert*, wenn jeder partielle Ω-$\star$-Typ von $\mathcal{A}$ über einer Parametermenge der Mächtigkeit $< \kappa$ und in höchstens κ-vielen Variablen in $\mathcal{A}$ realisiert ist.

(2) Ein *κ-Ω-Universalbereich* ist eine κ-Ω-saturierte Struktur, in der jeder partielle Automorphismus, der die Ω-Formeln erhält, elementar ist. Ein Ω-Universalbereich ist ein $|L|^+$-Ω-Universalbereich.

4.21 Lemma Es sei $\mathcal{A}$ ein κ-Ω-Universalbereich, $\kappa > |L|$ und $\exists\Omega$ der Abschluß von Ω unter existenzieller Quatifikation. Jeder partielle $\exists\Omega$-$\star$-Typ über $< \kappa$ vielen Parametern aus $\mathcal{A}$ und in höchstens κ vielen Variablen ist in $\mathcal{A}$ realisiert.

Beweis
Wie Beweis von 2.16. □

Die κ-L-Universalbereiche sind genau die κ-saturierten Strukturen. Für $\Omega = \exists$ (QF, Δ_1) erhalten wir so denselben Begriff, wie zuvor.

4.22 Definition Ein *Ω-Pseudomonster* ist ein Pseudomonster $\mathcal{G}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Jeder partielle Ω-Typ von $T_{\mathcal{G}}$ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge ist in $\mathcal{G}$ realisiert.

(ii) In allen $\mathcal{G}$-Strukturen sind partielle Automorphismen, welche die Ω-Formeln erhalten, elementar.

Entsprechend gilt:

4.23 Lemma Es sei $\mathcal{G}$ ein induktives Pseudomonster, dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{G}$ ist ein Ω-Pseudomonster.

(2) Für jedes $\kappa > |L|$ ist jede κ-$\mathcal{G}$-saturierte $\mathcal{G}$-Struktur ein κ-Ω-Universalbereich.

(3) Für jedes $\kappa > |L|$ und jede $\mathcal{G}$-Struktur $\mathcal{U}$ gibt es eine $\mathcal{G}$-Oberstruktur $\mathcal{U}'$, das ein κ-Ω-Universalbereich ist.

Dann sind die κ-Ω-Universalbereiche in $\mathcal{G}$ genau die κ-$\mathcal{G}$-saturierten $\mathcal{G}$-Strukturen.

Beweis
Wie 4.16. □

Bemerkung: Ist T eine vollständige und modellvollständige Theorie, so bilden die Modelle von T ein L-Pseudomonster. Dieses ist genau dann ein Ω-Pseudomonster, wenn in T jede Formel äquivalent ist zu einer Ω-Formel.

Kapitel 2

Lokale Stabilitätstheorie

Ich werde nun die klassische Stabilitätstheorie erstens lokalisieren und zweitens in dem in Kapitel 1 entwickelten nichtelementaren Rahmen behandeln. Die **Grundlagen** entwickele ich in einem Pseudomonster; fehlende Kompaktheit macht die Dinge dabei etwas unübersichtlich.[1] Auf der anderen Seite bekommt man einen Eindruck, wie man in einem solchen Rahmen modelltheoretisch arbeiten kann und worauf man aufpassen muß. Ich werde dort schon definieren, was ein ,,Begriff von freier Fortsetzung für (X, Γ, Y)-Typen" ist[2] und den Grundbegriff der lokalen Stabilitätstheorie einführen: ,,(Γ, Y)-Freiheit". Auch die grundlegenden Eigenschaften der **Stabilität** führe ich allgemein in einem Pseudomonster ein. Bis auf wenige Ausnahmen, bei denen wir Kompaktheit brauchen, klappen die üblichen Konstruktionen, denn sie sind weitgehend kombinatorischer Natur. Insbesondere gilt hier schon das folgende Resultat (3.32):

- Falls es einen Begriff von freier Fortsetzung für (X, Γ, Y)-Typen über $\mathcal{G}$ gibt, so ist (X, Γ, Y) $\mathcal{G}$-stabil.

Erst im dritten Abschnitt spezialisiere ich auf den Fall der $\exists$-Pseudomonster, genauer: auf die Klasse der **generischen Modelle** einer induktiven Theorie mit (JEP). Ich bin jedoch überzeugt, daß sich all die folgenden Ergebnisse auch in Ω-Pseudomonstern beweisen lassen. Viele der relativ zum Pseudomonster eingeführten Begriffe verhalten sich dann besser und einige stimmen sogar mit den üblichen Begriffen überein. Ich werde den folgenden Satz beweisen (3.31):

- Wenn Γ stabil, dann ist (X, Γ, Y)-Freiheit der einzige Begriff von freier Fortsetzung für (X, Γ, Y)-Typen.

Dieses Resultat ist neu. Ich werde viele aus der globalen Stabilitätstheorie bekannten Eigenschaften beweisen, es bleibt jedoch ein sehr wichtiger Unterschied: die lokale Freiheit induziert keine symmetrische Relation $\downarrow$. In den **Anwendungen** zeige ich, daß die in generischen Automorphismen gegebene „Unabhängigkeitsrelation“ genau quantorenfreie Freiheit ist. Außerdem betrachte ich lokale Freiheit bezüglich der Familie der Gleichungen und beweise, daß lokale Freiheit bezüglich der Familie der

[1] Aber wenn man durch die Hölle der Pseudomonster gegangen ist, dann werden die generischen Modelle wie eine Erlösung sein.

[2] In der lokalen Stabilität arbeitet man besser mit Fortsetzungsrelationen zwischen lokalen Typen, nicht mit einer dreistelligen ,,Unabhängigkeitsrelation".

Gleichungen mit ,,Srour-Nichtforken" übereinstimmt. Dieses Resultat ist neu und erscheint bald in einer gemeinsamen Arbeit mit M. Junker ([JuKr]). Im Anhang verallgemeinere ich die Grundlagen der **stabilen Gruppentheorie** auf diesen lokalen, nichtelementaren Rahmen.

Die wichtigsten Resultate der lokalen Stabilitätstheorie sind bereits im elementaren Rahmen behandelt worden (siehe etwa [Pillay, Kapitel 1]), die Beweise sind jedoch meistens recht ad hoc. Neu scheint mir neben dem nichtelementaren Rahmen auch der Ansatz zu sein, typdefinierbare ,,Sorten" für die Variablen (X) und die Parameter (Y) vorzuschreiben.

2.1 Grundlagen

Ich werde den ersten Unterabschnitt mit ein paar Überlegungen zur einer **Modelltheorie in Pseudomonstern** beginnen. Dadurch wird klar, wie modelltheoretische Begriffe in einem „nichtelementaren Rahmen“ gebildet werden. Ich spezialisiere dann aber schnell auf den Fall der $\exists$-Pseudomonster. Das ist eine sinnvolle Verallgemeinerung der Situation, in welcher $\mathcal{G}$ die Klasse der generischen Modelle einer induktiven Theorie mit (JEP) ist: falls T modellvollständig ist mit (JEP), so ist – im Gegensatz zur Klasse der generischen Modelle von T – auch $\mathrm{Mod}(T)$ ein $\exists$-Pseudomonster. Andererseits ist diese Verallgemeinerung geringfügig, weil jedes $\exists$-Pseudomonster äquivalent ist zur Klasse der generischen Modelle einer induktiven Theorie mit (JEP) (Kapitel 1, 4.17). Solange wir in einem $\exists$-Pseudomonster mit existenziellen Formeln arbeiten, sind die Methoden und Resultate kaum von der elementaren Situation zu unterscheiden. Ich definiere und diskutiere im zweiten Unterabschnitt den Begriff der **lokalen Formel** im $\exists$-Pseudomonster $\mathcal{G}$. Stabilität taucht in diesem Abschnitt nicht auf.

2.1.1 Modelltheorie in Pseudomonstern

Es sei $\mathcal{G}$ ein Pseudomonster und T seine vollständige Theorie. Ich werde in $\mathcal{G}$ einige **Grundbegriffe der geometrischen Modelltheorie** definieren, die später in der Arbeit noch auftauchen. Das soll illustrieren, wie modelltheoretische Begriffe in Pseudomonstern definiert werden. Danach zeige ich, wie man in $\mathcal{G}$ **Indiscernibles** konstruieren kann. Schließlich erkläre ich, was **(fast) invariante** Mengen in $\mathcal{G}$ sind. Obwohl ich alle Begriffe im Pseudomonster definiere, werde ich nur für $\exists$-Pseudomonster ein paar Resultate beweisen.

Anmerkung zu einer nichtelementaren Modelltheorie

Für die meisten üblichen modelltheoretischen Begriffe gibt es jeweils eine syntaktische und eine semantische Definition, wegen des Vollständigkeitssatzes sind diese Definitionen stets äquivalent. In der semantischen Definition wird der Begriff interpretiert in der gesammten Modellklasse, so ist z.B. ein partieller Typ der Theorie T eine Menge von Formeln, die in einem Modell von T realisiert ist. Interpretieren wir nun einen Begriff im Pseudomonster $\mathcal{G}$, so ersetzen wir „Modell von T“ durch „$\mathcal{G}$-Struktur“. So ist zum Beispiel ein partieller $\mathcal{G}$-Typ eine Menge von Formeln, die in einer $\mathcal{G}$-Struktur realisiert wird. Der Einfachheit zuliebe nenne ich $\mathcal{G}$-Strukturen von nun an *Modelle* – wenn ich also von Modellen spreche, so ist stets klar, welches

Pseudomonster im Hintergrund ist. Wenn ich unterstreichen möchte, daß ein Begriff in T interpretiert werden soll, so mache ich das durch das Präfix „T-“ klar. Zum Beispiel ist nicht jeder $\mathcal{G}$-Typ ein T-Typ.

Notationen und Sprechweisen: Eine Formel *über* $\mathcal{G}$ ist eine Formel über Parametern aus $\mathcal{G}$. Was ein (partieller) $\mathcal{G}$-Typ ist, habe ich in Kapitel 1, Definition 4.5 gesagt. Ich nenne ein Modell κ-*groß*, wenn es stark κ-homogen und κ-$\mathcal{G}$-saturiert ist. Wegen 4.8 hat jedes Modell ein κ-großes Obermodell. Ein *hinreichend großes Modell* ist ein κ-großes Modell für ein hinreichend großes κ. Ich werde meistens in einem hinreichend großen Modell arbeiten, bei Bedarf betrachte ich aber auch Obermodelle davon.

Teilen und Unabhängigkeitsrelationen

1.1 **Definition** Es sei $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$.

(1) Eine Formel $\chi(x,b)$ über $\mathcal{U}$ *$\mathcal{G}$-teilt über A*, wenn es in $\mathcal{G}$ eine A-Indiscerniblefolge $(b_i)_{i<\omega}$ gibt mit $b_0 \equiv_A b$, so daß $\{\chi(x,b_i) \mid i<\omega\}$ nicht in $\mathcal{G}$ realisiert ist.[3]

(2) Ein partieller Typ Π über $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-teilt über A, wenn es ein endliches $\Pi_0 \subset \Pi$ gibt, so daß $\bigwedge \Pi_0$ über A $\mathcal{G}$-teilt.

Falls χ eine existenzielle Formel bzw. Π ein existenzieller partieller Typ ist, so stimmt diese Definition mit der von Pillay überein, siehe [Pi3, Definition 3.2 und Lemma 3.4]. **Achtung**, es ist möglich, daß eine Δ_1-Formel T-teilt, ohne daß die $\mathcal{G}$-teilt: die bezeugende Indiscerniblefolge muß nicht in $\mathcal{G}$ realisiert sein.

Eine *Fortsetzungsrelation* für $\mathcal{G}$-Typen ist eine Familie von Relationen $\sqsubset = (\sqsubset_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{G}}$ zwischen $\mathcal{G}$-Typen, welche (sortenweise) die Inklusion verfeinert und mit:

(Invarianz) Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ Modelle, $A \subset B, a$ aus $\mathcal{U}$ und $A' \subset B', a'$ aus $\mathcal{U}'$: ist $tp(a/A) \sqsubset_{\mathcal{U}} tp(a/B)$ und $\mathcal{U}_{ABa} \equiv \mathcal{U}'_{A'B'a'}$, so $tp(a'/A') \sqsubset_{\mathcal{U}'} tp(a'/B')$.

Ich lasse bei den Fortsetzungsrelationen den Index für das Modell weg. Das ist ok, weil Einbettungen zwischen Modellen elementar sind.

1.2 **Definition** Eine *Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$* ist eine Fortsetzungsrelation $\sqsubset$ für $\mathcal{G}$-Typen, so daß für alle $\mathcal{G}$-Typen gilt:

(Erweiterung) Es sei $A \subset B$, zu jedem $\mathcal{G}$-Typ $p \in S(A)$ gibt es ein $\mathcal{G}$-Typ $q \in S(B)$ mit $p \sqsubset q$.

(Monotonie) $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset q \sqsubset r$.

(Transitivität) $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset q \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset r$.

(Lokaler Charakter) zu jedem $\mathcal{G}$-Typ p gibt es $A \subset dom(p)$, so daß $p \upharpoonright A \sqsubset p$ und $|A| \leq |T|$.

(Endlicher Charakter) Für alle $p \in S(B) \cap \mathcal{G}$:

$$p \upharpoonright A \sqsubset p \iff p \upharpoonright A \sqsubset p \upharpoonright Ab \text{ für alle endlichen Tupel } b \text{ in } B \ (A \subset B).$$

(Symmetrie) Für alle endlichen Tupel a, b und alle Mengen A in $\mathcal{G}$ gilt:

$$tp(a/A) \sqsubset tp(a/Bb) \Rightarrow tp(b/A) \sqsubset tp(b/Aa).$$

[3] Den alten Begriff des Teilens nenne ich *T-teilen.*

Es ist wichtig zu sehen, besonders beim Erweiterungsaxiom, daß wir hier innerhalb der Klasse der $\mathcal{G}$-Typen arbeiten. Die folgende Definition verallgemeinert die entsprechenden klassischen Begriffe.

1.3 **Definition** Es sei $\sqsubset$ eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$.

(1) Es sei A eine Parametermenge, $\sqsubset$ *erfüllt den Unabhängigkeitssatz* über A, wenn Für alle Mengen $A_i \supset A$ $(i = 1,2)$ mit $tp({}^{A_1}/_{A}) \sqsubset tp({}^{A_1}/_{A_2})$ und für alle $\mathcal{G}$-Typen $p_i \in S(A_i)$ und $p \in S(A)$ gilt: wenn $p \sqsubset p_i$, dann gibt es $q \in S(A_1A_2)$, so daß $p_i \sqsubset q$.

(2) $\sqsubset$ ist *einfach*, wenn $\sqsubset$ den Unabhängigkeitssatz über jedem Modell erfüllt.

(3) $\sqsubset$ ist *stabil*, wenn jeder $\mathcal{G}$-Typ über einem Modell auf jede Obermenge nur eine $\sqsubset$-Fortsetzung hat.

Stabile Unabhängigkeitsrelationen sind einfach. Pillay definiert in [Pi3], wann ein $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$ „einfach" ist (obwohl das eigentlich eine Eigenschaft der Klasse $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ der zu $\mathcal{U}$ elementar äquivalenten $\exists$-Universalbereiche ist) und beweist im Wesentlichen den folgenden Satz:

1.4 **Satz** Es sei $\mathcal{G}$ ein einfaches[4] $\exists$-Pseudomonster. Dann ist $tp({}^{a}/_{A}) \sqsubset^{nd} tp({}^{a}/_{B}) :\Longleftrightarrow$ $\exists$-$tp({}^{a}/_{B})$ $\mathcal{G}$-teilt nicht über A eine einfache Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$.

Beweis
Es sei $\mathcal{G}$ einfach, κ groß und $\mathcal{U}$ ein κ-großes Modell, dan ist $\mathcal{U}$ ein „e-universal domains of cardinality κ" im Sinne von Pillay (Kapitel 1, 2.14). Weil $\mathcal{U}$ einfach ist, erfüllt $\sqsubset^{nd}$ (Lokaler Charakter). Wegen [Pi3, Proposition 3.12] ist $\sqsubset^{nd}$ eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$. Aus [Pi3, Corollary 3.18] folgt, daß $\sqsubset^{nd}$ den Unabhängigkeitssatz über Modellen erfüllt. Deshalb ist $\sqsubset^{nd}$ einfach. □

Frage: Wenn $\sqsubset^{nd}$ in einem $\exists$-Pseudomonster $\mathcal{G}$ eine einfache Unabhängigkeitsrelation definiert, ist $\mathcal{G}$ dann einfach? Diese Frage scheint mir in [Pi3] nicht beantwortet zu sein.

In 3.53 beweise ich ein entsprechende Resultat für stabile Unabhängigkeitsrelationen und „stabile" Δ_1-Universalbereiche.

Indiscernibles

Ich sage, daß eine Folge $(b_j)_{j\in J}$ die Folge $(a_i)_{i\in I}$ *A-berührt*, wenn es zu jeder endlichen aufsteigenden Teilfolge $\bar{b}$ von (b_j) eine endliche aufsteigende Teilfolge $\bar{a}$ von (a_i) gibt, so daß $\bar{b} \equiv_A \bar{a}$. Das folgende Resultat gilt inzwischen als Folklore (siehe etwa [Sch, Satz 1.4.9]):

1.5 **Fakt** Es sei $\mathcal{M} \supset A$ eine Struktur und (a_i) eine sehr lange Folge in $\mathcal{M}$, dann gibt es in einer elementaren Oberstruktur von $\mathcal{M}$ eine unendliche Indiscerniblefolge (b_j), die (a_i) A-berührt.

[4] d.h. jedes $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ ist einfach im Sinne von Pillay [Pi3, Definition 3.2].

1.6 **Satz**
Es sei $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster und (a_i) eine unendliche Folge in dem Modell $\mathcal{U} \supset A$:

(1) Ist (a_i) A-indiscernible, so gibt es zu jeder (totalen) Ordnung I ein Obermodell $\mathcal{U}'$ und darin eine zu (a_i) äquivalente[5] A-Indiscerniblefolge.

(2) Ist (a_i) sehr lang, so gibt es in $\mathcal{G}$ eine A-Indiscerniblefolge, die (a_i) A-berührt.

Beweis
Behauptung: in $\exists$-Pseudomonstern gilt die folgende Kompaktheitseigenschaft:

$(\star)$ Ein vollständiger T-$\star$-Typ über einer $\mathcal{G}$-Parametermenge ist genau dann ein $\mathcal{G}$-$\star$-Typ, wenn jede seiner Restriktionen auf endliche viele Variablen ein $\mathcal{G}$-Typ ist.

Beweis: Es sei $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster und $p((x_i)_{i\in I})$ ein vollständiger $\star$-Typ von T über $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{U}$ ein hinreichend $\mathcal{G}$-saturierter $\exists$-Universalbereich ist (4.8 und 4.16). Dann gibt es in $\mathcal{U}$ eine Realisierung $(a_i)_{i\in I}$ von $p \upharpoonright \exists$ und für jedes endliche $I_0 \subset I$ eine Realisierung b_{I_0} von $p \upharpoonright I_0$. Dann ist $b_{I_0} \mapsto (a_i)_{i\in I_0}$ ein partieller Isomorphismus in $\mathcal{U}$, der die $\exists$-Formeln erhält, also $b_{I_0} \equiv (a_i)_{i\in I_0}$. Daraus folgt $(a_i)_{i\in I} \models p$, p ist also ein $\mathcal{G}$-$\star$-Typ.

Nun zum Beweis des Satzes:

(1) Wende $(\star)$ an auf den vollständigen T-$\star$-Typ $\{x_{i_0} \dots x_{i_k} \equiv_A a_0 \dots a_k \mid k < \omega, i_0 < \dots < i_k \in I\}$.

(2) Wende erst den vorigen Fakt an, wegen $(\star)$ ist der T-$\star$-Typ über A der so entstandenen A-Indiscerniblefolge ein $\mathcal{G}$-$\star$-Typ. Dieser Typ ist also in $\mathcal{G}$ realisiert und jede Realisierung A-berührt (a_i). □

Invariante Mengen

1.7 **Definition** Es sei φ eine Formel über $\mathcal{G}$ und A eine $\mathcal{G}$-Parametermenge. φ ist *$\mathcal{G}$-A-invariant*, wenn es eine Menge X von $\mathcal{G}$-Typen über A gibt, so daß φ und X in jeder $\mathcal{G}_A$-Struktur dieselbe Menge definieren.[6]

Es sei $\mathcal{U} \supset A$ hinreichend groß. Jede Formel über $\mathcal{U}$, die $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{U})$-invariant ist, ist wegen hinreichender $\mathcal{G}$-Saturation schon $\mathcal{G}$-A-invariant (vergl. Kapitel 1, Lemma 2.19). Im elementaren Fall ist eine A-invariante Formel sogar äquivalent zu einer Formel über A, hier gilt das i.a. nicht. Für die (lokale) Stabilitätstheorie ist ein weiterer Invarianzbegriff zentral:

1.8 **Definition** $\varphi(x,b)$ ist *$\mathcal{G}$-fast A-invariant*, wenn es ein $n < \omega$ gibt, so daß $\varphi(x,b)$ in jedem Modell, welches Ab enthält, höchstens n viele A-Konjugate hat.[7]

---

[5]Zwei A-Indiscerniblefolgen sind äquivalent, wenn sie sich gegenseitig A-berühren

[6]Vergleiche Kapitel 1, Definition 2.18.

[7]Das ist äquivalent dazu, daß für $p = tp(b/A)$ der folgende partielle Typ nicht in $\mathcal{G}$ realisiert ist: $p(y_0) \cup \ldots \cup p(y_n) \cup \bigwedge_{0\le i<j\le n} \neg(\varphi(x_{ij}, y_i) \leftrightarrow \varphi(x_{ij}, y_j))$

1.9 **Lemma**
Es sei $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster, $\varphi(x, y)$ eine Δ_1-Formel und b ein $\mathcal{G}$-Parameter.

(1) Wenn $\varphi(x, b)$ in jedem Modell, welches Ab enthält, nur beschränkt viele A-Konjugate hat, so gibt es ein $n < \omega$, so daß $\varphi(x, b)$ in jedem solchen Modell höchstens n A-Konjugate hat.[8]

(2) Für jedes solche n hat $\varphi(x, b)$ dann auch in jeder Struktur $\mathcal{M} \models T_{Ab}$ höchstens n A-Konjugate.

Beweis
Ich arbeite in einem hinreichend großen $\exists$-Universalbereich $\mathcal{U}$, der elementare Substruktur einer saturierten Struktur $\mathcal{M} \models T_{Ab}$ ist. Es sei $E_\varphi yy' = \forall x\ (\varphi(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y'))$ und $\tilde{E}_\varphi yy' := \neg(\varphi(x_{y,y'}, y) \leftrightarrow \varphi(x_{y,y'}, y'))$ dann ist $\tilde{E}_\varphi yy'$ existenziell und für b, b' ist $\tilde{E}_\varphi yy'$ genau dann in $\mathcal{U}$ realisiert, wenn $\neg E_\varphi bb'$ in $\mathcal{U}$ gilt. Es sei $p = \exists\text{-}tp(b/A)$.

(1) Wenn es kein solches n gibt, so gibt es unendlich viele $b_i \equiv_A b$ in $\mathcal{U}$ mit $\neg E_\varphi b_i b_j$. Wegen $\exists$-Saturation ist dann $\{p(y_i) \mid i \in I\} \cup \{\tilde{E}_\varphi y_i y_j \mid i \neq j \in I\}$ in $\mathcal{U}$ erfüllt für ein sehr großes I, etwa durch $\{b_i \mid i \in I\}$ und $\{a_{ij} \mid i \neq j \in I\}$. Dann erhält $b \mapsto_A b_i$ die $\exists$-Formeln, ist also elementar. Für $i \neq j$ bezeugt dann a_{ij}, daß $\varphi(x, b_i)$ und $\varphi(x, b_j)$ verschiedene Mengen definieren. $\varphi(x, b)$ hat also sehr viele A-Konjugate in $\mathcal{U}$.

(2) Es seien nun $\{\varphi(x, b_1), ..., \varphi(x, b_n)\}$ die A-Konjugate von $\varphi(x, b)$ in $\mathcal{U}$ und $c \in \mathcal{M}$ mit $c \equiv_A b$. Angenommen es gilt (in $\mathcal{M}$) $\neg E_\varphi cb_i$ für alle $i = 1, ..., n$. Dann gibt es $a_i \models \tilde{E}_\varphi cb_i$. Es sei $c'a'_1...a'_n$ eine Realisierung von $\exists\text{-}tp(ca_1...a_n/Ab_1, ..., b_n)$ in $\mathcal{U}$, dann gilt wieder $c' \models p$, also $c' \equiv_A b$ und die a'_i bezeugen $\neg E_\varphi c'b_i$ für alle $i = 1, ..., n$. $\varphi(x, c')$ ist dann zu keinem $\varphi(x, b_i)$ äquivalent, das ist ein Widerspruch. Deshalb sind $\{\varphi(x, b_1), ..., \varphi(x, b_n)\}$ auch schon alle A-Konjugate von $\varphi(x, b)$ in $\mathcal{M}$. □

Der folgende Satz folgt direkt aus dem Lemma, ich werde ihn noch sehr oft verwenden:

1.10 **Satz** Es sei $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster und $\mathcal{D}$ eine Instanz einer Δ_1-Formel über $\mathcal{G}$.

(1) Es sind äquivalent:
  (i) $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{G}$-A-invariant.
  (ii) $\mathcal{D}$ ist äquivalent zu einer Formel über A.

(2) Es sind äquivalent:
  (i) $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{G}$-fast A-invariant.
  (ii) $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{G}$-fast $acl(A)$-invariant.
  (iii) $\mathcal{D}$ ist T-fast A-invariant.[9]

(3) Es sei $\mathcal{U}$ ein Modell, dann sind äquivalent:
  (i) $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{G}$-fast $\mathcal{U}$-invariant.
  (ii) $\mathcal{D}$ ist äquivalent zu einer Formel über $\mathcal{U}$.

Für komplexere Formeln scheint mir die Situation in ($\exists$-)Pseudomonstern recht pathologisch zu sein: eine $\mathcal{G}$-$\mathcal{U}$-invariante Formel muß wohl nicht äquivalent zu einer Formel über $\mathcal{U}$ sein.

[8] Ein A-Konjugat von $\varphi(x, b)$ ist eine Formel $\varphi(x, c)$, wobei $c \equiv_A b$. $\varphi(x, c)$ ist ein von $\varphi(c, b)$ verschiedenes A-Konjugat, wenn nicht $\forall x(\varphi(x, b) \leftrightarrow \varphi(x, c))$ gilt.

[9] Das bedeutet, daß $\mathcal{D}$ in einer saturierten Erweiterung nur endlich viele A-Konjugate hat. $\mathcal{D}$ ist dann in T^{eq} äquivalent zu einer Formel über $acl(A)$.

2.1.2 Lokales

Es sei von nun an $\mathcal{G}$ ein $\exists$-Pseudomonster. Ich werde nun den Begriff der lokalen Formel und des lokalen Typs einführen und ihn ausführlich diskutieren. Dieser Begriff weicht in einigen Punkten von dem vielleicht erwarteten ab: erstens ist er invariant gegen äquivalente Formeln und enthält damit einen nichtlokalen Aspekt. Zweitens schränke ich die Wahl der Parameter ein auf eine vorgegebene $\exists$-typdefinierbare Menge Y. Der Ansatz, die Parameter einzuschränken, ist neu und ich verfolge ihn durch die gesamte lokale Stabilitätstheorie. Sein Nutzen besteht zum Beispiel darin, daß man lokale Stabilitätstheorie „innerhalb" einer typdefinierbaren Struktur entwickeln kann.[10] Ich werde dann den wichtigen Begriff der **Striktheit** einführen und im dritten Unterabschnitt erklären, wann lokale Typen **definierbar** sind. Die meisten der nun gebildeten Begriffe hängen von $\mathcal{G}$ ab. Das wird nicht immer aus der Notation hervorgehen, an den wichtigen Stellen weise ich aber darauf hin.

Lokale Formeln

Wie üblich arbeite ich mit Formeln, in denen zwei Sorten von Variablen vorkommen, nämlich „spezielle" Variable und „Parametervariable". Die Parametervariablen sind für die Substitution von Parametern (genauer: Konstanten) reserviert, die speziellen Variablen bleiben frei. Ist φ eine Formel und x ein Tupel von speziellen Variablen, so ist φ_x die Formel, in der genau die freien Variablen speziell sind, die in x vorkommen. Zum Beispiel ist $\varphi_{xy}(xz) = \varphi_x(xz)$. Es sei $\varphi(x;y) := \varphi_x(x,y)$ und $\varphi^{-1}(x;y) := \varphi_y(x,y)$. Entsprechend sei, für $\Theta \subset L$, $\Theta_x := \{\varphi_x \mid \varphi \in \Theta\}$ und $\Theta^* := \{\varphi_x \mid \varphi \in \Theta,$ x ist frei in $\varphi\}$. Es kommt in Θ^* also jede mögliche Separation in spezielle Variable und Parametervariable vor.

Es sei $\Gamma \subset L^*$ und Y $\emptyset$-typdefinierbar. Eine *(Γ, Y)-Instanz* ist eine Formel $\varphi(x,c)$ mit $\varphi(x,y) \in \Gamma$ und $c \models Y^n$ für ein n. Ist c aus A, so ist das eine $(\Gamma, Y)(A)$-Instanz.[11]

Notation: Der Einfachheit zuliebe setze ich voraus, daß Y in der ersten Sorte ist. Ist c ein n-Tupel, so schreibe ich statt $c \models Y^n$ einfach nur $c \models Y$.

Eine *strikte (Γ, Y)-Formel* ist eine boolesche Kombination von (Γ, Y)-Instanzen.[12] Eine *strikte $(\Gamma, Y)(A)$-Formel* ist eine boolesche Kombination von $(\Gamma, Y)(A)$-Instanzen. Solche Formeln nenne ich *strikt-lokal*, im Gegensatz zu den *lokalen* Formeln, die ich nun bezüglich des $\exists$-Pseudomonsters $\mathcal{G}$ definieren werde:

1.11 **Definition**

(1) Eine *$\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formel* ist eine Formel über $\mathcal{G}$, die äquivalent ist zu einer strikten (Γ, Y)-Formel über $\mathcal{G}$.

(2) Eine *$\mathcal{G}$-$(\Gamma, Y)(A)$-Formel* ist eine $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formel mit Parametern aus A.

Der Unterschied zwischen lokalen und strikt-lokalen Formeln ist sehr wichtig für das Folgende, er zeigt sich besonders über Parametern: eine $\mathcal{G}$-$(\Gamma, Y)(A)$-Formel ist i.a. nicht äquivalent zu einer strikten $(\Gamma, Y)(A)$-Formel. Sie ist äquivalent zu einer strikten

[10] Im Anhang werde ich das für den Fall von typdefinierbaren Gruppen machen.
[11] Ist Y die Formel $y = y$, so lasse ich Y aus der Notation weg.
[12] Ich fasse $x = x$ und $x \neq x$ stets als (triviale) positive boolesche Kombination auf.

(Γ, Y)-Formel, deren Parameter jedoch nicht in A liegen müssen, aber immerhin noch in $\mathcal{G}$.

- Eine $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formel kann Parameter haben, die keine Realisierungen von Y sind.
- Wenn Y nicht definierbar ist, so hängt der Begriff der $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formel tatsächlich von $\mathcal{G}$ ab: Ist $\varphi(x)$ über $\mathcal{G}$ und $\phi(y) := \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x, y))$, so kann $Y(y) \cup \{\psi(y)\}$ konsistent sein, ohne in $\mathcal{G}$ realisiert zu sein. φ ist dann eine T-(Γ, Y)-Formel, aber keine $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formel. Ist Y definierbar, so gibt es kein Problem.
- Wir müssen mit diesem Begriff der lokalen Formeln arbeiten, weil wir später brauchen, daß alle „starken Typen" eines gegebenen lokalen Typs konjugiert sind.

Konvention: Es sei von nun an $\Gamma \subset \Delta_1^*$ und Y $\exists(\emptyset)$-typdefinierbar. Ich spreche nun nur noch von (Γ, Y)-Formeln, meine aber $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Formeln. Falls Y nicht definierbar ist, so setze ich voraus, daß alle Modelle $\mathcal{G}$-ω-saturiert sind.[13]

Dann ist stets die folgende Eigenschaft erfüllt:

(Y-Saturation) Ist $\varphi(y)$ eine Formel über einem Modell $\mathcal{U}$, so daß $Y^n \wedge \varphi$ in einem Obermodell von $\mathcal{U}$ realisiert ist, so ist $Y^n \wedge \varphi$ auch in $\mathcal{U}$ realisiert.

Es sei $(\Gamma_1, Y_1) \leq (\Gamma_2, Y_2)$, wenn jede (Γ_1, Y_1)-Formel auch eine (Γ_2, Y_2)-Formel ist. Dann gilt für alle $\mathcal{G}$-Parametermengen A: alle $(\Gamma_1, Y_1)(A)$-Formeln sind $(\Gamma_2, Y_2)(A)$-Formeln. Das ist falsch für die strikten lokalen Formeln über A. Ich nenne (Γ_1, Y_1) und (Γ_2, Y_2) *äquivalent*, wenn $(\Gamma_1, Y_1) \leq (\Gamma_2, Y_2)$ und $(\Gamma_2, Y_2) \leq (\Gamma_1, Y_1)$. Diese Begriffe hängen von $\mathcal{G}$ ab.

Beispiel:
(1) Es sei $\tilde{\Gamma}$ der Abschluß von Γ unter der Substitution von Parametervariablen (dabei dürfen natürlich keine speziellen Variable eingesetzt werden) und Γ^{bc} sei der Abschluß von Γ unter booleschen Kombinationen. Dann sind (Γ, Y), $(\tilde{\Gamma}, Y)$ und (Γ^{bc}, Y) äquivalent für jedes Y.
(2) Zu einer endlichen Menge $\Delta = \{\varphi_i(x; y_i) \mid i \leq n\}$ sei $\chi_\Delta(x; y_0 ... y_n, z, z_0 \ldots z_n) := \bigvee_i (\varphi_i(x, y_i) \wedge z_i = z)$, dann sind Δ und χ_Δ äquivalent (über jeder Parametermenge A mit $|Y^A| \geq 2$). Ich nenne χ_Δ die *kodierende Formel* von Δ.

Die $(\Gamma, Y)(A)$-Formeln bilden die boolesche Unteralgebra $L_{(\Gamma,Y)}(A)$ von $L(A)$, die strikten $(\Gamma, Y)(A)$-Formeln bilden die boolesche Unteralgebra $L^{\text{strikt}}_{(\Gamma,Y)}(A)$ von $L_{(\Gamma,Y)}(A)$. $S_{(\Gamma,Y)}(A)$ sei der zu $L_{(\Gamma,Y)}(A)$ gehörige Stone-Raum, die Typen in $S_{(\Gamma,Y)}(A)$ nenne ich auch $(\Gamma, Y)(A)$-*Typen*[14]. Entsprechend werden die *strikten* $(\Gamma, Y)(A)$-*Typen* gebildet. Weil Y existenziell ist und $\Gamma \subset \Delta_1^*$ sind alle diese Typen in $\mathcal{G}$ realisiert.

Für $(\Gamma', Y') \leq (\Gamma, Y)$ und $A' \subset A$ ist $L_{(\Gamma',Y')}(A') \leq L_{(\Gamma,Y)}(A)$, folglich induziert die Restriktion eine stetige Surjektion $S_{(\Gamma,Y)}(A) \twoheadrightarrow S_{(\Gamma',Y')}(A')$. Strikte $(\Gamma, Y)(A)$-Typen

[13] Das ist kein Problem, denn die $\mathcal{G}$-ω-saturierten Modelle in $\mathcal{G}$ bilden wieder ein Pseudomonster (Kapitel 1, 4.10). Das ist dann offensichtlich ein zu $\mathcal{G}$ äquivalentes $\exists$-Pseudomonster. Generische Modelle sind sowieso $\mathcal{G}$-ω-saturiert (Kapitel 1, 4.16).

