# Zufällige Graphen und Cliquen

(die Logik der ersten Stufe ist blind für zufällige Veränderungen)

Jörg Flum

# Inhalt

1. Wege in Graphen und in gerichteten Graphen.
2. Zufällige Graphen: Ergebnisse von Glebski et al., von Fagin und von Shelah und Spencer.
3. FO ist blind für zufällige Cliquen.
4. Einige Ideen des Beweises.
5. Beziehung des Ergebnis zur planted clique conjecture.

# Wege in Graphen und in gerichteten Graphen.

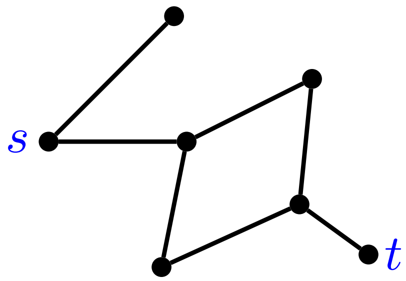
Graph $G = (V(G), E(G))$

$V(G)$ Punkte, $E(G)$ Kanten

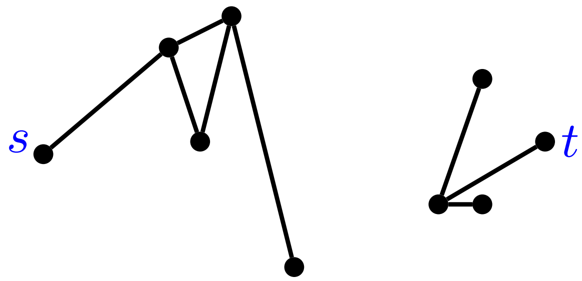
gerichteter Gaph $G = (V(G), E(G))$

$E(G)$ gerichtete Kanten

$G_1$

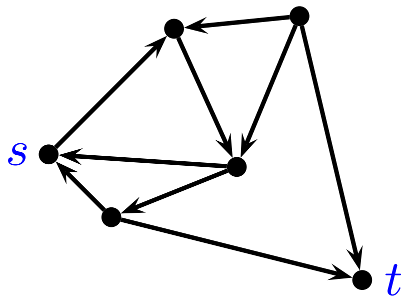



$G_2$

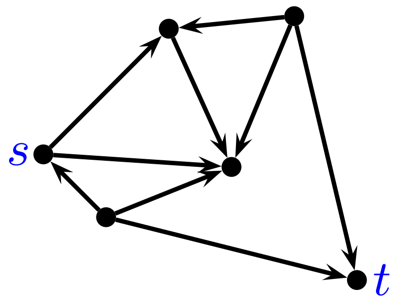



Graphen $G_1$ und $G_2$: Gibt es einen Weg von $s$ nach $t$?

$G_3$




$G_4$




Gerichtete Graphen $G_3$ und $G_4$: Gibt es einen Weg von $s$ nach $t$?

Graph $G$, $s, t \in V(G)$, $s \neq t$ (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) Es gibt einen Weg von $s$ nach $t$

(ii) Es gibt eine Menge $A$ von Punkten mit

- $s \in A$, $t \in A$,
- $s$ und $t$ haben beide genau einen Nachbarn in $A$,
- alle anderen Punkte in $A$ haben genau zwei Nachbarn in $A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

es gibt einen Weg von $s$ nach $t$ in $G$ $\iff$ $G \models \exists X \varphi[s, t]$

monadische $\Sigma^1_1$ Formel:

$$\exists X_1 \ldots \exists X_r \psi \quad \text{mit einstelligen } X_1, \ldots, X_r \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}$$

THEOREM(Ajtai, Fagin 1990). Es gibt keine monadische $\Sigma^1_1$ Formel, die in allen gerichteten Graphen ausdrückt, dass es einen Weg von $s$ nach $t$ gibt.

THEOREM(Ajtai, Fagin 1990). Es gibt keine monadische $\Sigma_1^1$ Formel, die in allen gerichteten Graphen ausdrückt, dass es einen Weg von $s$ nach $t$ gibt.

