Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 2, Abgabe: 07.11.2012, vor der Vorlesung

Zum „Selbermachen": Anleitung zum schrittweisen Beweis einer einfachen Version des Satzes von Solovay:

Satz (Solovay (1971))**.** *Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Dann lässt sich κ in κ (viele) disjunkte stationäre Mengen zerlegen.*

Sei $S = \{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$.

1. Zeigen Sie, dass S stationär in κ ist.
2. Beweisen Sie mit AC: Zu jedem $\alpha \in S$ es gibt eine aufsteigende Folge $\langle \delta_i^\alpha : i \in \omega \rangle$, die gegen α konvergiert, und es gibt die Funktion
$$\big\langle \langle \delta_i^\alpha : i \in \omega \rangle : \alpha \in S \big\rangle.$$

Falls $\alpha \in S$ und $\beta < \alpha$, definieren wir die Färbung $C(\beta, \alpha) := \min\{n \in \omega : \delta_n^\alpha > \beta\}$.
Wir halten β fest und lassen α laufen.

3. Gibt es ein stationäre Menge $R_\beta \subseteq S \setminus (\beta+1)$ und eine Farbe n_β, so dass $\forall \gamma \in R_\beta$, $C(\beta, \gamma) = n_\beta$?

Seien $\beta \in \kappa$ und R_β und n_β wie oben. Wir definieren $f_\beta \colon R_\beta \to \kappa$ durch $f_\beta(\alpha) = \delta^\alpha_{n_\beta}$.

4. Gibt es eine stationäre Menge $S_\beta \subseteq R_\beta$ und ein δ^β, so dass $\forall \alpha \in S_\beta$, $f_\beta(\alpha) = \delta^\beta$?

Nun lassen wir β laufen.

5. Gibt es eine konfinale Menge $I \subseteq \kappa$, so dass $\forall i, j \in I$ gilt: Falls $i < j$, so $\delta^{\beta_i} < \beta_j$?
6. Gibt es ein $n \in \omega$ und $J \subseteq I$ mit den folgenden Eigenschaften?
   - J ist konfinal in κ, und
   - $\forall i < j \in J$, $\delta^{\beta_i} < \beta_j$, und
   - $\forall j \in J$, $n_{\beta_j} = n$.
7. Falls n_β wie in 3. gewählt ist, f_β wie zwischen 3. und 4. definiert ist, S_β wie in 4. gewählt ist, I wie in 5. gewählt ist und J die Eigenschaften unter 6. hat, ist dann $S_{\beta_i} \cap S_{\beta_j} = \emptyset$ für alle $i \neq j \in J$?

Freiwillig:

(I) Ideen zur Verallgemeinerung des obigen Beweisweges:

   (a) Falls $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, funktioniert der Beweis mit $\mathrm{cf}(\kappa)$ vielen disjunkten stationären Mengen.

   (b) In der Definition von S kann man statt ω jede reguläre Kardinalzahl $\omega \leq \mu < \mathrm{cf}(\kappa)$ nehmen.

(c) Etwas schwieriger: Man kann jede in κ stationäre Menge in $\mathrm{cf}(\kappa)$ viele disjunkte stationäre Mengen zerlegen. Falls κ eine Limeskardinalzahl ist und kein S^κ_μ stationär in S ist, muss man die Folgen in Schritt 2 von unterschiedlicher Länge nehmen. Statt des Schubfachprinzips wendet man dann nochmals das Lemma von Fodor an.

(II) Andere Beweiswege: Mit über ZFC hinausgehenden Voraussetzungen.

Beispiel: $\diamondsuit_{\omega_1}(S)$ wird für stationäres S definiert und sagt: Es gibt eine Karo-Folge für S. $\langle D_\beta : \beta \in S\rangle$ ist eine Karo-Folge für S, wenn gilt:

$$\text{Für jedes } X \subseteq \omega_1 \text{ ist } \{\alpha \in S : X \cap \alpha = D_\alpha\} \text{ stationär.}$$

Durch Forcing oder durch Betrachtung von inneren Modellen zeigt man: Wenn ZFC konsistent ist, so auch ZFC zusammen mit $\diamondsuit_{\omega_1}(S)$.

Überlegen Sie sich:
Unter $\diamondsuit_{\omega_1}(S)$ gibt es $\aleph_2$ stationäre Teilmengen von S, so dass der Schnitt von je zwei verschiedenen nur abzählbar groß ist. Man nimmt ein System $\{a_\alpha : \alpha < \aleph_2\}$ von fast disjunkten Teilmengen von $\aleph_1$ und eine Karofolge $\langle D_\beta : \beta \in S\rangle$. Dann ist $S_\alpha = \{\beta \in S : D_\beta = a_\alpha \cap \beta\}$ $\alpha \in \aleph_2$, wie gewünscht.