Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012
Übungsblatt 4, Abgabe: 23.05.2012

1. $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt *Spektrum*, wenn es eine Sprache L und eine L-Formel φ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

   $$n \in M \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ besitzt ein Modell mit einer } n\text{-elementiger Grundmenge.}$$

   Man zeige:

   (a) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist ein Spektrum.
   (b) Die Menge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist ein Spektrum.

   Wer mag, kann sich überlegen, ob die Mengen der

   (c) Quadratzahlen,
   (d) Primzahlpotenzen,
   (e) Zweierpotenzen

   Spektren sind.

   (f) Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, die kein Spektrum ist?
   (g) Ist für ein Spektrum M stets auch $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \setminus M$ ein Spektrum? [Auf die richtige Lösung der letzten Frage erhalten Sie sofort einen Übungsschein]

2. (Der Interpolationssatz der Aussagenlogik) Zu einer aussagenlogischen Formel φ seien $\mathrm{Var}(\varphi)$ die in φ vorkommenden Aussagenvariablen. Es seien φ und ψ aussagenlogische Formeln und es sei $\varphi \to \psi$ allgemeingültig.
   Zeigen Sie: Es gibt eine aussagenlogische Formel χ mit $\mathrm{Var}(\chi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(\psi)$, so daß $\varphi \to \chi$ und $\chi \to \psi$ allgemeingültig sind.

   Überlegen Sie sich hierzu:

   (a) Stimmen zwei Belegungen μ_1 und μ_2 auf den in einer Formel τ vorkommenden Aussagenvariablen überein, so gilt $\mu_1(\tau) = \mathrm{W} \iff \mu_2(\tau) = \mathrm{W}$.
   (b) Es sei
   $$\Phi = \{\varphi_i \mid \varphi \to \varphi_i \text{ ist allgemeingültig}, \mathrm{Var}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(\psi)\}.$$
   Ohne Einschränkung ist Φ endlich, also $\chi := \bigwedge_{\varphi_i \in \Phi} \varphi_i$ eine Formel.
   (c) $\chi \to \psi$ ist allgemeingültig. Hierzu müssen Sie zeigen, daß zu jeder Belegung μ mit $\mu(\chi) = \mathrm{W}$ eine Belegung μ' mit $\mu' \restriction \mathrm{Var}(\psi) = \mu \restriction \mathrm{Var}(\psi)$ und $\mu'(\varphi) = \mathrm{W}$ existiert.

3. Eine L-Formel heißt *atomar*, wenn sie die Form $t_1 \doteq t_2$ oder $Rt_1 \dots t_n$ hat (für L-Terme t_i und $R \in \mathrm{L}$ n-stelliges Relationszeichen). Zwei L-Formeln φ und ψ heißen *logisch äquivalent* (kurz $\varphi \equiv \psi$), wenn $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

   Zeigen Sie:

(a) Zu jeder quantorenfreien L-Formel φ existiert eine logisch äquivalente Formel φ_{DNF} in *disjunktiver Normalform* (DNF), also

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\varphi_{1,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (\varphi_{l,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{l,n_l})$$

und eine logisch äquivalente Formel φ_{KNF} in *konjunktiver Normalform* (KNF), also

$$\varphi_{\text{KNF}} = (\varphi_{1,1} \vee \ldots \vee \varphi_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (\varphi_{l,1} \vee \ldots \vee \varphi_{l,n_l})$$

mit atomaren oder negiert atomaren $\varphi_{i,j}$.

(b) Zu jeder L-Formel φ existiert eine logisch äquivalente Formel φ_{PNF} in *pränexer Normalform*; das heißt:

$$\varphi_{\text{PNF}} = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und ψ quantorenfrei (also ohne Einschränkung in DNF oder KNF) ist.

Üben Sie das Umformen in pränexe Normalform (mit quantorenfreiem Teil in DNF und KNF) anhand der Formel $\neg(\neg\forall x(Rx \vee \exists z fx \doteq z) \vee \forall x(Px \to Pz))$.

4. Eine L-Theorie T heißt *deduktiv abgeschlossen*, wenn für alle L-Aussagen φ aus $\mathrm{T} \vdash \varphi$ schon $\varphi \in \mathrm{T}$ folgt. T heißt *atomar vollständig*, wenn für jede atomare L-Aussage φ entweder $\mathrm{T} \vdash \varphi$ oder $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$ gilt.

   Zeigen Sie: Definiert man wie im Beweis des Vollständigkeitssatzes zu einer konsistenten, deduktiv abgeschlossenen und atomar vollständigen Henkintheorie T^* (die aber nicht vollständig zu sein braucht!) ein Model $\mathfrak{A}^*$, so gilt immer noch

$$\varphi \in \mathrm{T}^* \Rightarrow \mathfrak{A}^* \models \varphi.$$

   Geben Sie ein Beispiel dafür, daß die Bedingung „atomar vollständig" notwendig ist. Gilt auch $\mathfrak{A}^* \models \varphi \Rightarrow \varphi \in \mathrm{T}^*$?
   (Hinweis: Benutzen Sie die pränexe Normalform aus Aufgabe 3.)