Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 7, Abgabe: 20.06.2012

Die Bonusaufgaben sind freiwillig. Sie erhalten dafür Punkte, die dem Zähler zugerechnet werden, aber nicht dem Nenner, bei unserem Kriterium (Zähler/Nenner) $> \frac{1}{2}$.

1. (a) Welche Axiome von ZFC erfüllt $(V_\omega, \in)$?
   (b) **Bonus:** Welche Axiome von ZFC erfüllt $(V_{\omega_1}, \in)$?

2. Zeigen Sie den Satz über die *Cantor'sche Normalform*: Jede Ordinalzahl läßt sich auf eindeutige Weise schreiben als
$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$
für natürliche Zahlen $n_i > 0$ und Ordinalzahlen $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$. (Die Exponentiation ist hier die ordinale Exponentiation.)

3. Kann man $(\omega_1, <)$ in $(\mathbb{R}, <)$ einbetten?

4. (a) Geben Sie eine $\mathrm{L_{Me}}$-Formel an, die ω definiert.
   (b) Welche Formel definiert die Klasse aller endlichen Mengen? Zeigen Sie, dass es sich um eine echte Klasse handelt.

   In den folgenden **Bonus**aufgaben ist der "ω-Rekursionssatz" genau der Rekursionssatz aus der Vorlesung eingeschränkt auf ω statt On.

   (c) Zeigen Sie: Seien g und h Funktionen wie im ω-Rekursionssatz, die durch $\mathrm{L_{Me}}$-Formeln definiert sind. In jedem Modell $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$ sei $f^{\mathfrak{M}}$ die durch den ω-Rekursionssatz gegebene Funktion. Dann existiert eine $\mathrm{L_{Me}}$-Formel $\varphi(x)$ mit $\mathrm{ZFC} \vdash \exists! x \varphi(x)$ und $\mathfrak{M} \models \varphi[f^{\mathfrak{M}}]$ für beliebige $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$.
   (d) Zeigen Sie: Die Graphen von $+$ und $\cdot$ auf ω sind ohne Parameter definierbar.