Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 5, Abgabe: 06.06.2012

Eine Klasse $\mathscr{K}$ von L-Strukturen heißt *axiomatisierbar*, wenn es eine L-Theorie T gibt, so dass

$$\mathscr{K} = \mathrm{Mod}_L(T) = \{\mathfrak{A} \ \ L\text{-Struktur} : \mathfrak{A} \models T\}.$$

1. Es sei $L = \emptyset$. Zeigen Sie:
   (a) Die Klasse aller unendlichen L-Strukturen ist axiomatisierbar.
   (b) Die Klasse aller endlichen L-Strukturen ist nicht axiomatisierbar. (Hinweis: Kompaktheitssatz)
   (c) Folgern Sie: Die Klasse aller unendlichen L-Strukturen ist nicht endlich axiomatisierbar.

2. Zeigen Sie, dass das Paarmengenaxiom aus dem Potenzmengenaxiom, dem Ersetzungsaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt.

3. Sei $\mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir machen $\mathbb{N}$ zu einer $\{\in\}$-Struktur $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\beta$ durch $i \in^{\mathfrak{N}} j :\Longleftrightarrow i \in \beta(j)$.
   (a) Welche Axiome von ZFC (ohne Fundierung) gelten in $\mathfrak{N}_\beta$?
   (b) Finden Sie jeweils eine Bijektion β, so dass das Fundierungsaxiom in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt.

   Hinweis: Um eine fundierte Struktur zu erhalten, betrachte man die Bijektion β mit

   $$\beta^{-1}(\{n_1, ..., n_k\}) = 2^{n_1} + ... + 2^{n_k}.$$

4. Es sei $\mathfrak{N}_\beta$ wie in der vorigen Aufgabe definiert.
   (a) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.
   (b) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht fundiert ist aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt.

   Hinweis für Teil (b): Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta : \mathbb{Z} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{Z})$, so dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

   $$m \in \beta(n) \implies m < n.$$