Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 13, Abgabe: 06.02.2013, vor der Vorlesung

Definition: Für Ultrafilter U and V auf ω definieren wir $U \otimes V$ als

$$\Big\{X \subseteq \omega \times \omega : \big\{m \in \omega \ : \ \{n \in \omega \ : \ (m, n) \in X\} \in V\big\} \in U\Big\}.$$

Die Projektionen π_i für $i = 1, 2$ sind gegeben durch $\pi_i \colon \omega \times \omega \to \omega$, $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$.
Zeigen Sie

1. $U \otimes V$ ist ein Ultrafilter auf $\omega \times \omega$.
2. $\{\pi_1{}''X \ : \ X \in U \otimes V\} = U$.
3. $\{\pi_2{}''X \ : \ X \in U \otimes V\} = V$.
4. Seien nun U und V freie Ultrafilter. Es gibt $A_n \in U \otimes V$, $n \in \omega$, so dass es kein $A \in U \otimes V$ gibt, so dass für alle n die Differenz $A \setminus A_n$ endlich ist. (Solch ein A hieße ein *Pseudoschnitt* der Folge $\langle A_n \ : \ n \in \omega\rangle$. Falls alle abzählbaren Folgen im Ultrafilter Pseudoschnitte im Ultrafilter haben, nennt man den Ultrafilter *P-Punkt*, P von proche - nah). Hinweis: Versuchen Sie es mit $A_n = [n, \omega) \times \omega$.
5. Freiwillig. (Puritz 1972) Seien weiterhin U und V frei. $U \otimes V$ wird erzeugt von (d.h., ist die Menge der Obermengen von endlichen Schnitten aus)

$$\big\{A \times \omega \ : \ A \in U\big\} \cup \big\{\{(m, n) : m < f(n)\} \ : \ f \colon \omega \to \omega \text{ ist nicht beschränkt auf einer Menge in } V\big\}$$

Christian Puritz, Skies, constellations, monads, in: W.A.J. Luxemburg, A. Robinson (Eds.), Contributions to Non-Standard Analysis, in: Stud. Logic Found. Math., vol. 69, North-Holland, 1972, pp. 215—243.

Weitere Fragen (auf die man zumindest teilweise Antworten kennt): Gegeben U, V, wieviele Ultrafilter auf $\omega \times \omega$ gibt es, deren Projektionen gerade U und V sind? Wann gibt es nur einen solchen Ultrafilter?

Eine neuere Arbeit hierzu:
Andreas Blass, Homogeneous sets from several ultrafilters, Topology and its Applications 156 (2009) pp. 2581–2594,

und eine Arbeit aus den Anfängen der Untersuchungen spezieller Ultrafilter:
Maryvonne Daguenet, Rapport entre l'ensemble des ultrafiltres admettant un ultrafiltre donné pour image et l'ensemble des images de cet ultrafiltre, Comment. Math. Univ. Carolin. 16 (1975) pp. 99–113.