Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 8, Abgabe: 19.12.2012, vor der Vorlesung

Sei a eine Menge regulärer Kardinalzahlen, und sei $|a|^+ < \min(a)$.

1. Sei λ eine Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\lambda = \max\big(\mathrm{pcf}(a)\big)$
   (b) $\lambda = \mathrm{tcf}\left(\prod a/J_{<\lambda}(a)\right)$
   (c) $\lambda = \mathrm{cf}\left(\prod a/J_{<\lambda}(a)\right)$

Sei $F \subseteq \mathscr{P}(a)$ ein Filter. Wir definieren

$$\mathrm{pcf}_F(a) = \left\{ \mathrm{cf}\left(\prod a/D\right) : D \text{ ist ein Ultrafilter über } a, F \subseteq D\right\}$$

2. Hat $\mathrm{pcf}_F(a)$ ein Maximum?
3. Wir hatten $\max\big(\mathrm{pcf}(a)\big) = \mathrm{cf}\big(\prod a/\{\emptyset\}\big)$. Gibt es eine analoge Gleichung für $\max\big(\mathrm{pcf}_F(a)\big)$?

Durch die Gleichungen $\chi_N = \max\{f_{\varrho i}^{\lambda_i} : i \leq n\}$ zeigen wir im Beweis des Satzes „$\max(\mathrm{pcf}(a)) = |\prod a|$", dass es wenige χ_N gibt. Das folgende Beispiel soll in einer einfachen Situation zeigen, dass das punktweise Maximum eine Funktion mit großen Werten sein kann:

4. Sei $\mathrm{id} : \omega \to \omega$, $\mathrm{id}(n) := n$.
   (a) Zeigen Sie:
   $$(\forall g : \omega \to \omega)(\exists f_0, f_1 : \omega \to \omega)\big(\mathrm{id} \not\leq^* f_i \ \wedge\ \max(f_0, f_1) \geq g\big)$$
   (b) Zeigen Sie weiter, dass man die beiden f_i's monoton wachsend wählen kann.