Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Anwesenheitsaufgaben, Übungsstunde in der Woche vom 29.10.2012 – 2.11.2012

Clubs und stationäre Mengen

1. Wie sehen die Clubs in ω aus?

2. Gibt es zwei disjunkte Clubs in ω?

3. Sei C eine club Menge in κ, $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$. Ist dann $A(C) := \mathrm{acc}(C) \cap C = \{\alpha \in C : \sup(C \cap \alpha) = \alpha\}$ club? Ist $A(C) = C$ möglich? Dies geht schon zu einer Hausaufgabe (Blatt 1, Nr. 3) über: Wie oft kann man die Bildung $C \mapsto \mathrm{acc}(C) \cap C$ iterieren (mit Durchschnitten in den Limesschritten), bis zur Stabilisierung $A^{(\alpha)}(C) = A^{(\alpha+1)}(C)$? Wie sieht die stabile Menge aus?

4. Denken Sie an Beispiele:

   $\aleph_{\alpha+\omega_1}$ ist eine singuläre Kardinalzahl von überabzählbarer Konfinalität.

   Endsegmente sind sehr einfache club-Mengen.

   Was passiert mit der Konfinalität bei stetigen, wachsenden Funktionen $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathrm{On}$ Mengen? Können Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{cf}(\alpha)$ und $\mathrm{cf}(f(\alpha))$ finden?

   Eine „verrückte" Halbordnung: Sei $(P, \leq_P)$ die Menge $\omega \times \omega$ mit der komponentenweisen Ordnung. Malen Sie diese als Quadrat. Wie sehen die konfinalen Teilmengen aus? Ist $\mathrm{tcf}(P)$ definiert?

5. Wir betrachten κ mit $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$. Geben Sie eine möglichst kleine Familie $\{C_i : i \in I\}$, so dass

   (a) alle C_i club in κ sind,
   (b) und $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$.

   Eine Familie heißt möglichst klein, wenn $|I|$ möglichst klein ist. Können Sie zeigen, welches die optimale Größe von $|I|$ ist?

6. Gibt es auch in ω_1 eine stationäre nicht club Menge? Kann man eine angeben? Dies müssen Sie nicht selbst konstruieren, es ist nämlich nicht ganz kurz. Die Konstruktion heißt Satz von Solovay und braucht AC.

Kardinalzahlen

1. Gegeben μ, κ_0, gibt es $\kappa \geq \kappa_0$ so dass $\forall \alpha < \kappa$, $\alpha^\mu < \kappa$?

2. Sind Nachfolgerkardinalzahlen regulär?

3. **(*)** Gibt es reguläre Limeskardinalzahlen? Vorsicht: Denken Sie daran, dass ZFC nicht alles beantwortet. Wenn Sie in der Mengenlehre im Sommer 2011 waren, können Sie sich an $V = L$ erinnern und dies als Testfall heranziehen.

4. Gibt es $\{(\alpha, r_\alpha) : \alpha \in \aleph_1\}$, so dass

   (a) für $\alpha \in \aleph_1$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$,
   (b) und die r_α paarweise verschieden sind?

   Versuchen Sie eine Antwort in ZFC.

   Dies ist wieder eine Sternchenfrage: Geht es auch in ZF?

   Wie ist es, wenn man nur (a) oder nur (b) fordert? Geht es dann in ZF?