[14] Wie der Begriff der (Γ, Y)-Formel hängt auch der Begriff des (Γ, Y)-Typs von $\mathcal{G}$ ab. Der Konvention von oben folgend deute ich diese Abhängigkeit in der Notation jedoch nicht an. Falls in Γ unendliche viele verschiedene spezielle Variable vorkommen, so kann man auch (Γ, Y)-$\star$-Typen betrachten.

sind partielle $(\Gamma, Y)(A)$-Typen und man hat die Surjektion $S_{(\Gamma,Y)}(A) \to S^{\text{strikt}}_{(\Gamma,Y)}(A)$, $p \mapsto p^{\text{strikt}}$. Ist Π ein partieller Typ über A, so sei $[\Pi]_{(\Gamma,Y)(A)}$ die Menge der $S_{(\Gamma,Y)}(A)$-Typen, die mit Π konsistent sind. Das ist eine abgeschlossene Menge in $S_{(\Gamma,Y)}(A)$.

Das folgende Beispiel ist trotz seiner Einfachheit sehr instruktiv. Ich werde es immer wieder erwähnen.

Das ID-Beispiel: Es sei $\mathrm{ID}_x := \{x = y\}$, wobei x die spezielle Variable ist und kein Tupel. Die strikten ID_x-Formeln definieren dann genau die endlichen bzw. coendlichen Mengen. Die strikten $\mathrm{ID}_x(A)$-Formeln definieren die endlichen Vereinigungen von endlichen Teilmengen von A und deren Komplementen, die strikten $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen entsprechen also den Punkten aus A und „dem“ Punkt außerhalb.
Die ID_x-Formeln definieren natürlich dieselben Mengen, wie die strikten ID_x-Formeln, die $\mathrm{ID}_x(A)$-Formeln jedoch definieren die endlichen Vereinigungen von endlichen A-definierbaren Teilmengen von $acl(A)$ und deren Komplementen. Die $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen entsprechen deshalb den algebraischen Typen über A und „dem" nichtalgebraischen Typ. Die $\mathrm{ID}_x(A)$-Formeln sind also genau die strikten $\mathrm{ID}_x(acl(A))$-Formeln.
Es sei ACL_x die Menge aller $\varphi(x; y) \in \mathrm{ACL}_T$.[15] Dann sind ID_x und ACL_x äquivalent, denn die strikten ACL_x-Formeln definieren auch genau die endlichen und die coendlichen Mengen. Es sind also für alle A die $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen äquivalent zu den $\mathrm{ACL}_x(A)$-Typen. Das ist falsch für die strikten Typen über A, denn die strikten $\mathrm{ACL}_x(A)$-Typen entsprechen den algebraischen Typen über A bzw. „dem“ nichtalgebraischen Typ. Der Grund ist, daß eine endliche bzw. coendliche Menge, die äquivalent zu einer $L(A)$-Formel ist, durch eine strikte $\mathrm{ACL}_x(A)$-Formel definiert wird.

ACL_x hat die besondere Eigenschaft, daß über jeder Parametermenge A jede $\mathrm{ACL}_x(A)$-Formel schon äquivalent ist zu einer strikten $\mathrm{ACL}_x(A)$-Formel. Für solche Familien können wir und also auf die strikten Formeln beschränken. Das ist eine für die lokale Stabilität weitreichende Eigenschaft, der ich nun einen Namen gebe.

Striktheit

1.12 **Definition** (Γ, Y) ist *$\mathcal{G}$-strikt über A*, wenn jede $\mathcal{G}$-$(\Gamma, Y)(A)$-Formel schon äquivalent zu einer strikten $(\Gamma, Y)(A)$-Formel ist. (Γ, Y) ist *$\mathcal{G}$-strikt*, wenn (Γ, Y) strikt über jeder $\mathcal{G}$-Parametermenge ist.

Ich verzichte wieder auf das „$\mathcal{G}$“ in der Notation.

1.13 **Lemma** (Γ, Y) ist strikt über Modellen.

Beweis
Es sei $\mathcal{U}$ ein Modell und $\psi(x)$ eine Formel über $\mathcal{U}$. Falls $\psi(x)$ äquivalent ist zu einer strikten (Γ, Y)-Formel $\varphi(x, c)$ über einem Obermodell, so ist $Y(y) \cup \forall x\ (\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x, y))$ in einem Obermodell realisiert, also auch in $\mathcal{U}$ wegen Y-Saturation. □

Die (Γ, Y)-Typen über Modellen sind durch ihre strikten (Γ, Y)-Formeln axiomatisiert. Ich werde i.a. deshalb einen $(\Gamma, Y)(\mathcal{U})$-Typ p mit seinem strikten Typ identifizieren. Allgemeiner gilt: (Γ, Y) ist genau dann strikt über A, wenn jeder $(\Gamma, Y)(A)$-Typ durch seinen strikten Typ axiomatisiert ist.

[15]Wir können uns auch auf die existenziellen Formeln in ACL beschränken, siehe Seite 28f.

Das ID-Beispiel: ACL_x ist strikt. ID_x ist strikt über algebraisch abgeschlossenen Mengen – und nur über solchen.[16] ID_x ist also genau dann strikt, wenn stets $acl(A) = A$ gilt.

Achtung: Ist $\Theta \subset L$, so ist eine Θ-Formel über A eine Formel aus Θ mit Parametern aus A, also eine *strikte* $\Theta^*(A)$-Formel. Insbesondere ist eine $\Delta_1^*(A)$-Formel i.a. nicht äquivalent zu einer $\Delta_1(A)$-Formel. Man muß also aufpassen, ob man eine Formel mit oder ohne Separation der Variablen betrachtet.

Das folgende Lemma ist der Grund dafür, daß sich viele modelltheoretische Methoden in Δ_1-Pseudomonstern besser verhalten, als allgemein in $\exists$-Pseudomonstern (siehe 2.32 und auch 3.53).

1.14 **Lemma**

(1) Ist $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster, so ist Δ_1^* $\mathcal{G}$-strikt.

(2) Ist $\mathcal{G}$ ein QF-Pseudomonster, so ist QF^* $\mathcal{G}$-strikt.

Beweis
(1) Es sei $\mathcal{U} \supset A$ ein hinreichend $\mathcal{G}$-saturiertes Modell und χ eine $\Delta_1^*(A)$-Formel. χ ist dann äquivalent ist zu einer Δ_1-Formel φ über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{D} := \varphi^{\mathcal{U}}$ ist eine A-invariante Δ_1-Menge. Wegen Kapitel 1, 2.21 (3) ist $\mathcal{D}$ äquivalent zu einer $\Delta_1(A)$-Formel, denn $\mathcal{U}$ ist ein Δ_1-Universalbereich (Kapitel 1, 4.19). Nach Definition sind die strikten $\Delta_1^*(A)$-Formeln genau die $\Delta_1(A)$-Formeln, χ ist also äquivalent zu einer strikten $\Delta_1^*(A)$-Formel.

(2) analog. □

Definierbarkeit

Ich sage nun, was **Definierbarkeit** für (Γ, Y)-Typen bedeutet. Die Dinge werden etwas unübersichtlicher durch die Einschränkung auf den partiellen Typ Y für die Wahl der Parameter. Zum Beispie könnenl definierbare (Γ, Y)-Typen nichtäquivalente Definitionen haben.

Es sei $\mathcal{U} \supset A$ ein $\mathcal{G}$-ω-saturiertes Modell, $p(x) \in S_{(\Gamma,Y)}(A)$ und $\psi_{(\Gamma,Y)} = (\psi_{\varphi(x;y)}(y))_{\varphi\in\Gamma}$ eine Familie von Formeln über $\mathcal{U}$, wobei y mit φ variieren darf. $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist eine *schwache Definition* von p, wenn für alle $c \in A$ gilt: $c \models Y$, so $\varphi(x,c) \in p \Leftrightarrow \mathcal{U} \models \psi_\varphi(c)$.[17]
Es sei $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U} :=$

$$\{\varphi(x,m) \mid \mathcal{U} \models \psi_\varphi(m), m \in Y^{\mathcal{U}}, \varphi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi(x,m) \mid \mathcal{U} \models \neg\psi_\varphi(m), m \in Y^{\mathcal{U}}, \varphi \in \Gamma\}$$

Es sei $q \in S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$. $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist genau dann eine schwache Definition von q, wenn $q = \psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$. Dann ist insbesondere $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$ konsistent. Ist umgekehrt $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$ konsistent, so ist $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U} \in S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$ und $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist eine schwache Definition von $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$.

[16] ACL_x ist sozusagen der strikte Abschluß von ID_x.

[17] Achtung, die Definition weicht etwas von der gewohnten Definition ab, weil zusätzlich auf Y restringiert wird. Das hat zur Folge, daß definierbare lokale Typen über Modellen keine kanonische Definition haben.

1.15 **Definition**

(1) $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist eine *gute* (Γ, Y)*-Definition*, wenn jede Formel in $\psi_{(\Gamma,Y)}$ Δ_1 ist und wenn $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$ konsistent ist.

(2) Eine gute (Γ, Y)-Definition $(\psi_\varphi)_{\varphi\in\Gamma}$ ist *über* A, wenn jedes ψ_φ über A ist. Dann ist $\psi_{(\Gamma,Y)}|A := (\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}) \restriction A$.[18]

(3) $p(x) \in S_{(\Gamma,Y)}(A)$ heißt *definierbar*, wenn es eine gute (Γ, Y)-Definition $\psi_{(\Gamma,Y)}$ über A gibt, so daß $p = \psi_{(\Gamma,Y)}|A$.

(4) Es sei $q \in S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$ definierbar und $\mathcal{V}$ ein Obermodell von $\mathcal{U}$. Dann ist $q|\mathcal{V} := \psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V}$, wobei $\psi_{(\Gamma,Y)}$ eine gute Definition von q ist.

Das ist alles wohldefiniert:

1.16 **Lemma** Es sei $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}$-ω-saturiert und $\mathcal{V}$ ein Obermodell.

(1) Ist $\psi'_{(\Gamma,Y)}$ eine gute (Γ, Y)-Definitionen über $\mathcal{U}$ und $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U} = \psi'_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$, so gilt auch $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V} = \psi'_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V}$.

(2) Ist Π ein partieller Typ über $\mathcal{U}$, so ist Π genau dann konsistent mit $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$, wenn Π konsistent ist mit $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V}$.

Beweis
(1) Angenommen $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V} \neq \psi'_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{V}$, dann gibt es $\varphi \in \Gamma$, so daß $\{\psi_\varphi(y) \wedge \neg\psi'_\varphi(y)\} \cup Y$ in $\mathcal{V}$ realisiert ist. Wegen Y-Saturation ist das auch in $\mathcal{U}$ realisiert und $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U} \neq \psi'_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$.

(2) Π sei gegen Konjunktionen abgeschlossen, Π ist genau dann konsistent mit $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$, wenn für jedes $\varphi(x; y) \in \Gamma$, $\chi \in \Pi$ und für jedes $k < \omega$ gilt:

$$(Y^k)^{\mathcal{U}} \subset \Big(\exists x\big(\chi \wedge \bigwedge_{i<k} (\varphi(x, y_i) \leftrightarrow \psi_\varphi(y_i))\big)\Big)^{\mathcal{U}}$$

Da $\mathcal{U}$ Y-saturiert ist folgt dann stets $(Y^k)^{\mathcal{V}} \subset \Big(\exists x\big(\chi \wedge \bigwedge_{i<k}(\varphi(x, y_i) \leftrightarrow \psi_\varphi(y_i))\big)\Big)^{\mathcal{V}}$, also ist auch $\psi|\mathcal{V}$ konsistent mit Π. $\square$

1.17 **Korollar**

(1) Die Definitionen oben sind unabhängig von der Wahl des $\mathcal{G}$-ω-saturierten Modells $\mathcal{U}$ und von $\psi_{(\Gamma,Y)}$.

(2) Es sei q ein definierbarer (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$. q ist genau dann ein (X, Γ, Y)-Typ, wenn $q|\mathcal{V}$ einer ist.

[18] $\psi_{(\Gamma,Y)}|A$ ist ein lokaler Typ, nicht nur ein strikt lokaler. Das verdeutlicht noch einmal die „nicht-Lokalität" des Begriffs des lokalen Typs: um $\psi_{(\Gamma,Y)}|A$ zu bestimmen reicht es nicht, (Γ, Y)-Instanzen über A zu betrachten.

Ein definierbarer Typ über einem $\mathcal{G}$-ω-saturierten Modell legt also über jedem Obermodell einen eindeutigen Typ fest. Für definierbare Typen über beliebigen Parametern ist das i.a. falsch.

Notation: q sei ein definierbarer (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$. $d_q = (d_q x\varphi(x,y))_{\varphi\in\Gamma}$ bezeichne eine gute (Γ, Y)-Definition von q. Dabei ist jedes $d_q x\varphi(x,y)$ eine gute (φ, Y)-Definition von $q \upharpoonright (\varphi, Y)$. **Achtung**, q kann nicht–äquivalente gute (Γ, Y)-Definitionen haben. Diese Mehrdeutigkeit ist kein Problem, weil die betrachteten Sachverhalte in der Regel unabhängig von der Wahl der guten Definition sein werden. Falls Y trivial ist, so taucht dieses Problem nicht auf.

1.18 **Lemma** Es sei q ein definierbarer (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$ und $\Gamma' \subset \Gamma^{bc}$. Der durch q axiomatisierte (Γ', Y) Typ $\tilde{q}$ über $\mathcal{U}$ ist definierbar und es gilt[19]

$$d_{\tilde{q}}\text{BC}(\varphi_1(x,y_1),...,\varphi_n(x,y_n)) = \text{BC}(d_q\varphi_1(x,y_1),...,d_q\varphi_n(x,y_n))$$

Beweis
Für alle $m_i \in Y^{\mathcal{U}}$ und $\varphi_i(x,y_i) \in \Gamma$ gilt:

$$\begin{aligned}\text{BC}(\varphi_1(x,m_1),...,\varphi_n(x,m_n)) \in \tilde{q} &\Leftrightarrow \text{BC}[\varphi_1(x,m_1) \in \tilde{q},...,\varphi_n(x,m_n) \in \tilde{q}] \\ &\Leftrightarrow \text{BC}[\varphi_1(x,m_1) \in q,...,\varphi_n(x,m_n) \in q] \\ &\Leftrightarrow \text{BC}(d_q\varphi_1(x,m_1),...,d_q\varphi_n(x,m_n)).\end{aligned}$$

□

Achtung, ob eine Menge von Δ_1-Formeln eine gute Definition ist oder nicht, hängt von $\mathcal{G}$ ab: $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$ kann konsistent sein obwohl es in $\mathrm{Mod}(T)$ „schlechte“ Parameter gibt, so daß $\psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{M}$ inkonsistent ist in einer saturierten elementaren Oberstruktur von $\mathcal{U}$. Damit wird die gesammte folgende Theorie von $\mathcal{G}$ abhängen.

2.2 Stabilität

In diesem Abschnitt werde ich den Begriff der **stabilen Relation** einführen und seine Interaktion mit der **Definierbarkeit von Typen**, der **Anzahl der Typen** und der **topologischen Struktur des Typenraums** betrachten. Die Definitionen und Beweise sind im wesentlichen klassisch aufgrund der hinreichenden Kompaktheit.

Die Indiscernible-Ordnungseigenschaft

Ich verschärfe hier die Definition der Ordnungseigenschaft. Es sei $\mathcal{M}$ eine Struktur und R eine Relation in $\mathcal{M}$. R hat die *Indiscernible-Ordnungseigenschaft in* $\mathcal{M}$, wenn es eine Indiscerniblefolge $(a_ib_i)_{i<\omega}$ in $\mathcal{M}$ gibt, so daß $Ra_ib_j \iff i < j$.

2.1 **Definition** Es sei $R(x,y)$ eine $\mathcal{G}$-invariante Relation.

(1) R hat die $\mathcal{G}$-Ordnungseigenschaft, wenn es ein Modell gibt, in dem R die Ordnungseigenschaft hat.

[19] Hier ist „BC“ ein Term in der Sprache der booleschen Algebren. Das Lemma sowie der Beweis sind unabhängig von der Wahl der guten Definition.

(2) R ist $\mathcal{G}$-stabil, wenn R in keinem Modell die Indiscernible-Ordnungseigenschaft hat.

Wegen der Verlängerbarkeit von Indiscerniblefolgen (1.6) folgt aus der $\mathcal{G}$-Instabilität schon, daß es für jede unendliche Ordnung I eine Indiscerniblefolge $(a_i b_i)_{i\in I}$ in einem Modell gibt mit $Ra_ib_j \iff i<j$. Rxy ist genau dann $\mathcal{G}$-stabil, wenn $\{Rxy\}\cup p(x)\cup q(y)$ $\mathcal{G}$-stabil ist für alle $\mathcal{G}$-Typen $p(x)$, $q(y)$ über $\emptyset$.[20]

Notation: An Stelle von „$(a_i)_{i\in I}$“ schreibe ich manchmal nur „$(a_i)_I$“ oder nur „(a_i)“.

2.2 **Lemma** Es seien R und R_i $\mathcal{G}$-invariant:

(1) Ist R $\mathcal{G}$-instabil, so auch $\neg R$ und R^{-1}.

(2) Sind R_1 und R_2 $\mathcal{G}$-stabil, so auch $R_1\wedge R_2$.

Beweis

(2) Bezeuge (a_ia_i', b_ib_i') die Indiscernible-Ordnungseigenschaft von $R_1xy\wedge R_2x'y'$. Für $i\geq j$ gilt dann $\neg R_1(a_i,b_j)$ oder $\neg R_2(a_i',b_j')$. Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine unendliche Teilfolge $J\subset I$, so daß für alle $i,j\in J$: $i\geq j\Rightarrow\neg R_1(a_i,b_j)$ oder für alle $i,j\in J$: $i\geq j\Rightarrow\neg R_2(a_i',b_j')$ gilt. Im ersten Fall bezeugt (a_i,b_i) die Ordnungseigenschaft von R_1, im zweiten Fall bezeugt (a_i',b_i') die Ordnungseigenschaft von R_2. □

2.3 **Korollar** Sind $R_i(x_i,y_i)$ $\mathcal{G}$-stabil und ist $R(x_1...x_n,y_1...y_n)$ eine boolesche Kombination der R_i, so ist auch R $\mathcal{G}$-stabil.

Die $\mathcal{G}$-invarianten $\mathcal{G}$-stabilen Relationen sind abgeschlossen gegen Variablensubstitution im folgenden Sinn: ist $R(x_1...x_n,y_1...y_n)$ $\mathcal{G}$-stabil, so auch $R(x_1'...x_n',y_1'...y_n')$, wobei $\{x_1',...,x_n'\}$ und $\{y_1',...,y_n'\}$ disjunkt sind. Untereinander müssen die x_i' bzw. die y_i' nicht paarweise verschieden sein.

Ich betrachte nun nur noch „relativ definierbare“ Relationen: eine $\mathcal{G}$-invariante Relation $R(x,y)$ heißt *relativ definierbar*, wenn es partielle $\exists(\emptyset)$-Typen $\Pi(x)$ und $\Phi(y)$ gibt und eine $\Delta_1^*(\emptyset)$-Formel $\varphi(x;y)$, so daß $R(x,y)$ und $\Pi(x)\wedge\varphi(x;y)\wedge\Phi(y)$ in jedem Modell dieselbe Relation definieren. Ich schreibe dann abkürzend $R\equiv\Pi\varphi\Phi$. Es seien X und Y $\exists(\emptyset)$-typdefinierbar und $\Gamma\subset\Delta_1^*$. Der Einfachheit zuliebe nehme ich an, daß X und Y in der ersten Sorte sind. Ich schreibe für die relativ definierbare Relation $X^k\varphi(x_1,...,x_k;y_1,...,y_l)Y^l$ auch $X\varphi Y$. (X,Γ,Y) fasse ich als die Familie der Relationen $X\varphi Y$ auf mit $\varphi\in\Gamma$.

2.4 **Definition** (X,Γ,Y) heißt *$\mathcal{G}$-stabil*, wenn jede Relation $X\varphi Y$ es ist $(\varphi\in\Gamma)$.

2.5 **Lemma** Es sind äquivalent:

(1) (X,Γ,Y) ist $\mathcal{G}$-stabil.

(2) (X,Γ,Y) hat nicht die $\mathcal{G}$-Ordnungseigenschaft.

(3) (X,Γ,Y) ist T-stabil.

[20] Achtung, eine invariante Relation kann stabil sein und trotzdem die Ordnungseigenschaft haben: es sei T die Theorie der Ordnung ω mit Konstanten für jedes Element von ω. Es sei R die Ordnung auf ω. R ist invariant und hat die Ordnungseigenschaft, die kann aber nicht durch Indiscernibles bezeugt werden.

BEWEIS
Es sei $\varphi \in \Gamma$. Wenn $X\varphi Y$ nicht T-stabil, so ist $\{X(x_i) \mid i < \kappa\} \cup \{\varphi(x_i, y_j) \mid i < j < \kappa\} \cup \{\neg\varphi(x_i, y_j) \mid j \leq i < \kappa\} \cup \{Y(y_j) \mid j < \kappa\}$ konsistent. Weil das ein partieller $\exists$-Typ ist, ist er in $\mathcal{G}$ realisiert und $X\varphi Y$ hat die $\mathcal{G}$-Ordnungseigenschaft. Ist κ groß genug, so gibt es wegen 1.6 auch eine realisierende Indiscerniblefolge in $\mathcal{G}$. $\square$

Wegen des Lemmas spreche ich nun nur noch von „Stabilität". Ist (X, Γ, Y) stabil, so auch (Y, Γ^{-1}, X). Dann können wir außerdem Γ unter booleschen Kombinationen und unter Variablensubstitution abschließen, ohne die Stabilität zu zerstören. Ich setze jedoch keine solche Abschlußeigenschaft voraus.

2.2.1 Charakterisierungen der Stabilität

Ich beweise hier die bekannte Äquivalenz von Stabilität, Definierbarkeit, geringer Anzahl von Typen und Existenz der lokalen Morleyränge.

Stabilität und Definierbarkeit

Im Beweis des nächsten Lemmas brauchen wir den folgenden Fakt über boolesche Algebren:

- eine Menge P ist genau dann keine positive boolesche Kombination[21] aus den Mengen $C_0, \ldots, C_{n-1}$, wenn es $a \in P$ und $b \notin P$ gibt, so daß für alle $i < n$ gilt: $a \in C_i \rightarrow b \in C_i$.

Das folgende kombinatorische Lemma ist der Kern der Definierbarkeit. Ich kenne es aus einem Stabilitätstheorieskript von Martin Ziegler.

2.6 **Lemma** Es sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, $A, C \subset M$ und $p(x) \in S_{\varphi(x;y)}(A)$ sei endlich erfüllt in C: ist p nicht schwach definierbar durch eine positive boolesche Kombination von $\varphi^{-1}(C)$-Instanzen, so hat die Relation $\varphi^{\mathcal{M}} \cap (C \times A)$ die Ordnungseigenschaft.

BEWEIS
Behauptung: es gibt Folgen (c_i) in C und (a_j), (b_j) in A, so daß

(i) $\varphi(x, a_j) \wedge \neg\varphi(x, b_j) \in p$ für alle j,

(ii) $\varphi(c_i, a_j) \rightarrow \varphi(c_i, b_j)$ für alle $i < j$,

(iii) $\varphi(c_i, a_j) \wedge \neg\varphi(c_i, b_j)$ für alle $i \geq j$.

Beweis (induktiv): es seien $a_j, b_j \in A$ und $c_i \in C$ für alle $i, j < n$ bereits gefunden, so daß (i) – (iii) erfüllt sind. Es sei $P = \{m \in A \mid \varphi(x, m) \in p\}$ und $C_i = \varphi(c_i, y)^{\mathcal{M}} \cap A$.

Da p nicht durch eine positive boolesche Kombination der $\varphi(c_i, y)$ $(i < n)$ definierbar ist, ist P keine positive boolesche Kombination aus den Mengen $C_0, \ldots, C_{n-1}$. Wegen der Bemerkung oben gibt es dann $a_n \in P$ und $b_n \in A \backslash P$, so daß (i) $\varphi(x, a_n) \wedge \neg\varphi(x, b_n) \in p$ und (ii) $\varphi(c_i, a_n) \rightarrow \varphi(c_i, b_n)$ für $i < n$.

[21] $\emptyset$ ist eine positive boolesche Kombination.

Es sei $p_n := \{\varphi(x,a_0), \neg\varphi(x,b_0), \ldots \varphi(x,a_n), \neg\varphi(x,b_n)\}$, wegen (i) ist $p_n \subset p$. Weil p in C endlich erfüllt ist, gibt es ein $c_n \in C$ mit $c_n \models p$. Dann gilt (iii) $\varphi(c_n, a_j) \wedge \neg\varphi(c_n, b_j)$ für $j \leq n$ (wegen (i)). Die verlängerten Folgen erfüllen also wieder (i) – (iii). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wegen des Satzes von Ramsey kann man annehmen, daß entweder $\varphi(c_i, a_j)$ für alle $i < j$ oder $\neg\varphi(c_i, a_j)$ für alle $i < j$. Im ersten Fall bezeugt (c_i), (b_j) die Ordnungseigenschaft von φ, im zweiten bezeugt (c_i), (a_j) die Ordnungseigenschaft von $\neg\varphi$. $\square$

Etwas modelltheoretischer formuliert klingt das so:

2.7 **Korollar** Es sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, in der $X\varphi Y$ nicht die Ordnungseigenschaft hat. Ist $q \in S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{M})$ in $X^{\mathcal{M}}$ endlich erfüllt, so ist q definierbar durch eine positive boolesche Kombination von $(\varphi^{-1}, X)(\mathcal{M})$-Instanzen.

Beweis

q ist durch seinen strikten (φ, Y)-Typ axiomatisiert. Das ist ein strikter φ-Typ p über $A = Y^{\mathcal{M}}$, der endlich erfüllt ist in $C = X^{\mathcal{M}}$. Da nach Voraussetzung $\varphi^{\mathcal{M}} \cap (C \times A)$ nicht die Ordnungseigenschaft hat, ist p nach dem Lemma schwach definierbar durch eine positive boolesche Kombination von φ^{-1}-Instanzen über C. Diese schwache Definition definiert dann auch q. Weil q über einem Modell ist, ist q deshalb definierbar. $\square$

Zurück in $\mathcal{G}$ folgt für jedes $\varphi \in \Gamma$:

2.8 **Satz** Es sei (X, φ, Y) stabil, dann ist jeder (X, φ, Y)-Typ über einem Modell $\mathcal{U}$ definierbar durch eine positive boolesche Kombination von (φ^{-1}, X)-Instanzen über $\mathcal{U}$.[22]

Beweis

Es sei p ein (X, φ, Y)-Typ über einem Modell $\mathcal{U}$. p ist (wegen X-Saturation und weil φ Δ_1 ist) endlich erfüllt in $X^{\mathcal{U}}$. Da $X\varphi Y$ stabil ist, hat $X\varphi Y$ nicht die Ordnungseigenschaft. Aus dem letzten Korollar folgt nun, daß p definierbar ist durch eine positive boolesche Kombination von $(\varphi^{-1}, X)(\mathcal{U})$-Instanzen. $\square$

Anmerkung: Es sei p ein (φ, Y)-Typ über einem Modell $\mathcal{U}$ und (φ, Y) stabil, dann ist p definierbar und d_p seine gute (φ, Y)-Definition. d_p ist eine φ^{-1}-Formel, ist aber nicht eindeutig bestimmt (siehe Seite 62). Wenn p nun konsistent ist mit X, also ein (X, φ, Y)-Typ, so gibt es wegen des letzten Satzes eine gute Definition von p, die aus (φ^{-1}, X)-Formeln besteht – das muß aber nicht für jede Wahl der Definition gelten. Aus dem jeweiligen Kontext wird hervorgehen, welche Art von Definition ich brauche.

Stabilität und Kardinalität

Ich werden nun zeigen, daß lokale Stabilität bedeutet, daß es nicht zu viele lokale Typen gibt.

[22] Um gut zu sein muß die (φ, Y)-Definition aus Δ_1-Formeln bestehen – das tut sie.

2.9 **Definition**
(X,Γ,Y) heißt $\mathcal{G}$-λ-stabil, wenn für alle $A \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ mit $|A| \leq \lambda$ gilt: $|S_{(X,\Gamma,Y)}(A)| \leq \lambda$.

A-priori ist nicht ausgechlossen, daß dieser Begriff von $\mathcal{G}$ abhängt, es könnte ja viele lokale Typen über T-Parametern geben, die nicht in $\mathcal{G}$ realisiert sind. Das ist aber nicht der Fall:

2.10 **Satz** Es sind äquivalent:
(1) Jeder (X,Γ,Y)-Typ über einem Modell ist definierbar.

(2) (X,Γ,Y) ist $\mathcal{G}$-λ-stabil für jedes λ mit $\lambda = \lambda^{|L|}$.

(3) (X,Γ,Y) ist $\mathcal{G}$-λ-stabil für ein unendliches λ.

(4) (X,Γ,Y) ist stabil.

Beweis
(1) nach (2): es habe A die Größe $\lambda = \lambda^{|L|}$, dann gibt es ein Modell $\mathcal{U} \supset A$ mit $|\mathcal{U}| = \lambda$. Über $\mathcal{U}$ sind höchstens $|\mathcal{U}|^{|L|}$-viele (Γ,Y)-Typen definierbar, wegen (1) ist insbesondere $|S_{(X,\Gamma,Y)}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{G}| \leq \lambda^{|L|} = \lambda$.

(2) nach (3) ist klar.

(3) nach (4): ist (X,Γ,Y) $\mathcal{G}$-λ-stabil, so sind auch alle (X,φ,Y) $\mathcal{G}$-λ-stabil. Aus dem nächsten Lemma folgt, daß dann jedes (X,φ,Y) stabil ist. Dann ist auch (X,Γ,Y) stabil.

(4) nach (1) folgt aus 2.8. □

Auch beim Begriff der $\mathcal{G}$-λ-Stabilität verzichte ich nun auf das „$\mathcal{G}$-“. Für die unvollständige Richtung (3) nach (4) müssen wir aus der Indiscernible-Ordnungseigenschaft viele Typen konstruieren, diese Konstruktion ist wohlbekannt: es sei $I = (I,<)$ eine totale Ordnung. Ein Schnitt in I ist eine Teilmenge $S \subset I$, so daß $\forall x,y\,(y < x \rightarrow (x \in S \rightarrow y \in S))$. Sind $(a_i)_I \subset X$ und $(b_i)_I \subset Y$ Folgen in einer Struktur mit $\varphi(a_i,b_j) \iff i < j$, so sei für einen Schnitt S $\Pi_S := \{\varphi(x,b_i) \mid i \notin S\} \cup \{\neg\varphi(x,b_i) \mid i \in S\}$. Dann ist Π_S endlich erfüllt in $\{a_i \mid i \in I\}$ und für verschiedene Schnitte S und S' ist $\Pi_S \cup \Pi_{S'}$ inkonsistent. Über $\{b_i \mid i \in I\}$ gibt es also mindestens so viele verschiedene (strikte) (X,φ,Y)-Typen, wie es Schnitte in I gibt. Zu jeder Kardinalzahl λ gibt es eine Ordnung der Kardinalität λ mit mehr als λ-vielen Schnitten.

2.11 **Lemma** Ist $X\varphi Y$ nicht stabil, so gibt es zu jedem unendlichen λ eine Parametermenge der Größe λ, über der es mehr als λ-viele (X,φ,Y)-Typen gibt.

Beweis
Es sei λ unendlich und I eine lineare Ordnung der Kardinalität λ, die mehr als λ-viele Schnitte hat. Es sei J eine Ordnung die I umfaßt und alle Schnitte von I realisiert (d.h. zu jedem Schnitt S in I gibt es ein $j_S \in J$, so daß $i_1 < j_S < i_2$ für alle $i_1 \in S$, $i_2 \in I \backslash S$). Wenn $X\varphi Y$ nicht stabil ist, so gibt es in einem Modell $(a_j b_j)_{j\in J} \subset X \times Y$ mit $\varphi(a_i,b_j) \iff i < j$. Die Konstruktion oben zeigt, daß es dann mehr als λ-viele strikte (X,φ,Y)-Typen über $\{b_i \mid i \in I\}$ gibt, die in $\{a_j \mid j \in J\}$ realisiert sind. □

Mit der Charakterisierung der Stabilität durch die Anzahl von lokalen Typen erhalten wir:

2.12 **Korollar** Es sei $(\Gamma',Y') \leq (\Gamma,Y)$. Wenn (Γ,Y) stabil ist, so auch (Γ',Y').

Stabilität und lokaler Morleyrang

Ein paar allgemeine Bemerkungen über den Cantor-Bendixon-Rang in der Stone-Korrespondenz habe ich in Anhang B.1 gemacht. Ist $\mathcal{U}$ ein Modell und Π ein partieller Typ über $\mathcal{U}$, so sei $\mathrm{CBRD}_{S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})}(\Pi)$ der Cantor-Bendixon (Rang, Grad) von $[\Pi]_{S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})}$ in $S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$.

2.13 **Lemma** Es sei $\mathcal{U}$ ein $\mathcal{G}$-ω-saturiertes Modell:

(1) Konjugierte partielle Typen über $\mathcal{U}$ haben denselben $\mathrm{CBRD}_{S_{(\Gamma,Y)}}$.

(2) Ist $\mathcal{U}'$ ein Obermodell, dann gilt für jeden partiellen Typ Π über $\mathcal{U}$: $\mathrm{CBRD}_{S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})}(\Pi) = \mathrm{CBRD}_{S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U}')}(\Pi)$.

Beweis
Es reicht wegen Anhang B, 1.1, in den booleschen Algebren der (Γ, Y)-Formeln zu argumentieren.

(1) Es sei $\psi(x, b)$ eine (Γ, Y)-Formel über $\mathcal{U}$ und $b \equiv b' \in \mathcal{U}$, dann gilt für jedes α: $R(\psi(x, b)) \geq \alpha + 1$ genau dann, wenn es paarweise inkonsistente (Γ, Y)-Formeln $\psi_i(x, b_i)$ über $\mathcal{U}$ gibt ($i < \omega$), so daß alle $\psi_i(x, b_i) \to \psi(x, b)$ und alle $R(\psi_i(x, b_i)) \geq \alpha$. Da $\mathcal{U}$ ω-homogen ist gibt es $b_i' \in \mathcal{U}$, so daß $b, b_1 b_2 \ldots \equiv b', b_1' b_2' \ldots$. Mit Induktion haben alle $\psi(x, b_i)$ einen Rang $\geq \alpha$, deshalb gilt $R(\psi(x, b')) \geq \alpha + 1$. Da der Induktionsanfang und die Limesschritte klar sind, folgt die Invarianz des Rangs. Analog geht das mit dem Grad.

(2) Induktiv und analog zu (1), denn jede Folge $b_i' \in \mathcal{U}'$ ist auch in $\mathcal{U}$ realisiert (über endlich vielen Parametern).[23] □

Deshalb ist der Morleyrang (Grad) wohldefiniert:

2.14 **Definition**

(1) Der $\mathcal{G}$-(Γ, Y)-Morleyrang (Grad) eines partiellen Typs über einem Modell ist der Cantor-Bendixon Rang (Grad) dieses Typs in einer $\mathcal{G}$-ω-saturierten Erweiterung.

(2) (Γ, Y) heißt $\mathcal{G}$-totaltranszendent, wenn der (Γ, Y)-Stoneraum von jedem Modell zerstreut ist.

