

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 12, Abgabe: 25.07.2012

Die Abgabe dieser Serie ist freiwillig. Die Bearbeitung ist zum Erlernen des Stoffs nützlich.

1. Zwei Teilmengen A und B von \mathbb{N} heißen *rekursiv trennbar*, wenn es eine rekursive Menge R gibt, die A enthält und zu B disjunkt ist. Zeigen Sie, dass sich disjunkte Π_1^0 -Mengen rekursiv trennen lassen.

Hinweis: Aus Aufgabe 3 auf Blatt 11 folgt der *Reduktionssatz*: X und Y seien rekursiv aufzählbar. Dann gibt es rekursiv aufzählbare $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ mit $X' \cup Y' = X \cup Y$ und $X' \cap Y' = \emptyset$. Wenden Sie den Reduktionssatz auf die Komplemente an.

2. Konstruieren Sie zwei rekursiv aufzählbare Mengen X und Y , für die $X \setminus Y$ und $Y \setminus X$ nicht rekursiv trennbar sind.

Hinweis: $X = \{x : x \in W_{(x)_0}\}$, $Y = \{x : x \in W_{(x)_1}\}$. Wenden Sie den Reduktionssatz auf X und Y an, um zwei disjunkte r.a. Mengen zu finden, die nicht rekursiv trennbar sind.

3. Zeigen Sie Tarskis Satz über die Wahrheitsdefinition für Q^* :

Es gibt keine Formel $\mathscr{W}(x)$, so dass für alle Aussagen φ

$$Q^* \vdash \varphi \iff \mathscr{W}(\Delta_{\Gamma} \varphi).$$

4. Zeigen Sie: Σ_1 -definierbare Relationen sind rekursiv aufzählbar, Σ_1 -definierbare (totale) Funktionen rekursiv.