Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 6, Abgabe: 13.06.2012

1. Für $\alpha \in \mathrm{On}$, sei V_α die α-te Stufe der von Neumann-Hierarchie. Zeigen Sie: Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ mit $\alpha < \beta$ gilt:
   (a) V_α ist transitiv.
   (b) $V_\alpha \in V_\beta$.
   (c) $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

2. (a) $F \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ heißt *Filter auf* ω falls
      - $\omega \in F$,
      - $\emptyset \notin F$,
      - $\forall x, y \in F (x \cap y \in F)$,
      - $\forall x \in F \forall y \supseteq x y \in F$.

   Ein Filter heißt *frei*, wenn er keine endliche Menge als Element enthält.

   Zeigen Sie, dass die Halbordnung $(\{F : F \text{ ist ein Filter auf } \omega\}, \subseteq)$ induktiv ist.

   Erkennen Sie die maximalen Objekte wieder? Schauen Sie sich den Stone'schen Darstellungssatz noch einmal an.

   (b) Geben Sie eine Halbordnung $(H, <)$, die nicht induktiv ist.

3. Zeigen Sie $\mathrm{ZF} \vdash$ Zorn'sches Lemma $\to$ AC.

4. Wir nehmen an, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Eine *nichtstandard-natürliche Zahl* (kurz: *nn-Zahl*) in einem Modell $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$ ist ein Element $a \in M$, so dass $\mathfrak{M} \models a \in^{\mathfrak{M}} \omega$, aber $\mathfrak{M} \models \neg a \doteq \underline{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie:
   (a) Es gibt ein Modell $\mathfrak{M} \models ZFC$ mit einer nn-Zahl.
   (b) Es gibt in $\mathfrak{M}$ keine kleinste nn-Zahl.
   (c) In V gibt es $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{M} \models a_i \in^{\mathfrak{M}} \omega$ und $\mathfrak{M} \models a_{i+1} \in^{\mathfrak{M}} a_i$.
   (d) Warum ist dies kein Widerspruch zur Gültigkeit des Fundierungsaxioms?

Bemerkung zu Aufgabe 2: 1964 zeigte Halpern, dass ZF zusammen mit der Aussage „Es gibt auf jeder Menge einen freien Ultrafilter" echt schwächer ist als ZFC. Halpern, J. D.: The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem. Fund. Math. 55 (1964), 57–66.