(Γ, Y) ist schon dann $\mathcal{G}$-totaltranszendent, wenn es ein $\mathcal{G}$-ω-saturiertes Modell gibt mit zerstreutem (X, Γ, Y)-Stoneraum.

2.15 **Lemma** Ist (φ, Y) $\mathcal{G}$-totaltranszendent, so auch stabil.

Beweis
Indirekt: wenn (φ, Y) nicht stabil ist, so gibt es $(a_i, b_i)_{i \in \mathbb{Q}}$ in $\mathcal{G}$, wobei alle $b_i \models Y$ und $\varphi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$. Dann kann man mit geeigneten Paaren $b_i b_{i'}$ und der Formel $\neg\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y')$ einen 2-Baum der Höhe ω konstruieren, der die Zerstreutheit des (φ, Y)-Stoneraums zerstört. □

Es sei $\Sigma_{(\varphi,Y)}(\alpha) := \bigcup_{\mu \in {}^{\alpha}2} \{\varphi^{\mu(i)}(x_\mu, y_{\mu \restriction i}) \mid \mu \in {}^{\alpha}2, i < \alpha\} \cup \bigcup_{\nu \in {}^{<\alpha}2} Y(y_\nu)$, dabei ist $\varphi^0 = \neg\varphi$ und $\varphi^1 = \varphi$. Dieser partielle $\star$-Typ beschreibt einen φ-2-Baum der Höhe α (mit Parametern aus Y), für jedes $\mu \in {}^{\alpha}2$ ist $\{\varphi^{\mu(i)}(x_\mu, y_{\mu \restriction i}) \wedge Y(y_{\mu \restriction i}) \mid i < \alpha\}$ ein Ast in diesem Baum, verschiedene Äste sind miteinander inkonsistent.

[23] Es kann sein, daß sich der Rang verändert, wenn man in elementare Oberstrukturen geht, die keine Modelle sind.

2.16 **Lemma**

(1) Es sei $n < \omega$. Falls $MR_{(\varphi,Y)}(x = x) \geq n$, so ist $\Sigma_{(\varphi,Y)}(n)$ in $\mathcal{G}$ realisiert.

(2) Es sei λ unendlich und κ minimal mit $2^\kappa > \lambda$. Wenn $\Sigma_{(\varphi,Y)}(\kappa)$ in $\mathcal{G}$ realisiert ist, so ist (φ, Y) nicht λ-stabil.

Beweis
(1) Es sei $\mathcal{U}$ ein $\mathcal{G}$-ω-saturiertes Modell. Weil die (φ, Y)-Instanzen über $\mathcal{U}$ $L_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})$ erzeugen, gibt es (siehe Anhang B, 1.2) eine Funktion f, die jedem Paar $(\chi, n) \in L_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U}) \times \omega$ mit $MR_{(\varphi,Y)}(\chi) > n$ einen Parameter $f(\chi, n) \in Y^{\mathcal{U}}$ zuordnet mit $MR_{(\varphi,Y)}(\chi \wedge \varphi(x, f(\chi, n))) \geq n$ und $MR_{(\varphi,Y)}(\chi \wedge \neg\varphi(x, f(\chi, n))) \geq n$.

Mit der Funktion f kann man induktiv einen 2-Baum von Parametern konstruieren: es sei $b_\emptyset = f(x = x, n-1)$ und für $0 < i < n$ und $\nu \in {}^i2$ sei $b_\nu = f(\bigwedge_{j<i} \varphi^{\nu(j)}(x, b_{\nu\restriction j}), n-1-i)$. Dann gilt für jedes $\mu \in {}^n2$ und jedes $i \leq n$: $MR_{(\varphi,Y)}(\bigwedge_{j<i} \varphi^{\mu(j)}(x, b_{\mu\restriction j})) \geq n - i$. Insbesondere ist $MR_{(\varphi,Y)}(\bigwedge_{j<n} \varphi^{\mu(j)}(x, b_{\mu\restriction j})) \geq 0$ und deshalb ist $\Sigma_{(\varphi,Y)}(n)$ konsistent. Weil $\Sigma_{(\varphi,Y)}(n)$ endlich ist, ist es in $\mathcal{G}$ realisiert.

(2) Es sei $(b_\nu)_{\nu \in {}^{<\kappa}2}$ eine $\mathcal{G}$-Realisierung von $\Sigma_{(\varphi,Y)}(\kappa)$. Dann ist $|\{b_\nu \mid \nu \in {}^{<\kappa}2\}| = \lambda$, jeder Ast liefert einen partiellen strikten (φ, Y)-$\mathcal{G}$-Typ und die zu verschiedenen Ästen gehörenden partiellen Typen sind inkonsistent. Da es 2^κ viele verschiedene Äste gibt, folgt die Behauptung. □

2.17 **Satz** Es sei $\varphi \in \Gamma$, dann sind äquivalent:

(1) (φ, Y) ist stabil.

(2) alle $\mathcal{G}$-$MR_{(\varphi,Y)}$ sind endlich.

(3) (φ, Y) ist $\mathcal{G}$-totaltranszendent.

Beweis
Angenommen es gibt eine (φ, Y)-Formel mit unendlichem (φ, Y)-Morleyrang, dann ist auch $MR_{(\varphi,Y)}(x = x) \geq n$ für alle $n < \omega$ und alle $\Sigma_{(\varphi,Y)}(n)$ sind in $\mathcal{G}$ realisiert. Deshalb ist die $\exists(\emptyset)$-Formelmenge $\Sigma_{(\varphi,Y)}(\kappa)$ konsistent, also in $\mathcal{G}$ realisiert. Deshalb ist (φ, Y) in keinem λ stabil, also instabil. □

Wie üblich spreche ich nur noch von „totaltranszendent“ spreche. Die Abhängigkeit des Morleyrangs von $\mathcal{G}$ bleibt in der Notation erhalten. Der letzte Satz gilt auch für endliche Mengen $\Delta \subset \Gamma$, denn die Stoneräume $S_{(\Delta,Y)}(\mathcal{U})$ und $S_{(\chi_\Delta,Y)}(\mathcal{U})$ sind homöomorph und mit Δ ist auch χ_Δ stabil. Dabei ist χ_Δ die kodierende Formel von Δ (siehe Seite 60).

Ich fasse die Ergebnisse der letzten Abschnitte zusammen:

2.18 **Stabilitätssatz**

(1) Es sind äquivalent:

(i) (X, Γ, Y) ist stabil.

(ii) Jeder (X, Γ, Y)-Typ über einem Modell $\mathcal{U}$ ist definierbar durch eine positive boolesche Kombination von (Γ^{-1}, X)-Instanzen über $\mathcal{U}$.

(iii) Jeder (X,Γ,Y)-Typ über einem Modell ist definierbar.

(iv) (X,Γ,Y) ist λ-stabil für jedes unendliche λ mit $\lambda=\lambda^{|L|}$.

(v) (X,Γ,Y) ist λ-stabil für ein unendliches λ.

(2) Es sind äquivalent:

(i) (Γ,Y) ist stabil.

(ii) (Δ,Y) ist totaltranszendent für jedes endliche $\Delta\subset\Gamma$.

(iii) Alle $\mathcal{G}$-$MR_{(\Delta,Y)}$ sind endlich für jedes endliche $\Delta\subset\Gamma$.

2.2.2 Starke Typen und Stationarität

Es sei $\varphi(x,y)$ eine Δ_1-Formel und c ein Parameter aus $\mathcal{G}$. Wenn $\varphi(x,c)$ fast $\mathcal{U}$-invariant[24] ist, so ist $\varphi(x,c)$ äquivalent zu einer φ-Instanz über $\mathcal{U}$. [25] Deshalb kann ich annehmen, daß die Parameter der betrachteten fast A-invarianten Δ_1-Formeln aus einem vorgegebenen Modell kommen – sonst gäbe es zu viele solche Formeln.

Die Δ_1-Formeln, die fast A-invariant sind, bilden eine boolesche Algebra. Dasselbe gilt für die strikten (Γ,Y)-Formeln, die fast A-invariant sind; ihr Stoneraum ist $St_{(\Gamma,Y)}(A)$. Ein *starker* (Γ,Y)*-Typ* ist ein Elements eines solchen Stoneraums. Jede $(\Gamma,Y)(A)$-Formel ist äquivalent zu einer strikten fast A-invarianten $(\Gamma,Y)(A)$-Formel, deshalb haben wir die übliche Restriktion $\upharpoonright$: $St_{(\Gamma,Y)}(A)\to S_{(\Gamma,Y)}(A)$. Die Urbilder von $p\in S_{(\Gamma,Y)}(A)$ unter dieser Restriktion nenne ich *starke Typen von p*. Ist umgekehrt $\tilde p$ ein starker Typ von p, so ist p der *lokale Typ von $\tilde p$*. Alle starken (Γ,Y)-Typen sind in $\mathcal{G}$ realisiert und starke (Γ,Y)-Typen über Modellen sind durch ihre (strikten) lokalen Typen axiomatisiert.[26] Ein starker (X,Γ,Y)-Typ ist ein mit X konsistenter starker (Γ,Y)-Typ. $stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!_{A})$ ist der starke (Γ,Y)-Typ von a über A. Weil eine Δ_1-Menge genau dann fast A-invariant ist, wenn sie fast $acl(A)$-invariant ist (1.10), gilt stets $stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!_{A})=stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!_{acl(A)})$.

2.19 **Lemma** Zwei starke $(\Gamma,Y)(A)$-Typen sind genau dann A-konjugiert, wenn sie denselben $(\Gamma,Y)(A)$-Typ fortsetzen. Jeder $(\Gamma,Y)(A)$-Typ hat nur beschränkt viele starke Typen.

Beweis

Es sei p ein $(\Gamma,Y)(A)$-Typ, $a\models p$ und $\tilde p$ eine starker Typ von p. Dann ist $tp({}^{a}\!/\!_{A})\cup\tilde p$ konsistent, denn ist $\psi\in\tilde p$, so ist die Disjunktion der A-Konjugate von ψ eine A-invariante (Γ,Y)-Formel in $\tilde p$. Diese Disjunktion ist dann äquivalent zu einer $(\Gamma,Y)(A)$-Formel $\chi\in p$, deshalb liegt a in einem A-Konjugat von ψ. Also ist $tp({}^{a}\!/\!_{A})\cup\{\psi\}$ konsistent. Es sei b eine Realisierung von $\exists$-$tp({}^{a}\!/\!_{A})\cup\tilde p$, dann gilt $a\equiv_A b$ und folglich sind $\tilde p$ und $stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!_{A})$ A-konjugiert.

Umgekehrt stimmen A-konjugierte starke $(\Gamma,Y)(A)$-Typen auf A überein, setzen also denselben $(\Gamma,Y)(A)$-Typ fort. Die Anzahl der starken Typen eines lokalen Typs ist beschränkt durch die Anzahl aller Fortsetzungen auf ein gegebenes Obermodell. □

[24] Wegen 1.10 ist eine Δ_1-Formel genau dann $\mathcal{G}$-fast A-invariant, wenn sie T-fast A-invariant ist. Deshalb spreche ich nur noch von „fast A-Invarianz".

[25] $\varphi(x,c)$ ist wegen 1.10 äquivalent zu einer Formel $\psi(x,b)$ über $\mathcal{U}$. Es gibt dann ein $c'\in\mathcal{U}$ mit $c'b\equiv cb$ und $\varphi(x,c)$ ist äquivalent zu $\varphi(x,c')$.

[26] Ich lasse auch starke $\star$-Typen zu und die folgenden Ergebnisse gelten, falls nicht anders gesagt, auch für solche.

Beispiel: (Siehe dazu auch das Beispiel auf Seite 59.) Eine strikte ID_x-Formel ist genau dann fast A-invariant, wenn sie äquivalent ist zu einer strikten $\mathrm{ID}_x(acl(A))$-Formel. Die starken $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen sind daher identisch mit den strikten $\mathrm{ID}_x(acl(A))$-Typen; sie sind gegeben durch die Punkte aus $acl(A)$ und „dem" Punkt außerhalb. Die $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen sind die algebraischen Typen über A zusammen mit dem nichtalgebraischen Typ. Alle starken Typen eines $\mathrm{ID}_x(A)$-Typs sind also konjugiert. Die strikten $\mathrm{ID}_x(A)$-Typen sind gegeben durch die Punkte aus A und „dem" Punkt außerhalb. Es sei p der nichtalgebraische $\mathrm{ID}_x(A)$-Typ und p^{strikt} sein strikter $\mathrm{ID}_x(A)$-Typ. p hat genau einen starken Typ, dieser ist äquivalent zu p. p^{strikt} hat jedoch viele starke Typen, die meisten davon sind nicht-konjugiert.[27]

2.20 **Definition** Es sei $\psi_{(\Gamma,Y)} = (\psi_{(\varphi,Y)})_{\varphi\in\Gamma}$ eine gute (Γ, Y)-Definition[28] und $\tilde{p} \in St_{(\Gamma,Y)}(A)$.

(1) $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist *fast A-invariant*, wenn jedes $\psi_{(\varphi,Y)}$ fast A-invariant ist.

(2) $\psi_{(\Gamma,Y)}$ ist eine *gute Definition von $\tilde{p}$*, wenn $\psi_{(\Gamma,Y)}$ fast A-invariant ist $\tilde{p} \subset \psi_{(\Gamma,Y)}|\mathcal{U}$.

(3) $\tilde{p}$ ist *fast definierbar*, wenn $\tilde{p}$ eine gute Definition hat.

(4) Es sei $A_0 \subset A$. $\tilde{p}$ heißt *fast A_0-definierbar*, wenn $\tilde{p}$ fast definierbar ist durch eine gute Definition, die fast A_0-invariant ist.

(5) $\tilde{p}$ heißt *stationär*, wenn $\tilde{p}$ fast definierbar ist und alle guten Definitionen von $\tilde{p}$ denselben (Γ, Y)-Typ $\tilde{p}|\mathcal{U}$ über $\mathcal{U}$ definieren. „$d_{\tilde{p}}$" bezeichnet dann eine gute Definition von $\tilde{p}|\mathcal{U}$.

(6) Wenn $\tilde{p}$ stationär ist und $B \supset A$, dann sei $\tilde{p}|B$ die Restriktion von $\tilde{p}|\mathcal{U}$ auf den starken Typ über B.

Jeder über einer kleinen Parametermenge aus $\mathcal{U}$ fast definierbare starke lokale Typ ist die Restriktion eines definierbaren lokalen Typs über $\mathcal{U}$. Ist $\tilde{p}$ stationär, so auch $\tilde{p}|B$. Stationäre Typen können nichtäquivalente gute Definitionen haben wegen der Einschränkung der Parameter auf Y. Die Notation „$d_{\tilde{p}}$" ist deshalb mit Vorsicht zu genießen (siehe auch die Anmerkungen auf Seiten 62 und 65). Daß mit (X, φ, Y) auch (Y, φ^{-1}, X) stabil ist werde ich nun ständig verwenden.

2.21 **Stationaritätssatz (Hauptsatz über starke Typen)**

Es sei Γ stabil: starke (Γ, Y)-Typen sind stationär.

Beweis

Es sei $\tilde{p} \in St_{(\Gamma,Y)}(A)$, für $\Delta \subset \Gamma$ sei $\tilde{p}_\Delta := \tilde{p} \restriction (\Delta, Y)$.

Behauptung 1: Für jedes endliche $\Delta \subset \Gamma$ ist $\tilde{p}_\Delta$ fast definierbar.

Beweis: Es sei $\tilde{r}$ eine Fortsetzung von $\tilde{p}_\Delta$ zu einem starken Δ-Typ über A, es reicht zu zeigen, daß $\tilde{r}$ fast definierbar ist. Es sei r der lokale Typ von $\tilde{r}$ und R die Menge

[27] Es gilt sogar die folgende Umkehrung: es sei p ein partieller lokaler Typ über A, der einen strikten lokalen Typ über A fortsetzt: p axiomatisiert genau dann einen lokalen Typ über A, wenn alle starken lokalen Typen über A, die p fortsetzen, A-konjugiert sind.

[28] Ich erinnere daran, daß gute Definitionen Δ_1 sind.

der Fortsetzungen von r nach $S_\Delta(\mathcal{U})$. R ist eine abgeschlossene $Aut_A(\mathcal{U})$-invariante (nichtleere) Teilmenge von $S_\Delta(\mathcal{U})$. Weil Δ totaltranszendent ist (2.18), gibt es in R endlich viele Typen von maximalem $\mathcal{G}$-Morleyrang. Ist q ein solcher, so ist jedes $Aut_A(\mathcal{U})$-Konjugat auch von maximalem Morleyrang in R, also gibt es nur endlich viele solche Konjugate. Wegen 2.18 ist q definierbar und es hat auch d_q nur endlich viele[29] $Aut_A(\mathcal{U})$-Konjugate. d_q ist also fast A-invariant ($\mathcal{U}$ ist hinreichend groß) und q fast A-definierbar. Die Restriktion $\tilde{q}$ von q auf den starken Typ über A ist also fast definierbar, weil $\tilde{q}$ und $\tilde{r}$ konjugiert sind, ist auch $\tilde{r}$ fast definierbar.

Behauptung 2: Für jedes $\varphi \in \Gamma$ ist $\tilde{p}_\varphi$ stationär.

Beweis: Wegen Behauptung 1 ist $\tilde{p}_\varphi$ fast definierbar. Für $i = 1, 2$ seien $p_i \in S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})$ definiert durch zwei gute Definitionen von $\tilde{p}_\varphi$, zu zeigen ist $p_1 = p_2$:
Es sei $m \in Y^{\mathcal{U}}$, dann gibt es wegen Behauptung 1 (angewendet auf φ^{-1}) eine fast A-definierbare Fortsetzung $r \in S_{(\varphi^{-1})}(\mathcal{U})$ von $stp_{\varphi^{-1}}(m/A)$. dr ist fast A-invariant, deshalb gilt $dr \in p_i \Leftrightarrow dr \in \tilde{p}_\varphi$, also gilt

$$\text{(i) } dr \in p_1 \Leftrightarrow dr \in p_2$$

Weil auch d_{p_i} fast A-invariant ist, gilt $d_{p_i} \in r \Leftrightarrow m \models d_{p_i} \Leftrightarrow \varphi(x,m) \in p_i$. Aus dem nächsten Lemma folgt nun $d_{p_i} \in r \Leftrightarrow dr \in p_i$, also gilt

$$\text{(ii) } dr \in p_i \Leftrightarrow \varphi(x,m) \in p_i$$

Aus (i) und (ii) folgt $\varphi(x,m) \in p_1 \Leftrightarrow \varphi(x,m) \in p_2$. Da die p_i durch (φ, Y)-Instanzen und deren Negate axiomatisiert sind, folgt $p_1 = p_2$.

Behauptung 3: $\tilde{p}$ ist fast definierbar.

Beweis: Wegen Behauptung 1 ist $\tilde{p}_\Delta$ fast definierbar für jedes endliche $\Delta \subset \Gamma$ und wegen Behauptung 2 ist $(d_{\tilde{p}_\varphi})_{\varphi\in\Delta}$ eine gute (Δ, Y)-Definition von $\tilde{p}_\Delta$. Mit Kompaktheit ist dann $(d_{\tilde{p}_\varphi})_{\varphi\in\Gamma}|\mathcal{U}$ konsistent, deshalb ist $(d_{\tilde{p}_\varphi})_{\varphi\in\Gamma}$ eine gute (Γ, Y)-Definition von $\tilde{p}$.

Die Stationarität von $\tilde{p}$ folgt nun aus Behauptung 2 und 3. □

2.22 Lemma
Es sei $\varphi(x;y) \in \Gamma$ und (X, φ, Y) stabil. Es sei $\mathcal{V}$ ein Modell, $p(x) \in S_{(X,\varphi,Y)}(\mathcal{V})$ und $q(y) \in S_{(Y,\varphi^{-1},X)}(\mathcal{V})$: p und q sind stationär und es gilt $dp \in q \iff dq \in p$.

Beweis
Ich arbeite in einem großen Obermodell $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$. p und q sind wegen Stabilität (fast) definierbar (2.18) und stationär wegen 1.16. Es seien induktiv für $k < \omega$ Folgen $(a_i)_{i<k}$ in X und $(b_j)_{j<k}$ in Y konstruiert, so daß für alle $i < k$ gilt: $a_i \models p|\mathcal{V}b_{<i}$ und $b_i \models q|\mathcal{V}a_{\leq i}$. Dann gibt es $a_k \models X \cup p|\mathcal{V}b_{<k}$ und entsprechend ein $b_k \models Y \cup q|\mathcal{V}a_{\leq k}$. Für die so konstruierten Folgen $(a_i)_{i<\omega}$ in X und $(b_j)_{j<\omega}$ in Y gilt dann: $i > j$, so $a_i \models p|\mathcal{V}b_{\leq j}$ und $i \leq j$, so $b_j \models q|\mathcal{V}a_{\leq i}$.

Es sei $dp \in q$, dann reicht zu zeigen, daß ein $a_i \models dq$, denn dq ist eine (φ, Y)-Formel über $\mathcal{V}$ und alle a_i haben denselben (φ, Y)-Typ über $\mathcal{V}$. Wegen $dp \in q$ gilt für jedes j: $b_j \models dp$, also $\varphi(x, b_j) \in p|\mathcal{V}b_{\leq j} = tp_{(\varphi,Y)}(a_i/\mathcal{V}b_{\leq j})$ für jedes $i > j$. Es gilt also für alle $i, j < \omega$: $i > j \Rightarrow \varphi(a_i, b_j)$. Da φ stabil ist, gibt es $i \leq j$ mit $\varphi(a_i, b_j)$, also $\varphi(a_i, y) \in tp_{(\varphi^{-1},X)}(b_j/\mathcal{V}a_{\leq i}) = q|\mathcal{V}a_{\leq i} \subset q|\tilde{\mathcal{V}}$ und somit $a_i \models d(q|\tilde{\mathcal{V}}) = dq$. □

[29] Deshalb arbeite ich nicht in $S_{(\Delta,Y)}(\mathcal{U})$, sondern in $S_\Delta(\mathcal{U})$.

Es ist dieses Lemma, welches die Maschinerie in Gang bringt. In seinem Beweis tauchte die Ordnungseigenschaft das letzte mal auf. Mit dem Stationaritätssatz bekommen wir eine allgemeinere Form:

2.23 **Symmetriesatz** Es sei Γ stabil, $\varphi(x;y) \in \Gamma$, $\tilde{p}(x)$ ein starker $(X,\varphi,Y)(A)$-Typ und $\tilde{q}(y)$ ein starker $(Y,\varphi^{-1},X)(A)$-Typ:[30]

$$d_{\tilde{p}} \in \tilde{q} \iff d_{\tilde{q}} \in \tilde{p}$$

Beweis
Weil $d_{\tilde{p}} = d_{\tilde{p}|\mathcal{U}}$ fast A-invariant ist, gilt $d_{\tilde{p}} \in \tilde{q} \Leftrightarrow d_{\tilde{p}|\mathcal{U}} \in \tilde{q}|\mathcal{U}$, entsprechend $d_{\tilde{q}} \in \tilde{p} \Leftrightarrow d_{\tilde{q}|\mathcal{U}} \in \tilde{p}|\mathcal{U}$. Damit folgt die Behauptung aus dem letzten Lemma. □

2.24 **Definition**
Es sei Γ stabil und $\psi(x;y) \in \Gamma^{bc}$: $\tilde{\psi}_{(m,A)} := d_{stp_{\psi^{-1}}(m/A)}$ und $\tilde{\psi^{-1}}_{(a,A)} := d_{stp_{\psi}(a/A)}$.

Diese Formeln werden im weiteren Verlauf eine zentrale Rolle spielen. $\tilde{\psi}_{(m,A)}$ hat x als freie Variable und ist eine fast A-invariante Γ-Formel. Falls $m \models Y$, so ist das sogar eine (Γ,Y)-Formel (siehe 2.8). Den Symmetriesatz werde ich oft in der folgenden Version verwenden:

2.25 **Lemma** Es sei Γ stabil, $\psi(x,m)$ eine strikte (Γ,Y)-Formel und $\tilde{p}$ ein starker (Γ,Y)-Typ über A:

$$\tilde{\psi}_{(m,A)}(x) \in \tilde{p} \iff \psi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}$$

Lokale Stabilität bedeutet, daß jeder lokale Typ definierbar ist, daß es also viele gute Definitionen gibt. Die Symmetrie zeigt sogar noch mehr, daß nämlich die guten Definitionen das gesammte Geschehen kontrolliern:

2.26 **Satz** Es sei Γ stabil und $\tilde{p}$ ein starker $(\Gamma,Y)(A)$-Typ: $\tilde{p}$ ist axiomatisiert durch

$$\{\tilde{\varphi}_{(m,A)}(x) | \varphi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}, \varphi \in \Gamma \text{ oder } \neg\varphi \in \Gamma\}$$

Beweis
Es sei $\tilde{p}_0 = \{\tilde{\varphi}_{(m,A)}(x) | \varphi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}, \varphi \in \Gamma \text{ oder } \neg\varphi \in \Gamma\}$. Wegen des Symmetriesatzes gilt $\varphi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U} \Leftrightarrow \tilde{\varphi}_{(m,A)}(x) \in \tilde{p}$, insbesondere $\tilde{p}_0 \subset \tilde{p}$. Es sei $\tilde{q} \supset \tilde{p}_0$ ein starker $(\Gamma,Y)(A)$-Typ, dann gilt $\varphi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U} \Leftrightarrow \tilde{\varphi}_{(m,A)} \in \tilde{p}_0 \Rightarrow \tilde{\varphi}_{(m,A)} \in \tilde{q} \Leftrightarrow \varphi(x,m) \in \tilde{q}|\mathcal{U}$ für jedes $(\neg)\varphi \in \Gamma$. Daraus folgt $\tilde{q}|\mathcal{U} = \tilde{p}|\mathcal{U}$ und $\tilde{q} = \tilde{p}$, also ist $\tilde{p}$ durch $\tilde{p}_0$ axiomatisiert. □

2.27 **(Abgeschlossenheit)** Es sei $A \subset B$. Es gibt einen partiellen (Γ,Y)-Typ über B, der genau mit den starken $(\Gamma,Y)(B)$-Typen konsistent ist, die fast A-definierbar sind.

[30] Hier sowie im vorigen Lemma sind die guten Definitionen natürlich als (φ^{-1},X)-Formel bzw. als (φ,Y)-Formel gewählt. Abgesehen davon ist alles unabhängig von der Wahl der guten Definitionen.

Beweis

Weil die Restriktion $S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U}) \to St_{(\Gamma,Y)}(B)$ abgeschlossen ist können wir $B = \mathcal{U}$ annehmen. Es sei $\Pi := \{\varphi(x,m) \leftrightarrow \tilde{\varphi}_{(m,A)}(x) \mid m \in Y^{\mathcal{U}}, \varphi \in \Gamma\}$. Jedes $\tilde{\varphi}_{(m,A)}(x)$ ist eine fast A-invariante (φ, Y)-Formel und Π ist ein partieller (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$. Es sei $q \in S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$ und $\tilde{p}$ der von q axiomatisierte starke Typ über A, dann gilt:

$$\begin{aligned} q \text{ ist konsistent mit } \Pi &\Leftrightarrow \text{für alle } m \in Y^{\mathcal{U}} \text{ und } \varphi \in \Gamma\text{: } (\varphi(x,m) \in q \Leftrightarrow \tilde{\varphi}_{(m,A)} \in \tilde{p}) \\ &\Leftrightarrow \text{für alle } m \in Y^{\mathcal{U}} \text{ und } \varphi \in \Gamma\text{: } (\varphi(x,m) \in q \Leftrightarrow \varphi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}) \\ &\Leftrightarrow q = \tilde{p}|\mathcal{U}. \end{aligned}$$

Weil q genau dann fast A-definierbar ist, wenn $q = \tilde{p}|\mathcal{U}$, sind wir fertig. □

Für das folgende Resultat brauche ich, daß für $\psi(x;y) \in \Gamma$ $\tilde{\psi}_{(m,A)}(x)$ sogar äquivalent ist zu einer positiven booleschen Kombination von A-Konjugaten von $\psi(x,m)$. Es sei $Z = \exists\text{-}tp(m/A)$ und $\tilde{r} = stp_{\psi^{-1}}(m/A)|\mathcal{U}$. $\tilde{r}$ ist dann konsistent mit Z und, wenn man über A argumentiert, definierbar durch eine positive boolesche Kombination von (ψ, Z)-Instanzen. Nun erhält aber $m \mapsto n$ für jedes $n \in Z^{\mathcal{U}}$ die $\exists(A)$-Formeln, ist also elementar. Jede (ψ, Z)-Instanz ist also ein A-Konjugat von $\psi(x,m)$.

Notation: Es sei Γ stabil und $\varphi(x;y) \in \Gamma$: $\varphi_{(m,A)}$ sei die Disjunktion der endlich vielen A-Konjugate von $\tilde{\varphi}_{(m,A)}(x)$, entsprechend wird $\varphi^{-1}_{(m,A)}$ definiert.

2.28 **Satz** Es sei Γ stabil. Es sei $\tilde{q}$ ein starker (Γ, Y)-Typ über $B \supset A$, dann sind äquivalent:

(1) $\tilde{q}$ ist fast A-definierbar.

(2) Für jedes $\psi(x,m) \in \tilde{q}$ gilt: $\psi_{(m,A)} \in \tilde{q}$.

(3) Zu jedem $\psi \in \tilde{q}$ gibt es eine $(\Gamma, Y)(A)$-Formel $\psi_A \in \tilde{q}$, die äquivalent ist zu einer positiven booleschen Kombination von A-Konjugaten von ψ.

Beweis

Wir können annehmen, daß Γ abgeschlossen ist unter booleschen Kombinationen.

(1) nach (2): Ist $\tilde{q}$ fast A-definierbar und $\psi(x,m) \in \tilde{q}$, so ist $\tilde{\psi}_{(m,A)} \in \tilde{q}$ wegen Symmetrie, also auch $\psi_{(m,A)}$.

(2) nach (3): Wegen der vorigen Bemerkung ist $\tilde{\psi}_{(m,A)}$ äquivalent zu einer positiven booleschen Kombination von A-Konjugaten von $\psi(x,m)$, also auch $\psi_{(m,A)}$. Weil $\psi_{(m,A)}$ eine A-invariante Δ_1-Formel ist, ist sie äquivalent zu einer $L(A)$-Formel ψ_A.

(3) nach (1): Es sei p der in $\tilde{q}$ enthaltene $(\Gamma, Y)(A)$-Typ und X die Menge der fast A-definierbaren starken $(\Gamma, Y)(B)$-Typen, die p fortsetzen. Wegen (Abgeschlossenheit) reicht es zu zeigen, daß X von $\tilde{q}$ berührt wird. Es sei $\psi \in \tilde{q}$ und ψ_A wie in (3). Dann ist $\psi_A \in \tilde{r}$ für jedes $\tilde{r} \in X$ und wegen der speziellen Gestalt von ψ_A enthält jedes $\tilde{r} \in X$ ein A-Konjugat von ψ. Es gibt also ein A-Konjugat $\tilde{r}$ eines starken Typs aus X mit $\psi(x,m) \in r$. Dann ist $\tilde{r}|\mathcal{U}$ eine fast A-definierbare Fortsetzung von p, also identisch mit $\tilde{q}|\mathcal{U}$ für ein $\tilde{q} \in X$ und es gilt $\psi \in \tilde{q}$. $\tilde{q}$ berührt also X. □

Die fast A-Definierbarkeit von $\tilde{q}$ entscheidet sich auf der „Parameterseite". Der Satz besagt, daß sie sich auf der „Variablenseite" wiederspiegelt. Man beachte, daß man in (2) nur die Formeln testen muß, deren Parameter nicht aus A kommen, denn falls $m \in A$, so ist $\psi_{(m,A)}(x) = \psi(x,m)$.

2.29 **Korollar** Es sei Γ stabil und $(\Gamma', Y') \leq (\Gamma, Y)$. $\tilde{q}$ sei ein starker $(\Gamma, Y)(B)$-Typ und $\tilde{p}$ seine Restriktion auf (Γ', Y'). Wenn $\tilde{q}$ fast A-definierbar ist, so auch $\tilde{p}$.

Beweis
Mit Γ ist auch Γ' stabil (2.12). Es sei $\tilde{q}$ fast A-definierbar und $\psi(x,m) \in \tilde{p}$. Dann ist auch $\psi(x,m) \in \tilde{q}$ und es gibt wegen des Satzes eine $L(A)$-Formel $\psi_A \in \tilde{q}$, die äquivalent ist zu einer eine positiven boolesche Kombination von A-Konjugaten von $\psi(x,m)$. ψ_A ist dann eine (Γ', Y')-Formel, also $\psi_A \in \tilde{p}$. Wegen des Satzes ist $\tilde{p}$ fast A-definierbar. □

2.30 **Lemma** Es sei Δ endlich und stabil. Ein (Δ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$ ist genau dann fast A-definierbar, wenn er nur endlich viele $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{U})$-Konjugate hat.

Beweis
Es sei $p \in S_{(\Delta,Y)}(\mathcal{U})$. Es sei P die Menge der mit p konsistenten Typen in $S_\Delta(\mathcal{U})$. Wegen Stabilität ist Δ totaltranszendent (2.18) und es gibt endlich viele Elemente in P von maximalem lokalen $\mathcal{G}$-Morleyrang. Dasselbe gilt für jedes A-Konjugat von p. Es sei $r \in P$ von maximalem Rang, wenn p nur endlich viele A-Konjugate hat, dann gilt das folglich auch für r. d_r ist dann fast über A und auch eine gute Definition von p. Es sei umgekehrt p fast A-definierbar. Jedes A-Konjugat von p wird durch ein A-Konjugat von d_p definiert, davon gibt es nur endlich viele. □

2.31 **Konsistenzlemma** Es sei Γ stabil, $\Psi(x)$ ein partieller existenzieller Typ über A und $\tilde{p}(x)$ ein starker $(\Gamma, Y)(A)$-Typ. Wenn Ψ konsistent ist mit $\tilde{p}$, so auch mit $\tilde{p}|\mathcal{U}$.

Beweis
Es sei Ψ konsistent mit $\tilde{p}$, p der lokale Typ von $\tilde{p}$ und $\Delta \subset \Gamma$ endlich. Es sei R die Menge der $(\Delta, Y)(\mathcal{U})$-Typen, die mit $\Psi \cup p \restriction (\Delta, Y)$ konsistent sind und r mit maximalem $\mathcal{G}$-(Δ, Y)-Morleyrang in R. r existiert wegen Stabilität und ist fast A-definierbar (vergl. Beweis von Behauptung 1 beim Stationaritätssatz). Die Restriktion von r auf den starken Typ über A ist dann A-konjugiert (2.19) mit $\tilde{p} \restriction (\Delta, Y)$, denn beide starken Typen haben denselben lokalen Typ. Wegen Stationarität sind dann auch r und $(\tilde{p} \restriction (\Delta, Y))|\mathcal{U}$ A-konjugiert und $(\tilde{p} \restriction (\Delta, Y))|\mathcal{U} = (\tilde{p}|\mathcal{U}) \restriction (\Delta, Y)$. Deshalb ist Ψ konsistent mit $(\tilde{p}|\mathcal{U}) \restriction (\Delta, Y)$. Mit Kompaktheit folgt das Gewünschte.[31] □

Anmerkung zu Imaginären

Starke lokale Typen über A sind dasselbe wie starke lokale Typen über $acl(A)$. Unter geeigneten Voraussetzungen sind starke lokale Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen durch ihre lokalen Typen axiomatisiert: Angenommen $\mathcal{G}$ besteht aus $\exists$-Universalbereichen, die über jeder (kleinen) Parametermenge Δ_1-Imaginärenelimination haben. Es sei $\varphi(x)$ eine strikte (Γ, Y)-Formel, die fast A-invariant ist.

