Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 12, Abgabe: 30.01.2013, vor der Vorlesung

Wir definieren für ein Ideal $I \subseteq \mathscr{P}(a)$
$I^+ := \{x \subseteq a : x \notin I\}$, die Menge der I-positiven Mengen, und
$I^* := \{x \subseteq a : a \setminus x \in I\}$, den zu I dualen Filter.
Sei für $\lambda \in b$ $I_\lambda \subseteq \mathscr{P}(a)$ ein Ideal auf a. Sei I_{λ^*} ein Ideal auf b.
Wir definieren im Beweis des „Lemmas über $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(a)) = \mathrm{pcf}(a)$" das Ideal:

$$I = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \notin I_\lambda\} \in I_{\lambda^*}\}.$$

Sind die folgende Mengen auch Ideale?

1. $\check{I} = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \in I_\lambda\} \in I^*_{\lambda^*}\}$.

2. $\hat{I} = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \in I_\lambda\} \in I^+_{\lambda^*}\}$.
   Hinweis: Wir empfehlen, ein Beispiel zu betrachten. Sei
   - $a = \omega \times \omega$,
   - $b = \omega$,
   - $I_n = \{x \subseteq \omega \times \omega : x_n \in \mathrm{FIN}\}$, wobei $x_n := \{m \in \omega : (n, m) \in x\}$,
   - $I_{\lambda^*} = \mathrm{FIN}$.

3. Sei:
   - $2^{|a|} < \min a$,
   - $b = \mathrm{pcf}(a)$,
   - $\lambda \in \mathrm{pcf}(b)$, mit Zeugen D_λ und einer aufsteigenden konfinalen Folge $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$,
   - $\forall \beta \in b (= \mathrm{pcf}(a))$ sei D_β ein Ultrafilter auf a und sei $\langle f^\beta_\alpha : \alpha \in \beta \rangle$ aufsteigend und $<_{D_\beta}$-konfinal,
   - für alle $\delta \in \lambda$, $\alpha \in a$, $h_\delta(\alpha) := \sup\{f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) : \beta \in b\}$.

   Nun wollen wir zeigen: $\langle h_\delta : \delta \in \lambda \rangle$ ist konfinal in $<_D$ mit

   $$D = \{x \subseteq a : \{\beta \in b : x \in D_\beta\} \in D_\lambda\},$$

   und $\langle h_\delta : \delta \in \lambda \rangle$ kann zu einer $<_D$-aufsteigenden Folge ausgedünnt werden.
   Sei nun $f \in \prod a$ gegeben. Zunächst nehmen wir für jedes $\beta \in b$ ein δ_β, so dass

   $$f \leq_{D_\beta} f^\beta_{\delta_\beta},$$

   also

   $$A_\beta := \{\alpha \in a : f(\alpha) \leq f^\beta_{\delta_\beta}(\alpha)\} \in D_\beta. \tag{1}$$

Dann nehmen wir β_0, so dass

$$\langle \delta_\beta \,:\, \beta \in b \rangle \leq_{D_\lambda} g_{\beta_0},$$

also für $\beta_1 > \beta_0$,

$$B = \{\beta \in b \,:\, \delta_\beta \leq g_{\beta_1}(\beta)\} \in D_\lambda. \tag{2}$$

Zeigen Sie: Nun ist für $\beta_1 \geq \beta_0$,

$$A = \{\alpha \in a \,:\, f(\alpha) \leq h_{\beta_1}(\alpha)\} \in D.$$

Hinweis: Setzen Sie Gleichung (1) und Gleichung (2) zusammen.