BEWEISIDEE

$$\exists X_1 \ldots \exists X_r \psi(y, z) \quad \text{monadische } \Sigma_1^1 \text{ Formel}$$

Für hinreichend großes $n$ geben wir zufällige gerichtete Graphen $G$ und $G'$ an mit $V(G) = V(G') = \{1, \ldots, n\}$ und:

(1) es gibt einen Weg von $1$ nach $n$ in $G$, aber nicht in $G'$;

(2) mit hoher W.: $G \models \exists X_1 \ldots \exists X_r \psi[1, n] \iff G' \models \exists X_1 \ldots \exists X_r \psi[1, n]$.

gerichtete Kanten von $G$: $(i, i+1)$ (mit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$) und für ein geeignetes $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$ und jedes $1 \leq i < j \leq n$ ist $(j, i)$ mit W. $p$ eine gerichtete Kante (backedge);

gerichtete Kanten von $G'$: die von $G$ bis auf die gerichtete Kante $(i, i+1)$, wobei $i$ zufällig gewählt wird.

Ajtai und Fagin beweisen (2) mit Hilfe der Ehrenfeucht-Fraïssé Methode.

| | |
|---|---|
| *Input:* | Ein Graph $G$ und $s, t \in V(G)$. |
| *Frage:* | Gibt es einen Weg von $s$ nach $t$ in $G$? |

ist mit Hilfe eines Algorithmus lösbar, der Platz $O(\log |V(G)|)$ benötigt (Reingold, 2008). D.h. das Problem liegt in der Klasse L.

| | |
|---|---|
| *Input:* | Ein gerichteter Graph $G$ und $s, t \in V(G)$. |
| *Frage:* | Gibt es einen Weg von $s$ nach $t$ in $G$? |

ist vollständig für die Klasse NL, die Klasse der Probleme die lösbar sind durch einen nichtdeterministischen Algorithmus, der logarithmischen Platz benötigt.

## Zufällige Graphen: Ergebnisse von Glebski, Fagin, Shelah,...

Sei $G$ ein Graph und $A \subseteq V(G)$.

$A$ ist eine Clique (ist eine $|A|$-Clique) in $G$, wenn

$$\forall a, b \in A, a \neq b : \quad \{a, b\} \in E(G).$$

$n \geq 1$, $0 < p < 1$, Erdős-Rényi W.-Raum $\mathrm{ER}(n, p)$: Graphen $G$ mit

$$V(G) = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \forall i, j \in [n], i \neq j : \quad \{i, j\} \in E(G) \text{ mit W. } p.$$

Bemerkung. Für $0 < p < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p)} [G \text{ enthält eine } k\text{-Clique}] = 1$$

**Bemerkung.** Für $0 < p < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p)} [G \text{ enthält eine } k\text{-Clique}] = 1$$

Insbesondere: Sind $0 < p, q < 1$ und $k \in \mathbb{N}$, so

$$\lim_{n,\ell \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p), H \in \mathrm{ER}(\ell,q)} [G \text{ enthält eine } k\text{-Clique} \iff H \text{ enthält eine } k\text{-Clique}] = 1.$$

**Theorem** (Glebski et al. 1969, Fagin 1976). Seien $0 < p, q < 1$ und $\varphi$ ein FO-Satz. Dann

$$\lim_{n,\ell \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p), H \in \mathrm{ER}(\ell,q)} [G \models \varphi \iff H \models \varphi] = 1.$$

Für $p = q$ folgt

$$\lim_{n \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p)} [G \models \varphi] \text{ existiert und } \lim_{n \to \infty} \Pr_{G \in \mathrm{ER}(n,p)} [G \models \varphi] \in \{0, 1\}.$$

0–1 Gesetz

$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in \mathrm{ER}(n,p)}[G \models \varphi] \in \{0,1\}$. (0–1 Gesetz) Bis jetzt: $0 < p < 1$,

nun $p = p(n) = n^{-\alpha(n)}$ mit $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in \mathrm{ER}(n,n^{-\alpha(n)})}[G \models \varphi] =?$

$$\alpha(n) := \frac{1}{\log n} \qquad \text{(dann } p(n) = n^{-\alpha(n)} = 1/2\text{)}.$$