Frage: ist $\varphi(x)$ $acl(A)$-invariant?

Antwort: Nicht ganz! Die Äquivalenzrelation $E_\varphi(x,x') := \bigwedge_{\sigma \in \mathrm{Aut}_A} (\varphi^\sigma(x) \leftrightarrow \varphi(x')^\sigma)$ ist Δ_1-definiert und A-invariant. *Falls* E_φ sogar durch eine Δ_1-Formel über $acl(A)$

[31] Es wurde nicht gebraucht, daß Ψ existenziell ist.

definiert werden kann, so ist wegen (Δ_1-IE) über $acl(A)$ jede der endlich vielen E_φ-Klassen $acl(A)$-invariant. Damit ist auch $\varphi(x)$ $acl(A)$-invariant. Die Antwort wäre also „Ja!“, wenn jede $acl(A)$-invariante Δ_1-Formel äquivalent wäre zu einer Δ_1-Formel über $acl(A)$.[32]

2.32 **Lemma** $\mathcal{G}$ bestehe aus Δ_1-Universalbereichen mit Δ_1-Imaginärenelimination. Dann ist jeder starke (Γ, Y)-Typ über A axiomatisiert durch seinen (Γ, Y)-Typ über $acl(A)$.

Beweis
Δ_1-Universalbereiche mit (Δ_1-IE) haben nach Kapitel 1, 2.26 auch über Parametern (Δ_1-IE). Außerdem ist Δ_1^* strikt in $\mathcal{G}$ (1.14). Aus der vorangegangenen Bemerkung folgt, daß jede strikte (Γ, Y)-Formel, die fast A-invariant ist, schon $acl(A)$-invariant ist. Das reicht. □

Besteht $\mathcal{G}$ aus Δ_1-Universalbereichen, so können wir $\mathcal{G}^{eq}$ konstruieren (Kapitel 1, 31) und starke lokale Typen durch lokale Typen über acl^{eq}-abgeschlossenen Mengen ersetzen. In der allgemeinen Situation scheitert das erstens an der fehlenden Striktheit und zweitens daran, daß man keine (Δ_1-IE) über Parametern garantieren kann.

2.3 Lokale Stabilität in generischen Modellen

Von nun an sei Γ stabil. Dann sind auch Γ^{-1}, (X, Γ, Y) und (Y, Γ^{-1}, X) stabil. In Γ dürfen unendlich viele spezielle Variable vorkommen, wir können also auch (X, Γ, Y)-$\star$-Typen betrachten. Obwohl die starken lokalen Typen das eigentliche Rückgrat der Theorie bilden, habe ich sie aus den Formulierungen der Ergebnisse eliminiert.

2.3.1 (Γ, Y)-Freiheit

Ich werde nun die (Γ, Y)-Freiheit als Relation zwischen Formelmengen und Parametermengen definieren. Ich arbeite weiterhin in dem großen Modell $\mathcal{U}$, $A \subset \mathcal{U}$ ist klein.

3.1 **Definition**

(1) Es sei $\Psi(x)$ eine Menge von Formeln über $\mathcal{U}$: Ψ ist (Γ, Y)-*frei über* A, wenn es einen starken (Γ, Y)-Typ $\tilde{p}(x)$ über A gibt, so daß $\Psi \cup \tilde{p}|\mathcal{U}$ in $\mathcal{G}$ realisiert ist.

(2) Sind p und q (Γ, Y)-Typen, so $p \sqsubset_{(\Gamma, Y)} q$, wenn $p \subset q$ und q ist (Γ, Y)-frei über $dom(p)$.

Genaugenommen ist das eine Familie $(\text{frei}_\mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \mathcal{G}}$ von Relationen. Weil aber alle Einbettungen in $\mathcal{G}$ elementar sind und wegen der folgenden Invarianzeigenschaft, kann man das vernachlässigen.

(Invarianz) Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ Modelle, $A \subset B \subset \mathcal{U}$, $A' \subset B' \subset \mathcal{U}'$ und $\mathcal{U}_{AB} \equiv \mathcal{U}'_{A'B'}$. Ψ sei eine Menge von $\exists(B)$-Formeln und Ψ' die entsprechende Menge[33] von $\exists(B)$-Formeln. Ψ ist genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn Ψ' (Γ, Y)-frei über A' ist.

[32] Das bedeutet, daß Δ_1^* strikt über algebraisch abgeschlossenen Mengen ist.

[33] Ersetze in jeder Formel die Parameter aus B durch die durch $\mathcal{U}_B \equiv \mathcal{U}'_{B'}$ gegebenen entsprechenden Parameter aus B'.

Ich entwickele die Theorie nun für den Fall, daß Ψ aus existenziellen Formeln besteht. Dann ist Ψ genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn es einen starken (Γ, Y)-Typ $\tilde{p}(x)$ über A gibt, so daß $\Psi \cup \tilde{p}|\mathcal{U}$ konsistent ist.

3.2 **Satz** Es sei $\Pi(x)$ ein partieller $\exists(A)$-Typ und $\psi(x, m)$ eine (Γ, Y)-Formel, dann sind äquivalent:

(1) $\Pi \cup \psi$ ist (Γ, Y)-frei über A.

(2) Π ist konsistent mit $\psi_{(m,A)}$.

(3) Es gibt eine mit Π konsistente $L(A)$-Formel ψ_A, die äquivalent ist zu einer positiven booleschen Kombination von A-Konjugaten von ψ.[34]

Beweis
(1) nach (2): Es sei $\Pi \cup \psi$ (Γ, Y)-frei über A, dann gibt es einen mit Π konsistenten starken $(\Gamma, Y)(A)$-Typ $\tilde{p}$, so daß $\psi \in \tilde{p}|\mathcal{U}$. Wegen 2.28 ist $\psi_{(m,A)} \in \tilde{p}$, also konsistent mit Π.

(2) nach (3): $\psi_{(m,A)}$ ist eine positive boolesche Kombination von A-Konjugaten von ψ.

(3) nach (1): Es existiere ein solches ψ_A. Es sei $\tilde{r}$ ein mit Π konsistenter starker $(\Gamma, Y)(A)$-Typ, der ψ_A enthält. Dann enthält $\tilde{r}|\mathcal{U}$ ein A-Konjugat ψ' von ψ und $\Pi \cup \psi'$ ist (Γ, Y)-frei über A. Dann ist auch $\Pi \cup \psi$ (Γ, Y)-frei über A. □

3.3 **Korollar** Es sei p ein $(\Gamma, Y)(A)$-Typ und $\psi(x, m)$ eine (Γ, Y)-Formel:
$p \cup \psi$ ist genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn $\psi_{(m,A)} \in p$.

Ich werde dieses Korollar ständig verwenden. Das nächste Korollar verallgemeinert 2.28.

3.4 **Korollar** Es sei $\Psi(x)$ ein partieller existenzieller Typ, dann sind äquivalent:

(1) Ψ ist (Γ, Y)-frei über A.

(2) Für jede (Γ, Y)-Formel $\psi(x, m)$ mit $\Psi \models \psi$ gilt: Ψ ist konsistent mit $\psi_{(m,A)}$.

(3) Zu jeder (Γ, Y)-Formel $\psi(x)$ mit $\Psi \models \psi$ gibt es eine konsistente $L(A)$-Formel ψ_A, welche äquivalent ist zu einer positiven booleschen Kombination von A-Konjugaten von ψ.

Beweis
(1) nach (2): Es sei etwa $\tilde{p}$ ein starker $(\Gamma, Y)(A)$-Typ, so daß Ψ konsistent ist mit $\tilde{p}|\mathcal{U}$. Dann gilt $\psi(x, m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}$ und $\psi_{(m,A)}(x) \in \tilde{p}$. Ψ ist also konsistent mit $\psi_{(m,A)}$.

(2) nach (3): $\psi_{(m,A)}$ ist eine positive boolesche Kombination von A-Konjugaten von ψ.

(3) nach (1): Wegen 2.27 und Kompaktheit reicht es zu zeigen, daß es in jeder Umgebung von $[\Psi]$ in $S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U})$ einen $(\Gamma, Y)(\mathcal{U})$-Typ gibt, der fast A-definierbar ist. Es sei ψ eine (Γ, Y)-Formel mit $\Psi \models \psi$. Wegen (3) und dem vorigen Lemma ist ψ (Γ, Y)-frei über A, d.h. ψ ist konsistent mit einem fast A-definierbaren $(\Gamma, Y)(\mathcal{U})$-Typ. □

Bevor ich die bekannten Eigenschaften aus der Stabilitätstheorie zeige, werde ich erst noch ein paar einfache Eigenschaften der Freiheitsrelation aufzählen.

[34] Diese Charakterisierung zeigt, daß $\Pi \cup \psi$ genau dann (Γ, Y)-frei über A ist bezüglich $\mathcal{G}$, wenn das bezüglich T der Fall ist.

3.5 **Lemma** Es sei Ψ ein partieller existenzieller Typ über $B \supset A$.

(1) Ψ ist (Γ, Y)-frei über B.

(2) Ψ ist genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn es einen starken (Γ, Y)-Typ $\tilde{p}$ über A gibt, so daß $\Psi \cup \tilde{p}|B$ konsistent ist.

(3) **(Konsistenz)** Ist $C \supset B$ und Ψ konsistent mit dem $(\Gamma, Y)(C)$-Typ p, so auch mit jeder (Γ, Y)-freien Fortsetzung von p.

(4) Es sei $(\Gamma', Y') \leq (\Gamma, Y)$, $A' \supset A$ und $\Psi \models \Psi'$. Wenn Ψ (Γ, Y)-frei ist über A, dann ist Ψ' (Γ', Y')-frei über A'.

(5) Es seien p und q (Γ, Y)-Typen. $p \sqsubset_{(\Gamma,Y)} q$ genau dann, wenn es einen starken Typ $\tilde{p}$ von p gibt, so daß $\tilde{p}|B$ ein starken Typ von q ist.

Beweis
(1) Ψ ist konsistent mit einem starken $(\Gamma, Y)(B)$-Typ $\tilde{p}$. Wegen 2.31 ist Ψ dann auch konsistent mit $\tilde{p}|\mathcal{U}$.

(2) und (3) analog.

(4) Klar mit 2.29.

(5) folgt aus (2). □

Beispiel: $tp(a_1, ..., a_n/A) \sqsubset_{\mathrm{ID}_x} tp(a_1, ..., a_n/B) \iff \{a_1, ..., a_n\} \cap acl(B) \subset acl(A)$
Denn $stp_{\mathrm{ID}}(a_1, ..., a_n/B) = tp_{\mathrm{ID}}^{\mathrm{strikt}}(a_1, ..., a_n/acl(B))$ und dieser Typ ist genau dann fast A-definierbar, wenn $\{a_1, ..., a_n\} \cap acl(B) \subset acl(A)$.

3.6 **Lemma** Es sei $(\Gamma', Y') \leq (\Gamma, Y)$ und $A \subset B$. Es sei Σ ein partieller existenzieller Typ über A und Π ein partieller (Γ', Y')-Typ über B, dann sind äquivalent:

(1) $\Sigma \cup \Pi$ ist (Γ', Y')-frei über A.

(2) $\Sigma \cup \Pi$ ist Γ-frei über A.

(3) Σ ist konsistent mit einem (Γ', Y')-Typ p über A, so daß $p \cup \Pi$ (Γ', Y')-frei ist über A.

Beweis
(2) nach (1) folgt aus (4) des letzten Lemmas und (1) nach (3) ist klar.

(3) nach (2): Es sei p ein $(\Gamma', Y')(A)$-Typ, der konsistent ist mit Σ. Wenn $p \cup \Pi$ (Γ_0, Y_0)-frei über A ist, dann gibt es einen starken Typ $\tilde{p}$ von p, so daß $\Pi \subset \tilde{p}|\mathcal{U}$. Andererseits ist $\Sigma \cup p$ nach (1) des letzten Lemmas Γ-frei über A. Es gibt also einen globalen[35] Γ-Typ q, der fast A-definierbar ist und konsistent mit $\Sigma \cup p$. Dann ist $q \upharpoonright (\Gamma', Y')$ ein (vollständiger) $(\Gamma', Y')(\mathcal{U}$-Typ und Γ-frei über A, wegen (4) des letzten Lemmas also auch (Γ', Y')-frei über A. $q \upharpoonright (\Gamma', Y')$ und $\tilde{p}|\mathcal{U}$ sind also fast A-definierbare Fortsetzungen von p und deshalb A-konjugiert. Das entsprechende A-Konjugat von q zeigt dann, daß $\Sigma \cup \Pi$ Γ-frei über A ist. □

Für partielle (Γ', Y')-Typen ist also (Γ', Y')-Freiheit dasselbe, wie Γ-Freiheit. Das ist falsch für partielle Γ-Typen, denn (Γ', Y')-Freiheit besagt nur, daß der (Γ', Y')-Anteil frei ist:

[35] *Globale Typen* sind Typen über $\mathcal{U}$.

Beispiel: Es sei E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen unendlichen Klassen und einer ausgezeichneten Klasse Y. Es sei $\varphi(x,y) := Yy \to \neg Exy$, dann sind alle (φ, Y)-Formeln boolesche Kombinationen von Yx. Es gibt also nur zwei globale (φ, Y)-Typen, nämlich Yx und $\neg Yx$, beide sind (φ, Y)-frei über $\emptyset$. Deshalb ist jede konsistente Formel (φ, Y)-frei über $\emptyset$. Es sei $b \notin Y$:
$\varphi(x,b)$ ist eine φ-Formel und (φ, Y)-frei über $\emptyset$, $\varphi(x,b)$ ist aber nicht φ-frei über $\emptyset$. Das ist nur möglich, weil $\varphi(x,b)$ keine (φ, Y)-Formel ist.

Die klassischen Eigenschaften

Wenn ich in der Klasse der (Γ, Y)-Typen von „Freiheit" spreche, so meine ich damit (Γ, Y)-Freiheit.

3.7 **Satz** Die Freiheitsrelation für (Γ, Y)-Typen erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(Erweiterung) Es sei $A \subset B$, zu jedem $p \in S_{(\Gamma,Y)}(A)$ gibt es ein $q \in S_{(\Gamma,Y)}(B)$ mit $p \sqsubset q$.

(Monotonie) : $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset q \sqsubset r$.

(Transitivität) : $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset q \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset r$.

(Lokaler Charakter) zu jedem (Γ, Y)-Typ p über einem Modell $\mathcal{U}$ gibt es $A \subset \mathcal{U}$, so daß $p \restriction A \sqsubset p$ und $|A| \leq |L|$.

(Stationarität) Jeder (Γ, Y)-Typ über einem Modell hat auf jede Obermenge genau eine (Γ, Y)-freie Fortsetzung.

Beweis
(Erweiterung), (Monotonie) und (Stationarität) sind klar. (Lokaler Charakter) gilt, weil jeder lokale Typ über einem Modell definierbar ist. Dazu braucht man höchstens $|T|$-viele Parameter.

(Transitivität): Es gelte $p \sqsubset q \sqsubset r$ für (Γ, Y)-Typen über $A \subset B \subset C$. Es sei $\tilde{p}$ ein starker Typ von p, der $p \sqsubset q$ bezeugt (d.h. $\tilde{p}|B$ ist ein starker Typ von q) und $\tilde{q}$ ein starker Typ von q, der $q \sqsubset r$ bezeugt. Dann sind $\tilde{p}|B$ und $\tilde{q}$ B-konjugiert und deshalb ist auch $\tilde{q}$ fast A-definierbar. Die Einschränkung von $\tilde{q}$ auf den starken Typ über A bezeugt dann $p \sqsubset r$ □

3.8 **(lokale Symmetrie)**
Es sei p ein $(\Gamma, Y)(A)$-Typ und $\psi(x,m)$ eine strikte (Γ, Y)-Formel und $a \models p$:
$p \cup \psi(x,m)$ ist (Γ, Y)-frei über $A \iff \psi(a,y) \cup tp_{\Gamma^{-1}}(m/A)$ ist Γ^{-1}-frei über A.

Beweis
Es sei $a \models p$ und $p \cup \psi(x,m)$ (Γ, Y)-frei über A, dann gibt es einen starken Typ $\tilde{p}$ von p, so daß $\psi(x,m) \in \tilde{p}|\mathcal{U}$, also $m \models d_{\tilde{p}}$ und $d_{\tilde{p}} \in \tilde{q} := stp_{\Gamma^{-1}}(m/A)$. Wegen des Symmetriesatzes 2.23 ist dann $d_{\tilde{q}} \in \tilde{p}$. Wegen 2.19 gibt es einen Automorphismus σ von $\mathcal{U}$ über A, so daß $\sigma(\tilde{p}) = stp_{(\Gamma,Y)}(a/A)$. Dann ist $\sigma(d_{\sigma(\tilde{q})} \in stp_{(\Gamma,Y)}(a/A)$ und $\psi(a,y) \in \sigma(\tilde{q})|\mathcal{U}$. Also ist $\psi(a,y) \cup tp_{\Gamma^{-1}}(m/A)$ Γ^{-1}-frei über A. □

3.9 **(Konjugation)**
Alle globalen freien Fortsetzungen eines $(\Gamma, Y)(A)$-Typs sind A-konjugiert.

BEWEIS
Es sei p ein (Γ, Y)-Typ über A, seine globalen freien Fortsetzungen haben die Form $\tilde{p}|\mathcal{U}$, wobei $\tilde{p}$ ein starker Typ von p ist. Da alle starken Typen von p A-konjugiert sind (2.19), sind auch die $\tilde{p}|\mathcal{U}$ A-konjugiert. □

3.10 **(Abgeschlossenheit)** Es gibt einen partiellen (Γ, Y)-Typ $\textsc{frei}_{(\Gamma,Y)}(B, A)$ über B, der genau mit den Typen in $S_{(\Gamma,Y)}(B)$ konsistent ist, die frei über $A \subset B$ sind.

BEWEIS
Weil die Restriktion $S_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U}) \to S_{(\Gamma,Y)}(B)$ abgeschlossen ist können wir $B = \mathcal{U}$ annehmen. Dann folgt das sofort aus dem entsprechenden Ergebnis (2.27) über starke Typen. □

3.11 **(Endlicher Charakter)** Ein partieller $\exists$-Typ Π ist genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn Π_0 (Δ, Y)-frei über A ist für jedes endliche $\Pi_0 \subset \Pi$ und jedes endliche $\Delta \subset \Gamma$.

BEWEIS
Das folgt mit Kompaktheit aus (Abgeschlossenheit). Dabei beachte man, daß
$\textsc{frei}_{(\Gamma,Y)}(B, A) \equiv \bigcup_{\Delta \subset \Gamma \text{ endlich}} \textsc{frei}_{(\Delta,Y)}(B, A)$. □

Bei der Einführung der starken Typen habe ich erklärt, daß stets $stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!{}_{A}) = stp_{(\Gamma,Y)}({}^{a}\!/\!{}_{acl(A)})$ gilt, daraus folgt:

3.12 **(ACL)** Jeder (Γ, Y)-Typ über $acl(A)$ ist frei über A.

Es sei $\mathrm{Frei}_{(\Gamma,Y)}(B, A)$ die Menge der $(\Gamma, Y)(B)$-Typen, die frei sind über A. Die Restriktion $\restriction A : \mathrm{Frei}_{(\Gamma,Y)}(B, A) \to S_{(\Gamma,Y)}(A)$ ist wohldefiniert und stetig, also auch abgeschlossen (beide Räume sind kompakt).

3.13 **(Open mapping theorem)** $\restriction A : \mathrm{Frei}_{(\Gamma,Y)}(B, A) \to S_{(\Gamma,Y)}(A)$ ist offen.

BEWEIS
Aus Stetigkeitsgründen kann man $B = \mathcal{U}$ annehmen. Wir können außerdem annehmen, daß $\Gamma = \Gamma^{bc}$. Eine basis-offene Menge in $\textsc{frei}_{(\Gamma,Y)}(\mathcal{U}, A)$ ist gegeben durch eine (Γ, Y)-Instanz $\varphi(x, b)$ über $\mathcal{U}$. $\varphi_{(b,A)}(x)$ ist das Bild von $[\varphi(x, b)]$ unter dieser Abbildung: ein (Γ, Y)-Typ p über A liegt genau dann im Bild von $\varphi(x, b)$, wenn $p \cup \varphi(x, b)$ (Γ, Y)-frei ist über A. Das ist nach 3.2 genau dann der Fall, wenn $\varphi_{(b,A)} \in p$. □

$FE_{(\Gamma,Y)}(A)$ sei die Menge der $(\Gamma, Y)(A)$-definierbaren Äquivalenzrelationen mit endlich vielen Klassen.

3.14 **(Finite equivalence theorem)**

(1) Es sei $\varphi \in \Gamma$. Zu $p \in S_{(\varphi,Y)}(A)$ gibt es ein $E_p \in FE_{(\varphi,Y)}(A)$, so daß alle starken Typen von p in verschiedenen E_p-Klassen liegen.

(2) Je endlich viele über A freie globale (Γ, Y)-Typen können durch ein $E \in FE_{(\Gamma,Y)}(A)$ getrennt werden.

Beweis
(1) Trenne die endlich vielen verschiedenen starken Typen von p durch (φ, Y)-Formeln und betrachte die induzierte Äquivalenzrelation „für x und x' gelten dieselben Formeln und deren A-Konjugate“.

(2) Es reicht, starke (Γ, Y)-Typen über A zu betrachten, deshalb folgt das aus (1). □

3.15 **(Stabile Einbettung)** Es sei $\psi(x, m)$ eine (Γ, Y)-Formel und A eine Parametermenge. $\psi_{(m,A)}$ und $\psi(x, m)$ definieren dieselbe Teilmenge von A.

Beweis
Für jedes $a \in A$ gilt: $a \models \psi_{(m,A)} \Leftrightarrow tp_{(\Gamma,Y)}(a/A) \cup \psi(x, m)$ ist (Γ, Y)-frei über A. Wegen $a \in A$ hat dieser Typ nur eine globale Fortsetzung, deshalb ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a/A) \cup \psi(x, m)$ genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn $a \models \psi(x, m)$. □

Unabhängigkeit und Morleyfolgen

Morleyfolgen sind ein enorm starkes technisches Hilfsmittel, welches uns auch in der lokalen Version zur Verfügung steht. Sie werden später in den Beweisen einiger wichtiger Sätze angewendet.

Notation: Ist I eine Ordnung, $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge, so ist $a_I = (a_i)_{i \in I}$. Für $j \in I$ ist $a_{<j} = (a_i)_{j > i \in I}$.

3.16 **Definition**

(1) Eine Folge (a_i) heißt (Γ, Y)-*unabhängig über* A, falls stets $tp_{(\Gamma,Y)}(a_i/Aa_{<i})$ frei über A ist.

(2) Eine A-Indiscerniblefolge ist eine (Γ, Y)-*Morleyfolge über* A, wenn sie (Γ, Y)-unabhängig über A ist.

3.17 **Lemma**

(1) Es sei $(a_i)_{i \in I}$ eine unendliche A-Indiscerniblefolge. Wenn $(a_i)_I$ beliebig lange endliche Teilfolgen hat, die (Γ, Y)-unabhängig über A sind, so ist $(a_i)_I$ eine Morleyfolge über A.

(2) Es gibt es beliebig lange (Γ, Y)-Morleyfolgen (b_i) in $stp_{(\Gamma,Y)}(b/A)$ mit $b_i \equiv_A b$.

(3) Ist $(a_i)_{i<\alpha}$ eine (Γ, Y)-Morleyfolge (bzw. (Γ, Y)-unabhängig) über $A \subset B$, so gibt es $(b_i) \equiv_A (a_i)$, so daß (b_i) eine (Γ, Y)-Morleyfolge (bzw. (Γ, Y)-unabhängig) über B ist.

Beweis
(1) Das folgt aus dem endlichen Charakter 3.11.

(2) Es gibt in $\exists$-$tp(b/A)$ beliebig lange über A (Γ, Y)-unabhängige Folgen (in großen Erweiterungen). Wegen 1.6 können wir eine A-berührende[36] A-Indiscerniblefolge (b_i) finden, die wegen (1) eine (Γ, Y)-Morleyfolge über A ist. Es ist dann jedes $b_i \equiv_A b$.

[36] Siehe Seite 54.

Wir können nun ein Element der Folge so über A konjugieren, daß es $stp_{(\Gamma,Y)}(b/A)$ realisiert. Weil alle Elemente einer unendlichen A-Indiscerniblefolge denselben starken Typ über A haben, sind wir dann fertig.

(3) Ich betrachte erst den Fall der Unabhängigkeit induktiv über die Länge der Folge: es sei $(a_i)_{i\leq\alpha}$ (Γ,Y)-unabhängig über $A\subset B$ und $b_{<\alpha}\equiv_A a_{<\alpha}$, so daß $b_{<\alpha}$ (Γ,Y)-unabhängig über B ist. Es sei etwa σ ein Automorphismus über A mit $\sigma(a_{<\alpha})=b_{<\alpha}$ und $\tilde{p}$ ein mit $\sigma(\exists\text{-}tp(a_\alpha/Aa_{<\alpha}))$ konsistenter (Γ,Y)-Typ über $\sigma(Aa_{<\alpha})=Ab_{<\alpha}$. Für jedes $b_\alpha\models\tilde{p}|Bb_{<\alpha}$ (klaro $b_\alpha\in\mathcal{G}$) ist dann $b_{\leq\alpha}$ (Γ,Y)-unabhängig über B.
Für den Fall der Morleyfolgen können wir wegen des gerade Gezeigtem annehmen, daß (a_i) (Γ,Y)-unabhängig über B ist, außerdem können wir annehmen, daß (a_i) sehr lang ist. Es gibt dann eine B-Indiscerniblefolge (b_i), die (a_I) B-berührt. Die beiden Indiscerniblefolgen sind dann äquivalent über A und wegen (1) ist (b_i) eine (Γ,Y)-Morleyfolge über B. □

Beispiel: Es sei $tp(a/A)$ ein nichtalgebraischer Typ und κ eine unendliche Kardinalzahl, dann gibt es eine Folge von Modellen $(\mathcal{V}_i)_\kappa$, so daß $a=a_0\in\mathcal{V}=\mathcal{V}_0\supset A$, alle $\mathcal{V}_i\equiv_A\mathcal{V}$ und für je zwei verschiedene Modelle $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_j$ gilt: $\mathcal{V}_i\cap\mathcal{V}_j=acl(A)$. Es sei nämlich $a\in\mathcal{V}\supset A$ und $(\mathcal{V}_i)_\kappa$ eine ID$_x$-Morleyfolge in $tp(\mathcal{V}/A)$. Dann gilt für jedes $i<\kappa$: $tp(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{<i})$ ist ID$_x$-frei über A, insbesondere $\mathcal{V}_i\cap acl(\mathcal{V}_{<i})\subset acl(A)$.

3.18 **Lemma** Es sei $(a_i)_{i\leq\omega}$ eine A-Indiscerniblefolge und ψ eine (Γ,Y)-Formel: $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\omega/Aa_{<\omega})\cup\psi$ ist genau dann (Γ,Y)-frei über $Aa_{<\omega}$, wenn fast alle $a_i\models\psi$.

Beweis
$tp_{(\Gamma,Y)}(a_\omega/Aa_{<\omega})\cup\psi(x,m)$ ist genau dann (Γ,Y)-frei über $Aa_{<\omega}$, wenn $\psi_(m,a_{<\omega})\in tp_{(\Gamma,Y)}(a_\omega/Aa_{<\omega})$. $\psi_(m,a_{<\omega})$ ist über den Parametern $Aa_{<n}$ für ein $n<\omega$, deshalb ist $\psi_(m,Aa_{<\omega})\in tp_{(\Gamma,Y)}(a_\omega/Aa_{<\omega})$ genau dann, wenn fast alle $a_i\models\psi_(m,Aa_{<\omega})$. Wegen 3.15 gilt $a_i\models\psi_(m,Aa_{<\omega})\Leftrightarrow a_i\models\psi(x,m)$. □

3.19 **Satz** Es seien $a_{<\omega}$ und a_J Folgen und a_∞ ein Tupel, so daß $a_{<\omega}a_Ja_\infty$ eine A-Indiscerniblefolge ist. Es sei $p=tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/a_{<\omega})$.

(1) p ist stationär.

(2) $p|\mathcal{U}=Av_{(\Gamma,Y)}(a_{<\omega})$.[37]

(3) $p|Aa_{<\infty}=tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\infty})$.

Beweis
(1) Es sei ψ eine (Γ,Y)-Formel und $p\cup\psi$ frei über $a_{<\omega}$. Wegen des letzten Lemmas ist dann $p\cup\neg\psi$ nicht frei über $a_{<\omega}$.

(2) folgt sofort aus dem vorigen Lemma.

(3) Wegen (1) ist $p\sqsubset tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\infty})$ zu zeigen, das tue ich in zwei Schritten:

Behauptung 1: $p\sqsubset tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})$.

Beweis: Es sei $\psi\in tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})$, wegen A-Indiscernibilität gilt dann $a_i\models\psi$ für fast alle $i<\omega$. Also $\psi\in Av_\Gamma(a_{<\omega})$ und mit (2) folgt Behauptung 1.

Behauptung 2: $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})\sqsubset tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\infty})$.

[37] $Av_{(\Gamma,Y)}(a_{<\omega}):=\{\psi(x)\mid\psi$ ist eine (Γ,Y)-Formel und fast alle $a_i\models\psi\}$.

Beweis: Die (φ, Y)-Definition von $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})$ ist fast $Aa_{<n}$-invariant für ein geeignetes $n < \omega$, $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})$ ist also (φ, Y)-frei über $Aa_{<n}$. Wegen A-Indiscernibilität ist dann für jedes endliche Teiltupel $\bar{c}$ von $a_{<\infty}$ $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<n}\bar{c})$ (φ, Y)-frei über $Aa_{<n}$ und wegen endlichem Charakter (3.11) ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\infty})$ (φ, Y)-frei über $Aa_{<n}$, also auch über $Aa_{<\omega}$. Weil das für jedes $\varphi \in \Gamma$ gilt, ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\infty})$ (Γ, Y)-frei über $Aa_{<\omega}$.[38] □

3.20 **Korollar** a_J ist eine (Γ, Y)-Morleyfolge über A, über $a_{<\omega}$ und auch über $Aa_{<\omega}$.

Beweis
$a_J a_\infty$ ist eine $Aa_{<\omega}$-Indiscerniblefolge und $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/a_{<\omega}) \sqsubset tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega}a_J)$ wegen (3) des Satzes. Insbesondere ist für jedes $j \in J$ $tp_{(\Gamma,Y)}(a_j/a_\omega a_{<j})$ frei über $a_{<\omega}$ und auch $tp_{(\Gamma,Y)}(a_j/Aa_\omega a_{<j})$ frei über $Aa_{<\omega}$. a_J ist also (Γ, Y)-unabhängig über $a_{<\omega}$ und auch über $Aa_{<\omega}$. □

2.3.2 Charakterisierungen der Freiheit

Ich charakterisiere die Freiheitsrelation nun auf vier verschiedene Weisen, nämlich durch Teilen, Morleyfolgen, lokale Morleyränge, spezielle Fortsetzungen und endliche Erfüllbarkeit.

3.21 **Satz** Es sei $\Pi(x)$ ein partieller $\exists$-Typ über A und $\psi(x, m)$ eine (Γ, Y)-Formel, dann sind äquivalent:

(1) $\Pi \cup \psi$ teilt [39] nicht über A.

(2) $\Pi \cup \psi$ ist (Γ, Y)-frei über A.

(3) Für jede unendliche φ^{-1}-Morleyfolge $(m_i)_I$ in $tp(m/A)$ ist $\Pi \cup \{\psi(x, m_i) \mid i \in I\}$ konsistent.

Beweis
(1) nach (3) ist klar.

(3) nach (2): Es sei $(m_i)_{i\leq\omega}$ eine φ^{-1}-Morleyfolge über A mit $m_\omega = m$ und $b \models \Pi \cup \{\psi(x, m_i) \mid i < \omega\}$. Wegen 3.18 ist dann $\psi(b, y) \cup tp_{\varphi^{-1}}(m/Am_{<\omega})$ φ^{-1}-frei über $Am_{<\omega}$. Weil $tp_{\varphi^{-1}}(m/Am_{<\omega})$ φ^{-1}-frei über A ist, ist dann auch $\psi(b, y) \cup tp_{\varphi^{-1}}(m/A)$ φ^{-1}-frei über A. Wegen lokaler Symmetrie ist dann auch $tp_\varphi(b/A) \cup \psi(x, m)$ φ^{-1}-frei über A. Dann ist $\exists$-$tp(b/A) \cup \psi(x, m)$ (Γ, Y)-frei über A (3.2). Insbesondere ist $\Pi \cup \psi$ (Γ, Y)-frei über A, denn $\Pi \subset \exists$-$tp(b/A)$.

(2) nach (1): Wenn $\Pi \cup \psi(x, m)$ (Γ, Y)-frei über A ist, so gibt es einen mit Π konsistenten starken (Γ, Y)-Typ $\tilde{p}$ über A, so daß $\psi \in \tilde{p}|\mathcal{U}$, also $m \models d\tilde{p}$. Ist $(m_i)_I$ eine unendliche A-Indiscerniblefolge, so haben alle m_i denselben starken (Γ, Y)-Typ über A, also alle $m_i \models d\tilde{p}$ und $\{\psi(x, m_i) \mid i \in I\} \subset \tilde{p}|\mathcal{U}$. Insbesondere ist $\Pi \cup \{\psi(x, m_i) \mid i \in I\}$ konsistent. □

[38] Man beachte, daß der Beweis von Behauptung 1 auf der Seite der speziellen Variablen argumentiert und der von Behauptung 2 auf der Seite der Parameter.

[39] Wie der Begriff der Freiheit hängt auch der Begriff des $\mathcal{G}$-Teilens von $\mathcal{G}$ ab. Trotzdem werde ich nun nur noch „teilen“ sagen. Vergl. 1.1

3.22 **Korollar** Für (Γ, Y)-Typen $p \subset q$ gilt:

$$p \sqsubset_{(\Gamma,Y)} q \iff q \text{ teilt nicht über } dom(p)$$

Ich möchte betonen, daß die hier definierte Freiheit nicht dasselbe ist wie Nichtforken, denn Teilen und Forken fallen i.a. auseinander:

Beispiel: Es sei $\mathcal{M}$ die lokale (d.h. auf einem Kreis) dichte Ordnung, dann forkt $x = x$ über $\emptyset$. Das ist das Standardbeispiel für eine Theorie, in der Forken und Teilen auseinanderfallen, siehe [Wagner, Example 2.2.4]. Es sei Γ stabil und enthalte die Formel $x = x \wedge y = y$: jeder Γ-Typ über $\emptyset$ ist frei über $\emptyset$ und forkt über $\emptyset$.

3.23 **Satz** Es sei $A \subset B$, dann sind äquivalent:

(1) $tp_{(\Gamma,Y)}(a/B)$ ist frei über A.

(2) Jede (Γ, Y)-Morleyfolge in $tp(a/B)$ ist eine (Γ, Y)-Morleyfolge in $tp(a/A)$.

(3) Es gibt eine Indiscerniblefolge in $tp(a/B)$, die eine (Γ, Y)-Morleyfolge über A ist.

Beweis
(1) nach (2): Es sei (a_i) eine (Γ, Y)-Morleyfolge in $tp(a/B)$, dann ist stets $tp_{(\Gamma,Y)}(a_i/Ba_{<i})$ frei über B. Wegen (1) ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_i/B)$ ist frei über A und mit Monotonie und Transitivität ist stets $tp_{(\Gamma,Y)}(a_i/Aa_{<i})$ frei über A. Deshalb ist (a_i) eine (Γ, Y)-Morleyfolge in $tp(a/A)$.

