Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 7, Abgabe: 12.12.2012, vor der Vorlesung

Ein Beispiel für eine künstliche obere Schranke: Sei $S_n = \omega$ für alle $n \in \omega$, und für $k \in \omega$ sei $f_k \in \prod_{n\in\omega} S_n$ die konstante Funktion $f_k(l) := k$ für $l \in \omega$. Sei $I := \{\emptyset\}$.

1. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n\in\omega} S_n/I$?

Wir setzen $b_r := \{0, \dots, r\}$ für $r \in \omega$.

2. Ist $\langle f_k \upharpoonright b_r : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n\in b_r} S_n/I$?

Definition: Eine Menge F erzeugt ein Ideal I, g.d.w

$$I = \{a : \exists n \in \omega \exists f_1, \dots, f_n \in F (a \subseteq \bigcup f_i)\}.$$

Wir schreiben dafür $I = \mathscr{I}(F)$. Überlegen Sie sich, dass I tatsächlich ein Ideal ist.

3. Sei $J := \mathscr{I}(\{b_r : r \in \omega\})$. Ist $J = \mathrm{FIN} := \{a \subseteq \omega : |a| < \omega\}$?
4. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n\in\omega} S_n/J$?
5. Sei $J' \supseteq J$ ein weiteres Ideal. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n\in\omega} S_n/J'$?
6. Für jedes $i \in \omega$ sei $a_i \subseteq \omega$, a_i unendlich, so dass $a_i \supseteq a_j$ falls $i < j$. Gibt es unendliches $a \subseteq \omega_1$, so dass $\forall i \in \omega$, $a \subseteq_{\mathrm{FIN}} a_i$? (Wie in der Vorlesung schreiben wir $a \subseteq_{\mathrm{FIN}} b$ g.d.w. $(a \setminus b) \in \mathrm{FIN}$).
7. Gibt es ein Ideal auf ω_1, das nicht durch eine aufsteigende Folge erzeugt wird?
8. Ein lustiges Ideal auf $2^{<\omega}$: Für $s \in 2^\omega$, sei $b_s := \{t \in 2^{<\omega} : t \subseteq s\}$. Definieren wir ein Ideal $I := \mathscr{I}(\{b_s : s \in 2^\omega\})$. Ist I durch eine aufsteigende Folge erzeugt?