Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 4, Abgabe: 21.11.2012, vor der Vorlesung

1. Das „oder" im Lemma, das wir mit „ein Teil der Shelah Trichotomie" benannt haben, ist kein ausschließliches oder. Wir betrachten ein Beispiel:

   Wir definieren $A := \{\aleph_k : k \in \omega \setminus \{0, 1\}\}$. Für $\aleph_k \in A$ ist $S_{\aleph_k} := \{\aleph_{\omega \cdot k + i} : i \in \omega\}$. Dann nehmen wir $f_n \in \prod_{k \in \omega \setminus \{\emptyset\}} S_{\aleph_k}$ wie folgt:

   $$f_n(\aleph_k) := \aleph_{\omega \cdot k + k + n}.$$

   (a) Wir nehmen $I = \{\emptyset\}$. Hat $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$ eine kleinste obere Schranke in $(\mathrm{On}^\omega, <_I)$?

   (b) Wie sieht es für maximale Ideale auf A aus?

2. **Def:** Ein lub f/I von $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$heißt eub (genaue obere Schranke, exact upper bound) genau dann, wenn $\forall g(g/I <_I f/I \implies \exists \alpha \in \lambda(g/I \leq_I f_\alpha/I))$.

   (a) Sei g/I eub von $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$, und $J \supseteq I$. Ist g/J eub von $\langle f_\alpha/J : \alpha < \lambda\rangle$?

   (b) Falls D ein Ultrafilter ist, ist jedes lub von $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ schon eub.

   (c) Hat die Folge $\langle f_n : n \in \omega\rangle$ von Aufgabe 1 ein eub in $\mathrm{On}^\omega / \{\emptyset\}$?

3. Sei $I = \{a \subseteq \omega : a \text{ endlich}\}$. Wir betrachten eine Folge $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$, so dass $f_n/I \in \omega^\omega/I$, und $f_n/I <_I f_{n+1}/I$.

   (a) Gibt es eine obere Schranke?

   (b) Geben Sie ein Beispiel, das eine obere Schranke aber keine kleinste obere Schranke (lub) hat.

   (c) Geben Sie ein möglichst schwaches hinreichendes Kriterium dafür, dass $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$ keine kleinste obere Schranke hat.
   Ist das von Ihnen gegebene Kriterium auch notwendig?

   (d) (*Freiwillig) Wir lassen nun I über die Ideale auf ω und J über die Ideale auf A laufen. Zeigen Sie eine möglichst starke Verwandtschaft zwischen dem Raum $\prod_{a \in A} S_a/J$ aus Aufgabe 1 und ω^ω/I. Gibt es bei geeigneter Wahl von I und J einen Isomorphismus? Solche Abbildungen werden „Rudin-Keisler-Projektionen" genannt. In dem Spezialfall der Aufgabe kann man mit injektiven Projektionen arbeiten.