(2) nach (3) ist klar wegen der Existenz von (Γ, Y)-Morleyfolgen 3.17.

(3) nach (1): Es sei $(a_i)_I$ eine Indiscerniblefolge in $tp(a/B)$, die (Γ, Y)-Morleyfolge über A ist. Wir können $I = \omega \cup \{\infty\}$ annehmen. Wegen 3.19 ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Ba_{<\omega})$ frei über $a_{<\omega}$, also auch über $Aa_{<\omega}$. Außerdem ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Aa_{<\omega})$ frei über A. Mit Transitivität ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Ba_{<\omega})$ frei über A, damit folgt (1). □

Ist Ψ ein partieller $\exists$-Typ, so sei $\Psi_A := \{\psi \in L_\exists(A) \mid \Psi \models \psi\}$.

3.24 **Satz** Es sei Ψ ein partieller $\exists(B)$-Typ, der einen $(\Gamma, Y)(B)$-Typ axiomatisiert: Ψ ist genau dann (Γ, Y)-frei über $A \subset B$, wenn für jedes $\varphi \in \Gamma$ gilt:

$$\mathcal{G}\text{-}MR_{(\varphi,Y)}(\Psi) = \mathcal{G}\text{-}MR_{(\varphi,Y)}(\Psi_A)$$

Beweis
Schritt 1: Es sei q der von Ψ axiomatisierte $(\Gamma, Y)(B)$-Typ, Ψ ist genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn q es ist. Das ist genau dann der Fall, wenn q (φ, Y)-frei über A ist für alle $\varphi \in \Gamma$. Es sei $q_\varphi = q \restriction (\varphi, Y)$. Da andererseits die (φ, Y)-Morleyränge in $S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})$ errechnet werden und $[\Psi]_{S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})} = [q_\varphi]_{S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})}$ und $[\Psi_A]_{S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})} = [q_\varphi \restriction A]_{S_{(\varphi,Y)}(\mathcal{U})}$, reicht es zu zeigen, daß für jedes $\varphi \in \Gamma$ gilt: q_φ ist genau dann frei über A, wenn $MR_{(\varphi,Y)}(q_\varphi) = MR_{\varphi,Y)}(q_\varphi \restriction A)$.

Schritt 2a: Es sei q_φ frei über A und $\psi \in q_\varphi$ mit demselben (φ, Y)-Morleyrang wie q_φ. Wegen 3.2 gibt es in $q_\varphi \restriction A$ eine positive boolesche Kombination χ von A-Konjugaten von ψ. Dann gilt $MR_{(\varphi,Y)}(\chi) \geq MR_{(\varphi,Y)}(q_\varphi \restriction A) \geq MR_{(\varphi,Y)}(\psi)$. Schreibt man χ in disjunktiver Normalform $\bigvee \chi_i$, so ist jedes χ_i eine Konjunktion von A-Konjugaten von ψ, also stets $MR_{(\varphi,Y)}(\psi) \geq MR_{(\varphi,Y)}(\chi_i)$. Dann gilt auch $MR_{(\varphi,Y)}(\psi) \geq MR_{(\varphi,Y)}(\chi)$. Es ist also $MR_{(\varphi,Y)}(q_\varphi \restriction A) = MR_{(\varphi,Y)}(\psi) = MR_{(\varphi,Y)}(q_\varphi)$.

Schritt 2b: Es seien nun umgekehrt diese Ränge gleich und $\tilde{q}_\varphi$ eine globale Fortsetzung von q_φ vom selben (φ, Y)-Morleyrang. Dann ist $\tilde{q}_\varphi$ auch eine Fortsetzung von $q_\varphi \restriction A$ vom selben (φ, Y)-Morleyrang und hat deshalb eine endliche A-Bahn. Wegen 2.30 ist $\tilde{q}_\varphi$ fast A-definierbar und q_φ ist frei über A. □

Ein (Γ, Y)-Typ p ist *speziell* über A, wenn er eine Fortsetzung q auf ein großes $\mathcal{U} \supset A$ hat, so daß q über A nicht splittet, d.h. für alle $\varphi(x, b) \in q$ gilt: $b' \in \mathcal{U}$ und $b' \equiv_A b$, so $\varphi(x, b') \in q$.

3.25 **Satz** Es sei $\mathcal{V}$ ein Modell und p ein Γ-Typ über $B \supset \mathcal{V}$: p ist genau dann frei über $\mathcal{V}$, wenn p speziell über $\mathcal{V}$ ist.

Beweis
Es sei p frei über $\mathcal{V}$ und q eine freie globale Fortsetzung, dann ist q $\mathcal{V}$-definierbar. Ist also $\varphi(x, b) \in q$, so $b \models d_q\varphi$, also auch $b' \models d_q\varphi$ für jedes $b' \equiv_{\mathcal{V}} b$, also $\varphi(x, b') \in q$. p ist also speziell über $\mathcal{V}$. Ist umgekehrt q eine über $\mathcal{V}$ nicht splittende Fortsetzung von p, so ist dq $\mathcal{V}$-invariant, insbesondere ist p frei über $\mathcal{V}$. □

3.26 **Satz** Es sei $\Pi(x)$ ein partieller (Γ, Y)-Typ, dann sind äquivalent:

(1) Π ist (Γ, Y)-frei über A.

(2) Π ist in Modell $\mathcal{V} \supset A$ endlich erfüllt.

Beweis
Es sei $\psi(x, b)$ eine strikte (Γ, Y)-Formel, die äquivalent ist zu einer endlichen Konjunktion aus Π, $\mathcal{V} \supset A$ und $q = tp_{\psi^{-1}}(b/\mathcal{V})$.

(1) nach (2): Es sei $\mathcal{V} \supset A$ ein Modell, dann ist $\psi(x, b)^{\mathcal{V}} = d_q(x)^{\mathcal{V}}$ (siehe etwa 3.15). Weil $\psi(x, b)$ frei über $\mathcal{V}$ ist, ist d_q konsistent, also $\psi(x)^{\mathcal{V}} \neq \emptyset$.

(2) nach (1): Es sei $\mathcal{V} \supset A$ so gewählt, daß q frei über A ist. Wegen (2) gibt es $\psi(m, y) \in q$, also ist $\psi(m, y) \cup q \restriction A$ Γ^{-1}-frei über A. Wegen lokaler Symmetrie 3.8 ist $tp_\Gamma(m/A) \cup \psi(x, b)$ Γ-frei über A, insbesondere ist $\psi(x, b)$ Γ-frei über A. Das reicht wegen endlichem Charakter. □

Man beachte, daß im Beweis von (1) nach (2) $dq \cup p \restriction A$ in $\mathcal{V}$ endlich erfüllt ist. Falls also $\mathcal{V}$ hinreichend groß ist, so ist p sogar in $(p \restriction A)^{\mathcal{V}}$ endlich erfüllt. Ein partieller L-Typ ist also genau dann (Γ, Y)-frei über A, wenn er (Γ, Y)-frei über jedem $\mathcal{V} \supset A$ ist.

3.27 **Korollar** Es seien Γ_1 und Γ_2 stabile Familien von Δ_1-Formeln. Angenommen für alle Modelle $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ und alle $q \in S(\mathcal{N})$ gilt: q ist genau dann Γ_1-frei über $\mathcal{M}$, wenn q Γ_2-frei über $\mathcal{M}$ ist. Dann definieren Γ_1-Freiheit und Γ_2-Freiheit dieselbe Relation.

Beweis
Es sei Ψ ein partieller L-Typ über $B \supset A$, der Γ_1-frei über A ist. Es sei $\mathcal{M} \supset A$. Dann gibt es ein $\mathcal{N} \supset \mathcal{M}B$ und ein $q \in [\Psi]_{S(N)}$, das Γ_1-frei über A ist, also auch über $\mathcal{M}$. Nach Voraussetzung ist q dann Γ_2-frei über $\mathcal{M}$ und damit auch Ψ. Ψ ist also Γ_2-frei über jedem $\mathcal{M} \supset A$, also Γ_2-frei über A. □

2.3.3 Der Eindeutigkeitssatz

Ich werde nun axiomatisch einführen, was ein **Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen** und in 3.31 zeigen, daß (Γ, Y)-Freiheit der einzig mögliche Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen ist. Dieses Resultat ist in dieser Allgemeinheit neu. Ich setze nicht voraus, daß (Γ, Y) stabil ist.

Freie Fortsetzungen von lokalen Typen

Eine *Fortsetzungsrelation für (Γ, Y)-Typen*[40] ist eine Familie von Relationen $\sqsubset = (\sqsubset_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mathcal{G}}$ zwischen (Γ, Y)-Typen über $\mathcal{G}$, welche die Inklusion verfeinert und mit:

(Invarianz) Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ Modelle, $A \subset B, a$ aus $\mathcal{U}$ und $A' \subset B', a'$ aus $\mathcal{U}'$: ist $tp_{(\Gamma,Y)}(a/A) \sqsubset_{\mathcal{U}} tp_{(\Gamma,Y)}(a/B)$ und $\mathcal{U}_{ABa} \equiv \mathcal{U}'_{A'B'a'}$, so $tp_{(\Gamma,Y)}(a'/A') \sqsubset_{\mathcal{U}'} tp_{(\Gamma,Y)}(a'/B')$.

Ich lasse bei den Fortsetzungsrelationen den Index für das Modell weg. Das ist ok, weil alle Einbettungen zwischen Modellen elementar sind.

3.28 **Definition** Ein *Begriff von freier Fortsetzung* für (Γ, Y)-Typen ist eine Fortsetzungsrelation $\sqsubset$ für (Γ, Y)-Typen, so daß für alle (Γ, Y)-Typen gilt:

(Erweiterung) Es sei $A \subset B$, zu jedem $p \in S_{(\Gamma,Y)}(A)$ gibt es ein $q \in S_{(\Gamma,Y)}(B)$ mit $p \sqsubset q$.

(Monotonie) : $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset q \sqsubset r$.

(Transitivität) : $p \subset q \subset r$, so $p \sqsubset q \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset r$.

(lokaler Charakter) zu jedem (Γ, Y)-Typ p über einem Modell $\mathcal{U}$ gibt es $A \subset \mathcal{U}$, so daß $p \restriction A \sqsubset p$ und $|A| \leq |L|$.

(Beschränkte Multiplizität) Zu jedem (Γ, Y)-Typ p über einem Modell gibt es ein κ, so daß p auf jedes Obermodell höchstens κ-viele verschiedene freie Fortsetzungen hat.

Es gilt dann sogar eine stärkere Form der beschränkten Multiplizität:

3.29 **Lemma** Ist $\sqsubset$ ein Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen, so gibt es ein κ, so daß jeder (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{G}$ auf jedes Obermodell höchstens κ-viele verschiedene $\sqsubset$-Fortsetzungen hat.

Beweis
Es sei A eine Parametermenge der Größe $\leq |L|$. Mit (LÖSKO) gibt es ein Modell $\mathcal{U} \supset A$ der Größe $\leq 2^{|L|}$. Nun gibt es über $\mathcal{U}$ nur beschränkt viele (Γ, Y)-Typen, also gibt es wegen (Beschränkte Multiplizität) ein κ_A, so daß jeder (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$ höchstens κ_A-viele verschiedene freie Fortsetzungen auf jedes Obermodell hat. Es sei nun $\mathcal{V} \supset A$ ein großes Modell, dann können wir $\mathcal{U}$ über A in $\mathcal{V}$ einbetten. Wegen (Invarianz) und (Transitivität) hat jeder (Γ, Y)-Typ über A höchstens κ_A-viele verschiedene $\sqsubset$-Fortsetzungen auf $\mathcal{V}$. Diese Schranke gilt also für jedes Obermodell von A. Nun gibt es nur beschränkt viele Isomorphietypen von Parametermengen der Größe $\leq |L|$, deshalb gibt es – mit (Invarianz) – ein κ, so daß jeder (Γ, Y)-Typ über einer Parametermenge der Größe $\leq |L|$ höchstens κ-viele verschiedene $\sqsubset$-Fortsetzungen auf jedes Obermodell hat. Mit (Transitivität) und (lokaler Charakter) gilt diese Schranke für jeden (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{G}$. □

[40] Wie immer sind alle (Γ, Y)-Typen über $\mathcal{G}$.

3.30 **Lemma** Es sei $\sqsubset$ ein Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen, $B \supset A$ und $q \in S_{(\Gamma,Y)}(B)$. Falls q $\mathcal{G}$-teilt über A, so $q \restriction A \not\sqsubset q$.

Beweis
Ich arbeite in einem hinreichend großen Modell $\mathcal{U}$. q $\mathcal{G}$-teile über A, nach Definition 1.1 gibt es $\varphi(x, b) \in q$ und eine Indiscerniblefolge $(b_i)_{i<\omega}$ in $tp(^b/_A)$, so daß $\{\varphi(x, b_i) \mid i < \kappa\}$ nicht in $\mathcal{G}$ realisiert ist, also inkonsistent ist. Es gibt dann wegen Indiscernibilität ein $k < \omega$, so daß $\{\varphi(x, b_i) \mid i < \kappa\}$ k-inkonsistent ist. Wir können diese Indiscerniblefolge beliebig lang machen, es sei also κ eine große Kardinalzahl und $(b_i)_{i<\kappa}$ eine solche Verlängerung. Wähle zu jedem b_i ein B_i, so daß $Bb \equiv_A B_i b_i$; q_i sei der entsprechend konjugierte Typ von q und $\tilde{q}_i$ sei eine $\sqsubset$-Fortsetzung von q_i nach $\mathcal{U}$. Da stets $\varphi(x, b_i) \in q_i$ gibt es wegen k-Inkonsistenz zu jedem i höchstens k viele j, so daß $\tilde{q}_i = \tilde{q}_j$, also $|\{\tilde{q}_i \mid i < \kappa\}| = \kappa$. Jedes $\tilde{q}_i$ ist dann eine Fortsetzung von $q \restriction A$ und weil κ sehr groß ist, folgt aus dem letzten Lemma, daß nicht alle $\tilde{q}_i$ $\sqsubset$-Fortsetzungen von $q \restriction A$ sind. Wegen (Transitivität) gibt es dann auch schon ein q_i, welches keine $\sqsubset$-Fortsetzung von $q \restriction A$ ist. Mit (Invarianz) folgt, daß q keine $\sqsubset$-Fortsetzung von $q \restriction A$ ist. □

3.31 **Eindeutigkeitssatz**

(1) Es sei Γ stabil. (Γ, Y)-Freiheit der einzige Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen.

(2) Wenn es einen Begriff $\sqsubset$ von freier Fortsetzung für Γ-Typen gibt, so ist Γ stabil und $\sqsubset$ ist Γ-Freiheit.

Beweis
(1) Wegen 3.7 ist (Γ, Y)-Freiheit ein Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen. Es sei $\sqsubset$ ein weiterer Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen und $p \subset q$ seinen (Γ, Y)-Typen. Ist $p \sqsubset q$, so teilt q nicht über A (3.30), also ist q (Γ, Y)-frei über p nach 3.22. Ist umgekehrt q (Γ, Y)-frei über p, so sei r ein globaler (Γ, Y)-Typ mit $p \sqsubset r$. Wegen des ersten Teil des Beweises ist r (Γ, Y)-frei über p. Dann sind r und $q|\mathcal{U}$ $dom(p)$-konjugiert und es gilt auch $p \sqsubset q|\mathcal{U}$, also auch $p \sqsubset q$.

(2) Es ist nur zu zeigen, daß aus der Existenz eines Begriffs von freier Fortsetzung für Γ-Typen die Stabilität von Γ folgt. Das besagt das nächste Lemma. □

3.32 **Lemma** Falls es einen Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen gibt, so ist (Γ, Y) stabil.

Beweis
Es sei $\sqsubset$ ein Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen. Wegen 3.29 gibt es ein κ, so daß jeder (Γ, Y)-Typ auf jedes Obermodell höchstens κ-viele $\sqsubset$-Fortsetzungen hat. Wir können $\kappa = \kappa^{|L|}$ annehmen. Ist dann $|B| \leq \kappa$, so gibt es ein Modell $\mathcal{U} \supset B$ mit $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ (das ist (LÖSKO)). Wegen (lokaler Charakter) ist jeder (Γ, Y)-Typ über $\mathcal{U}$ $\sqsubset$-frei über einem $A \subset \mathcal{U}$ mit $|A| \leq |L|$. Es gibt nur $\kappa^{|L|} = \kappa$ viele solche Teilmengen von $\mathcal{U}$ (siehe etwa [Jech, Seite 43, Lemma 6.2])), über jeder solchen gibt es höchstens $2^{|L|} \leq \kappa$ viele (Γ, Y)-Typen und jeder solche hat höchstens κ viele $\sqsubset$-freie Fortsetzungen nach $\mathcal{U}$. Es gibt also über $\mathcal{U}$ höchstens $\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa$ viele (Γ, Y)-Typen. Es folgt, daß (Γ, Y) κ-stabil ist, also stabil (2.18). □

Γ-Freiheit ist also der einzig mögliche Begriff von freier Fortsetzung für Γ-Typen. Der Grund, warum (2) nicht für (Γ, Y) gilt ist, daß die gesamte Theorie die Stabilität von Γ vorausgesetzt hat.

Frage: Wenn (Γ, Y) stabil ist, gibt es dann ein stabiles $\Gamma' \subset \Delta_1^*$, so daß (Γ, Y) und (Γ', Y) äquivalent sind?

Im elementaren Fall kann man die Frage positiv beantworten. Das heißt, daß dann (Γ, Y)-Freiheit der einzig mögliche Begriff von freier Fortsetzung für (Γ, Y)-Typen ist. Ich bin überzeugt, daß das auch dann der Fall ist, wenn $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster ist.

2.3.4 Globale Symmetrie und Stabilität

Es sei Γ stabil. Ich habe nun die meisten Ergebnisse aus den Grundlagen der klassischen Stabilitätstheorie auf den lokalen und nichtelementaren Rahmen verallgemeinert. Was fehlt, ist Symmetrie in der folgenden Form:

3.33 **Definition** Die Γ-Freiheit ist *symmetrisch*, wenn für alle a, b und A gilt: $tp_\Gamma({}^a/_{Ab})$ ist genau dann frei über A, wenn $tp_{\Gamma^{-1}}({}^b/_{Aa})$ frei über A ist.[41]

Diese Form der Symmetrie folgt in stabilen Theorien aus der im Symmetriesatz 2.23 beschriebenen lokalen Symmetrie. Leider stimmt das nicht im Falle der lokalen Stabilität. Ich werde zeigen (3.36), daß es immer „gute Realisierungen" des lokalen Typs gibt, so daß Symmetrie gilt. Dann beschreibe ich die Eigenschaften **Striktheit und Perfektheit**; sie sind gemeinsam stark genug, um Symmetrie zu garantieren. In 3.50 zeige ich die folgende erstaunliche (und neue) **globale Konsequenz der Symmetrie**: wenn Γ-Freiheit symmetrisch ist, so impliziert sie Γ'-Freiheit für jedes stabile $\Gamma' \subset \Delta_1^*$. Abschließend gebe ich eine Definition für **globale Stabilität** und zeige, daß sich dann das folgende klassische Ergebnis auf Δ_1-Pseudomonster läßt: T ist genau dann stabil, wenn Nichtteilen eine stabile Unabhängigkeitsrelation induziert.

Beispiel: ID_x-Freiheit ist genau dann symmetrisch, wenn stets $acl(A) = A$ gilt.

Ich nenne Γ *gut*, wenn Γ abgeschlossen gegen Variablensubstitution für spezielle Variable und für Parametervariable ist (wobei natürlich die Variablentrennung respektiert werden muß) und außerdem die Formeln $x = y$ und $x = x' \wedge y = y'$ (mit speziellen Variablen x und x') enthält. Wenn Γ gut ist, so ist auch Γ^{-1} gut und man kann spezielle Dummyvariable verwenden: mit $\varphi(x_1)$ ist auch $\varphi(x_1) \wedge x_2 = x_2$ eine Γ-Formel. Aus dieser Überlegung folgt, daß $tp_\Gamma({}^{\bar{a}}/_{BC})$ genau dann frei über B ist, wenn $tp_\Gamma({}^a/_{BC})$ frei über B ist für jedes endliche Teiltupel a von $\bar{a}$.

3.34 **Lemma** Es sei Γ gut und $\bar{a}$ eine Aufzählung der Menge A, dann sind äquivalent:

(1) $tp_\Gamma({}^{\bar{a}}/_{BC})$ ist frei über B.

(2) Für jedes endliche Tupel a aus A ist $tp_\Gamma({}^a/_{BC})$ frei über B.

[41] Man kann das natürlich auch allgemeiner für (X, Γ, Y)-Typen und (Y, Γ^{-1}, X)-Typen formulieren. Darauf verzichte ich im folgenden.

Beweis
Ist $\varphi(x_1,...,x_n)$ eine Γ-Formel und Γ-frei über B, so ist auch $\varphi(x_{\pi(1)},...,x_{\pi(n)})$ eine Γ-Formel und Γ-frei über B für jedes $\pi \in S_n$. Wegen der vorangegangenen Überlegung über Dummyvariable reicht das. $\square$

Es sei für den Rest des Kapitels Γ gut.

Notation: $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C :\Leftrightarrow tp_\Gamma({}^{a}\!/\!_{BC})$ ist frei über B für jedes endliche Tupel a aus A.

Es seien A, B, C und D beliebig, dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C \quad \Leftrightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} c$ für alle endlichen Tupel a in A und c in C
  $\Leftrightarrow A_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C_0$ für alle Teilmengen $A_0 \subset A$ und $C_0 \subset C$.
- $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} CD \Rightarrow A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{BC} D$.
- $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C$ und $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{BC} D \Rightarrow A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} D$.

Die folgenden beiden Regeln gelten i.a. *nicht*:

- $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C \Rightarrow AB \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C$.
- $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{B} C \Rightarrow C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma^{-1}}_{B} A$.

Beispiel (unsymmetrische quantorenfreie Freiheit): Es sei f die zykelfreie Surjektion ohne endliche Fasern auf der Menge M, $\mathcal{M} = (M, Graph(f))$ als relationale $\{R\}$-Struktur (R zweistellig) und $\Gamma = \mathrm{QF}^*$. $\mathcal{M}$ ist stabil, insbesondere ist QF^* stabil. Die einzigen (negativ-) atomaren QF^*-Formeln über $\mathcal{M}$, die nicht frei über $\emptyset$ sind, sind Rxm, Rmx und $x = m$ ($m \in \mathcal{M}$). Es sei p ein nichtalgebraischer QF^*-Typ über $\mathcal{M}$ in einer Variablen: p ist genau dann frei über $\emptyset$, wenn $Rxm \notin p$ für alle $m \in \mathcal{M}$. Es sei p frei über $\emptyset$ und $a \models p$, dann gilt $f(a) \notin \mathcal{M}$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma} \mathcal{M}$. Andererseits kann $f^n(a) \in M$ für ein $n > 1$ gelten, dann ist $\mathcal{M} \cap dcl(a) \not\subset acl(\emptyset)$, also $\mathcal{M} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma} a$ und $dcl(a) \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma} \mathcal{M}$. Diese Tatsachen liegen aber außerhalb der quantorenfreien Information von a über $\mathcal{M}$. Es gibt aber $a' \models p$, so daß $\mathcal{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma} a'$ und $acl(a') \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma} \mathcal{M}$ – einfach ein solches mit $f^n(a') \notin \mathcal{M}$ für alle n. Wenn man also die „richtige" $L(\mathcal{M})$-Vervollständigung von p betrachtet, so verhält sich alles gut. Dieses Phänomen zeigt sich gleich allgemeiner in 3.36.

3.35 Lemma
Es sei $C \subset A \cap B$: ist $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{C} B$, so ist jede strikte Formel aus $tp_{\Gamma^{-1}}({}^{B}\!/\!_{A})$ frei über C.

Beweis
Es sei $\varphi(a, y)$ eine strikte Γ^{-1}-Formel in $tp({}^{B}\!/\!_{A})$, es reicht zu zeigen, daß $\varphi(a, y) \cup tp_{\varphi^{-1}}({}^{b}\!/\!_{C})$ frei über C ist. Es gelte etwa $\varphi(a, b)$ für ein $b \in B$. $\varphi(x, y)$ ist eine boolesche Kombination von Formeln der Form $\varphi_i^{-1}(x_i; y) \in \Gamma^{-1}$. Da Γ gut ist unter Substitution von speziellen Variablen, ist jedes $\varphi_i(x_i; y) \in \Gamma$ und $\varphi(x, b)$ ist eine strikte Γ-Formel. Weil $tp_\Gamma({}^{a}\!/\!_{B})$ frei über C ist, ist $tp_\varphi({}^{a}\!/\!_{C}) \cup \varphi(x, b)$ frei über C. Wegen lokaler Symmetrie ist dann auch $\varphi(a, y) \cup tp_{\varphi^{-1}}({}^{b}\!/\!_{C})$ frei über C. $\square$

Daß ein strikter Typ frei ist besagt nicht viel, weil man keine Kontrolle über die Definitionen hat und wir bekommen auch keine Symmetrie auf der Ebene der strikten Typen.[42] Das Folgende scheint mir die best mögliche Annäherung an die Symmetrie:

3.36 **Satz** Es sei $A \subset B$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$. Es gibt ein $a' \models tp_{\Gamma}(a/B)$, so daß

(i) $acl(Aa') \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$ und (ii) $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_{A} acl(Aa')$.

Beweis
Es sei $\mathcal{V}$ ein Obermodell von Aa und $\mathcal{V}'a' \models stp_{\Gamma}(\mathcal{V}a/A)|B$. Wegen Stationarität gilt dann $a' \models tp_{\Gamma}(a/B)$. Wegen $a' \in \mathcal{V}'$ und $\mathcal{V}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$ gilt insbesondere (i) und aus dem letzten Lemma folgt, daß der strikte Typ von $tp_{\Gamma^{-1}}(B/\mathcal{V})$ frei über A ist. Weil aber $tp_{\Gamma^{-1}}(B/\mathcal{V})$ durch strikte Formeln axiomatisiert ist, gilt $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_{A} \mathcal{V}'$ und insbesondere (ii). □

Die Eigenschaften (i) und (ii) gelten dann auch für alle $a'' \equiv_B a'$ und man kann a' sogar so wählen, daß $a' \equiv_A a$ (denn $\exists\text{-}tp(a/A) \cup stp_{\Gamma}(\mathcal{V}a/A)$ ist frei über A). Mit $\Gamma = L$ folgt aus dem Satz die globale Symmetrie in stabilen Theorien. Ich verwende bald folgendes Resultat, das man mit dem Beweis von (i) sofort einsieht:

3.37 **Bemerkung** Es sei $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{C} B$.
Wenn es $A \supset Ca$ gibt, so daß $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{C} B$ und Γ^{-1} strikt über A ist, dann gilt $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_{C} a$.

Striktheit und Perfektheit

Wenn Γ und Γ^{-1} äquivalent sind, also dieselben Formeln definieren, so ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}$ und aus der Symmetrie der Γ-Freiheit folgt auch die der Γ^{-1}-Freiheit. Ich beschränke mich auf diesen Fall und zeige, daß Striktheit und „Perfektheit" zusammen hinreichen um Symmetrie zu garantieren.

3.38 **Lemma** Es seien Γ und Γ^{-1} äquivalent und Γ sei strikt.

(1) Für alle A, B, C mit $A \subset B \cap C$ gilt: $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B \iff B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} C$.

(2) Γ-Freiheit ist genau dann symmetrisch, wenn

(*) es gilt stets: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B \Rightarrow aA \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$.

Beweis
Es ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}$, denn Γ und Γ^{-1} sind äquivalent. (1) folgt aus 3.37 und (2) folgt aus (1). □

Ich gebe nun eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (*). Eine Formel $\psi(x_0, ..., x_n)$ nenne ich *perfekt stabil* (der Begriff ist angelehnt an den Begriff der perfekten Gleichung in [JuKr]), wenn für jedes Teiltupel $\bar{x}$ aus $x_0, ..., x_n$ $\psi_{\bar{x}}(x_0, ..., x_n)$ stabil ist. Γ nenne ich perfekt stabil, wenn jede Formel aus Γ perfekt stabil ist.[43] Dann sind Γ und Γ^{-1} äquivalent. Zum Beispiel ist in der Theorie eines Körpers K für jedes Polynom $f \in K[X_1, ..., X_n]$ die Formel $f(x_1, ..., x_n) = x_0$ perfekt stabil.

[42] Ist $tp_{\Gamma}^{\text{strikt}}(A/B)$ frei über C, so können wir über $tp_{\Gamma^{-1}}^{\text{strikt}}(B/A)$ nicht viel aussagen.

[43] Das ist genau dann der Fall, wenn $\Gamma = \Lambda^*$ für ein $\Lambda \subset L$. Es würde eauch reichen zu fordern: Γ ist stabil und äquivalent zu einer Familie der Form Λ^*.

3.39 Lemma Es sei Γ perfekt stabil, dann ist (*) erfüllt.

BEWEIS

Es sei $A \subset B$, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\Gamma}_{A} B$, c ein Tupel in A und $\psi(xx', b) \in tp_\Gamma(ac/B)$. Dann ist $\psi(xx', b) \equiv bc_i(\varphi_i(xx', b))$ für geeignete $\varphi_i \in \Gamma$, und weil Γ perfekt ist, ist $bc_i(\varphi_i(x, cb))$ eine strikte $\Gamma(B)$-Formel und folglich ist $\psi(x, cb)$ eine $\Gamma(B)$-Formel. Deshalb ist $\psi(x, cb) \in tp_\Gamma(a/B)$ und teilt nicht über A, da $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\Gamma}_{A} B$. Dann teilt auch $\psi(xx', b)$ nicht über A: ist $(b_i)_\omega$ A-indiscernible in $tp(b/A)$ und $\{\psi(xx', b_i) \mid i < \omega\}$ inkonsistent, so ist auch $\{\psi(x, cb_i) \mid i < \omega\}$ inkonsistent und $(cb_i)_\omega$ ist indiscernible in $tp(cb/A)$, da $c \in A$. $tp_\Gamma(ac/B)$ ist also frei über A. □

Die beiden Lemmas zeigen:

3.40 Satz Ist Γ strikt und perfekt stabil, so ist Γ-Freiheit symmetrisch.

Leider ziehen diese beiden Bedingungen in verschiedene Richtungen: um Γ strikt zu machen, müssen wir es vergrößern, für die Perfektheit verkleinern. Beides zusammen hat man leider selten.

Beispiel: ID_x ist perfekt stabil, aber nicht strikt. ACL_x ist strikt und stabil, aber nicht perfekt. ID_x und ACL_x sind äquivalent.

Ich wende diese Ergebnisse nun auf die Familie aller stabilen Δ_1^*-Formeln an.

3.41 Lemma Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster und Σ die Familie der stabilen Δ_1^*-Formeln: Σ ist strikt und äquivalent zu Σ^{-1}.

BEWEIS

Es sei $\varphi(x, a)$ eine $\Sigma(A)$-Formel, etwa $\varphi(x, a) \equiv \psi(x, b)$ für ein $\psi \in \Sigma$ (Σ ist abgeschlossen gegen boolesche Kombinationen). Die universelle Formel $\forall x\ (\varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, z))$ ist dann (in jedem großen Modell, siehe 2.12) Vereinigung von Δ_1-Formeln. Es gibt also eine Δ_1-Formel $\chi'(y, z) \in tp(ab)$, so daß $\chi'(y, z) \to \forall x\ (\varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, z))$. $\exists z \chi'(y, z)^{\mathcal{U}}$ ist dann (in jedem großen Modell, siehe 2.12) Schnitt von Δ_1-Mengen $\chi_i(y)^{\mathcal{U}}$. Die Familie der χ_i sei abgeschlossen gegen endliche Konjunktionen. Es sei $\varphi_i(x, y) := \varphi(x, y) \wedge \chi_i(y)$.

Behauptung: ein φ_i ist stabil.

Beweis: falls nicht, so ist $\{\varphi_i^{k<l}(x_k, y_l) \mid k, l \in \mathbb{Z}, i \in I\}$ konsistent, also erfüllt in $\mathcal{U}$, etwa durch (c_k), (a_l). Diese Folgen bezeugen dann auch, daß $\varphi(x, y) \wedge \exists z \chi'(y, z)$ die Ordnungseigenschaft in $\mathcal{U}$ hat und es gilt für alle l: $\exists x \chi'(x, a_l)$. Es gibt also zu jedem a_l ein b_l, so daß $\chi'(a_l, b_l)$ also $\varphi(x, a_l) \equiv \psi(x, b_l)$. (c_k) und (b_l) bezeugen dann die Ordnungseigenschaft von ψ, das geht nicht.

Für ein i ist also φ_i eine stabile Δ_1-Formel und offensichtlich ist $\varphi_i(x, a) \equiv \psi(x, b)$. □

Der Beweis illustriert, wie man höhere Quantifikationen in Δ_1-Universalbereichen vermeiden kann.[44] Ein ähnliches Argument zeigt:

[44]Der elementare Beweis wäre einfacher, würde aber eine $\exists\forall$-Quantifikation benötigen.

3.42 **Bemerkung**
Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster, dann ist Σ_g, die Familie aller Δ_1^*-Gleichungen, strikt und äquivalent zu Σ_g^{-1}.[45]

3.43 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster und Σ die Familie aller stabilen Δ_1^*-Formeln (aller Δ_1^*-Gleichungen).

(1) Für alle A, B, C mit $A \subset B \cap C$ gilt: $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Sigma} B \iff B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Sigma} C$.

(2) Σ-Freiheit ist genau dann symmetrisch, wenn

(*) es gilt stets: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Sigma} B \Rightarrow aA \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Sigma} B$.

Beweis
Die Voraussetzungen von 3.38 sind erfüllt. □

3.44 **Satz** Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster und Δ_1^* stabil. Dann ist Δ_1^*-Freiheit symmetrisch.

Beweis
Die Voraussetzungen von 3.40 sind erfüllt. □

Ich werde in den Anwendungen dafür argumentieren, daß in den bekannten Beispielen von symmetrischer QF*-Freiheit QF* strikt ist über algebraisch abgeschlossenen Mengen. Deshalb scheint mir eine leicht abgeänderte Version der obigen Sachverhalte wichtiger:

3.45 **Satz** Wenn Γ und Γ^{-1} äquivalent sind und strikt über algebraisch abgeschlossenen Mengen, so ist Γ-Freiheit genau dann symmetrisch, wenn

(**) es gilt stets: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Gamma} B \Rightarrow acl(Aa) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigcup}_A^{\Gamma} B$.

Beweis
Wie 3.38.[46] □

Ich fasse Striktheit als eine „lokal–global Eigenschaft“. Ebenso ist die Symmetrie der lokalen Freiheit eine „lokal–global Eigenschaft“, wie ich nach dem folgenden Exkurs zeigen werde. Ich vermute, daß Striktheit über algebraisch abgeschlossenen Mengen *im wesentlichen* äquivalent ist zur Symmetrie der lokalen Freiheit.

Exkurs: Unabhängigkeitsrelationen in $\mathcal{G}$

Ich möchte die Relation $\sqsubset_{(\Gamma,Y)}$ nun auf L-Typen anwenden – aber nur auf solche, die in $\mathcal{G}$ realisiert sind: auf $\mathcal{G}$-Typen.

3.46 **Definition** Sind p und q $\mathcal{G}$-Typen, so $p \sqsubset_{(\Gamma,Y)} q$, wenn $p \restriction (\Gamma, Y) \sqsubset_{(\Gamma,Y)} q \restriction (\Gamma, Y)$.

3.47 **Lemma** Die Relation $\sqsubset_{(\Gamma,Y)}$ auf den $\mathcal{G}$-Typen ist eine Fortsetzungsrelation für $\mathcal{G}$-Typen. Sie erfüllt bis auf Symmetrie alle Eigenschaften einer Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$.[47]

[45] Was eine Gleichung ist, sage ich in 4.6. Gleichungen sind stabil.
[46] Man beachte jedoch, daß Perfektheit nicht mehr ausreicht, um (**) zu garantieren.
[47] siehe Definitionen 2.1.1 und 1.2.

