

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 8, Abgabe: 27.06.2012

Die Bonusaufgaben sind freiwillig. Sie erhalten dafür Punkte, die dem Zähler zugerechnet werden, aber nicht dem Nenner, bei unserem Kriterium (Zähler/Nenner) $> \frac{1}{2}$.

1. Sei $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, und sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} der Dimension \aleph_3 . Welche Mächtigkeit hat V ?
2. Zeichnen Sie das Flussdiagramm einer Registermaschine mit Alphabet $\{ | \}$, welche $x \cdot y$ berechnet. (Sie dürfen in der Vorlesung konstruierte Maschinen wie z.B. die Kopiermaschine benutzen.)
3. (a) Wir definieren eine Bijektion $\beta : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, indem einer $\{0, 1\}$ -Folge zunächst eine 1 vorangestellt wird und diese neue Folge dann als Binärzahl aufgefasst wird:

$$\epsilon_k \dots \epsilon_0 \xrightarrow{\beta} 2^{k+1} + \epsilon_k 2^k + \dots + \epsilon_0 2^0.$$

Zeigen Sie, dass es Maschinen über dem Alphabet $\{0, 1, | \}$ gibt, welche β und β^{-1} berechnen, wobei eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch n Striche (d.h. als $|^n$) dargestellt wird. (Es ist sinnvoll, die konstruierten Maschinen in kleinere Einheiten zu zerlegen.)

- (b) **Bonusaufgabe.** Nun sei $\sigma \in \{0, 1\}^*$ von der Länge $k = |\sigma|$. Wie viele Rechenschritte braucht die von Ihnen in (a) gegebene Maschine ungefähr zur Berechnung von β ? Gibt es eine Funktion $k \mapsto t(k)$ und eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ so dass die Rechenzeit $r(k)$, d.h. die maximale Anzahl der Schritte, die die Maschine zur Berechnung von β angesetzt auf ein Wort σ der Länge k bei der Berechnung von $\beta(\sigma)$ macht, folgendes erfüllt:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(r(k) \leq c \cdot t(k))?$$

Ist t eine lineare Funktion? Beachten Sie, dass $|\sigma|$ ungefähr nur \log_2 der Zahl ist, die durch σ binär dargestellt wird. Dies ist oft für Komplexitätsberechnungen sehr günstig.

4. Zeigen Sie in ZFC: Falls $\text{ZFC} \vdash \text{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow \phi$, so $\text{ZFC} \vdash \text{Bew}(\ulcorner \neg \phi \urcorner)$. (Hinweis: Benutzen Sie den 2. Gödel'schen Unvollständigkeitssatz für $\text{ZFC}' := \text{ZFC} \cup \{\neg \phi\}$, dessen Gültigkeit angenommen werden darf.)
5. **Bonusaufgabe.** Die Nachfolger-Funktion in binärer Darstellung

Sei $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. $x \in \mathcal{A}^*$ wird als binäre Zahl interpretiert wie folgt:
Das Wort $x = x_0 \dots x_s$ steht für

$$\sum_{i=0}^s x_i 2^{s-i}$$

Geben Sie eine Registermaschine, die aus x die binäre Darstellung von

$$\sum_{i=0}^s x_i 2^{s-i} + 1$$

berechnet.