



## Mengenlehre: Unabhängigkeitsbeweise

Sommersemester 2013

Übungsblatt 7, Abgabe: 11.06.2013, vor der Vorlesung

1. Sei  $\beta$  eine Limesordinalzahl. Zeigen Sie: Es gibt eine stetige streng monotone Funktion

$$f: \text{cf}(\beta) \rightarrow \beta.$$

2. Sei  $I$  eine nicht leere Menge, und für jedes  $i \in I$  seien  $\mu_i < \nu_i$  Kardinalzahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_I \mu_i < \prod_I \nu_i.$$

3. Seien  $\lambda$  eine reguläre unendliche Kardinalzahl und  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl. Gibt es eine Ordinalzahl  $\alpha$  so dass  $\beth_\alpha(\kappa) = \alpha$  und  $\text{cf}(\alpha) = \lambda$ ?

4. Finden Sie für jede der folgenden Aussagen eine möglichst niedrige Stufe der Lévy-Hierarchie, auf der sie steht:

(a) „ $x \in \mathbb{N}$ “

(b) „ $x \in \text{On}$ “

(c) „ $x = H_\omega$ “

Zeigen Sie: „ $x$  ist gleichmächtig zu  $y$ “ ist als  $\Sigma_1$ -Formel ausdrückbar. Später werden wir sehen, dass es keine Formel von geringerer Komplexität gibt, die diesen Sachverhalt ausdrückt.