Beweis
Bis auf (Erweiterung) ergeben sich alle Eigenschaften aus der Definition und den bekannte Eigenschaften der (Γ, Y)-Freiheit.

Behauptung: jeder $\mathcal{G}$-Typ über $A \subset B$ hat eine (Γ, Y)-freie Fortsetzung zu einem $\mathcal{G}$-Typ über B.

Beweis: Es sei p ein $\mathcal{G}$-Typ über $A \subset B$, $p_{(\Gamma,Y)}$ die Restriktion von p auf (Γ, Y) und $\exists$-p der existenzielle Typ von p. Ist $q_{(\Gamma,Y)}$ eine beliebige (Γ, Y)-freie Fortsetzung von $p_{(\Gamma,Y)}$ nach $S_{(\Gamma,Y)}(B)$, so ist $q_{(\Gamma,Y)}$ konsistent mit $\exists$-p (Konsistenz, 3.5). ist $q \supset \exists\text{-}p \cup q_{(\Gamma,Y)}$ ein $\mathcal{G}$-Typ über B, so ist $p \sqsubset_{(\Gamma,Y)} q$. □

3.48 **Korollar** Es seien Γ und Γ^{-1} äquivalent. $\sqsubset_\Gamma$ (auf den $\mathcal{G}$-Typen) ist genau dann eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$, wenn Γ-Freiheit symmetrisch ist.

Globale Konsequenzen der Symmetrie

Ich werde nun zeigen, daß aus der Symmetrie der Γ-Freiheit schon folgt, daß Γ-Freiheit Γ'-Freiheit impliziert für jedes stabile $\Gamma' \subset \Delta_1^*$. Das ist ein neues Resultat und es stimmt leider nur, wenn (Γ, Y)-Freiheit „kanonisch" ist. Im weiteren Sinne stammt die Strategie von Hans Scheuermann [Sch, Satz 1.7.4].

Ich nenne (Γ, Y)-Freiheit *kanonisch* in $\mathcal{G}$, wenn für alle (Γ, Y)-Typen p über $C \supset A \cup B$ gilt: wenn p frei über A und auch über B ist, so ist p frei über $acl(A) \cap acl(B)$.

Eine *acl-Morleyfolge über A* ist eine unendliche A-Indiscerniblefolge a_I, so daß für alle endlichen Teilfolgen $\bar{a}\bar{b}$ von a_I gilt: $acl(A\bar{a}) \cap acl(A\bar{b}) = acl(A)$.

3.49 **Lemma** Es sei (Γ, Y)-Freiheit kanonisch. Jede acl-Morleyfolge über A ist eine (Γ, Y)-Morleyfolge über A.

Beweis
Es sei a_I eine acl-Morleyfolge über A und es seien $b_{<\omega}$ und $c_{<\omega}$ Folgen und a_∞ ein Tupel, so daß $b_{<\omega}c_{<\omega}a_I a_\infty$ eine A-Indiscerniblefolge ist. Dann ist das auch eine acl-Morleyfolge über A und es gilt $acl(Ab_{<\omega}) \cap acl(Ac_{<\omega}) = acl(A)$. Wir müssen zeigen, daß a_I (Γ, Y)-unabhängig über A ist, dazu reicht es zu zeigen, daß $q := tp_{(\Gamma,Y)}(a_\infty/Ab_{<\omega}c_{<\omega}a_I)$ frei über A ist. Wegen 3.19 ist q frei über $b_{<\omega}$ und weil $c_{<\omega}a_I a_\infty$ eine $Ab_{<\omega}$-Indiscerniblefolge ist, ist q auch frei über $c_{<\omega}$ (wieder mit 3.19). Weil nun (Γ, Y)-Freiheit kanonisch ist, ist q auch frei über $acl(b_{<\omega}) \cap acl(c_{<\omega}) \subset acl(A)$, also über A. □

3.50 **Satz** Es sei Γ gut und kanonisch. Wenn Γ-Freiheit symmetrisch ist und Γ' eine Familie von stabilen Δ_1^*-Formeln, so gilt für jeden partiellen existenziellen Typ Ψ und jede Parametermenge A:

$$\text{Wenn } \Psi\ \Gamma\text{-frei ist über } A\text{, so ist } \Psi \text{ auch } \Gamma'\text{-frei über } A.$$

Beweis
Es sei Ψ über B und Γ-frei über A, dann gibt es einen Γ-Typ $tp_\Gamma({}^a/_B)$, der Γ-frei über A ist und mit $a \models \Psi$. Es sei a_I eine unendliche Γ-Morleyfolge über B mit $a_i \equiv_B a$. Wegen 3.23 ist das auch eine Γ-Morleyfolge über A.

Behauptung: a_I ist eine *acl*-Morleyfolge über A.[48]

Beweis: Es sei $\bar{a}\bar{b}b$ eine Teilfolge aus a_I und es gelte $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A \bar{a}$. Wegen $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A \bar{a}\bar{b}$ und Monotonie gilt $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A\bar{b}} \bar{a}$. Aus globaler Symmetrie folgt $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_A \bar{b}$ und $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_{A\bar{b}} b$, also $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_A \bar{b}b$ und wieder mit Symmetrie $b\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A \bar{a}$. Mit Induktion schließe ich, daß für alle endlichen Teilfolgen $\bar{a}\bar{b}$ von a_I gilt: $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A \bar{a}$. Dann gilt auch $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A acl(A\bar{a})$ und mit Symmetrie $acl(A\bar{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_A \bar{b}$ und dann $acl(A\bar{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma^{-1}}_A acl(A\bar{b})$, also wieder mit Symmetrie $acl(A\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A acl(A\bar{a})$. Weil Γ die Identität enthält folgt $acl(A\bar{a}) \cap acl(A\bar{b}) = acl(A)$ und damit die Behauptung.

Wegen des vorigen Lemmas ist a_I eine Γ'-Morleyfolge über A. Weil a_I B-indiscernible ist, folgt wieder aus 3.23, daß $tp_{\Gamma'}({}^a/_A)$ Γ'-frei über A ist. Ψ ist also konsistent mit einem $\Gamma'(B)$-Typ, der frei über A ist und damit selber Γ'-frei über A. □

Die Symmetrie der Γ-Freiheit wurde nur verwendet um zu zeigen, daß

(*) jede Γ-Morleyfolge über A ist eine *acl*-Morleyfolge über A.

Man kann die Voraussetzung an Γ also sogar noch abschwächen: schon aus (*) ergibt sich diese „globale Konsequenz“ der Satzes.[49] Versteht das jemand???

3.51 **Korollar** Es sei Γ gut und T modellvollständig mit schwacher Imaginärenelimination. Wenn Γ symmetrisch ist und Γ' eine Familie von stabilen L^*-Formeln, so gilt stets:

Wenn Π Γ-frei ist über A, so ist Π auch Γ'-frei über A.

Beweis
Wir sind in der elementaren Situation, es ist zu zeigen, daß Γ kanonisch ist. Es sei p ein Γ-Typ über $C \supset A \cup B$ und frei sowohl über A als auch über B.

Behauptung: p ist frei über A als auch über $acl(A) \cap acl(B)$.

Beweis: Es sei $\tilde{p}$ ein starker Typ von p, der ist dann fast definierbar sowohl über A als auch über B. Es sei $\bar{e} \in T^{eq}$ die kanonische Basis von $\tilde{p}$ (bestehend aus den kanonischen Parametern der φ-Definitionen von $\tilde{p}$). Wegen schwacher Imaginärenelimination gibt es ein Tupel $\bar{d} \in T$, so daß $acl^{eq}(\bar{d}) = acl^{eq}(\bar{e})$. Weil $\bar{e} \in acl^{eq}(A)$, ist $\bar{d} \in acl(A)$, entsprechend $\bar{d} \in acl(B)$, also $\bar{d} \in acl(A) \cap acl(B)$. Dann ist $\bar{e} \in acl^{eq}(acl(A) \cap acl(B))$ und deshalb ist $\tilde{p}$ fast definierbar über $acl(A) \cap acl(B)$. Damit folgt die Behauptung. □

Globale Stabilität

[48] Nur hier verwende ich die Symmetrie der Γ-Freiheit.

[49] Die folgenden beiden Eigenschaften garantieren (*): (i) wenn $(a_i)_{i<\omega}$ eine Γ-Morleyfolge über A ist, so auch $(a_{kn}a_{kn+1}...a_{kn+(n-1)})_{k<\omega}$ für jedes große $n < \omega$ und (ii) $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A B \Rightarrow acl(Aa) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_A B$.

3.52 Definition

(1) $\mathcal{G}$ heißt *schwach stabil*, wenn alle Δ_1^*-Formeln stabil sind.

(2) $\mathcal{G}$ heißt *stark stabil*, wenn die folgende Relation eine stabile Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$ induziert:

$$tp(a/A) \sqsubset^{nd} tp(a/B) :\Leftrightarrow tp(a/A) \subset tp(a/B) \text{ und } \exists\text{-}tp(a/B)\ \mathcal{G}\text{-teilt nicht über } A$$

Es sei $\mathcal{G}$ stark stabil. Wegen lokalem Charakter und Stationarität über Modellen gibt es nicht viele $\exists$-$\mathcal{G}$-Typen. Insbesondere gibt es nicht viele Δ_1-$\mathcal{G}$-Typen und wegen des Stabilitätssatzes 2.18 ist Δ_1^* stabil. $\mathcal{G}$ ist also schwach stabil.

3.53 Satz Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster.

(1) Wenn $\mathcal{G}$ schwach stabil ist, so ist $\mathcal{G}$ stark stabil und die stabile Unabhängigkeitsrelation $\sqsubset^{nd}$ ist gegeben durch Δ_1^*-Freiheit.

(2) $\mathcal{G}$ ist genau dann stark stabil, wenn es eine stabile Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$ gibt. Diese Unabhängigkeitsrelation ist dann identisch mit $\sqsubset^{nd}$.

Beweis
(1) In Δ_1-Universalbereichen sind die Δ_1^*-Formeln strikt (Kapitel 1, 2.21). Ist $\mathcal{G}$ schwach stabil, so ist Δ_1^* perfekt stabil. Aus 3.44 und 3.48 folgt, daß Δ_1^*-Freiheit eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$ induziert. Diese Unabhängigkeitsrelation ist sogar stabil: die Δ_1^*-Typen über Modellen sind stationär und legen in Δ_1-Universalbereichen vollständige $\mathcal{G}$-Typen fest. Es bleibt noch zu zeigen, daß $tp(a/A) \sqsubset^{nd} tp(a/B) \Leftrightarrow tp(a/A) \sqsubset_{\Delta_1^*} tp(a/B)$. Wegen 3.21 gilt $tp(a/A) \sqsubset_{\Delta_1^*} tp(a/B)$ genau dann, wenn $tp_{\Delta_1^*}(a/B)$ über A nicht teilt. Deshalb gilt „$\Rightarrow$". Gibt es umgekehrt eine Formel $\varphi(x,b) \in \exists\text{-}tp(a/B)$, die über A teilt, so teilt auch $tp_{\Delta_1^*}(a/B)$ über A, denn $\varphi(x,b)^{\mathcal{G}} = \Phi(x,b)^{\mathcal{G}}$ für ein $\Phi \subset tp_{\Delta_1^*}(a/b)$ (Kapitel1, 2.12) und mit $\{\varphi(x,b_i) \mid \in I\}$ ist auch $\{\Phi(x,b_i) \mid \in I\}$ inkonsistent für jede Indiscerniblefolge b_I in $tp(b/A)$. Mit Kompaktheit teilt dann ein $\psi \in tp_{\Delta_1^*}(a/B)$ über A.

(2) Es sei nun $\sqsubset$ eine stabile Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$. Sind dann $p \subset q$ Δ_1^*-Typen, so wird durch $p \sqsubset q :\Leftrightarrow \bar{p} \sqsubset \bar{q}$ ein Begriff von freier Fortsetzung für Δ_1^*-Typen definiert, wobei $\bar{p}$ und $\bar{q}$ die durch p und q festgelegten $\mathcal{G}$-Typen sind. Wegen 3.31 ist Δ_1^* stabil und $\sqsubset = \sqsubset_{\Delta_1^*}$ als Relation zwischen Δ_1^*-Typen. Dann ist aber auch $\sqsubset = \sqsubset_{\Delta_1^*}$ als Relation zwischen $\mathcal{G}$-Typen. Aus (1) folgt, daß $\mathcal{G}$ stark stabil ist und daß $\sqsubset = \sqsubset^{nd}$. Die Umkehrung folgt auch aus (1). □

Der Satz ist die Verallgemeinerung des klassischen Resultats: ist T eine vollständige modellvollständige Theorie und $\mathcal{G}$ die Klasse der $|L|^+$-saturierten Modelle von T, so ist $\mathcal{G}$ genau dann stabil, wenn T stabil (im klassischen Sinn) ist ($\mathcal{G}$ ist ein Δ_1-Pseudomonster). T ist also genau dann stabil, wenn es eine stabile Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$ gibt, diese Unabhängigkeitsrelation ist dann gegeben durch Nichtteilen.

Ich bin davon überzeugt, daß der Satz für beliebige $\exists$-Pseudomonster falsch ist – habe aber leider kein Gegenbeispiel. Im Falle der Δ_1-Pseudomonster haben wir also eine klare Definition und Charakterisierung der globalen Stabilität. Für den allgemeinen Fall der $\exists$-Pseudomonster scheinen die Dinge zur Zeit noch etwas unklar zu sein und es hat sich noch keine Definition für globale Stabilität durchgesetzt. Eine der zur Zeit gehandelten[50] möglichen Definitionen ist die folgende:

Ein Paar $(\varphi(x,y), \varphi^*(x,y))$ von miteinander inkonsistenten existenziellen Formeln (ohne Parameter) hat die *Ordnungseigenschaft* in $\mathcal{G}$, wenn es Folgen $(a_i)_{i<\omega}$ und $(b_i)_{i<\omega}$ in $\mathcal{U}$ gibt, so daß $i < j \Rightarrow \varphi(a_i, b_j)$ und $i \geq j \Rightarrow \varphi^*(a_i, b_j)$.[51] $\mathcal{G}$ ist *stabil**, wenn kein solches Paar die Ordnungseigenschaft hat. Ist $\mathcal{G}$ stabil*, so auch sicher schwach stabil.

3.54 **Lemma** Es sei $\mathcal{G}$ ein Δ_1-Pseudomonster. $\mathcal{G}$ ist genau dann stabil*, wenn $\mathcal{G}$ stark stabil ist.

BEWEIS
Es seien $(a_i)_{i<\omega}$ und $(b_i)_{i<\omega}$ Folgen in $\mathcal{U}$ und $(\varphi(x,y), \varphi^*(x,y))$ ein Paar von miteinander inkonsistenten existenziellen Formeln. Wir können φ und φ^* durch eine Δ_1-Formel trennen (Kapitel 1, 2.13). Wenn dann $(\varphi(x,y), \varphi^*(x,y))$ die Ordnungseigenschaft hat, so hat auch diese Δ_1-Formel die Ordnungseigenschaft. $\mathcal{G}$ ist also nicht schwach stabil und wegen des vorigen Satzes auch nicht stark stabil. Ist umgekehrt $\mathcal{G}$ stabil*, so auch schwach stabil, also stark stabil nach dem vorigen Satz. □

Mit den üblichen Techniken kann man auch im instabilen* Fall viele $\exists$-Typen konstruieren. Dann kann $\mathcal{G}$ nicht stark stabil sein. Es gilt also stets: stark stabil $\Rightarrow$ stabil* $\Rightarrow$ schwach stabil.

Frage: Folgt aus der Stabilität* von $\mathcal{G}$ stets die starke Stabilität?

2.4 Anwendungen

Ich gebe nun zwei Anwendungen der bisher entwickelten lokalen Stabilitätstheorie. Zuerst nenne ich ein Kriterium dafür, wann eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}$ mit lokaler Freiheit übereinstimmt. Damit zeige ich, daß die übliche **Unabhängigkeitsrelation für die generischen Automorphismen** einer stabilen Theorie mit lokaler Freiheit zusammenfällt. Danach untersuche ich lokale Freiheit bezüglich **Gleichungen**. Außerdem werde ich im Anhang zeigen, wie sich die stabile Gruppentheorie in diesem Rahmen entwickeln läßt. Der Ansatz, die Parameter und Realisierungen auf eine typdefinierbare Menge eingeschränkt zu haben erlaubt es uns dann, für typdefinierbare Gruppen G die (G, Γ, G)-Stabilität zu betrachten.

2.4.1 Quantorenfreie Stabilität

Ich werde nun von einigen bekannten Unabhängigkeitsrelationen zeigen, daß sie mit der quantorenfreien Freiheit übereinstimmen. Das wäre offensichtlich, müßte man sich nicht Gedanken um die Striktheit machen: eine quantorenfreie Formel über A ist dasselbe, wie eine strikte QF*-Formel über A. Wir haben aber gesehen, daß ein lokaler Typ nicht frei sein muß, wenn sein strikter Typ es ist.

[50] Pillay hat sie erwähnt, er sagte, daß sei vielleicht schon bei Shelah zu finden sei.

[51] φ^* übernimmt also die Rolle von $\neg\varphi$.

4.1 **Satz** Es sei $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ $ eine Unabhängigkeitsrelation[52] in $\mathcal{G}$ und $\Gamma \subset \Delta_1^*$, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind: für alle $A \subset B = acl(B) \subset \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ und a, a' aus $\mathcal{G}$ gilt:

(i) Wenn $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ und $a' \models tp_\Gamma^{\text{strikt}}(a/B)$, dann $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.[53]

(ii) Wenn $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B \mathcal{U}$, $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B \mathcal{U}$ und $a \equiv_B a'$, dann $a' \models tp_\Gamma(a/\mathcal{U})$.

Dann gilt:

(1) Γ ist stabil.

(2) $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B \iff tp(a/B)$ ist Γ-frei über A für alle a, $A \subset B$.

(3) Jede fast A-invariante Γ-Formel äquivalent zu einer strikten Γ-Formel über $acl(A)$.

Beweis

(1) und (2): $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ hängt nur von $tp_\Gamma(a/B)$ ab: es sei $a' \models tp_\Gamma(a/B)$. Da die Fortsetzungen von $tp_\Gamma(a/B)$ nach $acl(B)$ B-konjugiert sind gibt es $\sigma \in \mathrm{Aut}_B$, so daß $\sigma(a) \models tp_\Gamma(a'/acl(B))$. Wenn $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$, so auch $\sigma(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ und $\sigma(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A acl(B)$. Wegen (i) gilt dann $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A acl(B)$, also $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. Es sei nun $tp_\Gamma(a/A) \sqsubset tp_\Gamma(a/B) :\Leftrightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.

Behauptung: $\sqsubset$ ist ein Begriff von freier Fortsetzung auf Γ-Typen.

Beweis: Bis auf (Beschränke Multiplizität) folgen dann alle Eigenschaften eines Begriffs von freier Fortsetzung aus der Tatsache, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ $ eine Unabhängigkeitsrelation ist, (Beschränke Multiplizität) folgt aber aus (ii).

Aus 3.32 folgt dann (1) und wegen 3.31 ist $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ genau dann, wenn $tp_\Gamma(a/B)$ Γ-frei über A ist. Das ist äquivalent dazu, daß $tp(a/B)$ Γ-frei über A ist, also gilt (2).

(3) Es sei $A = acl(A)$. Ich zeige zuerst, daß Γ strikt ist über A. Es sei $\varphi(x)$ eine $\Gamma(A)$-Formel. Zu zeigen ist, daß φ äquivalent zu einer strikten $\Gamma(A)$-Formel ist. Mit Kompaktheit reicht es zu zeigen, daß jeder strikte $\Gamma(A)$-Typ, der mit φ konsistent ist, φ impliziert. Es sei also p ein mit φ konsistenter strikter $\Gamma(A)$-Typ.

Behauptung: $p \models \varphi$.

Beweis: Es sei $a' \models p$, dann gibt es $a \equiv_A a'$, so daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{U}$. Entsprechend sei $b' \models p \cup \varphi$ und $b \equiv_A b'$, so daß $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{U}$, dann gilt auch $b \models \varphi$. Wegen (ii) haben also a und b denselben Γ-Typ über $\mathcal{U}$, deshalb gilt auch $a \models \varphi$, also auch $a' \models \varphi$.

Es sei nun φ eine fast A-invariante Γ-Formel. Wegen der gerade gezeigten Striktheit reicht es zu zeigen, daß φ A-invariant ist. Es sei also $c \models \varphi$ und $c' \equiv_A c$.

Behauptung: $c' \models \varphi$.

Beweis: Es sei $cc' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{V}$ für ein geeignetes Modell $\mathcal{V}$, dann ist $\varphi(x)$ $\mathcal{V}$-invariant und äquivalent zu einer Γ-Formel über $\mathcal{V}$. Wegen (ii) haben c und c' denselben $\Gamma(\mathcal{V})$-Typ, damit folgt die Behauptung. □

4.2 **Korollar** Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Starke Γ-Typen durch strikte Γ-Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen axiomatisiert und es gilt:

(*) $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B \Leftrightarrow$ es gibt eine strikte Γ-Formel $\psi \in tp(a/acl(B))$, die über A teilt.

---

[52]Ich habe in 1.2 eine Unabhänigkeitsrelation als Fortsetzungsrelation zwischen Typen definiert. Es ist klar, wie man das äquivalent durch eine dreistellige Relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ $ definiert.

[53]Ich sage dazu: $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ $ hängt über algebraisch abgeschlossenen Mengen nur vom strikten Γ-Typ ab.

Beweis
Aus (3) folgt sofort, daß starke Γ-Typen über A durch strikte Γ-Typen über $acl(A)$ axiomatisiert sind. Es gilt also $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ genau dann, wenn der strikte Γ-Typ von a über $acl(B)$ Γ-frei ist über A, wenn also keine seiner Formeln teilt über A (3.21). □

Das ist dann eine besonders schöne Situation, denn wir können ganz mit strikten Formeln arbeiten und auch auf starke Typen verzichten.[54]

Anmerkung: Es wurde in verschiedenen Arbeiten angedeutet, daß für bestimmte Theorien etwa „forken = lokales stabiles quantorenfreies forken“ ist. Wenn damit „lokales forken“ im Sinne der in dieser Arbeit beschriebenen lokalen Freiheit gemeint war, dann scheint mir das Problem der Striktheit übersehen worden zu sein. Ich vermute der Grund dafür ist, daß die meisten bekannten Beispiele von einfachen Theorien, deren Unabhängigkeit durch stabile Formeln kontrolliert wird, in das im Satz beschriebene Bild passen. Das Korollar erklärt also, warum Striktheit bisher nicht beachtet werden mußte. Ich sehe Striktheit jedoch eine tiefliegende strukturelle Eigenschaft, welche gewissermaßen der tiefere Grund für die globale Symmetrie vieler lokaler Freiheitsrelationen ist.

Beispiele

Generische Automorphismen: Ich wende den Satz nun auf die generischen Automorphismen an. Es sei T eine vollständige stabile Theorie mit (QE) und (PAPA), $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ sei die stabile Unabhängigkeitsrelation in T. σ sei ein generischen Automorphismus von T, ich arbeite in der zu σ gehörenden Vervollständigung: es sei $\mathcal{G}$ die Klasse der zu σ elementar äquivalenten generischen Automorphismen.

4.3 **Definition** Es seien a ein Tupel und $A \subset B$: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\sigma}_A B :\Longleftrightarrow a_\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A_\sigma} B_\sigma$.

Diese Relation hängt nur vom T-Typ von $A_\sigma a_\sigma b_\sigma$ ab, also nur vom (strikten) quantorenfreien α-Typ. Die induzierte Fortsetzungsrelation $tp_\sigma(a/A) \sqsubset tp_\sigma(a/B) :\Longleftrightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\sigma}_A B$ ist eine Unabhängigkeitsrelation:

4.4 **Lemma** $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\sigma}$ ist eine Unabhängigkeitsrelation für $\mathcal{G}$.

Beweis
Abgesehen von (Erweiterung) ergeben sich alle Axiome sofort aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften von $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ (in T). Zu (Erweiterung):

Es seien $p = tp_\sigma(c/A)$ und $B \supset A$, zu zeigen ist, daß es ein a gibt, so daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\sigma}_A B$ und $\sigma \models p(a)$. Sei $f \in Aut_{acl_\sigma(A_\sigma)}$, so daß $f(c_\sigma) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A_\sigma} B_\sigma$. Dann gilt für $\tau = {}^f\sigma$: $acl(f(c_\sigma)) = acl_\tau(f(c))$, $\tau_A = \sigma_A$ und $f(c) \models_\tau p$. Also $acl_\tau(Af(c)) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{acl_\sigma(A)} acl_\sigma(B)$ und wegen stationärer Amalgamierung (Kapitel 1, 3.5) gibt es dann ein generisches $\tilde\sigma \supset \tau_{Af(c)} \cup \sigma_B$, dann $\tilde\sigma, f(c) \models p$, $f(c) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\tilde\sigma}_A B$ und $\tilde\sigma \equiv_B \sigma$. Wähle dann ein a, so daß $\sigma, a \equiv_B \tilde\sigma, f(c)$, das tut's. □

[54]Ich sage nicht, daß Γ strikt ist!

4.5 **Satz** Es sei σ ein generischer Automorphismus.

(1) QF^*_α ist stabil und $tp_\sigma(a/B)$ ist genau dann QF^*_α-frei über $A \subset B$, wenn $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}_{A} B$.

(2) Die strikten quantorenfreien α-Typen über α-algebraisch abgeschlossenen Mengen axiomatisieren starke Typen.

(3) Es gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}_{A} B$ genau dann, wenn für alle α-quantorenfreien Formeln φ über $acl(B)$ mit $\sigma \models \varphi(a)$ gilt: φ teilt nicht über A.

Beweis

$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}$ erfüllt bezüglich $\Gamma = \mathrm{QF}^*_\alpha$ die Voraussetzungen des Lemmas oben:

(i) Nach Definition hängt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}$ über jeder Menge nur vom strikten QF^*_α-Typ ab.

(ii) Es sei $B = acl_\sigma(B) \subset C = acl_\sigma(C)$. Falls $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}_{B} C$, $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{\sigma}_{B} C$ und a und a' denselben α-Typ über B in σ haben, so haben a_σ und a'_σ denselben Typ über B in T und es gilt $a_\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_{B} C$ und $a'_\sigma \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_{B} C$. Mit Stationarität in T folgt dann $a_\sigma \equiv_C a'_\sigma$ in T, also haben a und a' denselben strikten QF^*_α-Typ über C in σ. Wenn also C der Träger einer elementaren Substruktur von σ ist, so haben a und a' auch denselben QF^*_α-Typ über C.

Nun folgen (1), (2) und (3) direkt aus dem Korollar oben. □

Pseudoendliche Körper: Es sei T die Theorie eines pseudoendlichen Körpers. Der algebraische Abschluß in T ist der relative algebraische Abschluß im Sinne der Körpertheorie und algebraische Unabhängigkeit im Sinne der Körpertheorie ist eine einfache Unabhängigkeitsrelation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}$ in T. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}$ stimmt mit quantorenfreier Freiheit überein und die quantorenfreien Formeln über algebraisch abgeschlossenen Mengen axiomatisieren starke Typen.[55] Der Grund ist, daß $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}$ die Voraussetzungen (i) und (ii) bezüglich der quantorenfreien Formeln erfüllt: (i) ist leicht zu sehen und für (ii) müssen wir uns nur überlegen, daß zwei Tupel, die in einem pseudoendlichen Körper F denselben Typ über einer (modelltheoretisch) algebraisch abgeschlossenen Menge A haben, den selben starken Typ in der Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper haben. Das ist äquivalent dazu, daß F eine reguläre Körpererweiterung von A ist. Aber A ist sicher relativ algebraisch abgeschlossen in F und F ist perfekt. Daraus folgt, daß F/A regulär ist.

Reell abgeschlossene Körper: Die Unabhängigkeitsrelation in reell abgeschlossenen Körpern ist auch durch algebraische Unabhängigkeit im Sinne der Körpertheorie gegeben. Es gelten wie im vorigen Beispiel die Voraussetzungen (i) und (ii) bezüglich der quantorenfreien Formeln in der Körpersprache.

Random Graph: Die einfache Unabhängigkeitsrelation im Random Graph ist gegeben durch $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_{B} C \Leftrightarrow A \cap C \subset B$. Bezüglich der quantorenfreien Formeln in der leeren Sprache sind (i) und (ii) erfüllt.

Exkurs: Generische Expansionen

Die Argumente des letzten Abschnitts lassen sich in einem viel allgemeineren Rahmen wiederholen. Es sei T eine vollständige, modellvollständige stabile Theorie, in der

[55] Ich finde das gar nicht so offensichtlich, daß es zu einer quantorenfreien Formel, die in T fast A-invariant ist, eine äquivalente quantorenfreie Formel gibt mit Parametern aus $acl(A)$.

Typen über algebraisch abgeschlossenen Mengen stationär sind. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,$ sei die stabile Unabhängigkeitsrelation in T. Es sei $L^* \supset L$ und T^* eine induktive L^*-Theorie, welche die Voraussetzung von 2.38 erfüllt. Dann sind die L-Redukte der generischen Modelle von T^* generische Modelle von T und jedes generische Modell von T hat eine generische Erweiterung, die sich zu einem generischem Modell von T^* expandieren läßt.

$\mathcal{G}^*$ sei die Klasse der generischen Modelle von T^* und Γ die Familie aller L-Formeln mit jeder Aufteilung der Variablen. Dann ist jede Γ-Formel eine stabile Δ_1^*-Formel in $\mathcal{G}^*$ und wir können von Γ-Freiheit in $\mathcal{G}^*$ sprechen. Nun sei $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,$ die stabile Unabhängigkeitsrelation in T, acl^* der algebraische Abschluß in generischen Modellen von T^*. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ sei in $\mathcal{G}^*$ folgendermaßen definiert: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*_A B :\Leftrightarrow acl^*(Aa) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{acl^*(A)} acl^*(AB)$. Dann gilt:

> $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ ist genau dann eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}^*$, wenn (Erweiterung) erfüllt ist. Wenn das der Fall ist, dann ist $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$-Unabhängigkeit dasselbe, wie Γ-Freiheit und wir können starke Γ-Typen ersetzen durch strikte Γ-Typen über algebraisch* abgeschlossenen Mengen.

Begründung: Bis auf (Erweiterung) hat $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ alle Eigenschaften einer Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}^*$, weil $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,$ die entsprechenden Eigenschaften hat. Wenn $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}^*$ ist, so sind auch die Voraussetzungen (i) und (ii) des vorigen Satzes erfüllt.[56]

Alle mir bekannten Beispiele dieser Form, in denen $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ (Erweiterung) erfüllt, erfüllen das folgende Kriterium, auch die generischen Automorphismen.

Kriterium:
(i) $\mathcal{G}^*$ bestehe aus $\exists$-ACL-Universalbereichen.
(ii) Für alle generischen Modelle $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ und alle $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}$ für $i = 1, 2$ gilt: *Wenn* $\mathcal{U}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \mathcal{U}_2$ und wenn die $\mathcal{U}_i$ zu generischen Modellen $\mathcal{U}_i^*$ von T^* expandieren, so daß $\mathcal{A}$ zu einer gemeinsamen L^*-Substruktur $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{U}_i^*$ wird, die in den $\mathcal{U}_i^*$ algebraisch abgeschlossen ist, *dann* gibt es ein generisches Modell $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, welches zu einem generischen Modell $\mathcal{U}^*$ von T^* expandiert, so daß $\mathcal{U}_i^* \subset \mathcal{U}^*$.

Wenn dieses Kriterium erfüllt ist, dann erfüllt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ (Erweiterung): Es seien a und $A \subset B$ aus einem großen generischen Modell $\mathcal{V}^*$ von T^*. $acl^*(Aa)$, $acl^*(A)$ und $acl^*(B)$ seien die jeweiligen algebraischen Abschlüsse. Es sei $\mathcal{U}_1^*$ ein generisches Untermodell, welches Ba enthält. Dann ist $\mathcal{V} = \mathcal{V}^* \restriction L$ ein großes generisches Modell von T und es gibt eine partielle elementare Abbildung $f : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}$ über $acl^*(A)$, so daß $f(acl^*(Aa)) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{acl^*(A)} acl^*(B)$. Es sei $\mathcal{U}_2^* := f(\mathcal{U}_2^*)$. Dann erfüllen $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_i^*$ und $acl^*(A)$ die Voraussetzungen von (ii), also gibt es ein generisches Modell $\mathcal{U}^*$ von T^* mit $\mathcal{U}_i^* \subset \mathcal{U}^*$ und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^* \restriction L$. In $\mathcal{U}^*$ gilt dann $f(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*_A B$ und $f(a) \equiv_A a$. Nun ist zwar $\mathcal{U}^*$ nicht unbedingt eine Erweiterung von $\mathcal{V}^*$, aber die beiden Strukturen sind elementar äquivalent über $\mathcal{U}_1^*$, das reicht.

Beispiel: Betrachte das Beispiel aus Kapitel 1, 2.39, wobei T eine Theorie wie oben ist. Die generischen Modelle von T^* sind $\exists$-ACL-Universalbereiche und man sieht leicht, daß auch (ii) des Kriteriums erfüllt ist. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ ist also eine Unabhängigkeitsrelation

[56] Damit man für (ii) Stationarität in T anwenden kann beachte man, daß acl^*-abgeschlossene Mengen auch acl-abgeschlossen sind.

in $\mathcal{G}^*$. Diese Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}^*$ ist sogar einfach, der Beweis läßt sich direkt von [ChPi, Theorem 2.7] verallgemeinern.

Frage Wenn $\mathcal{G}^*$ aus $\exists$-ACL-Universalbereichen besteht, ist dann $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ eine Unabhängigkeitsrelation in $\mathcal{G}^*$?

2.4.2 Gleichungen

Ich begebe mich nun ausnahmsweise in den elementaren Fall und arbeite in einem (saturierten) Monstermodell $\mathcal{C}$ einer vollständigen Theorie. Ich werde die lokale Stabilitätstheorie auf die Familie der Gleichungen anwenden und zeigen, daß der entstehende Freiheitsbegriff mit dem Begriff des Srour-Nichtforkens übereinstimmt (siehe [Sr]). Ich gebe außerdem eine neue Charakterisierung des Begriffs der abgeschlossenen Menge. Diese Ergebnisse sind neu und erscheinen bald in einem gemeinsamen paper mit M. Junker ([JuKr]) im Journal of Symbolic Logic.

4.6 **Definitionen** Eine Formel $\varphi(x;y)$ heißt *Gleichung*, wenn jeder Schnitt von (beliebig vielen) φ-Instanzen schon ein endlicher Schnitt dieser Instanzen ist. Eine *abgeschlossene Menge* ist eine durch eine Instanz einer Gleichung definierte Menge. Eine nichtleere definierbare Menge $\mathcal{D}$ heißt *φ-irreduzibel*, wenn sie sich nicht durch eine endliche Vereinigung von φ-Instanzen überdeckt werden kann.

4.7 **Bemerkung**

(1) Ist $\varphi(x,y)$ eine Gleichung, so auch $\varphi^{-1}(x,y)$.

(2) Gleichungen sind stabil.

(3) Die Familie aller Gleichungen ist strikt.

Es sei $\varphi(x,y)$ eine Gleichung und p ein φ-Typ über A. Dann ist der (globale) partielle φ-Typ $\{\varphi(x,c) \mid p \models \varphi(x,c)\}$ durch endlich viele solcher $\varphi(x,c)$ axiomatisiert. $\varphi_p(x)$ sei die Konjunktion dieser Instanzen, das ist eine A-invariante φ-Formel, also $\varphi_p \in p$. Offensichtlich gilt

- $\varphi_p(x)$ ist die kleinste[57] positive boolesche Kombination von φ-Instanzen, die von p impliziert wird.
- (Monotonie) Falls $q \models p$, so auch $\varphi_q \models \varphi_p$.

