Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 11, Abgabe: 23.01.2013, vor der Vorlesung

Sei $I = \mathscr{I}(\mathrm{FIN} \cup \{b_n : n \in \omega\}) \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ein echtes Ideal auf ω.

1. Zeigen Sie: $\exists x \subseteq \omega (x \notin I \wedge \omega \setminus x \notin I) \implies I$ ist nicht maximal.
2. Es gibt so ein x. (Es folgt, dass I nicht maximal ist.)
   Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Bijektion $f : \omega \to \omega \times \omega$.
3. Verallgemeinern Sie 2 zu:
   Sei U ein freier Ultrafilter auf κ, $\kappa > \omega$ regulär. Dann hat U keine Basis der Größe $\leq \kappa$.
   ($B \subseteq U$ heißt Basis, g.d.w $\forall x \in U \exists y \in B y \subseteq x$.)

Sei $a = \{\aleph_n : n > 1\}$, und sei $\mathrm{pcf}(a) = a \cup \{\aleph_{\omega+k} : 1 \leq k \leq n\}$ für ein $n \in \omega \setminus \{0\}$. (Dies ist konsistent relativ zu ZFC). Sei $\mathrm{FIN}_a = \{x \subseteq a \,:\, x \text{ endlich}\}$.

4. $\mathrm{FIN}_a \subseteq J_{<\aleph_{\omega+1}}(a)$.
5. $J_{<\aleph_{\omega+n}}(a)$ ist ein echtes Ideal aber kein maximales echtes Ideal.
   Hinweis: $a \cong \omega$.