Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 9, Abgabe: 04.07.2012

1. Sei L die Aussagenlogik mit den Satzvariablen $\{A_0, A_1, \dots\}$. Ist $\{\varphi \ : \models \varphi\}$ rekursiv? Wenn ja, skizzieren Sie ein Verfahren.

2. Ist ZFC entscheidbar?

3. Wir nehmen an, dass ZFC konsistent ist. Hat ZFC eine entscheidbare Vervollständigung T? (T heißt vollständig, genau dann wenn $\forall \varphi \in \mathrm{L}_{\mathrm{Me}}$, $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$ und nicht beide.)

4. Wir definieren eine Nummerierung der primitiv rekursiven Funktionen:
   $\ulcorner S \urcorner = \langle 0 \rangle$,
   $\ulcorner C \urcorner = \langle 1 \rangle$,
   $\ulcorner I_i^n \urcorner = \langle b(n,i) \rangle$, wobei $b : \{(n,i) : n \in \mathbb{N}, 1 \le n, 1 \le i \le n\} \to \{2, 3, \dots\}$ eine primitiv rekursive Bijektion ist. Außerdem sei $\langle\rangle : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ die primitiv rekursive Bijektion aus der Vorlesung.

   R1: Komposition
   $\ulcorner f(g_1, \dots, g_n) \urcorner := \langle 0, \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g_1 \urcorner, \dots, \ulcorner g_n \urcorner \rangle$.

   R2: Primitive Rekursion
   $\ulcorner f \urcorner := \langle 1, \ulcorner g \urcorner, \ulcorner h \urcorner \rangle$.

   Nun definieren wir die Funktion f wie folgt: Für $n \in \omega$ nehmen wir das g, so dass $\ulcorner g \urcorner \ge n$ und $\ulcorner g \urcorner$ minimal unter den Gödelnummern $\ge n$ ist. Dann setzen wir

   $$f(n) := g(n) + 1.$$

   Ist f rekursiv? Ist f primitiv rekursiv?