Man kann φ_p auch als den positiven φ-Typ von p auffassen. Ist $\varphi \in \Gamma$ und q ein Γ-Typ, so sei $\varphi_q := \varphi_{q\restriction\varphi}$.

4.8 **Definition** Es sei q ein vollständiger Typ über $B \supset A$. *q forkt nicht über A im Sinne von Srour*, wenn für jede Gleichung φ gilt: φ_q ist fast A-invariant.

Das ist die Definition, die Srour und Hrushovski in dem unveröffentlichten Manuskript „On Stable Non-equational Theories" verwenden und nicht die Originaldefinition aus [Sr].

[57] im Sinne der Inklusion der definierten Mengen.

Der stationäre Fall

Vorbemerkung: Es seien $\varphi_1(x;y)$ und $\varphi_1(x;y)$ stabil. Wenn $\Sigma(x) \cup \{\varphi_1(x, a_1) \vee \varphi_2(x, a_2)\}$ frei ist über A, so auch $\Sigma(x) \cup \{\varphi_i(x, a_i)\}$ für ein i.

Begründung: Es gibt einen globalen $\{\varphi_1, \varphi_2\}$-Typ, der fast A-definierbar ist und konsistent mit $\Sigma(x) \cup \{\varphi_1(x) \vee \varphi_2(x)\}$. Dieser enthält ein $\varphi_i(x)$ und bezeugt, daß auch $\Sigma(x) \cup \{\varphi_1(x)\}$ frei ist über A.

4.9 **Lemma** Es sei $\varphi(x, y)$ eine Gleichung, p eine stationärer φ-Typ über A und $\mathcal{D}$ eine positive boolesche Kombination von φ-Instanzen: $p \cup \mathcal{D}$ ist genau dann frei über A, wenn $p \models \mathcal{D}$.

Beweis

$p \cup \varphi(x, c)$ sei frei über A. Es gilt $c' \models d_p$ für jedes $c' \models stp(c/A)$ (p ist stationär), also $\Psi := \{\varphi(x, c') \mid c' \models stp(c/A)\} \subset p|\mathcal{C}$. Weil φ eine Gleichung ist ist Ψ äquivalent zu einer Konjunktion ψ von endlich vielen Formeln aus Ψ. Dann ist $\psi \in p|\mathcal{C}$. Mit Ψ ist auch φ_p $acl^{eq}(A)$-invariant. Deshalb ist ψ fast A-invariant und weil p als stationärer Typ einen starken Typ axiomatisiert, gilt $p \models \psi$. Also gilt auch $p \models \varphi(x, c)$. Diese Richtung gilt also für φ-Instanzen und wegen der Vorbemerkung gilt das dann auch für positive boolesche Kombinationen solcher. Die andere Richtung ist klar. □

Offensichtlich ist $\forall x(\varphi_p(x) \to \varphi(x, y))$ eine schwache φ-Definition von p, sie ist sogar gut:

4.10 **Lemma** Es sei p ein stationärer φ-Typ über A:

(1) $dp \equiv \forall x(\varphi_p(x) \to \varphi(x, y))$.

(2) Es sei $A_0 \subset A$, dann sind äquivalent:

  (i) p ist definierbar über A_0.

  (ii) φ_p ist A_0-invariant.

  (iii) $\varphi_{p \restriction A_0} \equiv \varphi_p$.

(3) φ_p ist φ-irreduzibel.

Beweis

Wegen Stationarität können wir $A = acl(A)$ annehmen.

(1) Für jedes c gilt wegen des vorigen Lemmas:

$$\begin{aligned} c \models dp &\iff p \cup \varphi(x, c) \text{ ist frei über } A \\ &\iff p \models \varphi(x, c) \\ &\iff \varphi_p \models \varphi(x, c) \\ &\iff c \models \forall x(\varphi_p(x) \to \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

(2), (i) nach (ii): ist dp über A_0, so ist wegen (1) auch $\forall x(\varphi_p(x) \to \varphi(x, y))$ A_0-invariant. Das gilt dann auch für die Klasse der von p implizierten φ-Instanzen, damit folgt (ii). (ii) nach (iii): φ_p ist konsistent mit $p \restriction A_0$. Falls φ_p A_0-invariant ist, so ist φ_p äquivalent zu einer Formel ist $p \restriction A_0$. Daraus folgt $p \restriction A_0 \models \varphi_p$ und auch $\varphi_{p\restriction A_0} \models \varphi_p$. Die andere Inklusion ist klar. (iii) nach (i) folgt aus (1).

(3) Falls $\varphi_p \models \varphi(x, c_1) \vee \ldots \vee \varphi(x, c_k)$, so ist $p \cup \varphi(x, c_1) \vee \ldots \vee \varphi(x, c_k)$ frei über A und es gibt wegen der Vorbemerkung ein i, so daß $p \cup \varphi(x, c_i)$ frei ist über A. Aus dem Lemma folgt dann $p \models \varphi(x, c_i)$, also gilt auch $\varphi_p \models \varphi(x, c_i)$. □

Es folgt, daß für stationäre φ-Typen die Zuordnung $\mathcal{P} \mapsto \varphi_p$ wohldefiniert und injektiv ist, wobei $\mathcal{P}$ die Parallelitätsklasse von p ist.

Für einen stationären φ-Typ p wissen wir nun, daß er genau dann frei ist über einer Menge A, wenn φ_p $acl(A)$-invariant ist.[58] Das zeige ich nun auch für den nicht-stationären Fall.

Der allgemeine Fall

Jetzt werde ich auch nicht stationäre Typen betrachten. Es sei $p \in S_\varphi(A)$ und $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ die Menge der starken Typen von p. Wegen Imaginärenelimination sind die starken Typen von p genau die Fortsetzungen von p nach $acl(A)$ und wegen Stabilität gibt es nur endlich viele solche. Dann gilt

$$\varphi_p \equiv \bigvee_Q \varphi_q \text{ und zwischen den } \varphi_q \text{ gibt es keine Inklusionen.}$$

Begründung: $\bigvee_Q \varphi_q \models \varphi_p$ gilt wegen (Monotonie). Andererseits gibt es zu jedem $a \models p$ ein $q \in Q$ mit $a \models q$ und deshalb auch $a \models \varphi_q$. Daraus folgt $p \models \bigvee_Q \varphi_q$ und deshalb gilt auch $\bigvee_Q \varphi_q$, denn $\bigvee_Q \varphi_q$ ist eine positive boolesche Kombination von φ-Instanzen. Weil schließlich für verschiedene q und q' aus Q $d_q \models d_{q'}$ nicht gelten kann, kann wegen (1) des vorigen Lemmas auch $\varphi_q \models \varphi_{q'}$ nicht gelten.

4.11 **Lemma**

(1) Es sei p ein φ-Typ über $B \supset A$. φ_p ist genau dann fast A-invariant, wenn für jeden starken Typ q von p gilt: φ_q ist fast A-invariant ist.

(2) φ_p ist genau dann fast A-invariant, wenn p frei über A ist.

Beweis

(1) Ist jedes φ_q fast A-invariant, so gilt das auch für $\bigvee_Q \varphi_q$. Es sei andererseits φ_p fast A-invariant. Dann gilt für jeden Automorphismus σ, der $acl^{eq}(A)$ fixiert: $\{\sigma(\varphi_q) \mid q \in Q\}$ ist eine Familie von φ-irreduziblen Mengen und $\bigvee_Q \sigma(\varphi_q) \equiv \bigvee_Q \varphi_q$. Weil es zwischen den φ_q keine Inklusionen gibt zeigt das Standardargument über die Eindeutigkeit von irreduziblen Zerlegungen, daß $\{\sigma(\varphi_q) \mid q \in Q\} = \{\varphi_q \mid q \in Q\}$. Daraus folgt, daß jedes φ_q eine endliche Bahn hat unter $\mathrm{Aut}_{acl^{eq}(A)}$, daß also jedes φ_q fast $acl^{eq}(A)$-invariant ist. Dann ist auch jedes φ_q fast A-invariant.

(2) Wegen (1) ist φ_p genau dann fast A-invariant, wenn alle $q \in Q$ fast A-definierbar sind. Das ist äquivalent dazu, daß p frei über A ist. □

[58] Es ist allerdings nicht hinreichend, daß φ_p frei ist über A, denn die Nichtfreiheit eines φ-Typs wird i.a. nicht durch den positiven Teil bezeugt. Man betrachte etwa in ACF eine Gerade G durch den Nullpunkt mit irrationaler Steigung. Sie ist genau durch φ_g definiert, wobei g der generische Typ der Gerade ist. Da G den Nullpunkt enthält, ist φ_g frei über $\emptyset$, g hingegen nicht.

4.12 **Satz** Es sei q ein vollständiger Typ über $B \supset A$ und Γ die Familie aller Gleichungen. q forkt genau dann nicht über A im Sinne von Srour, wenn q Γ-frei ist über A.

BEWEIS
Wegen des vorigen Lemmas gilt: q forkt genau dann nicht über A im Sinne von Srour, wenn $q \upharpoonright \varphi$ frei über A ist für jede Gleichung φ. Das ist (nach Definition) äquivalent dazu, daß q Γ-frei über A ist. □

Charakterisierung der Abgeschlossenheit

Abschließend zeige ich noch, daß Abgeschlossenheit sogar durch die Eigenschaft aus 4.9 charakterisiert ist. Dazu eine Vorbemerkung: ist $\mathcal{D}$ eine definierbare Menge und $I \subset Aut_A$, so ist $\Pi := \{\mathcal{D}^\sigma \mid \sigma \in I\}$ schon dann ein endlicher Schnitt solcher $\mathcal{D}^\sigma$ $(\sigma \in I)$, wenn Π A-invariant ist. Dann gilt nämlich $\Pi \equiv \bigvee_{p \in [\Pi]_A} p$ und mit Kompaktheit gibt es für jedes solche p ein $\psi_p \in p$, welches ein $\mathcal{D}^\sigma$ impliziert. Da nun die σ über A sind, gilt dann schon $\psi_p \models \Pi$, also $\bigwedge_{\sigma \in I} \mathcal{D}^\sigma \equiv \bigvee_{p \in [\Pi]_A} \psi_p$. Mit Kompaktheit folgt dann die Behauptung.

4.13 **Satz** Eine definierbare Menge $\mathcal{D}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie Instanz einer stabilen Formel ist und wenn

(*) für alle Typen q über Modellen $\mathcal{M}$ gilt: ist $q \cup \mathcal{D}$ frei über $\mathcal{M}$, so $p \models \mathcal{D}$.

BEWEIS
Es sei $\varphi(x,y)$ stabil. Falls $\varphi(x,c)$ abgeschlossen ist, so gilt (*) für stationäre φ-Typen wegen 4.9. Damit folgt die eine Richtung. Die andere Richtung zeige ich indirekt. Es sei $\varphi(x,c)$ nicht abgeschlossen.

Behauptung 1: es gibt eine φ^{-1}-Morleyfolge $(c_i)_{i<\omega}$ über einem Modell $\mathcal{M}$, so daß $\Pi := \{\varphi(x,c_i) \mid i < \omega\}$ nicht definierbar ist und $c_i \equiv c$.

Beweis: weil $\varphi(x,c)$ nicht abgeschlossen ist, gibt es eine Folge von Indiscerniblen $(c_i)_{i<\omega}$ in $tp(c)$, so daß $\Pi := \{\varphi(x,c_i) \mid i < \omega\}$ nicht der Schnitt endlich vieler der $\varphi(x,c_i)$ ist.[59] Wegen 3.17 ist (c_i) dann φ^{-1}-unabhängig über einem endlichen Anfangsstück. Wir können deshalb annehmen, daß (c_i) eine φ^{-1}-Morleyfolge über einer Parametermenge A ist. Es sei $\mathcal{M} \supset A$, dann gibt es wegen 3.17 ein A-Konjugat von (c_i), welches eine φ^{-1}-Morleyfolge über $\mathcal{M}$ ist, das beweist die Behauptung.

Behauptung 2: Π ist nicht $\mathcal{M}$-invariant.

Beweis: sonst gilt $q \models \Pi$ für jedes $q \in S_{\mathcal{M}}$, welches mit Π konsistent ist. Mit Kompaktheit gibt es dann für jedes solche q ein $\psi_q \in q$, welches ein $\varphi(x,c_i)$ impliziert. Da nun alle c_i über $\mathcal{M}$ denselben Typ haben, gilt dann schon $\psi_q \models \Pi$, also $\Pi \equiv \bigvee_{q \in [\Pi]_{\mathcal{M}}} \psi_q$. Mit Kompaktheit ist Π dann definierbar und dann schon die Konjunktion endlich vieler der $\varphi(x,c_i)$, Widerspruch.

Wegen Behauptung (2) gibt es ein $q \in S(\mathcal{M})$ gibt, welches zwar mit Π konsistent ist, Π aber nicht impliziert. Da (c_i) eine φ^{-1}-Morleyfolge über $\mathcal{M}$ ist, folgt aus 3.21, daß $q \cup \varphi(x,c_0)$ frei ist über $\mathcal{M}$. Wegen $c_0 \equiv c$ sind wir fertig. □

[59] Das ist nicht schwer zu sehen: falls für jede solche Indiscerniblefolge Π definierbar wäre, so stimmte das auch für jede Folge in $tp(c)$ und mit Kompaktheit gäbe es ein $\phi(y) \in tp(c)$, so daß $\varphi(x,y) \wedge \phi(y)$ eine Gleichung ist. Siehe auch [JuLa].

Anhang A

Generische Modelle

A.1 Existenziell abgeschlossene Strukturen

Die hier genannten Fakten sind Folklore, siehe etwa [Hodges, Kapitel 8]. Es sei $\mathcal{M}$ eine Struktur und $\mathcal{A}$ eine Erweiterung von $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ ist *existenziell abgeschlossen in $\mathcal{A}$*, wenn jede Existenzaussage mit Parametern aus $\mathcal{M}$, die in $\mathcal{A}$ erfüllt ist, schon in $\mathcal{M}$ erfüllt ist.

Fakt 1
$\mathcal{M}$ ist genau dann existenziell abgeschlossen in $\mathcal{A}$, wenn sich $\mathcal{A}$ in eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ einbetten läßt.

Es sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen, $\mathcal{M}$ ist *$\mathcal{K}$-existenziell abgeschlossen*, wenn $\mathcal{M}$ eine Erweiterung in $\mathcal{K}$ hat und wenn $\mathcal{M}$ in jeder Erweiterung $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ existenziell abgeschlossen ist. Ist T eine Theorie, so ist $\mathcal{M}$ *T-existenziell abgeschlossen*, wenn $\mathcal{M}$ $\mathrm{Mod}(T)$-existenziell abgeschlossen ist. Es sei $\mathcal{E}_T$ die Klasse der T-existenziell abgeschlossenen Strukturen.

Fakt 2
Die T-existenziell abgeschlossenen Strukturen sind genau die $T_\forall$-existenziell abgeschlossenen Strukturen. Ist T induktiv, so gibt es T-existenziell abgeschlossene Strukturen und jede solche ist ein Modell von T.

1.1 **Satz** Es sind äquivalent:

(1) $\mathcal{M}$ ist T-existenziell abgeschlossen.

(2) Jeder in $\mathcal{M}$ realisierte existenzielle Typ ist ein maximaler existenzieller Typ von T.

(3) Jeder partielle Homomorphismus von $\mathcal{M}$ in ein Modell von T, der die existenziellen Formeln erhält, erhält auch die universellen Formeln.

Beweis
Die Äquivalenz von (1) und (2) gilt wegen der folgenden Tatsache:

Behauptung: eine existenzielle Formeln über $\bar{a} \in \mathcal{M}$ ist genau dann in einem T-Obermodell von $\mathcal{M}$ realisiert, wenn sie konsistent ist mit $T \cup \exists\text{-}tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$.

Beweis: Es sei $\varphi(\bar{x})$ eine existenzielle Formel. $\varphi(\bar{a})$ wird in einem T-Obermodell von $\mathcal{M}$ realisiert $\iff$ $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{M}) \cup \varphi(\bar{a})$ ist konsistent $\iff$ für alle quantorenfreien $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ und alle $\bar{b}$ aus $\mathcal{M}$ ist $T \cup \psi(\bar{a}, \bar{b}) \cup \varphi(\bar{a})$ konsistent $\iff$ für alle existenziellen $\psi(\bar{x}) \in \exists\text{-}tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ ist $T \cup \psi(\bar{a}) \cup \varphi(\bar{a})$ konsistent $\iff$ $T \cup \exists\text{-}tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \cup \varphi$ ist konsistent.

(2) nach (3): ist f ein solcher partieller Isomorphismus, so ist der existenzielle Typ von $\bar{a}$ enthalten im existenziellen Typ von $f(\bar{a})$. Wegen (2) haben $\bar{a}$ und $f(\bar{a})$ denselben existenziellen Typ (in der jeweiligen Struktur), also erhält f die universellen Formeln.

(3) nach (2): betrachte solche partiellen Isomorphismen in ω-saturierte Modelle. □

1.2 **Korollar**

(1) Ist $\mathcal{M}$ T-existenziell abgeschlossen und $\mathcal{A} \prec \mathcal{M}$, so ist auch $\mathcal{A}$ T-existenziell abgeschlossen.

(2) Es sei $\mathcal{M}$ eine $|L|^+$-$\exists$-saturierte Struktur.[1] $\mathcal{M}$ ist genau dann existenziell abgeschlossen in seiner eigenen Theorie, wenn jeder partielle Automorphismus von $\mathcal{M}$, der die existenziellen Formeln erhält, auch die universellen Formeln erhält.

Beweis
(1) Die Eigenschaft (2) aus dem Satz vererbt sich auf elementare Substrukturen.

(2) $\mathcal{M}$ realisiert nach Voraussetzung alle $\exists$-Typen seiner Theorie (über $\emptyset$). Deshalb ist (2) aus dem Satz äquivalent dazu, daß jeder partielle Automorphismus von $\mathcal{M}$, der die existenziellen Formeln erhält, auch die universellen Formeln erhält. □

Eine Theorie ist *modellvollständig*, wenn für alle Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, so $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Fakt 3: Es sei T eine beliebige Theorie, dann sind äquivalent:

(1) T ist modellvollständig.

(2) Alle Modelle von T sind existenziell abgeschlossen in T.

(3) Jede Formel ist in T äquivalent zu einer existenziellen Formel.

(4) Jede universelle Formel ist in T äquivalent zu einer existenziellen Formel.

Eine Theorie T^* ist ein *Modellbegleiter* der Theorie T, wenn T^* modellvollständig ist und sich jedes Modell von T zu einem Modell von T^* erweitern läßt und umgekehrt.

Fakt 4: T^* ist genau dann ein Modellbegleiter von T, wenn T^* ein Modellbegleiter von $T_\forall$ ist. Jede Theorie hat (bis auf Äquivalenz) höchstens einen Modellbegleiter, dieser existiert genau dann, wenn $\mathcal{E}_T$, die Klasse der in T existenziell abgeschlossenen Strukturen, axiomatisierbar ist – der Modellbegleiter axiomatisiert dann diese Klasse.

[1] Es reicht, daß $\mathcal{M}$ alle seine $\exists$-Typen (über $\emptyset$) realisiert. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{M}$ alle seine quantorenfreien $\star$-Typen in höchstens $|L|$-vielen Variablen realisiert.

A.2 Universelle Theorien

Die hier dargestellten Ergebnisse habe ich mir selber überlegt. Ich glaube jedoch nicht, daß davon irgendetwas neu ist. Es sei T eine universelle Theorie. T hat wegen Kompaktheit genau dann die (JEP), wenn für alle universellen Formeln φ_i gilt: $T \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow T \models \varphi_1$ oder $T \models \varphi_2$. Syntaktisch gesehen bedeutet (JEP) also „universell prim" und diese Eigenschaft hängt nur von der universellen Theorie ab. Insbesondere hat die universelle Theorie einer Struktur stets (JEP). Die universellen Theorien mit (JEP) nenne ich *Primtheorien*. Soweit nicht anders gesagt, sind alle Theorien nun universell.

Ich nehme an, daß universelle Theorien abgeschlossen sind gegen universelle Konsequenzen. Sie sind dann partiell geordnet durch die Inklusion: $T \leq T' :\Leftrightarrow T \subset T' \Leftrightarrow T' \models T$. Vieles vom dem Folgenden gilt aus rein verbandstheoretischen Gründen, die Existenz von existenziell abgeschlossenen Erweiterungen jedoch gibt hier zusätzliche Information. Es ist $T \leq T'$ genau dann, wenn sich jedes Modell von T' in ein Modell von T einbetten läßt.

Ist $\tilde{T}$ eine Primtheorie, so sei $\tilde{T}^* := \{\neg\varphi \mid \varphi \notin \tilde{T}\}$. Dann ist $\tilde{T}^*$ abgeschlossen unter Konjunktionen und konsistent mit $\tilde{T}$. Ist $\mathcal{A} \models \tilde{T} \cup \tilde{T}^*$, so $\tilde{T} \equiv \mathcal{A}_\forall$ und $\tilde{T}^* \equiv \mathcal{A}_\exists$.[2] Die Primtheorien sind genau die universellen Theorien von Strukturen. Eine Primtheorie ist in gewissen Sinne eine „vollständige" universelle Theorie.

Da $T = \bigcap_{\mathcal{A} \models T} \mathcal{A}_\forall$, ist jede universelle Theorie Schnitt von Primtheorien. Ich werde nun zeigen, daß jede universelle Theorie eindeutig in „Primkomponenten" zerfällt. Eine *Primkomponente* von T ist eine minimale Primtheorie oberhalb von T.

2.1 **Lemma** Es sei T eine universelle Theorie.

(1) Es sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit universeller Theorie $\tilde{T}$. $\mathcal{A}$ ist genau dann T-existenziell abgeschlossen, wenn $\mathcal{A}$ $\tilde{T}$-existenziell abgeschlossen ist und $\tilde{T}$ eine Primkomponente von T.

(2) Zwischen T und jeder Primtheorie oberhalb von T liegt eine Primkomponente von T.

Beweis

(1) Wenn $\mathcal{A}$ T-existenziell abgeschlossen ist, so ist $\mathcal{A}$ ein Modell von T, also $T \subset \tilde{T}$ und $\mathcal{A}$ ist $\tilde{T}$-existenziell abgeschlossen. Außerdem ist $\tilde{T}$ eine Primtheorie. Ich zeige nun die Minimalität: ist $\mathcal{M}$ ein Modell von T, dessen universelle Theorie in $\tilde{T}$ enthalten ist, so läßt sich $\mathcal{A}$ in eine elementare Erweiterung $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ einbetten. Weil dann aber $\mathcal{A}$ in $\mathcal{N}$ existenziell abgeschlossen ist, haben beide Strukturen dieselbe universelle Theorie, also $\mathcal{M} \models \tilde{T}$ und $\tilde{T}$ ist eine Primkomponente von T.

Ist umgekehrt $\tilde{T}$ eine Primkomponente von T, so hat jede Erweiterung von $\mathcal{A}$ in T schon $\tilde{T}$ als universelle Theorie. Ist $\mathcal{A}$ dann $\tilde{T}$-existenziell abgeschlossen, so auch T-existenziell abgeschlossen.

(2) Es sei etwa $\tilde{T} = \mathcal{B}_\forall$ für ein $\mathcal{B} \models T$, dann läßt sich $\mathcal{B}$ zu einer T-existenziell abgeschlossenen Struktur $\mathcal{A}$ erweitern. Dann gilt $\tilde{T} \subset \mathcal{A}_\forall$ und wegen (1) tut's $\mathcal{A}_\forall$. □

[2] $\mathcal{A}_\forall$ ist die Menge der universellen Aussagen, die in $\mathcal{A}$ gelten; entsprechend $\mathcal{A}_\exists$.

2.2 **Korollar** T ist der Schnitt seiner Primkomponenten.

Es sei $\mathcal{E}_T$ die Klasse der T-existenziell abgeschlossenen Strukturen, $\mathcal{E}_T$ zerfällt disjunkt in *Komponenten* : zwei $\mathcal{E}_T$-Strukturen liegen in derselben Komponente, wenn sie dieselbe universelle Theorie haben. Das ist genau dann der Fall, wenn sie sich gemeinsam in ein Modell von T einbetten lassen. Wegen (1) des Lemmas sind die Komponenten von $\mathcal{E}_T$ genau die $\mathcal{E}_{\tilde{T}}$, wobei die $\tilde{T}$ die Primkomponenten von T sind.

2.3 **Korollar** Die Klasse der generischen Modelle von T zerfällt disjunkt in die Klassen der generischen Modelle der $\tilde{T}$, wobei die $\tilde{T}$ die Primkomponenten von T durchlaufen.

In jeder Komponente sind alle generischen Modelle elementar äquivalent.

Man kann den Begriff der Primkomponente von T auch syntaktisch beschreiben: es sei $\tilde{T}$ eine Primtheorie oberhalb von T, $\tilde{T}$ ist genau dann eine Primkomponente von T, wenn $T \cup \tilde{T}^* \models \tilde{T}$.

Ein paar Worte noch zur Eindeutigkeit der Darstellung von T als Schnitt seiner Primkomponenten. $\cap$ liefert eine surjektive Zuordung von (ungeordneten) Antiketten von Primtheorien zu den universellen Theorien. Diese Zuordnung ist injektiv auf den endlichen Antiketten: ist I eine endliche Antikette von Primtheorien, und $\tilde{T}$ eine Primtheorie oberhalb $\bigcap I$, so zeigen die üblichen Argumente, daß $\tilde{T}$ schon oberhalb eines Elements aus I liegt. Daraus folgt auch, daß dann I genau die Menge der Primkomponenten von $\bigcap I$ ist. Für unendliches I ist das falsch: in dem Beispiel auf Seite 14 ist $I = (T_i)_{i\,=\,0 \text{ oder } i \text{ prim}}$ eine Antikette von Primtheorien, aber T_0 ist keine Primkomponente von $\bigcap I$.

Anhang B

Lokale Stabilität

B.1 Der Rang in der Stonekorrespondenz

Ich wiederhole ein paar Grundlagen für die Einführung des Morleyrangs um zu rechtfertigen, daß er genauso für die booleschen Algebren der (Γ, Y)-Formeln verwendet werden kann, wie in den bisher bekannten Situationen.

Ein topologischer Raum heißt *zerstreut*, wenn jeder Punkt einen Cantor-Bendixson Rang hat (d.h. dieser Rang ist $< \infty$). Das ist genau dann der Fall, wenn jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge A einen in A isolierten Punkt enthält. Ist X ein kompakter zerstreuter Raum, so hat jede abgeschlossene Teilmenge Y endlich viele Punkte von maximalem CBR, diese Anzahl ist der Cantor-Bendixson Grad von Y.
Es sei eine $\mathcal{B}$ eine boolesche Algebra. Der Rang R ist die kleinste stetige Zuordnung $\mathcal{B} \to \mathrm{Ord} \cup \{\infty\}$, so daß stets $R(a) > \alpha \Leftrightarrow R(a_i) \geq \alpha$ für unendlich viele paarweise disjunkte $a_i < a$. Ist $R(a) = \alpha$, so ist der Grad $D(a)$ die maximale (endliche) Anzahl von paarweise Disjunkten $a_i \leq a$ mit $R(a_i) = \alpha$. Ich nenne $\mathcal{B}$ zerstreut, wenn jedes Element einen Rang $< \infty$ hat. Das ist genau dann der Fall, wenn es keinen binären Baum gibt (d.h. wenn es keine ordnungsumkehrende Einbettung $f : {}^{<\omega}2 \to B$ gibt, so daß stets $f(\mu\hat{}0)$ und $f(\mu\hat{}1)$ disjunkt sind). Die jeweiligen Paare (Rang, Grad) werden lexikographisch geordnet.

Es sei nun B eine boolesche Algebra und S ihr Stoneraum, RD und $CBRD$ sei der jeweilige (Rang, Grad). In S hat man dann zwei Möglichkeiten, den (Rang, Grad) einer abgeschlossenen Teilmenge $\Pi \subset S$ zu berechnen: es sei $Y := \{p \in \Pi \mid p$ hat maximalen CBR in $\Pi\}$, Y ist wegen Kompaktheit endlich und nichtleer. Es sei $\alpha = CBR(p)$ für ein (jedes) $p \in Y$, dann ist $CBRD(\Pi) := (\alpha, |Y|)$. Andererseits ist $RD(\Pi) := \min\{RD(\varphi) \mid \Pi \subset \varphi, \varphi \text{ clopen}\}$.

1.1 **Bemerkung**

(1) Für jede abgeschlossene Teilmenge Π von S gilt: $CBRD(\Pi) = RD(\Pi)$.

(2) Eine boolesche Algebra ist genau dann zerstreut, wenn ihr Stone-Raum es ist.

(3) Ist B_0 eine boolesche Unteralgebra von B, so gilt für alle $b_0 \in B_0$: $RD_{B_0}(b_0) \leq RD_B(b_0)$.

1.2 **Lemma** Es sei B eine boolesche Algebra.

(1) $R(a_1 \vee \ldots \vee a_k) \geq \alpha \iff R(a_i) \geq \alpha$ für ein i.

(2) Es sei $D \subset B$ ein Erzeuger von B und $R(a) \geq \alpha + 1$: es gibt $d \in D$, so daß $R(a \wedge d) \geq \alpha$ und $R(a \wedge \neg d) \geq \alpha$.

BEWEIS
(1) Induktion über α.

(2) Es sei $R(a) \geq \alpha + 1$, dann gibt es $b \in B$, so daß $R(a \wedge b) \geq \alpha$ und $R(a \wedge \neg b) \geq \alpha$. Da D ein Erzeuger ist, ist b eine boolesche Kombination von Elementen aus D, etwa $b = \bigvee_i \bigwedge_j d_{ij}$, wobei $d_{ij} \in D$ oder $\neg d_{ij} \in D$. Wegen (1) gibt es dann ein i, so daß auch $R(a \wedge \bigwedge_j d_{ij}) \geq \alpha$. Da $\neg b = \bigwedge_i \bigvee_j \neg d_{ij}$, ist dann auch $R(a \wedge \bigvee_j \neg d_{ij}) \geq \alpha$. Es gibt also wieder wegen (1) ein j, so daß $R(a \wedge \neg d_{ij}) \geq \alpha$ und wieder gilt $R(a \wedge d_{ij}) \geq \alpha$. □

Die meisten Rechenregeln für den Morleyrang kommen schon aus diesem allgemeinen Kontext.

B.2 Lokal stabile Gruppen

Ich schaue hier, wieviel sich von (den Grundlagen) der klassischen stabilen Gruppentheorie auf den lokalen Kontext verallgemeinern läßt. Die entscheidende Beobachtung ist, daß die Theorie nur davon abhängt, wie eine Gruppe G auf einer gegebenen Familie von Formeln operiert. Dazu muß diese Familie von Formeln abgeschlossen sein bezüglich der Operation von G. Bis auf eine kleine Unschönheit am Ende des Abschnitts klappt alles recht gut – auch ohne Symmetrie. Die Ergebnisse dieses Abschnitts habe ich nirgends aufgeschrieben gefunden.

B.2.1 Gruppenoperationen

Lokales

Ich modifiziere den Ansatz mit lokalen Formeln nun ein wenig. Es sei Γ eine Familie von Formeln der Form $\varphi(x_1; x_2; ...; x_n)$, das heißt die x_i sind (disjunkte) Tupel von Variablen und φ hat eine feste Partition seiner Variablen. $\varphi_{x_i}(x_1; x_2; ...; x_n)$ hat dann x_i als spezielle Variable und alle anderen Variablen sind Parametervariable, Γ_{x_i} ist die entsprechende Familie. Für jedes i sei X_i ein partieller Typ in der Stelligkeit von x_i, dann ist eine $(\Gamma_{x_i}, X_1(x_1), ..., X_n(x_n))$-Instanz eine Γ_{x_i}-Instanz, wobei die Parameter aus den X_j kommen ($j \neq i$). So ergibt sich auch der Begriff der strikten $(\Gamma_{x_i}, X_1, ..., X_n)(A)$-Formel und der (laxen) $(\Gamma_{x_i}, X_1, ..., X_n)(A)$-Formel – ebenso die (strikten) $(\Gamma_{x_i}, X_1, ..., X_n)(A)$-Typen, die sollen zusätzlich mit X_i konsistent sein. Es ist klar was es heißt, daß $(\Gamma_{x_i}, X_1(x_1), ..., X_n(x_n))$ stabil ist. Wenn $X_i(x_i)$ die Formel $x_i = x_i$ ist, so lasse ich sie aus der Notation weg. Ich arbeite weiter in $\mathcal{G}$.

Ein paar Anmerkungen zu existenziell definierbaren Funktionen: ist $f(\bar{x}) = y$ eine existenziell definierte Funktion, so ist $dom(f)$ existenziell definiert und f ist Δ_1 auf $dom(f)$, d.h. es gibt eine universelle Formel $\varphi(\bar{x}, y)$, so daß $dom(f)(\bar{x} \to (f(\bar{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, y))$. Man kann für φ nämlich $\forall y'(f(\bar{x}) = y \wedge f(\bar{x}) = y' \to y = y')$ wählen. Ist $dom(f)$ selber Δ_1-definierbar, so dann auch $f(\bar{x}) = y$.

Es sei nun (G, X) eine existenziell typdefinierbare Gruppenoperation, die Operationen stammen dann von existenziell definierbaren Funktionen. Ich nehme aber an, daß die Operationen von Δ_1-definierbaren Funktionen kommen. Eine (G, X)*-stratifizierte Formel* ist eine Formel der Form $\varphi(y \cdot x, v) := \exists u\ (\varphi(u, v) \wedge x \cdot y = u)$, wobei $\cdot$ die Operation von G auf X ist. Ist $\varphi(u, v)$ Δ_1, so auch $\varphi(y \cdot x, v)$. G operiert auf den Mengen der Form $\Pi \wedge \varphi(h \cdot x, c)$, genauer: für $g \in G^{\mathcal{U}}$ und beliebiges $c \in \mathcal{U}$ gilt dann $g \cdot (\varphi(x, c)^{\mathcal{U}} \cap X^{\mathcal{U}}) = \varphi(g^{-1} \cdot x, c)^{\mathcal{U}} \cap X^{\mathcal{U}}$, deshalb schreibe ich für $\varphi(g^{-1} \cdot x, c)$ auch $g \cdot \varphi(x, c)$ und allgemeiner $g \cdot \varphi(h \cdot x, c) := \varphi((h \cdot g^{-1}) \cdot x, c)$. Das liefert eine Operation von G auf den $(\varphi_x(x; y; v), X(x), G(y))$-Instanzen, die setzt sich auch auf die $(\varphi_x(x; y; v), X(x), G(y))$-Formeln fort: $g \cdot bc_i(\varphi_i(h_i \cdot x, c_i)) = bc_i(\varphi_i((h_i \cdot g^{-1}) \cdot x, c_i))$. $\varphi(x, v)$ identifiziere ich mit $\varphi(1 \cdot x, v)$.

