Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 1, Abgabe: 31.10.2012, vor der Vorlesung

1. (a) Gibt es beliebig große singuläre Kardinalzahlen?
   (Technisch: Gegeben κ, gibt es $\lambda \geq \kappa$, so dass λ singulär ist?)

   (b) Gibt es beliebig große Kardinalzahlen mit Konfinalität ω?

2. Sei κ_0 eine beliebige unendliche Kardinalzahl. Gibt es $\kappa \geq \kappa_0$, so dass $\aleph_\kappa = \kappa$?
   Hinweis: Probieren Sie eine Iteration:

   - κ_0 ist wie oben.
   - Für $n \in \omega$ sei $\kappa_{n+1} := \aleph_{\kappa_n}$, falls $\aleph_{\kappa_n} > \kappa_n$. Falls dies nicht der Fall ist, brechen wir ab und sind fertig.
   - Falls alle κ_n definiert sind, setzen wir $\kappa_\omega := \sup \kappa_n$. Ist dann κ_ω ein Fixpunkt? Woran liegt das?

   Ohne Bewertung: Überlegen Sie sich, welche der Ihnen bekannten Operationen $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ stetig sind und welche nicht. F heißt stetig, wenn für alle Limites λ, $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) \ : \ \alpha < \lambda\}$.

3. Gegeben eine Menge X, für jedes $\theta \in \mathrm{On}$ definiere $A^{(\theta)}(X)$ durch:

   - $A^{(0)}(X) := X$
   - $A^{(1)}(X) = A(X) := \mathrm{acc}(X) \cap X$
   - $A^{(\theta+1)}(X) := A(A^{(\theta)}(X)$
   - $A^{(\lambda)}(X) := \bigcap_{\theta<\lambda}(A^{(\theta)}(X)$ für λ Limeszahl.

   Finden Sie ein Ordinalzahl α, so dass $A^{(5)}(\alpha) = \emptyset$ aber $A^{(i)}(\alpha) \neq \emptyset$ für $i = 0, 1, ..., 4$.
   (Erinnerung: Falls $\alpha \in \mathrm{On}$, ist $\alpha = \{\xi \in \mathrm{On} : \xi < \alpha\}$)

4. Sei $c_i := \{\aleph_2 + j : j < i\}$ für $i \in \mathrm{On}$. Gibt es ein Menge $X \subseteq \mathrm{On}$, so dass $\mathrm{drop}(X, c_i)$ für möglichst viele i verschieden ist? Dieses "möglichst viele" hängt von X ab.