Korollar. $\alpha(n) := \frac{1}{\log n}$. Für alle FO-Sätze $\varphi$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in \mathrm{ER}(n,n^{-\alpha(n)})}[G \models \varphi] \in \{0,1\}.$$

Theorem. $\alpha :=$ (die Konstante) $2/3$, also $p(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in \mathrm{ER}(n,n^{-\alpha})}[G \models \text{“existiert eine 4-clique”}] = 1 - e^{-1/24} = 1 - \frac{1}{\sqrt[24]{e}}.$$

Theorem (Shelah, Spencer). Sei $\alpha$ eine konstante irrationale Zahl. Dann gilt für alle FO-Sätze $\varphi$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in \mathrm{ER}(n,n^{-\alpha})}[G \models \varphi] \in \{0,1\}.$$

# FO IST BLIND FÜR ZUFÄLLIGE CLIQUEN

Für $G \in \mathrm{ER}(n, 1/2)$, ist die W., dass $G$ eine $k$-Clique enthält beschränkt durch $\binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{k}{2}}$.

BEMERKUNG. a) Der Erwartungswert für die Größe einer maximalen Clique in $G \in \mathrm{ER}(n, 1/2)$ ist $\approx 2 \cdot \log n$.

b) $\lim_{n\to\infty} \Pr_{G\in\mathrm{ER}(n,1/2)} \left[G \text{ enthält keine } (4 \cdot \log n)\text{-Clique}\right] = 1$.

W.-Raum $\mathrm{ER}(n, 1/2, k)$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$: Wir starten mit

$G \in \mathrm{ER}(n, 1/2)$ und ein zufällig gewähltes $A \subseteq [n]$ $(= V(G))$ mit $|A| = k$.

Wir erhalten $G + K(A) \in \mathrm{ER}(n, 1/2, k)$, indem wir zu $E(G)$ genau die Kanten hinzufügen, die $A$ zu einer Clique machen („wir pflanzen in $G$ die Clique $A$").

$G + K(A) \in \mathrm{ER}(n, 1/2, k)$: $G \in \mathrm{ER}(n, 1/2)$ und $A \subseteq [n]$ mit $|A| = k$.

Im Folgenden deuten wir $G \in \mathrm{ER}(n, 1/2)$ und $G + K(A) \in \mathrm{ER}(n, 1/2, k)$ als geordnete Graphen mit der natürlichen Ordnung auf $[n]$.

THEOREM (Chen, F. 2014). Für alle FO-Sätze $\varphi$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,\ 4\log n)} \left[ G \models \varphi \iff G+K(A) \models \varphi \right] = 1$$

THEOREM. Für alle FO-Sätze $\varphi$, $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$ und alle $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k(n) \leq n^{\xi}$ mit $0 \leq \xi < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{(G,A)\in \mathrm{ER}(n,n^{-\alpha(n)},\ k(n))} \left[ G \models \varphi \iff G+K(A) \models \varphi \right] = 1.$$

$$\alpha(n) = \frac{1}{\log n}, \qquad k(n) = 4 \cdot \log n.$$

Die Konklusion ist auch richtig, wenn wir endlich viele built-in Relationen zu $G$ und zu $G+K(A)$ hinzufügen.

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^s$ eine $s$-stellige Relation in $\mathbb{N}$. Die vorangehende Konklusion ist richtig mit der built-in Relation $R$, falls sie ihre Gültigkeit behält, wenn wir den geordneten Graphen $G$ und $G+K(A)$ die von $R$ auf $[n]$ induzierte Relation $R \restriction [n]^s$ hinzufügen.

# Einige Ideen des Beweises.

$$\varphi := \forall x\,\exists y \overbrace{\underbrace{\forall z\,\overbrace{(Exy \vee \neg z < x \vee Eyz)}^{\rho(x,y,z)}}_{\chi(x,y)}}^{\psi(x)}$$

Geordnete Graphen $G$ mit $V(G) = [n]$ $\qquad$ $n \mapsto$ Schaltkreis $C_n(\varphi)$ mit

Inputknoten $x_{\{i,j\}}$, wobei $\{i,j\} \in \binom{[n]}{2} := \{\{i,j\} \mid i,j \in [n],\ i \neq j\}$

$\varphi \mapsto (C_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n(\varphi)$ Höhe 4, Größe (# Knoten) $1 + n + n^2 + n^3 + \binom{n}{2} \preceq n^4$

Geordnete Graphen $G$ mit $V(G) = [n]$ entsprechen Bewertungen von $C_n(\varphi)$:

Wert des Inputknoten $x_{\{i,j\}}$ ist $1 \iff \{i,j\} \in E(G)$.

