

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 10, Abgabe: 13.07.2012 (ausnahmsweise)

1. Seien $A_n, n \in \mathbb{N}$, rekursiv und $A_n \subseteq \mathbb{N}$. Ist $\bigcup A_n$ stets rekursiv?
2. Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiv und monoton wachsend (d.h. $n < m \rightarrow f(n) < f(m)$).

Ist $f''\mathbb{N}$ rekursiv?

Ist f^{-1} partiell rekursiv?

Ist \hat{f} mit

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} f^{-1}(n), & \text{falls } n \in f''\mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

rekursiv?

3. Es sei T eine axiomatisierbare Theorie. Alle höchstens abzählbaren Modelle von T seien isomorph. Dann ist T entscheidbar.
(Hinweis: Wenn T konsistent ist, so hat T abzählbare Modelle. (Warum?))

4. Ist folgende Aussage wahr?

„Es ist entscheidbar, ob im Laufe der (endlichen oder unendlichen) Berechnung eines Registerprogrammes P , angesetzt auf $(0, 0, \dots)$, in mindestens einem der Register eine Zahl größer gleich n gespeichert ist.“

5. **Bonus** Kann man jede Register-berechenbare Funktion mit nur zwei Registern berechnen?

Wir schreiben

$$\bar{x}0 \xrightarrow{P} h$$

als Abkürzung für: Das Registerprogramm P , angesetzt auf die Registerinhalte $(\bar{x}, 0)$, stoppt nach endlich vielen Schritten. Wir schreiben

$$\bar{x}0 \xrightarrow{P} \bar{y}0$$

als Abkürzung für: Das Registerprogramm P , angesetzt auf die Registerinhalte $(\bar{x}, 0)$, hat nach endlich vielen Schritten eine Konfiguration mit den Registerinhalten $(\bar{y}, 0)$.

Es ist also gefragt: Gibt es zu jedem Registerprogramm P und $n \geq \max\{\text{Reg}(P)\}$ ein Q mit $\text{Reg}(Q) \subseteq \{0, 1\}$, so daß für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{N}^{n+1}$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{x}0 \xrightarrow{P} h \quad \text{gdw} \quad p_0^{x_0} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n} 0 \xrightarrow{Q} h \\ \text{und} \quad \bar{x}0 \xrightarrow{P} \bar{y}0 \quad \text{gdw} \quad p_0^{x_0} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n} 0 \xrightarrow{Q} p_0^{y_0} \cdot \dots \cdot p_n^{y_n} 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist p_i die i -te Primzahl.

(Hinweis: Geben Sie Programme M_k, D_k, T_k für die Befehle „einen Buchstaben streichen“, „... anhängen“, „den letzten Buchstaben lesen und in Abhängigkeit des Gelesenen springen“ für $k \in \mathbb{N}$ an, die nur die Register 0 und 1 verwenden, mit:

$$x0 \xrightarrow{M_k} k \cdot x0; \quad x0 \xrightarrow{D_k} \frac{x}{k}0, \text{ falls } k|x; \quad x0 \xrightarrow{T_k} xa \text{ mit } a := \begin{cases} 1 & \text{falls } k|x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Überlegen Sie sich dann, wie man auch das Hintereinander-Abarbeiten der Befehle von P in einer Registermaschine Q mit nur zwei Registern simulieren kann.)