Zu einer Familie Γ von stratifizierten Formeln betrachte ich die $(\Gamma_x, X(x), G(y))$-Formeln, ich nenne diese Formeln auch einfach nur $\Gamma(X)$-Formeln, entsprechend ist $\Gamma(G)$ die Familie der $(\Gamma_y, X(x), G(y))$-Formeln. Ein partieller $\Gamma(X)$-Typ über A ist dann also ein mit X konsistenter partieller Typ $\Pi(x)$ über A, so daß jede Formel in Π äyquivalent zu einer booleschen Kombinationen von Formeln der Form $\varphi(g \cdot x, c)$ ist mit $\varphi \in \Gamma$, $g \in G$ und c beliebig. G operiert dann auf den $\Gamma(X)$-Formeln (und auf den relativ $\Gamma(X)$-definierbaren Teilmengen von X). Der wichtige Punkt ist, daß die $\Gamma(X)$-Formeln abgeschlossen sind unter G-Translation (die $\Gamma(G)$-Formeln nicht). Das gilt auch für jedes $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Ein Translat eines vollständigen $\Gamma(X)$-Typs über A ist i.a. kein vollständiger Typ mehr: $g \cdot tp_\Gamma(a/A) = \{g \cdot \psi(x) \mid \psi \in tp_\Gamma(a/A)\}$, das ist ein partieller Typ über Ag. Ist $g \in dcl(A)$, so ist $g \cdot tp_\Gamma(a/A)$ axiomatisiert durch $tp_\Gamma(g \cdot a/A)$ (ich identifizierte die beiden Typen in diesem Fall), entsprechend ist $g \cdot stp_\Gamma(a/A) = stp_\Gamma(g \cdot a/A)$. Für jedes Modell $\mathcal{U}$ operiert also $G^{\mathcal{U}}$ auf den $\Gamma(X)$-Typen über $\mathcal{U}$. Man beachte, daß jeder $\Gamma(X)$-Typ in $\mathcal{G}$ realisiert ist.

Stabilität und Stabilisatoren

Es sei nun Γ_x stabil. Ist $\tilde{p}$ ein starker $\Gamma(X)$-Typ, so ist für jedes $\varphi \in \Gamma$ $d_{\tilde{p}} x \varphi(y \cdot x, c)$ eine $\Gamma(G)$-Formel (für jedes c).

2.1 **Lemma** Ist ein partieller $\Gamma(X)$ Typ ($\Gamma(X)$-)frei über A und $g \in dcl(A)$, so ist auch sein g-Translat frei über A.

Beweis
Es sei $\psi(x) = bc_i(\varphi_i(h_i \cdot x, c_i)$ konsistent mit X und frei über A, dann gibt es eine mit X konsistente positive boolesche Kombination $\chi(x)$ von A-Konjugaten von $\psi(x)$, die über A ist. Dann ist auch $g \cdot \chi$ eine mit X konsistente positive boolesche Kombination $\chi(x)$ von A-Konjugaten von $g \cdot \psi(x)$, die über A ist. □

Ist $\tilde{p}$ ein starker $\Gamma(X)$-Typ über A und $g \in G$, so sei $g \cdot \tilde{p} := g \cdot (\tilde{p}|Ag)$. Wegen des letzten Lemmas gilt für alle $B \supset A$: $g \cdot (\tilde{p}|B) = (g \cdot \tilde{p})|Bg$. G operiert also auf den starken $\Gamma(X)$-Typen von X und respektiert dabei Parallelität. Sind $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ starke $\Gamma(X)$-Typen, so bedeutet „$g \cdot \tilde{p} = \tilde{q}$", daß $g \cdot \tilde{p}$ und $\tilde{q}$ parallel sind. In diesem Sinne operiert G also auf $St_{\Gamma(X)}$, der Klasse der starken $\Gamma(X)$-Typen. Man kann diese Operation auch als die Operation von G auf $[X]_{S_{(\varphi_x, G)}}(\mathcal{U})$, den globalen $\Gamma(X)$-Typen auffassen ($\mathcal{U}$ sei groß). Dieses ist sogar ein topologischer Raum und G operiert homöomorph darauf – das verwende ich im nächsten Beweis. $Stab(\tilde{p})$ sei dann der Stabilisator von $\tilde{p}$ in $(G, St_{\Gamma(X)})$. Entsprechend haben wir für jedes $\Gamma_0 \subset \Gamma$ die Operation $(G, St_{\Gamma_0(X)})$ und den Stabilisator $Stab(\tilde{p} \restriction \Gamma_0)$. Es ist dann $Stab(\tilde{p}) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Stab(\tilde{p} \restriction \varphi)$.

2.2 **Lemma** Für jedes $\varphi \in \Gamma$ sind die Stabilisatoren der starken $\varphi(X)$-Typen relativ definierbar durch boolesche Kombinationen von Linkstranslaten von $\varphi(G)$-Formeln.

Beweis
Es sei Z der zerstreute Raum der globalen $\varphi(X)$-Typen und $p \in Z$, dann hat p einen endlichen $\varphi(X)$-Morleyrang und es gibt eine Formel $\psi(x) = bc_i(\varphi(g_i \cdot x, c_i))$ in p mit selbem $MRD_{\varphi(X)}$ wie p. Weil G homöomorph auf Z operiert, ist $MRD_{\varphi(X)}$ translationsinvariant. Deshalb haben auch $g^{-1} \cdot p$ und $g^{-1} \cdot \psi(x)$ denselben $MRD_{\varphi(X)}$ und es gilt $g^{-1} \cdot p = p \iff g^{-1} \cdot \psi(x) \in p$. Also $g \in Stab(p) \iff g^{-1} \in Stab(p) \iff g^{-1} \cdot p = p \iff g^{-1} \cdot \psi(x) \in p \iff bc_i(\varphi(g_i \cdot g \cdot x, c_i)) \in p \iff bc_i[\varphi(g_i \cdot g \cdot x, c_i) \in p] \iff bc_i(d_p x \varphi(g_i \cdot g \cdot x, c_i)) \iff g \models bc_i(g_i^{-1} \cdot d_p x \varphi(y \cdot x, c_i))$. Weil die $d_p x \varphi(y \cdot x, c_i)$ $\varphi(G)$-Formeln sind, sind wir fertig. □

Damit auch die Stabilisatoren Γ-Objekte sind, muß ich Γ ein letztes mal modifizieren. Eine *doppelt (G, X)-stratifizierte Formel* ist eine Formel der Form $\varphi((z \cdot y) \cdot x, v) := \exists u, w\ (\varphi(u, v) \wedge z \cdot y = w \wedge w \cdot x = u)$, wobei $z \cdot y = w$ die Operation in G ist und $w \cdot x = u$ die von G auf X. Ist $\varphi(z, v)$ Δ_1, so auch $\varphi(z \cdot y \cdot x, v)$. Zu einer Familie Γ von doppelt stratifizierten Formeln betrachte ich die $(\Gamma_x, X(x), G(y), G(z))$-Formeln (ich nenne sie kurz $\Gamma(X)$-Formeln) sowie die $(\Gamma_y, X(x), G(y), G(z))$-Formeln (ich nenne sie kurz $\Gamma(G)$-Formeln). G operiert dann auf den $\Gamma(X)$-Formeln sowie auf den $\Gamma(G)$-Formeln (im zweiten Fall ist die Operation gegeben durch durch $g \cdot \varphi(h \cdot y \cdot a, c) := \varphi((h \cdot g^{-1}) \cdot y \cdot a, c))$. $\varphi(y \cdot x, v)$ identifiziere ich mit $\varphi(1 \cdot y \cdot x, v)$ (und $\varphi(x, v)$ mit $\varphi(1 \cdot 1 \cdot x, v)$).

2.3 **Korollar** Ist Γ doppelt stratifiziert, so ist der Stabilisator eines starken $\Gamma(X)$-Typs der Schnitt von relativ $\Gamma(G)$-definierbaren Untergruppen.

Es sei Γ von nun an doppelt stratifiziert und Γ_x sowie Γ_y stabil.

B.2.2 Generizität

Es sei (G, X) von nun an transitiv.

2.4 **Definition** Eine Formel $\chi(x)$ heißt generisch (in (G, X)), wenn sie mit X konsistent ist und wenn endlich viele ihrer Translate ganz X überdecken. Ein partieller Typ heißt translationsgenerisch, wenn alle endlichen Konjunktionen von Formeln des Typs generisch sind.

Translate und Konjugate von (partiellen) translationsgenerischen Typen sind wieder translationsgenerisch. Ist H eine existenziell typdefinierbare Untergruppe von G mit beschränktem Index, so ist H translationsgenerisch (Kompaktheit).

2.5 **Lemma** Es sei $\psi(x)$ eine $\Gamma(X)$-Formel über A:

(1) ψ ist generisch oder $\neg\psi$ ist generisch.

(2) ψ ist genau dann generisch, wenn es eine endliche Teilmenge von X gibt, so daß jedes Translat dieser Menge einen nichtleeren Schnitt mit ψ hat.

Beweis
Ich arbeite in einem großen Modell $\mathcal{U}$. Es sei $\mathcal{A}$ der bipartite Graph (G, X, R), wobei $gRa \iff \psi(g^{-1} \cdot a)$ (also $gRa \iff a \models g \cdot \psi$) und G und X reine Mengen sind. Dann operiert die Gruppe G als Automorphismen auf $\mathcal{A}$, insbesondere gibt es nur die beiden 1-Typen $p_G = y \in G$ und $p_X = x \in X$ über $\emptyset$ in $\mathcal{A}$. Da außerdem $\psi_x(y \cdot x, v)$ stabil ist (über dem Parameter in ψ), hat R in $\mathcal{A}$ nicht die Ordnungseigenschaft. Ich arbeite nun in einer hinreichend saturierten Erweiterung von $\mathcal{A}$. Man sieht leicht, daß $\mathcal{A}$ (hinreichend) $\exists$-saturiert ist, deshalb ist R stabil. Die Formel gRx ist genau dann frei über $\emptyset$, wenn es eine positive boolesche Kombination von $\emptyset$-Konjugaten von gRx $\emptyset$-definierbar ist. Da $x \in X$ ein vollständige Typ ist, ist das genau dann der Fall, wenn eine endliche Disjunktion $\bigvee_i g_i Rx$ schon ganz X überdeckt. Da auch der Typ der g_i isoliert ist durch $y \in G$ gilt: gRx ist genau dann frei über $\emptyset$, wenn es ein n gibt, so daß $\exists y_1, ..., y_n (\bigwedge G(y_i) \wedge \forall x \ \bigvee y_i Rx)$. Entsprechend ist $\neg gRx$ genau dann frei über $\emptyset$, wenn es ein n gibt, so daß $\exists y_1, ..., y_n (\bigwedge G(y_i) \wedge \forall x \ \bigvee \neg y_i Rx)$ und man hat die entsprechenden Beschreibungen für die Freiheit von yRa (und $\neg yRa$). Der wichtige Punkt ist, daß man die Freiheit dieser Formeln schon in $\mathcal{A}$ sehen kann und es folgt deshalb:

(*) $\psi(x)$ $(\neg\psi(x))$ ist genau dann generisch, wenn $1Rx$ $(\neg 1Rx)$ frei über $\emptyset$ ist.

Da mindestens eine der beiden Formeln $1Rx$ und $\neg 1Rx$ frei ist über $\emptyset$, folgt (1). Wegen lokaler Symmetrie ist außerdem $1Rx$ genau dann frei über $\emptyset$, wenn yRa frei über $\emptyset$ ist (für ein/jedes $a \in X$), damit folgt (2). □

2.6 **Korollar** (1) Die Klasse der globalen translationsgenerischen $\Gamma(X)$-Typen ist abgeschlossen und nicht leer.

(2) Jeder translationsgenerische partielle $\Gamma(X)$-Typ ist mit einem globalen translationsgenerischen $\Gamma(X)$-Typ konsistent.

(3) Ein partieller $\Gamma(X)$-Typ ist genau dann translationsgenerisch, wenn er von einem globalen translationsgenerischen Γ-Typ fortgesetzt wird.

Beweis
Es sei $GEN_\Gamma := \{\varphi \in \Gamma(X) \mid \neg\varphi \text{ ist nicht generisch }\}$. Nach Definition ist ein globaler Γ-Typ genau dann generisch, wenn er GEN fortsetzt.

(1) Ich zeige, daß mit $\varphi_1 \vee \varphi_2$ auch φ_1 oder φ_2 generisch ist (das sind $\Gamma(X)$-Formeln). Daraus folgt dann, daß GEN_Γ abgeschlossen ist unter Konjunktionen, also konsistent. Es sei etwa $X = \bigcup_i g_i \cdot (\varphi_1 \vee \varphi_2) = \bigcup_i g_i \cdot \varphi_1 \cup \bigcup_i g_i \cdot \varphi_2$. Angenommen φ_1 ist nicht generisch, dann ist auch $\bigcup_i g_i \cdot \varphi_1$ nicht generisch, also ist $\neg \bigcup_i g_i \cdot \varphi_1$ generisch wegen des vorigen Lemmas. Da aber $\neg \bigcup_i g_i \cdot \varphi_1 \to \bigcup_i g_i \cdot \varphi_2$, ist auch $\bigcup_i g_i \cdot \varphi_2$ generisch, also auch φ_2.

(2) Ist $\mathcal{D}$ eine generische Klasse und $\varphi \in GEN_\Gamma$, so kann $\mathcal{D}$ nicht in $\neg\varphi$ enthalten sein, also ist $\mathcal{D}$ mit φ konsistent. Mit Kompaktheit (und (1)) ist also jeder translationsgenerische partielle Typ von X ist mit GEN_Γ konsistent und deshalb auch mit einem globalen Γ-Typ, der GEN_Γ fortsetzt. Dieser ist translationsgenerisch.

(3) ist dann klar. □

2.7 **Lemma** Ist Π ein partieller translationsgenerischer $\Gamma(X)$-Typ, so ist $MR_{\varphi(X)}(\Pi) = MR_{\varphi(X)}(X)$ für jedes $\varphi \in \Gamma$.

Beweis
Es sei ψ eine Konjunktion von Formeln aus Π, so daß $MR_{\varphi(X)}(\psi) = MR_{\varphi(X)}(\Pi)$. Da ψ generisch ist, ist $X = \bigcup_i g_i \cdot \psi$ für geeignete (endlich viele) g_i, also $MR_{\varphi(X)}(X) = max_i(MR_{\varphi(X)}(g_i \cdot \psi))$. Da $MR_{\varphi(X)}$ translationsinvariant ist, sind alle $MR_{\varphi(X)}(g_i \cdot \psi)) = MR_{\varphi(X)}(\psi))$, also $MR_{\varphi(X)}(X) = MR_{\varphi(X)}(\psi)) = MR_{\varphi(X)}(\Pi)$. □

So erhalten wir:

2.8 **Satz** Partielle translationsgenerische $\Gamma(X)$-Typen sind frei über $\emptyset$.

Beweis
Es sei Π ein partieller translationsgenerischer $\Gamma(X)$-Typ und q eine globale translationsgenerische Vervollständigung. Dann ist $MR_{\varphi(X)}(q) = MR_{\varphi(X)}(X)$ für jedes $\varphi \in \Gamma$. Insbesondere ist $MR_{\varphi(X)}(q) = MR_{\varphi(X)}(q \upharpoonright \emptyset)$ für jedes $\varphi \in \Gamma$ und wegen 3.24 ist q frei über $\emptyset$. □

2.9 **Definition** Ein starker $\Gamma(X)$-Typ heißt generisch über A, falls jedes seiner Translate frei über A ist. Er heißt generisch, falls er generisch über $\emptyset$ ist.

2.10 **Satz** (1) G operiert transitiv auf $Gen_{\Gamma(X)}$.

(2) Ist p ein globaler $\Gamma(X)$-Typ, dann sind äquivalent:

(i) p ist translationsgenerisch.

(ii) p ist generisch.

(iii) p ist generisch über einer Parametermenge.

Beweis
Es sei $\tilde{q}$ ein globaler translationsgenerischer $\Gamma(X)$-Typ. Es sei $A \subset \mathcal{V}$ ein kleines Modell, p und q seien $\Gamma(X)$-Typen über $\mathcal{V}$ und $[q \subset y \cdot p] := \{d_p x\varphi(h \cdot y \cdot x, c) \,|\, \varphi(h \cdot x, c) \in q\}$, das ist ein partieller $\Gamma(G)$-Typ über $\mathcal{V}$.

Behauptung 1: für jedes $g \in G$ gilt $q \subset g \cdot p \iff [q \subset g \cdot p]$.

Beweis: für jede $\Gamma(X)$-Instanz $\varphi(h \cdot x, c)$ gilt $\varphi(h \cdot x, c) \in g \cdot p \iff$ (per Definition) $\varphi(h \cdot x, c) \in g \cdot (p|g) \iff \varphi(h \cdot g \cdot x, c) \in (p|g) \iff g \models d_p x\varphi(h \cdot y \cdot x, c)$. Deshalb gilt $q \subset g \cdot p \iff \varphi(h \cdot x, c) \in g \cdot p$ für alle $\varphi(h \cdot x, c) \in q \iff g \models d_p x\varphi(h \cdot y \cdot x, c)$ für alle $\varphi(h \cdot x, c) \in q \iff g \models [q \subset y \cdot p]$.

Behauptung 2: $\tilde{q}$ ist generisch und für jeden $\Gamma(X)$-Typ r über $\mathcal{V}$ ist $[(\tilde{q} \upharpoonright \mathcal{V}) \subset y \cdot r]$ konsistent.

Beweis: die Translate von $\tilde{q}$ sind translationsgenerisch und translationsgenerische $\Gamma(X)$-Typen sind frei über $\emptyset$, also ist $\tilde{q}$ generisch. Es sei nun $\varphi(h \cdot x, c) \in \tilde{q} \upharpoonright \mathcal{V}$, da diese Formel generisch ist, gibt es ein $g \in G$, so daß $\varphi(h \cdot g \cdot x, c) \in (r|g)$, also $\varphi(h \cdot x, c) \in g \cdot r$ und $g \models d_p x\varphi(h \cdot y \cdot x, c)$. Mit Kompaktheit folgt, daß $[(\tilde{q} \upharpoonright \mathcal{V}) \subset y \cdot r]$ konsistent ist.

Behauptung 3: jeder globale $\Gamma(X)$-Typ, der generisch über A ist, ist translatiert zu $\tilde{q}$.

Beweis: Es sei $\tilde{p}$ ein globaler $\Gamma(X)$-Typ, der generisch über A ist, dann ist $[(\tilde{q} \restriction \mathcal{V}) \subset y \cdot (\tilde{p} \restriction \mathcal{V})]$ konsistent, also $\tilde{q} \restriction \mathcal{V} \subset g \cdot (\tilde{p} \restriction \mathcal{V})$ für ein $g \in G$ wegen Behauptung 1. Nun ist $g \cdot \tilde{p} \restriction \mathcal{V}$ frei über $\mathcal{V}$ und $\tilde{q}$ auch wegen Behauptung 2, deshalb ist $\tilde{q} = g \cdot \tilde{p}$.

Wegen Behauptung 3 operiert G transitiv auf den globalen $\Gamma(X)$-Typen, die generisch über A sind und sie sind alle translationsgenerisch – ein globaler $\Gamma(X)$-Typ ist also genau dann translationsgenerisch, wenn er generisch über A ist. Damit ist der Satz bewiesen. □

Es gilt dann auch für starke Typen, daß diese Begriffe übereinstimmen. Ich gebe nun weitere Charakterisierungen des Begriffs:

2.11 **Lemma** Es sei $\tilde{p}$ ein starker $\Gamma(X)$-Typ, dann sind äquivalent:

(1) $\tilde{p}$ ist generisch.

(2) Für jedes $\varphi \in \Gamma$ gilt: $MR_{\varphi(X)}(\tilde{p}) = MR_{\varphi(X)}(X)$.

(3) $\tilde{p}$ hat beschränkte Bahn unter G.

(4) $Stab(\tilde{p})$ hat beschränkten Index in G.

(5) Jede Nebenklasse von $Stab(\tilde{p})$ ist fast $\emptyset$-typdefinierbar durch $\Gamma(G)$-Formeln.

(6) Es gibt ein A, so daß jede Nebenklasse von $Stab(\tilde{p})$ fast A typdefinierbar ist.

Beweis
(1) nach (2): ist bekannt, denn $\tilde{p}$ ist translationsgenerisch.

(2) nach (3): wegen (2) hat jedes $\tilde{p} \restriction \varphi(X)$ eine endliche G-Bahn.

(3) nach (1) indirekt: es sei $\tilde{p}$ definierbar über C, angenommen $\tilde{p}$ ist nicht generisch über C, dann gibt es ein Translat $g \cdot \tilde{p}$, das nicht frei über C ist. $g \cdot \tilde{p}$ hat dann eine unbeschränkte Bahn unter Aut_C, aber die Aut_C-Konjugate von $g \cdot \tilde{p}$ sind G-Translate von $\tilde{p}$, weil $\tilde{p}$ von jedem Aut_C-fixiert wird. $\tilde{p}$ hat also unbeschränkte G-Bahn.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) ist klar.

(4) nach (5): $Stab(\tilde{p}) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Stab(\tilde{p} \restriction \varphi(X))$, jedes $Stab(\tilde{p} \restriction \varphi(X))$ ist $\Gamma(G)$-definierbar, wegen (4) also von endlichem Index in G. Dann ist jede Nebenklasse von $Stab(\tilde{p} \restriction \varphi(X))$ fast $\emptyset$-definierbar durch $\Gamma(G)$-Formeln.

(6) nach (1): es sei $\mathcal{V} \supset A$ und $\tilde{p}$ definierbar über $\mathcal{V}$. Dann gilt für jedes $g \in G$ und $\sigma \in Aut_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})$: $\sigma(g) \cdot Stab(\tilde{p}) = \sigma(g \cdot Stab(\tilde{p})) = g \cdot Stab(\tilde{p})$, daraus folgt $\sigma(g \cdot \tilde{p}) = \sigma(g) \cdot \tilde{p} = g \cdot \tilde{p}$. Jedes Translat von $\tilde{p}$ ist also $Aut_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})$-invariant und damit frei über $\mathcal{V}$, also generisch. □

Beispiel: Ist (G, X) eine unendliche reguläre Gruppenoperation, so sind die ACL-Klassen in X die endlichen und koendlichen Teilklassen von X. ACL ist abgeschlossen und wegen Regularität sind alle Urbilder in G sowie deren Translate endlich oder koendlich und ACL_y^* ist auch abgeschlossen. (G, X) ist „ACL-streng minimal": es gibt genau einen nichtalgebraischen globalen ACL-Typ, der ist konsistent mit X (denn X ist unendlich), dieser wird natürlich von G fixiert. Alle anderen Typen haben unbeschränkte G-Bahn.

$a \in X$ heißt Γ-*generisch* über A, wenn $stp_\Gamma(a/A)$ generisch ist.

2.12 **Lemma** Es sind äquivalent:

(1) a ist generisch über A.

(2) $\forall g \in G : a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} g \Rightarrow g \cdot a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} g$.

(3) $\forall g \in G : a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} g \Rightarrow g \cdot a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma} Ag$.

Beweis
(1) nach (3): $g \cdot stp_\Gamma(a/A) = g \cdot stp_\Gamma(a/Ag) = stp(g \cdot a/Ag)$, das ist ein Translat des generischen Typs $stp_\Gamma(a/A)$, also frei über *emptyset*

(2) nach (1): es sei $g \in G$ und $a' \models stp_\Gamma(a/A)$, so daß $a' \equiv_A a$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} g$, dann $g \cdot stp_\Gamma(a/A) = stp(g \cdot a'/Ag)$. Wegen $a' \equiv_A a$ gilt (2) auch für a', also $g \cdot a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} g$, also ist $g \cdot stp_\Gamma(a/A)$ frei über A. Es folgt, daß $stp_\Gamma(a/A)$ generisch über A ist, also generisch. □

Die Eigenschaft (3) hängt also nur vom $\Gamma(X)$-Typ von a über A ab.

Zusammenhängende Räume

Eine $\Gamma(X)$-Partition ist eine typdefinierbare Äquivalenzrelation auf X, deren Klassen $\Gamma(X)$-Klassen sind. Eine solche heißt *generisch*, wenn jede ihrer Klassen generisch ist. Ist E eine generische $\Gamma(X)$-Partition auf X, so gibt es in jeder E-Klasse einen generischen $\Gamma(X)$-Typ. E hat also beschränkt viele Klassen.

2.13 **Definition** (G, X) heißt $\Gamma(X)$-zusammenhängend, wenn es keine (nichttriviale) generische $\Gamma(X)$-Partition gibt.

Mit den bisherigen Ergebnissen sieht man leicht:

2.14 **Bemerkung** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) (G, X) ist $\Gamma(X)$-zusammenhängend.

(2) Es gibt einen starken $\Gamma(X)$-Typ, der von G fixiert wird.

(3) Es gibt nur einen globalen generischen $\Gamma(X)$-Typ.

(4) Für jede $\Gamma(X)$-definierbare Klasse $\mathcal{D}$, die fast über $\emptyset$ ist, gilt: $\mathcal{D}$ ist genau dann generisch, wenn $G \backslash \mathcal{D}$ nicht generisch ist.

(5) Es gibt keine (nichttriviale) fast $\emptyset$-definierbare generische $\Gamma(X)$-Partition auf G mit nur endlich vielen Klassen.

Ist (G, X) zusammenhängend, so sei $gen_\Gamma(X)$ der generische Γ-Typ, er ist dann schon invariant über $\emptyset$.

Beispiel: ist $a \in X$ und $\tilde{p} = stp_{\Gamma(X)}(a)$ generisch in (G, X), so hat $S := Stab(\tilde{p})$ beschränkten Index in G und es gibt ein $g \in G$, so daß $\tilde{p}$ konsistent ist mit $Y := g \cdot S \cdot a$. Ich betrachte nun den Raum (S, Y) (über Parametern a, g). Da $\tilde{p}$ von S fixiert wird, ist (S, Y) $\Gamma(Y)$-zusammenhängend.

B.2.3 Gruppen

Ich möchte nun die Gruppe G selber betrachten. Ist also (G, X) die linksreguläre Operation (G, G), so operiert G sowohl von rechts als auch von links auf den $\Gamma(G)$-Formeln – die $\Gamma(G)$-Instanzen haben ja die Gestalt $\varphi(g \cdot y \cdot h, c)$. G operiert also auch durch Konjugation auf diesen Formeln. Ist $\Gamma(G) = (\Gamma_y, G(x), G(z))$ stabil, so auch $(\Gamma_z, G(x), G(y))$ als auch $(\Gamma_x, G(y), G(z))$. Denn hat etwa $\varphi_x(z \cdot y \cdot x, v)$ die Ordnungseigenschaft wegen der Folgen (g_i) und $(h_j h'_j)$, so hat $\varphi_y(z \cdot y \cdot x, v)$ die Ordnungseigenschaft wegen der Folgen (g_i) und $(1_j, h_j \cdot h'_j)$. Es sei also $\Gamma(G)$ stabil. Jede $(\Gamma_x, G(y), G(z))$-Formel ist auch eine $\Gamma(G)$-Formel $(\varphi(h \cdot g \cdot x) \equiv \varphi((h \cdot g) \cdot x \cdot 1))$. Wir haben nun Links- und Rechtsstabilisatoren sowie links- und rechtsgenerische $\Gamma(G)$-Formeln, je nach dem, von welcher Seite man G operieren läßt.

2.15 **Lemma** (1) Die $\Gamma(G)$-Stabilisatoren (links und rechts) sind relativ $\Gamma(G)$-typdefinierbare Untergruppen von G.

(2) Eine $\Gamma(G)$-Formel ist genau dann linksgenerisch in G, wenn sie rechtsgenerisch in G ist.

Beweis
(1) Wie im Beweis des entsprechenden Resultats für (G, X) sieht man, daß für jedes $\varphi \in \Gamma$ der Links-Stabilisator eines starken $\varphi(G)$-Typs durch Linkstranslate von $(\varphi_z, G(y), G(x))$-Formeln definiert wird. Aber jede solche ist eine $\varphi(G)$-Formel.

(2) Das ist Teil (2) von 2.5. □

2.16 **Lemma** G ist genau dann $\Gamma(G)$-zusammenhängend, wenn es keine echte $\Gamma(G)$-typdefinierbare Untergruppe von beschränktem Index gibt.

Beweis
Wenn es eine solche Gruppe gibt, so ist sie generisch (Kompaktheit), also liefert sie mit ihren Nebenklassen eine echte generische $\Gamma(G)$-Partition. Es sei andererseits $\tilde{p}$ ein generischer $\Gamma(G)$-Typ von G, wenn er nicht der einzige ist, so ist $Stab(\tilde{p})$ eine echte $\Gamma(G)$-typdefinierbare Untergruppe von beschränktem Index. □

Die Zusammenhangskomponente

2.17 **Satz (Baldwin-Saxl)** Es sei $G(x)$ eine typdefinierbare Gruppe und $\varphi(x; y)$ eine stabile Formel, dann gibt es ein $N = N_\varphi$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jeder Menge $\{b_i \mid i \in I\}$, so daß jedes $\varphi(x, b_i)$ eine Untergruppe G_i von G (relativ) definiert, gibt es ein $I_0 \subset I$ mit

$$\text{(i) } |I_0| < N \qquad \text{(ii) } \bigcap_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I_0} G_i$$

Beweis
Angenommen zu jedem m gibt es $b_0, \ldots, b_{m-1}$, so daß für kein $i < m$ $\bigcap_{j \neq i} G_j \subset G_i$. Sei dann etwa $g_i \in \bigcap_{j \neq i} G_j \backslash G_i$, so gilt für $J \subset m$, $i \in m$ und $g_J := \prod_{i \in J} g_i$: $g_J \in G_i \iff i \notin J$, also $\neg\varphi(g_J, b_i) \iff i \in J$. Mit Kompatkheit hat dann $\neg\varphi$ die Unabhängigkeitseigenschaft, das kann jedoch nicht sein, denn $\neg\varphi$ ist stabil. Es gibt also ein $M < \omega$, so daß der Schnitt von jeweils M solchen Untergruppen schon der Schnitt von $M - 1$ von ihnen ist. Das beweist den Satz für endliches I.

Ist nun I beliebig, so wird die partielle Ordnung $\wedge G_I$ der endlichen Schnitte in $\{G_i \,|\, i \in I\}$ uniform definiert durch $\psi(x, \bar{y}) := \bigwedge_{i<M} \varphi(x, y_i)$. Da auch $\psi(x, \bar{y})$ stabil ist, hat diese Formel nicht die starke Ordnungseigenschaft, Ketten in $\wedge G_I$ haben also beschränkte endliche Länge $< N$, dieses N beweist dann den Satz. □

2.18 **Definition** (1) Für $\psi \in (\Gamma_y)^{bc}$ sei $G^0[\psi]$ sei der Schnitt aller durch $\psi(G)$-Instanzen relativ definierbaren Untergruppen von endlichem Index.

(2) Die Γ-Zusammenhangskomponente von G, $G^0(\Gamma)$, ist der Schnitt aller über $\emptyset$ relativ $\Gamma(G)$-definierbaren Normalteiler von endlichem Index.

2.19 **Satz** (1) Für $\psi \in (\Gamma_y)^{bc}$ ist $G^0[\psi]$ ein über $\emptyset$ $\psi(G)$-definierbarer Normalteiler von endlichem Index.

(2) $G^0(\Gamma)$ ist der Schnitt aller relativ $\Gamma(G)$-definierbaren Untergruppen von endlichem Index.

Beweis
(1) Es sei $\psi \in (\Gamma_y)^{bc}$, aus dem vorigen Satz folgt, daß die durch $\psi(G)$-Instanzen (relativ) definierbaren Untergruppen von G die decending chain condition (dcc) erfüllen. Deshalb ist $G^0[\varphi]$ ein endlicher Schnitt von solchen Untergruppen, durch eine $\psi(G)$-Formel relativ definiert und von endlichem Index. Die Familie der durch $\psi(G)$-Instanzen relativ definierbaren Untergruppen von endlichem Index ist invariant unter Automorphismen, das gilt dann auch für den Schnitt, $G^0[\psi]$ ist also $\emptyset$-definierbar. Diese Familie ist auch invariant unter Konjugation mit Elementen von G, deshalb ist $G^0[\psi]$ ein Normalteiler.

(2) Der Schnitt aller relativ $\Gamma(G)$-definierbaren Untergruppen von endlichem Index ist der Schnitt aller $G^0[\psi]$, dieser ist sicher in $G^0(\Gamma)$ enthalten und wegen (1) gilt auch die andere Inklusion. □

2.20 **Lemma** Jeder $\Gamma(G)$-Stabilisator ist in $G^0(\Gamma)$ enthalten.

Beweis
Es sei p ein globaler $\Gamma(G)$-Typ von G und U eine relativ $\Gamma(G)$-definierbare Untergruppe von endlichem Index. Dann gibt es ein $a \in G$, so daß $p \models U \cdot a$. Ist nun $g \cdot p = p$, so gilt auch $p \models g \cdot U \cdot a$, also $p \models U \cdot a \wedge g \cdot U \cdot a$. Also sind $g \cdot U \cdot a$ und $U \cdot a$ miteinander konsistent, dann auch $g \cdot U$ und U, also $g \in U$. □

So erhalten wir eine weitere wichtige Charakterisierung der generischen Typen:

2.21 **Satz** Für einen starken Γ-Typ $\tilde{p}$ von G sind äquivalent:

(1) $\tilde{p}$ ist generisch.

(2) $Stab(\tilde{p}) = G^0(\Gamma)$.

(3) $G^0(\Gamma)$ fixiert $\tilde{p}$.

Beweis
Wegen des letzten Lemmas ist (2) äquivalent zu $Stab(\tilde{p}) \supset G^0(\Gamma)$, also (3). Da $G^0(\Gamma)$ beschränkten Index hat folgt (1) aus (2). Ist schließlich $\tilde{p}$ generisch, so gilt $G^0(\Gamma) \subset Stab(\tilde{p} \restriction \varphi(G))$ für jedes $\varphi \in \Gamma$, denn diese Gruppen sind $\Gamma(G)$ definierbar von endlichem Index – also $G^0(\Gamma) \subset Stab(\tilde{p})$. □

2.22 **Lemma** Die $G^0(\Gamma)$ ist $\Gamma(G^0)$-zusammenhängend.

Beweis
Es sei $\tilde{r}$ ein globaler generischer $\Gamma(G^0)$-Typ von G^0, dann ist jedes $\psi \in \tilde{r}$ auch generisch in G, $\tilde{r}$ also ein generischer $\Gamma(G)$-Typ, aber er ist weder global noch notwendig stationär. Jedoch werden die globalen $\Gamma(G)$-generischen Fortsetzungen von $\tilde{r}$ von G^0 fixiert, also auch $\tilde{r}$. Weil aber G^0 transitiv auf seinen generischen Typen operiert, ist $\tilde{r}$ der einzige. □

Es folgt, daß es keine echte $\Gamma(G^0)$-typdefinierbare Untergruppe von G^0 gibt von beschränktem Index, aber noch nicht, das, was wir eigentlich wollen: daß G^0 nämlich die kleinste $\Gamma(G)$-typdefinierbare Untergruppe von beschränktem Index ist. Man sieht leicht, daß das äquivalent ist zu

(*) es gibt nur einen generischen $\Gamma(G)$-Typ in G^0.

Im Gegensatz zur globalen stabilen Gruppentheorie wissen wir hier nicht, ob eine $\Gamma(G)$-typdefinierbare Untergruppe der Schnitt von relativ $\Gamma(G)$-definierbare Untergruppen ist – dann wäre die Sache ok. (Ich glaube auch nicht, daß das stimmt. Falls G selber durch $\Gamma(G)$-Formeln (oder Instanzen stabiler Formeln) typdefiniert ist, so kann man definierbare Obergruppen konstruieren - jedoch wird im Laufe dieser Konstruktion quantifiziert und wir haben wenig Chance innerhalb der $\Gamma(G)$-Formeln zu bleiben.)

Es reicht für (*) zu zeigen, daß für alle globalen generischen $\Gamma(G)$-Typen p und q gilt: zu jedem $\varphi(y) \in q$ ein $a \in G^0$ gibt, so daß $\varphi(y) \in a \cdot p$. Möglicherweise kann man das zeigen, wenn man $\Gamma(G)$ noch gegen Inversenbildung abschließt – es kann aber gut möglich sein, daß man Symmetrie braucht.