Menge der Bewert. von $C_n(\varphi) = \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} =$ Menge der geord. $G$ mit $V(G) = [n]$

Dann $C_n(\varphi) : \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} \to \{0,1\}$

$$G \models \varphi \iff C_n(\varphi)(G) = 1.$$

Eine Familie $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $C_n : \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} \to \{0,1\}$ ist $\mathrm{AC}^0$, wenn existieren $a, t \in \mathbb{N}$:
für alle $n$: $C_n$ hat Höhe $\leq a$ und Größe $\preceq n^t$.

Für alle FO-Sätze $\varphi$: $(C_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine $\mathrm{AC}^0$-Familie.

Beispiel. Für die Schaltkreisfamilie $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$C_n := \bigvee_{A\in\binom{[n]}{4\cdot\log n}} \bigwedge_{\{i,j\}\in\binom{A}{2}} x_{\{i,j\}}.$$

und jeden geordneten Graphen $G$ mit $V(G) = [n]$:

$$G \text{ enthält eine } (4\cdot\log n)\text{-Clique} \iff C_n(G) = 1.$$

Somit

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in\mathrm{ER}(n,1/2,\ 4\cdot\log n)} \Big[C_n(G) = C_n(G+K(A))\Big] = 0.$$

$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Höhe 2 und die Größe $\geq n^{\log n}$; somit ist sie nicht $\mathrm{AC}^0$.

Theorem(Chen, F.). Für alle $\mathrm{AC}^0$-Familien $\left(C_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $C_n : \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} \to \{0,1\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,\ 4\cdot\log n)} \Big[C_n(G) = C_n(G+K(A))\Big] = 1.$$

Für alle FO-Sätze $\varphi$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,\ 4\log n)} \Big[G \models \varphi \iff G+K(A) \models \varphi\Big] = 1$$

Beame, Rossman

Rossman zeigt mit der probabilistischen Methode (via Schaltkreisen), dass in geordneten Graphen zur Symbolisierung in FO von

es gibt eine $k$-Clique

mindestens $k/4$ Variable benötigt werden.

$$\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J}\beta_{ij} \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \bigvee_{g:I\to J}\bigwedge_{i\in \underbrace{I}_{J'}}\beta_{ig(i)}$$

Wenn $|I|=n$, so $|J'|=n$.

$$\begin{array}{rlcrl}
(x\vee u) & \wedge & z=1,\quad v=0 & (x\vee u) & \wedge \\
(\neg y\vee\neg v) & \wedge & & 1 & \\
(\neg x\vee y) & \wedge & & (\neg x\vee y) & \wedge \\
(x\vee z) & \wedge & & 1 & \wedge \\
(y\vee u) & & & (y\vee u) &
\end{array}$$

Die Formel auf der rechten Seite ist äquivalent zu:

$$(x\wedge y)\vee(\neg x\wedge u) \qquad (\text{also, } |J'|=2).$$

Håstad's Switching Lemma.

THEOREM. Für jeden FO-Satz $\varphi$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,4\log n)} \Big[G \models \varphi \iff G+K(A) \models \varphi\Big] = 1.$$

KOROLLAR. Für $m \geq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,4\log n)} \Big[G \equiv_{\mathrm{FO}_m} G+K(A)\Big] = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,4\log n)} \Big[G \equiv_{\mathrm{LFP}_m} G+K(A)\Big] = 1? \quad \geq 1/2? \qquad \text{FALSCH!}$$

VERMUTUNG. (LPCC) Es existiert $q \in \mathbb{N}[X]$, so dass für alle $m$ und hinreichend großes $n$:

$$\Pr_{G+K(A)\in \mathrm{ER}(n,1/2,4\log n)} \Big[G \equiv_{\mathrm{LFP}_m} G+K(A)\Big] \geq 1/q(n).$$